Teorija grafova - dodatna tema u nastavi matematike

Vahtarić, Maja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Maja Vahtarić

TEORIJA GRAFOVA - DODATNA TEMA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Renata Vlahović Kruc

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici dr. sc. Renati Vlahović Kruc na podršci, savjetima i pruženoj pomoći tijekom izrade ovog diplomskog rada.
Hvala mom Robiju na ljubavi i podršci, strpljenju i potpori.
Hvala mojim prijateljima na svakoj pomoći i utješnoj riječi.
Hvala mojoj obitelji na podršci u svim dobrim i lošim trenucima tijekom studija.
Hvala mojim cimericima s kojima sam najviše dijelila stres, sreću i tugu u kolokvijskim tjednima.
Hvala svima što ste vjerovali u mene.

Sadržaj

Uvod

Teorija grafova je grana diskretne matematike koja proučava matematičke objekte - grafove. Grafovi se sastoje od skupova vrhova i bridova koji ih povezuju, a prikazujemo ih obično točkama i linijama u ravnini. Teorija grafova je kao matematička disciplina primjenjiva u mnogim svakodnevnim problemima pa je kao takvu želimo približiti učenicima svih uzrasta. Ovaj diplomski rad se fokusira na neke od ključnih problema iz teorije grafova.

Diplomski rad podijeljen je na četiri poglavlja. U prvom poglavlju prikazani su osnovni pojmovi iz teorije grafova, uključujući definicije, njihova svojstva i primjere. Prvo poglavlje će također omogućiti osnovno razumijevanje potrebno za preostala poglavlja.

U drugom poglavlju fokus je na poznatom problemu mostova u Königsbergu, to jest, možemo li obići grad Königsberg tako da svaki od njegovih sedam mostova prijeđemo točno jednom, a da se na kraju vratimo na početak. Ovaj problem datira iz 18. stoljeća i predstavlja prvi veliki izazov u proučavanju grafova. Rješenje tog problema ponudio je Leonhard Euler te time utemeljio teoriju grafova. Nakon kratkog povijesnog pregleda, dane su definicije i teoremi vezani uz Eulerove i skoro-Eulerove grafove te njihovi dokazi. Na kraju, ponuđene su ideje za provođenje učeničkih aktivnosti u dodatnoj nastavi matematike, prikladne za učenike raznih dobi.

U trećem poglavlju pobliže je predstavljen tzv. problem rukovanja, rezultat koji je kroz pokušaje rješavanja problema mostova dokazao Euklid. Također je dan primjer aktivnosti za provođenje u dodatnoj nastavi matematike.

Četvrto poglavlje bavi se teoremom o četiri boje, koji je jedan od najpoznatijih rezultata u teoriji grafova. Ovaj teorem tvrdi da je moguće obojiti svaku (zemljopisnu) mapu s najviše četiri boje, pri čemu nikoje dvije susjedne regije nisu obojane istom bojom. Također se podrazumijeva da dvije regije koje se dodiruju samo u točki ne dijele granicu i stoga mogu biti obojane istom bojom. Ovaj teorem je bio predmet velike pažnje i mnogih rasprava, sve do konačnog dokaza 1976. godine. Bio je to prvi veći teorem dokazan uz pomoć računala te ga čovjek još uvijek ne može provjeriti. Kako je dokaz samog teorema kompliciran, ovdje ga ne dokazujemo. Kao i u prethodnom poglavlju, ponuđene su neke ideje za provedbu aktivnosti u dodatnoj nastavi matematike.

Cilj ovog diplomskog rada je pružiti kratki pregled teorije grafova, počevši od osnovnih definicija i primjera, preko rješavanja poznatih problema kao što su problem mostova u Königsbergu, problem rukovanja i problem o četiri boje. Također, dane su neke istraživačke aktivnosti kroz koje učenici sami otkrivaju navedene probleme kao i njihova rješenja.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi iz teorije grafova

Navedimo na početku osnovne pojmove iz teorije grafova potrebne za razumijevanje ovog rada.

Definicija 1.1. ***Graf*** *G je uređeni par skupova $G = (V(G), E(G))$, gdje je $V = V(G)$ neprazan konačan skup* ***vrhova*** *(ili* ***čvorova****), a $E = E(G)$ je konačan skup 2-podskupova od V koje zovemo* ***bridovima****.*

Skup vrhova i skup bridova dobili su oznake po engleskim riječima *vertix* i *edge*. Grafove često prikazujemo grafički u ravnini tako da vrhove prikazujemo točkama, a bridove dužinama ili krivuljama koje spajaju te točke.

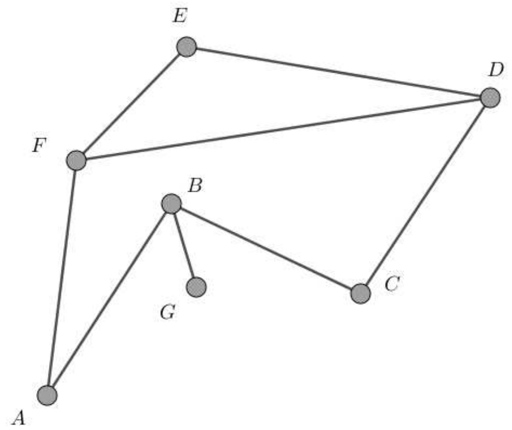
Primjer 1.2. *Na slici 1.1 prikazan je primjer tipičnog grafa G.*
Skupovi $V(G)$ i $E(G)$ za graf G su:
$V(G) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ *i*
$E(G) = \{AB, BG, BC, CD, DE, DF, EF, FA\}$.

Definiciju grafa možemo proširiti tako da uključimo **petlje** (bridove koji spajaju vrh sa samim sobom), **višestruke bridove** (između para vrhova nalazi se više bridova) i **usmjerene bridove** (bridovi koji su orijentirani). Usmjerene bridove reprezentiramo uređenim parovima, a ne 2-podskupovima. Kod višestrukih bridova skup E postaje multiskup.

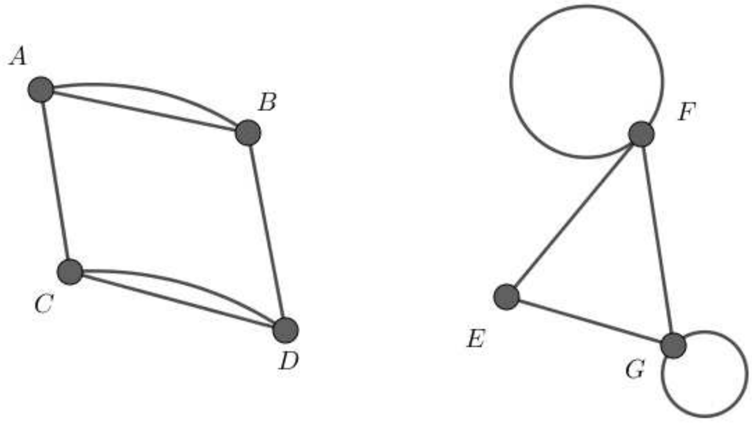
Primjer 1.3. *Na slici 1.2 nalazi se primjer grafa koji sadrži višestruke bridove (lijevo) i primjer grafa koji sadrži petlje (desno). Kod prvog grafa vrhovi A i B te C i D povezani su dvama bridovima, a drugi graf sadrži petlje u vrhovima F i G.*

Definicija 1.4. *Graf je* ***jednostavan*** *ako nema ni petlji ni višestrukih bridova.*

Primjer 1.5. *Uočimo da graf G sa slike 1.1 nema ni petlji ni višestrukih bridova pa je stoga dani graf jednostavan.*



Slika 1.1: Primjer tipičnog grafa



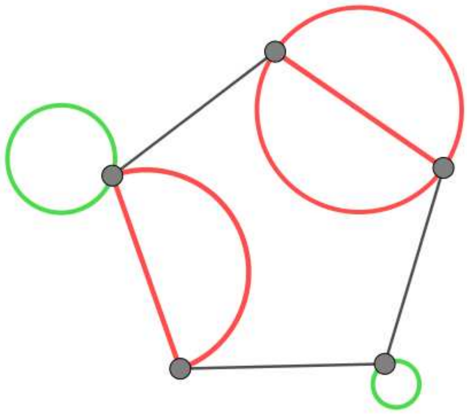
Slika 1.2: Primjer grafova koji sadrže višestruke bridove i petlje

Definicija 1.6. *Graf koji ima višestruke bridove zovemo **multigraf**.*

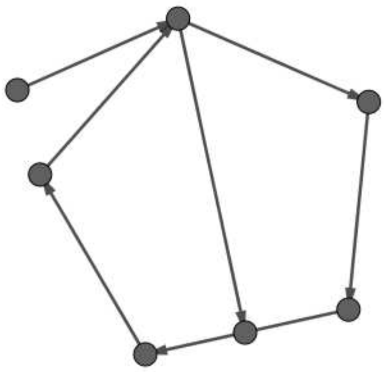
Primjer 1.7. *Na slici 1.3 prikazan je multigraf s višestrukim rubovima označenim crvenom bojom i petljama označenim zelenom bojom.*

Definicija 1.8. *Graf koji ima usmjerene bridove zovemo **usmjereni graf** ili **digraf**. Svakom njegovom bridu pridružen je redom njegov početni i krajnji vrh. Taj smjer u crtanju označavamo strelicama.*

Primjer 1.9. *Na slici 1.4 dan je primjer usmjerenog grafa.*



Slika 1.3: Multigraf



Slika 1.4: Primjer usmjerenog grafa

Ponekad koristimo izraz *jednostavan graf* kako bismo naglasili da ne govorimo o digrafu ili multigrafu.

Iz grafičkog prikaza možemo doći do formalnog zapisa grafa oblika $G = (V, E)$. Ako su zadani vrhovi grafa G te ako znamo koji su vrhovi međusobno povezani, onda smatramo da je graf zadan. Dakle, graf možemo promatrati kao binarnu relaciju susjedstva na skupu vrhova.

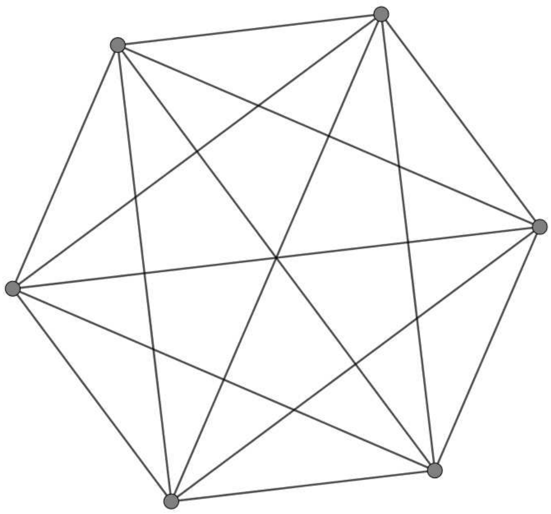
Definicija 1.10. *Vrhovi $u, v \in V$ su* ***susjedni*** *ukoliko postoji brid koji ih spaja, tj. ukoliko postoji $e = \{u, v\} \in E$. Bridovi su* ***susjedni*** *ako imaju zajednički vrh. Brid $e = \{u, v\}$ skraćeno se zapisuje kao $e = uv$. Kažemo da je vrh u* ***incidentan*** *s bridom e. Vrh v je* *također* ***incidentan*** *s bridom e.*

Također za bridove kojima je barem jedan vrh zajednički kažemo da su incidentni.

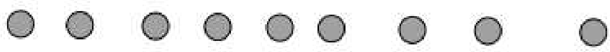
Definicija 1.11. ***Potpun graf*** *je graf u kojemu je svaki par vrhova brid, tj. kod kojeg su svaka dva vrha susjedna. Potpun graf s n vrhova označava se s* K_n.

Definicija 1.12. ***Nul-graf*** *je graf koji nema bridova. Nul-graf s n vrhova označava se s* N_n.

Primjer 1.13. *Prikaz potpunog grafa* K_6 *nalazi se na slici 1.5,a prikaz nul-grafa* N_9 *na slici 1.6.*



Slika 1.5: Graf K_6



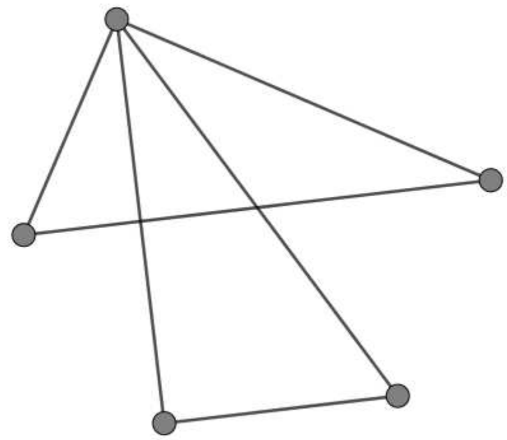
Slika 1.6: Graf N_9

Definicija 1.14. ***Stupanj vrha*** *v grafa G definiramo kao broj bridova koji su incidentni s v, a označavamo s* $deg(v)$. *Za vrh stupnja* 0 *kažemo da je* ***izolirani vrh****, a za vrh stupnja* 1 *kažemo da je* ***krajnji vrh****.*

Primjer 1.15. *Graf G na slici 1.1 nema izoliranih vrhova, vrh G je krajnji vrh jer je* $deg(G) = 1$*, a za ostale vrhove vrijedi*
$deg(A) = deg(E) = deg(C) = 2$ *te*
$deg(B) = deg(D) = deg(F) = 3$*. Svi vrhovi grafa* N_9 *sa slike 1.6 su izolirani.*

Definicija 1.16. ***Podgraf*** *grafa* $G = (V, E)$ *je graf kojemu su skup vrhova i skup bridova podskupovi od V i E redom.*

Primjer 1.17. *Podgraf grafa* K_6 *sa slike 1.5 nalazi se na slici 1.7.*



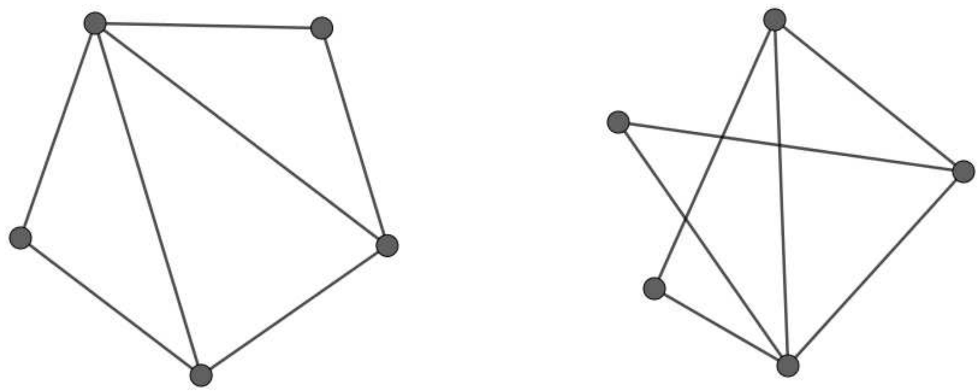
Slika 1.7: Podgraf grafa K_6 sa slike 1.5

Jasno je da jedan graf možemo prikazati grafički na više načina. Dakle, trebamo definirati kada ćemo dva grafa smatrati istima, tj.izomorfnima.

Definicija 1.18. *Kažemo da su dva grafa* G_1 *i* G_2 ***izomorfna*** *ako je moguće označiti vrhove oba grafa na isti način: za svaki označeni par* u, v *vrhova, broj bridova koji spajaju u i v u* G_1 *jednak broju bridova koji spajaju u i v u* G_2*. Formalno: Kažemo da su dva grafa* $G_1 = (V_1, E_1)$ *i* $G_2 = (V_2, E_2)$ *izomorfna ako postoje bijekcije* $\theta : V_1 \to V_2$, $\phi : E_1 \to E_2$ *takve da je vrh v incidentan s bridom e u* G_1 *ako i samo ako je vrh* $\theta(v)$ *incidentan s bridom* $\phi(e)$ *u* G_2*.*

Primjer 1.19. *Primjer dvaju izomorfnih grafova nalazi se na slici 1.8.*

Slijede definicije nekih načina "kretanja" po grafu.



Slika 1.8: Izomorfni grafovi

Definicija 1.20. ***Šetnja*** *od* v_0 *do* v_n *u grafu G je niz* $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n)$*, gdje je* e_i *brid* $\{v_{i-1}, v_i\}$*, za* $i = 1, 2, ..., n$*. Duljina šetnje je broj bridova u nizu. Ukoliko je* $v_0 = v_n$ *kažemo da je šetnja* ***zatvorena****.*

Primjer 1.21. *Promotrimo graf sa slike 1.1. Neke moguće šetnje su:* $A \to B \to C \to D \to F \to E$ *i* $G \to B \to A \to F \to D$*.*

Definicija 1.22. ***Staza*** *je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti.*

Definicija 1.23. ***Put*** *je šetnja u kojoj su svi vrhovi različiti (osim eventualno prvog i zadnjeg). Put možemo označavati kao* $v_1 \to v_2 \to ... \to v_n$*. Zatvoreni put zovemo* ***ciklus****.*

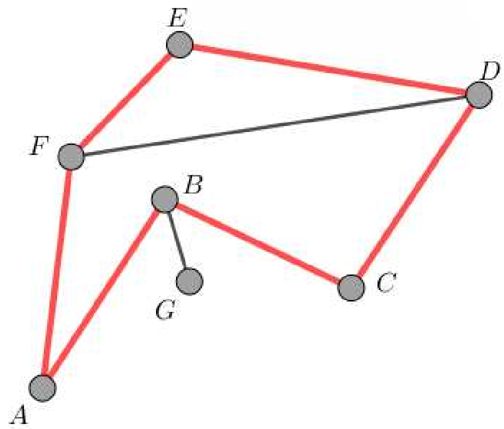
Primjer 1.24. *Na slici 1.9 označen je jedan mogući ciklus u grafu sa slike 1.1.*

Definicija 1.25. *Kažemo da je graf G* **povezan** *ako i samo ako postoji put između svaka dva vrha.*

Primjer 1.26. *Primjeri povezanih grafova nalaze se na slikama 1.1, 1.3 i 1.5.*

Graf predočavamo tako da točke predstavljaju vrhove grafa, a dužine (ili krivulje) bridove grafa. Često nam je za predočavanje grafa potreban i uvjet da se bridovi grafa G sijeku samo u vrhovima. Crtež grafa G koji zadovoljava te uvjete nazivamo **smještanje grafa** G u prostor. Vrijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.27. *Svaki graf se može* ***uložiti*** *u* $\mathbb{R}^3$*.*



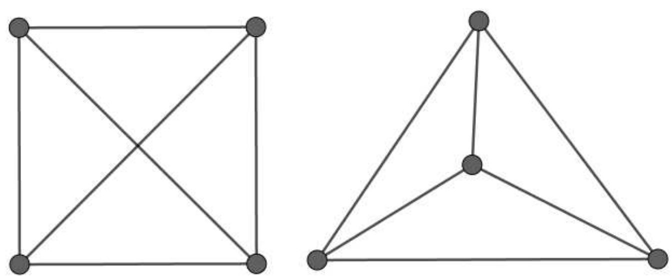
Slika 1.9: Ciklus u grafu sa slike 1.1

Isto ne vrijedi za ravninu $\mathbb{R}^2$. Na primjer, graf K_6 sa slike 1.5 ne može se uložiti u ravninu $\mathbb{R}^2$.

Definicija 1.28. *Graf koji možemo smjestiti u ravninu tako da se bridovi sijeku samo u vrhovima zovemo* ***planarnim*** *grafom. Takvu realizaciju zovemo ravninskim smještanjem grafa. Graf koji je već tako smješten u ravnini nazivamo* ***ravninskim*** *grafom.*

Planarni grafovi dijele ravninu na više konačnih zatvorenih područja i jedno beskonačno područje.

Primjer 1.29. *Na slici 1.10 prikazan je planaran graf K_4. Grafovi koji su na slici su izomorfni: na prvom grafu bridovi se sijeku, a na drugom grafu se bridovi ne sijeku. Uočimo da iz drugog prikaza grafa možemo zaključiti da je K_4 planaran. Uočimo da graf K_4 ima 4 područja od kojih su tri konačna zatvorena i jedno beskonačno.*



Slika 1.10: Graf K_4

Poglavlje 2

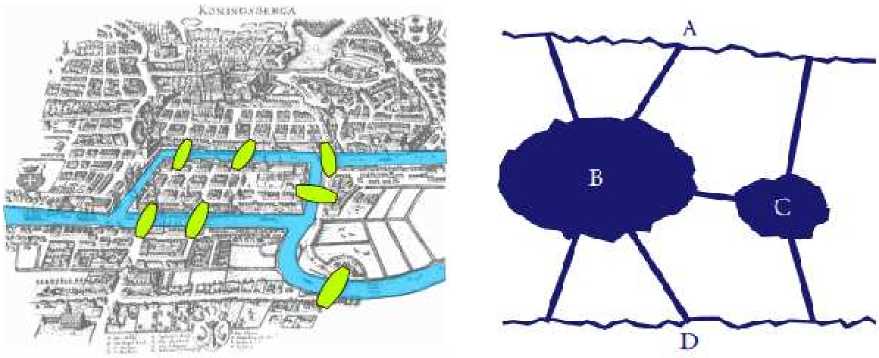
Königsberški mostovi

2.1 Povijesni kutak

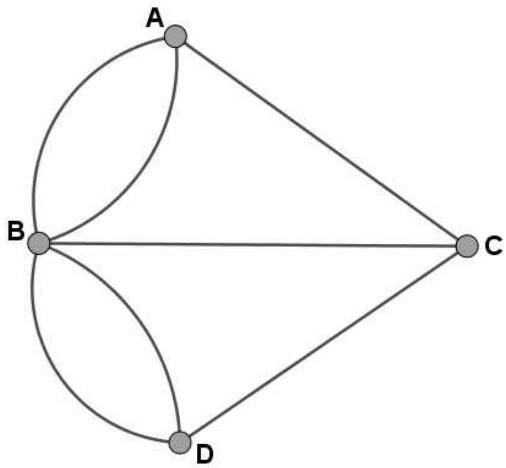
Leonhard Euler bio je jedan od najvećih i najvažnijih matematičara 18. stoljeća. Rođen je 15. travnja 1707. godine u Baselu, a njegovo zanimanje za matematiku potaknuo je njegov otac koji je tijekom studija slušao predavanja još jednog znamenitog matematičara Jacoba Bernoullija. Iako je Euler najprije studirao teologiju, kasnije je upisao i završio studij matematike u Baselu. Tijekom života zbog zdrastvenih problema u potpunosti je izgubio vid, ali je i dalje ostvarivao značajne matematičke rezultate. Umro je 18. rujna 1783. godine. Njegovih matematičkih doprinosa bilo je toliko puno da je Akademija znanosti u St. Petersburgu još gotovo pedeset godina nakon njegove smrti objavljivala njegove neobjavljene matematičke radove.

Njegove doprinose možemo pronaći u gotovo svim matematičkim disiciplinama pa tako i u teoriji grafova, poddisciplini topologije i jednoj od najpopularnijih grana moderne matematike. Smatramo ga utemeljiteljem teorije grafova jer je ponudio rješenje jednog od tadašnjih popularnih problema tzv. *problema mostova u gradu Königsbergu*. Königsberg (današnji Kalinjingrad) se nalazi u blizini Baltičkog mora, a bio je glavni grad Prusije. Izgrađen je s obje strane rijeke Pregel i na dva riječna otoka. Njegovi mostovi povezuju obje strane rijeke i riječne otoke. Stanovnike grada Königsberga zanimao je odgovor na sljedeće pitanje: ”Možemo li obići grad Königsberg tako da svaki od njegovih 7 mostova prijeđemo točno jednom, a da se na kraju vratimo na početak?” Vizualizacija spomenutog problema nalazi se na slici 2.1.

Euler je 1735. godine zaključio da rješenje ovog problema ovisi o povezanosti grafa (zbog čega ga i nazivamo ocem topologije) te da dani problem zapravo nema rješenje. Pod nazivom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* je 1736. godine objavio svoja razmatranja te dao negativan odgovor na gore postavljeno pitanje. Iz njegovog rada bilo je jasno da se radi o nekoj ”novoj” geometriji koja dotad nije bila proučavana. Tu geometriju



Slika 2.1: Königsberški mostovi [preuzeto redom iz [3] i [9]]



Slika 2.2: Grafički prikaz Königsberških mostova

danas nazivamo geometrija položaja (*geometria situs*).

Euler je dijelove Königsberga zamišljao kao točke (vrhovi grafa), a mostove kao linije koje ih povezuju (bridovi grafa). Grafički prikaz situacije nalazi se na slici 2.2. Takvim shematskim prikazom zapravo je uočio da se problem svodi na traženje zatvorene staze koja svakim bridom prolazi točno jednom.

U sljedećem potpoglavlju bit će prikazani Eulerovi rezultati kroz definicije i teoreme.

2.2 Eulerovi grafovi

Definicija 2.1. *Za stazu kažemo da je* ***Eulerova*** *ako prolazi svim bridovima grafa. Zatvorenu Eulerovu stazu nazivamo* ***Eulerov ciklus****. Graf je* ***Eulerov*** *ako je povezan i ima Eulerov ciklus.*

Eulerovi grafovi prirodno se promatraju na multigrafovima (multigraf se pojavljuje i kod problema Königsberških mostova). Da bismo dokazali Eulerov teorem, potrebno je dokazati sljedeću lemu.

Lema 2.2. *Ako je svaki vrh grafa G stupnja najmanje dva, onda graf G sadrži Eulerov ciklus.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da graf G nema petlji. Neka je $v \in V(G)$. Induktivno konstruiramo šetnju $v_0 \to v_1 \to ... \to v_n$ na sljedeći način: kao susjeda od v_0 odaberemo vrh v_1 te kao susjeda za svaki vrh v_i odaberemo vrh v_{i+1}, za svaki $i = 0, 1, ..., n$, $v_i \neq v_{i-1}$. Konstrukcija je moguća jer je stupanj svakog vrha grafa G najmanje dva. Šetnju zaustavimo kada ponovno odaberemo vrh v_0. Takvom konstrukcijom dobivamo traženi ciklus. □

Dokažimo sada Eulerov teorem.

Teorem 2.3. ***(Eulerov teorem)*** *Povezan graf G je Eulerov ako i samo ako je svaki njegov vrh parnog stupnja.*

Dokaz. Pretpostavimo da je povezan graf G Eulerov. Tada graf G sadrži Eulerov ciklus C. Po definiciji su svi bridovi u tom ciklusu različiti. Svaki put kad Eulerov ciklus uđe u vrh v grafa G, on iz njega mora i izaći. Stoga zatvorena staza pridonosi stupnju tog vrha s dvije incidencije. Kako po definiciji ciklus C sadrži sve bridove grafa G slijedi da je stupanj svakog vrha sigurno višekratnik broja 2, to jest paran broj. Time je ovaj smjer dokazan.
Dokažimo sada i drugi smjer ove tvrdnje. Pretpostavimo da povezan graf G ima sve vrhove parnog stupnja. Dokaz provodimo indukcijom po broju m bridova grafa. Pretpostavimo najprije da je $m = 0$ ili $m = 1$. Tada graf G ima jedan izoliran vrh ili vrh koji sadrži petlju pa tvrdnja očigledno vrijedi. Time smo dokazali bazu indukcije. Neka je $m \geq 2$. Uz pretpostavku da je graf G povezan i da su mu svi vrhovi parnog stupnja, slijedi da je stupanj svakog vrha najmanje 2. Sada prema lemi 2.2 slijedi da graf G sadrži ciklus C. Ako ciklus C sadrži svaki brid grafa G, tvrdnja je dokazana. Ako ciklus C ne sadrži svaki brid grafa G, uklanjanjem bridova koji ne pripadaju ciklusu C dobit ćemo novi graf H. Graf H ne mora biti povezan. Uočimo da graf H ima manje bridova od grafa G, ali su i dalje svi vrhovi grafa H parnog stupnja. Po pretpostavci indukcije, svaka komponenta povezanosti grafa H ima Eulerov ciklus. Kako svaka komponenta od H ima zajednički vrh s C, Eulerov ciklus u grafu G dobivamo slijedeći vrhove ciklusa C krećući od proizvoljno

odabranog vrha. Kada ciklusom C dođemo do komponente grafa H koja nije izolirani vrh, prođemo Eulerovim ciklusom te komponente povezanosti, a zatim istim postupkom nastavljamo dalje po ciklusu. Ponavljamo postupak sve dok ne prijeđemo sve komponente u H i cijeli ciklus C. Na kraju dolazimo u vrh ciklusa C iz kojeg smo i krenuli. Sada prijeđeni vrhovi i bridovi čine Eulerov ciklus grafa G. □

Uočimo da vrijedi sljedeće: Ako je graf Eulerov, onda svakim njegovim bridom možemo proći točno jednom i vratiti se u vrh iz kojeg smo krenuli. Ali, moguće je ispuniti slabiji uvjet, to jest možemo svakim bridom grafa proći točno jednom, ali bez da se nužno vratimo u vrh iz kojeg smo krenuli. Takvi grafovi također imaju svoje ime.

Definicija 2.4. *Kažemo da je graf G* ***skoro-Eulerov*** *ako posjeduje stazu koja sadrži svaki brid od G.*

Kako postoje Eulerovi i skoro-Eulerovi grafovi, problem mostova u Königsbergu može imati dvije varijante, ovisno o tome traži li se Eulerov ciklus ili staza koja sadrži sve bridove grafa. Uočimo pomoću grafičkog prikaza problema sa slike 2.2 da su svi vrhovi neparnog stupnja te je stoga tražena šetnja nemoguća. Osim što je pokazao da je ovaj konkretan zadatak nerješiv, odnosno da tražena šetnja nije moguća, Euler je također dao i postupak za rješavanje zadataka ovakvog tipa. On je zaključio sljedeće:

1. Ako graf ima više od 2 vrha neparnog stupnja, onda je problem nerješiv.

2. Ako su točno 2 vrha neparnog stupnja, onda je moguća otvorena šetnja.

3. Ako su svi vrhovi parnog stupnja, onda je zadatak rješiv.

U sljedećem potpoglavlju vidjet ćemo kako problem 7 mostova predstaviti učenicima. Teorija grafova ne nalazi se u obaveznom kurikulumu, ali se za naprednije učenike može obraditi kao dodatna tema u nastavi matematike.

2.3 Königsberški mostovi u nastavi matematike

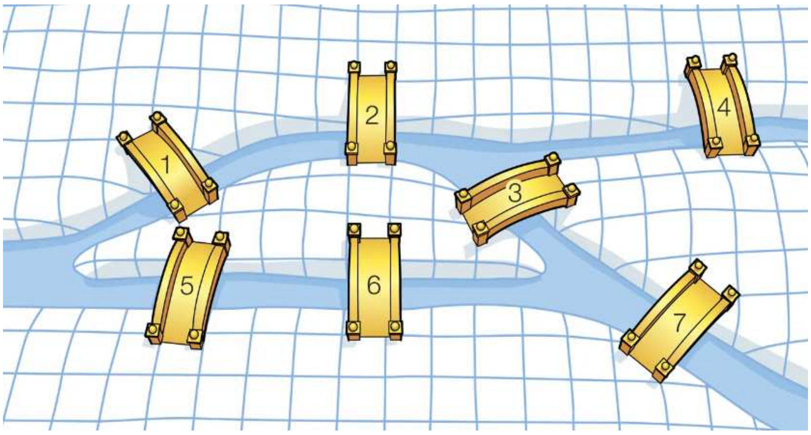
Pojedine elemente teorije grafova možemo predstaviti učenicima različitih dobi kroz razne aktivnosti. Cilj svih aktivnosti je da učenici samostalno, uz nastavničko navođenje, otkrivaju razne matematičke pravilnosti, ali i da se ostvare postavljeni ishodi učenja. Kod učenika mlađe dobi, veći fokus je na zanimljivim matematičkim pričama, motivacijama i igranju igara, a manji na samoj teoriji vezanoj uz aktivnosti. Kod starijih učenika moguće je uvesti definicije iz same teorije, uz prilagodbu prikladnu njihovoj dobi. Slijedi nekoliko aktivnosti koje se mogu koristiti u dodatnoj nastavi matematike, a usko su vezane uz problem mostova u gradu Königsbergu.

Aktivnost *Obiđimo sve mostove!*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti pojmove otvorene i zatvorene šetnje u grafu.

Aktivnost se može provoditi u osnovnoj školi. Kao uvod u temu, prikadno je iskoristiti već spomenuti problem sedam mostova. Kod provođenja aktivnosti ne koristimo se standardnim definicijama Eulerovih i skoro-Eulerovih grafova već se pitamo možemo li prošetati grafom tako da svaki brid prijeđemo točno jednom. Kako učenicima nije unaprijed dano pravilo kada će tražena šetnja biti moguća, a kada ne, očekuje se da će učenici biti zainteresiraniji u sudjelovanju i u rješavanju zadanog problema. Primjer motivacijskog zadatka može izgledati ovako:

Zadatak 1. Jedan od prvih matematičara koji se bavio grafovima bio je Leonhard Euler. Njega je zainteresirao jedan stari problem vezan uz grad Königsberg u blizini Baltičkog mora. Rijeka Pregel dijeli grad Königsberg na četiri odvojena dijela koji su povezani sa sedam mostova. Stanovnici tog grada su se zapitali je li moguće prošetati gradom tako da sve mostove prijeđu točno jednom, ali ne više od jednom? Što mislite, je li moguće proći svaki most točno jednom i prošetati gradom? Nije nužno da započnete i dovršite šetnju na istom mjestu. Pokušajte na opisani način prošetati mapom prikazanom na slici 2.3.



Slika 2.3: Mostovi Königsberga 2 [preuzeto iz [2]]

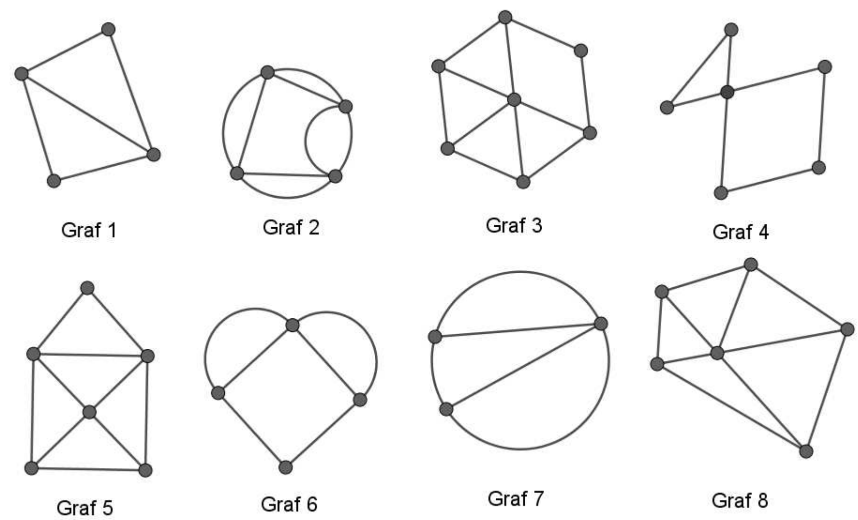
Rješenje i diskusija: Učenici će crtanjem po zadanoj mapi uočiti da traženi problem nema rješenja. Važno je učenicima dati dovoljno vremena za samostalno istraživanje, kako bismo se uvjerili da su isprobali ”sve” mogućnosti.

U sljedećem koraku, upućujemo učenike da izrade model (ili shematski prikaz) situacije prikazane mapom na slici 2.3. Ako nastavnici imaju mogućnost korištenja učila ili alata dinamične geometrije, sljedeći zadatak se može provesti i na taj način. Time će očekivano učenički interes biti veći.

Zadatak 2. Napravite model (ili shematski prikaz) koji predstavlja mapu sa slike 2.3 tako da mostove prikažete ravnim ili zakrivljenim linijama, a područja (kopno) prikažete točkama. Takav shematski prikaz naziva se graf. Graf čine vrhovi, koje prikazujemo točkama, i bridovi, koje prikazujemo ravnim ili zakrivljenim linijama. Provjerite možete li prošetati dobivenim grafom tako da svaki njegov brid prijeđete točno jednom.

Rješenje i diskusija: Učenici će dobiti graf prikazan na slici 2.2 i još jednom će uočiti da tražena šetnja nije moguća. Time će potvrditi i zaključak iz prvog zadataka. Učenici se sada pitaju postoje li grafovi kod kojih su takve šetnje moguće. U tu svrhu učenici dobivaju sljedeći zadatak.

Zadatak 3. Kojima od navedenih grafova na slici 2.4 možemo prošetati tako da svakim bridom prođemo točno jednom? Možete započeti i završiti bilo gdje, ne nužno na istom mjestu, ali svaki brid možete prijeći točno jednom. Šetnju koju započnemo u jednom vrhu, a završimo u drugom nazivamo otvorenom šetnjom. Šetnju koju počinjemo i završavamo u istom vrhu zovemo zatvorenom šetnjom.



Slika 2.4: Grafovi

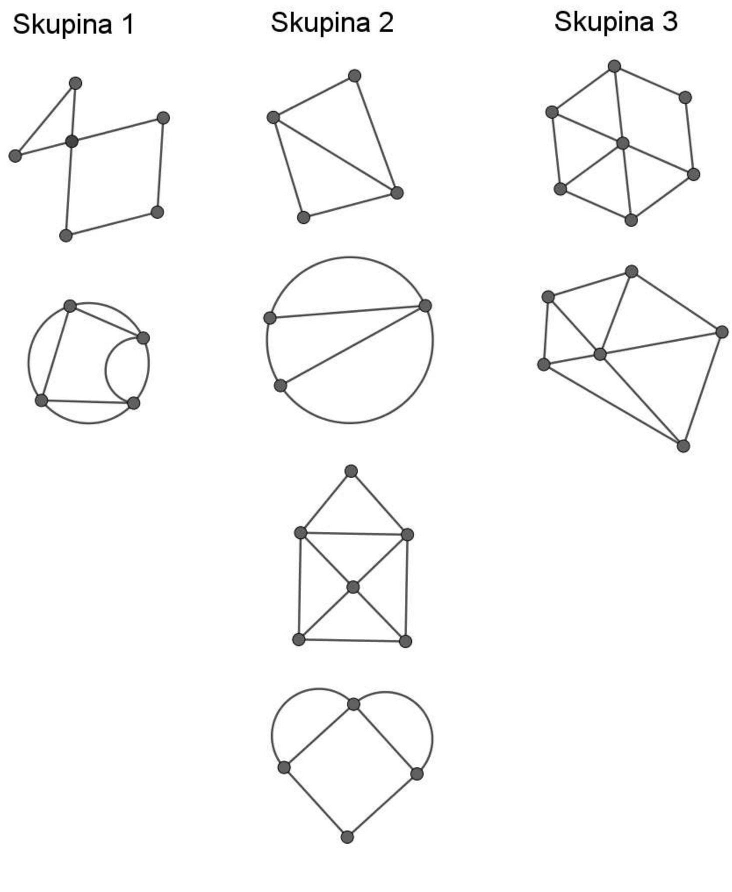
Rješenje i diskusija: Nakon rješavanja zadatka učenici će uočiti da postoje grafovi kod kojih je gore opisana šetnja moguća, ali i da nekim grafovima ne možemo prošetati na opisani način. Učenike zatim uputimo da grafove iz prethodnog zadatka, prikazane na slici 2.4 razvrstaju u proizvoljne skupine unutar kojih grafovi imaju neko zajedničko svojstvo. Očekuje se da će učenici uočiti da dobivene grafove mogu razvrstati u tri skupine na sljedeći način:

1. Grafovi kod kojih je moguća zatvorena šetnja.

2. Grafovi kod kojih je moguća otvorena šetnja.

3. Grafovi kod kojih nije moguća ni otvorena ni zatvorena šetnja.

Dobivene skupine prikazane su redom na slici 2.5.



Slika 2.5: Vrste grafova

Nakon što su učenici riješili prethodne zadatke, potrebno je još zaključiti što vrijedi za pojedinu skupinu grafova. Učenici dobivaju sljedeći zadatak.

Zadatak 4. Broj bridova koji ”izlaze” iz svakog vrha nazivamo stupnjem vrha. Za svaki graf ispišite stupnjeve svih vrhova i upišite ih u tablicu. Što uočavate za svaku skupinu grafova? Ispišite uočene pravilnosti.

Rješenje i diskusija: Očekuje se da će učenici uočiti i zaključiti da su kod grafova kod kojih je moguća zatvorena šetnja (prva skupina) svi vrhovi parnog stupnja, a kod grafova kod kojih je moguća otvorena šetnja najviše su dva vrha neparnog stupnja (druga skupina). Kod ostalih grafova nema pravilnosti (treća skupina). Takvi grafovi nemaju ni otvorenu ni zatvorenu šetnju.

Primjer prazne i popunjene tablice nalazi se na slici 2.6.

Skupina 1		Skupina 2				Skupina 3	
Graf 4	Graf 2	Graf 1	Graf 7	Graf 5	Graf 6	Graf 3	Graf 8

Skupina 1		Skupina 2				Skupina 3	
Graf 4	Graf 2	Graf 1	Graf 7	Graf 5	Graf 6	Graf 3	Graf 8
2	4	3	3	2	3	2	3
2	4	2	4	4	4	3	3
4	4	3	3	3	3	3	3
2	4	2		3	2	3	3
2				4		3	3
2				4		3	5
						5	

Slika 2.6: Primjer prazne i popunjene tablice za četvrti zadatak

Nastavnik učenicima može dati dodatnu uputu da pokušaju nacrtati skice danih grafova, ali bez podizanja olovke. Ako je takvu skicu moguće nacrtati, onda će šetnja (otvorena ili zatvorena) biti moguća.

Važno je naglasiti da tijekom cijele aktivnosti nastavnik postavlja učenicima pitanja i potiče ih na izražavanje njihovih ideja, sve dok oni samostalno ne dođu do konačnih zaključaka kojima se ostvaruju planirani ishodi učenja. Primjeri pitanja koja nastavnik može tijekom aktivnosti postavljati učenicima slijede u nastavku. Prva četiri pitanja odnose se na prva dva zadatka, a preostala na treći i četvrti zadatak.

1. Jeste li pokušali prošetati mapom (sa slike 2.3) tako da svaki pokušaj započnete na drugom mjestu?
2. Predstavlja li dobiveni model u drugom zadatku identičnu situaciju kao u prvom zadatku? Ako da, zašto? Ako ne, zašto?
3. Može li dobiveni model izgledati drugačije? Objasnite.
4. Hoće li se rješenja prvog i drugog zadatka uvijek podudarati?
5. Jeste li pokušali prošetati grafovima tako da svaki pokušaj započnete na drugom mjestu?
6. Jeste li pokušali krenuti iz vrha iz kojeg izlazi najviše bridova? Jeste li pokušali krenuti iz vrha iz kojeg izlazi najmanje bridova?
7. U kojem slučaju ste lakše uspjeli pronaći šetnju (otvorenu ili zatvorenu)?
8. U koliko ste skupina razvrstali grafove? Objasnite svoj odabir.

Učenici aktivnost započinju zanimljivim povijesnim problemom sedam mostova, a na kraju dolaze do nužnih i dovoljnih uvjeta za postojanje Eulerove staze i ciklusa, na intuitivnoj razini, bez spominjanja formalnih definicija. Važno je da svi učenici međusobno surađuju i sudjeluju u diskusiji, a nastavnikova zadaća je pripremiti aktivnost za njeno izvođenje, koordinirati grupama te voditi matematičku diskusiju.

Aktivnost *Obiđimo sve mostove 2!*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti pojmove otvorene i zatvorene šetnje u grafu.

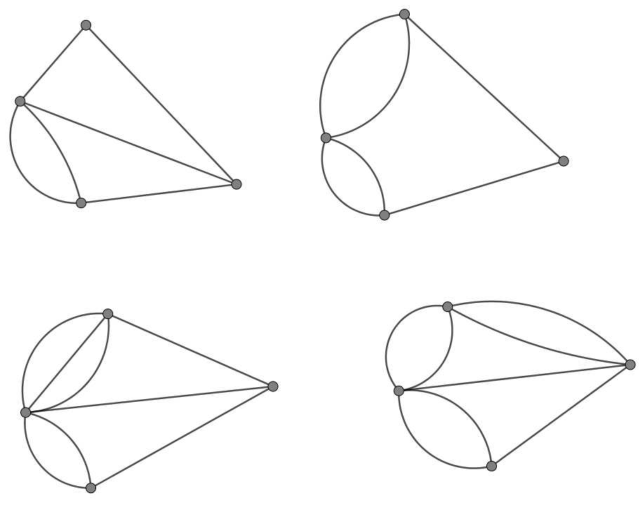
Sljedeća aktivnost prikladna je za učenike viših razreda osnovne škole. U njenom provođenju koristimo se prethodnom aktivnosti, ali je nastavljamo na drugačiji način. Kako bi zainteresirali učenike, opet počinjemo problemom mostova u Königsbergu, a zatim modeliramo problem grafom koji olakšava analizu problema. Ukratko, ponavljamo prvi i drugi zadatak iz aktivnosti *Obiđimo sve mostove!*.

Nakon što su učenici uočili da smo problem mostova mogli prikazati grafom, možemo nastaviti na malo drugačiji način. Naime, za početak možemo istom grafu dodavati ili s grafa micati rubove te promatrati što se tada događa, to jest jesu li tada moguće otvorene ili zatvorene šetnje te jesu li šetnje uopće moguće.

Nakon ponovljenog prvog i drugog zadatka iz aktivnosti *Obiđimo sve mostove!* učenici dobivaju sljedeće zadatake koje rješavaju crtanjem u bilježnicama ili u alatu dinamične geometrije:

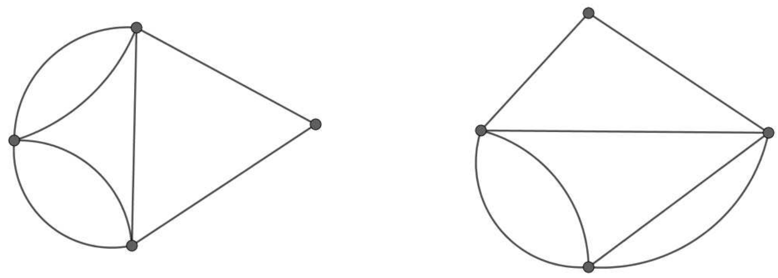
Zadatak 3. Grafu dobivenom u prethodnom zadatku (na 2.2) obrišite jedan brid. Možete li tako dobivenim grafom prošetati tako da svakim bridom prođete točno jednom? Možete započeti i završiti bilo gdje, ne nužno na istom mjestu, ali svaki brid možete prijeći točno jednom. Šetnju koju započnemo u jednom vrhu, a završimo u drugom nazivamo otvorenom šetnjom. Šetnju koju počinjemo i završavamo u istom vrhu zovemo zatvorenom šetnjom. Pokušajte obrisati različite bridove i zapišite što uočavate. Ponovite isti zadatak, ali tako da grafu dodate jedan brid. Pokušajte dodati bridove između različitih vrhova i zapišite što uočavate.

Rješenje i diskusija: Učenici će nakon samostalnog dodavanja ili brisanja proizvoljnih bridova grafa (crtanjem u bilježnicama ili u alatu dinamične geometrije) uočiti da su kod nekih novodobivenih grafova moguće otvorene i zatvorene šetnje, ali i da postoje grafovi kod kojih tražene šetnje nisu moguće. Moguća učenička rješenja dobivena brisanjem ili dodavanjem bridova na graf sa slike 2.2, a kod kojih su moguće otvorene šetnje prikazana su na slici 2.7.



Slika 2.7: Grafovi kod kojih su moguće otvorene šetnje

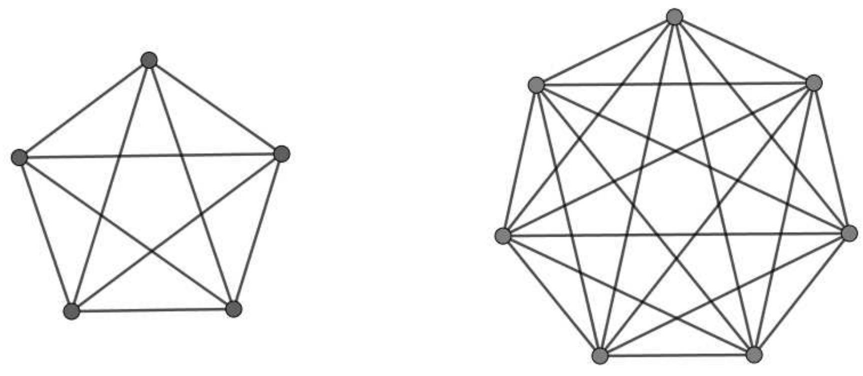
Također, moguća učenička rješenja dobivena na isti način, a kod kojih su moguće zatvorene šetnje prikazana su na slici 2.8.



Slika 2.8: Grafovi kod kojih su moguće zatvorene šetnje

Na isti način kao u prethodnoj aktivnosti, učenici će zatim, prebrojavanjem bridova, na temelju dobivenih primjera uočavati sličnosti i razlike među primjerima, to jest kakvi su pojedini grafovi ovisno o stupnju vrhova. Na taj način će opet doći do nužnih i dovoljnih uvjeta za rješavanje takvih tipova zadataka, odnosno kada graf ima Eulerovu stazu ili ciklus.

Kao dodatak aktivnosti za učenike sedmih i osmih razreda (nakon što se u nastavi obradi cjelina *Mnogokuti*), učenicima možemo zadati da sami pronađu neke pravilne mnogokute koje zajedno s njihovim dijalogalama mogu nacrtati tako da ne podižu olovku s papira, odnosno kod kojih su moguće otvorene ili zatvorene šetnje. Primjeri takvih mnogokuta su dani na slici 2.9.

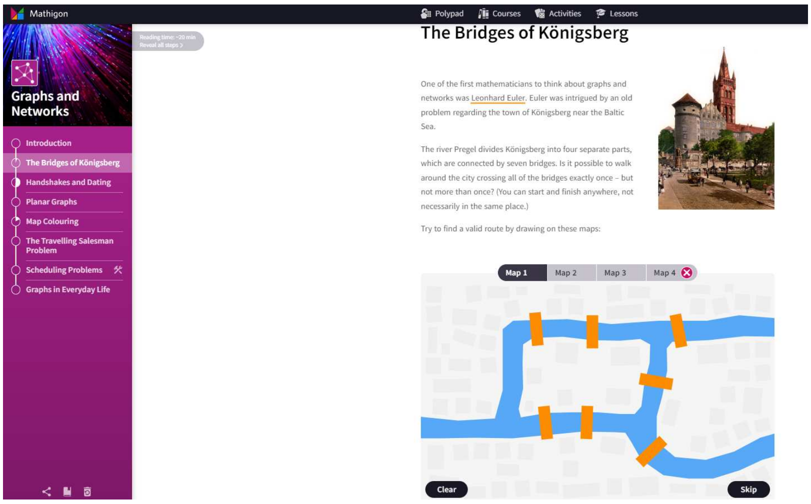


Slika 2.9: Pravilni peterokut i pravilni sedmerokut

Učenici će generalizacijom nepotpunom indukcijom zaključiti da će sve mnogukute s neparnim brojem stranica moći nacrtati bez podizanja olovke s papira.

U obje aktivnosti iz ovog poglavlja izuzetno je važna suradnja među učenicima i matematička diskusija kao i razvijanje logičkog mišljenja. Kako se radi o istraživačkoj nastavi, aktivnosti iziskuju puno angažmana i dodatnog vremena te se kao takve mogu izvesti na dodatnoj nastavi ili kao dodatna tema u sklopu nastave.

Za ovaj problem postoji mnogo digitalnih sadržaja pomoću kojih učenici mogu raditi samostalno. Jedan takav primjer nalazi se na web stranici *Mathigon* na linku https://mathigon.org/course/graph-theory/bridges.
Postoji i hrvatska verzija aktivnosti koja izgleda u potpunosti identično. Učenici na danim kartama trebaju pokušati pronaći otvorene, odnosno zatvorene šetnje. Primjer aktivnosti nalazi se na slici 2.10.



Slika 2.10: Mathigon: Problem sedam mostova

Poglavlje 3

Problem rukovanja

3.1 Povijesni kutak

Drugi poznati kombinatorni problem poznat je pod nazivom *problem rukovanja*. Problem datira u daleku prošlost, u 1736. godinu kada ga je dokazao Euler kroz svoje razmatranje problema mostova u Königsbergu. *Lema o rukovanju* dobila je takav naziv jer ju možemo interpretirati na sljedeći način: kod rukovanja proizvoljnog broja ljudi, broj ruku uključenih u rukovanje nužno je paran broj.

3.2 Lema o rukovanju

Teorem 3.1. ***(Lema o rukovanju)*** *Zbroj stupnjeva svih vrhova u grafu G jednak je dvostrukom broju bridova grafa G.*

Dokaz. Dokaz provodimo dvostrukim prebrojavanjem. Neka graf G ima n vrhova. Označimo vrhove grafa G s V_1, V_2, ..., V_n.
S d_n označimo stupanj vrha V_n, za $n = 1, 2, 3, ..., n$. To znači da iz vrha V_n izlazi točno d_n bridova. Zbrajanjem stupnjeva svih vrhova grafa dobivamo $d_1 + d_2 + ... + d_n$. Kako svaki brid povezuje dva vrha, odnosno za svaka dva susjedna vrha u grafu imamo jedan brid između njih, možemo zaključiti da je u grafu G dvostruko manje bridova od zbroja stupnjeva svih vrhova. Time je teorem dokazan. □

Provjerimo na primjeru da teorem 3.2 vrijedi.

Primjer 3.2. *Graf sa slike 1.1 ima ukupno 7 vrhova i 8 bridova. Uočimo da je*
$deg(A) + deg(B) + deg(C) + deg(D) + deg(E) + deg(F) = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 1 = 16.$
Dakle, zbroj svih stupnjeva u tom grafu dvostruko je veći od broja bridova grafa.

Lemu o rukovanju možemo iskazati i ovako:

Teorem 3.3. *U svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran.*

Dokaz. Kako svaki brid dva puta doprinosi zbroju stupnjeva vrhova, tj. vrijedi $\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2\,|E(G)|$, gdje je $|E(G)|$ broj bridova u grafu G. Budući da je desna strana jednakosti sigurno parna i lijeva strana jednakosti mora biti parna. Time je teorem dokazan. □

Sljedeći korolar je direktna posljedica leme o rukovanju. Ponekad se pogrešno navodi kao *lema o rukovanju*.

Korolar 3.4. *U svakom grafu G je broj vrhova neparnog stupnja paran broj.*

3.3 Problem rukovanja u nastavi matematike

Problem rukovanja možemo također predstaviti učenicima koji će rješavanjem sljedeće aktivnosti razvijati svoje vještine rješavanja problema. Do zaključaka će doći generalizacijom nepotpunom indukcijom. U ovoj aktivnosti pretpostavlja se da su učenici upoznati s pojmovima vezanim uz graf (vrhovi, bridovi) te da isti znaju prikazati u ravnini.

Aktivnost *Prebrojimo rukovanja!*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti lemu o rukovanju kroz primjer iz svakodnevnog života.

Na početku učenike podijelimo u višečlane skupine s različitim brojem članova (tri, četiri ili pet učenika u grupi). Učenicima zadamo sljedeći zadatak:

Zadatak 1. Rukujte se sa svakim učenikom iz grupe. Svaki par može se rukovati samo jednom i ne možete se rukovati sami sa sobom. Izbrojite ukupan broj rukovanja.

Rješenje i diskusija: Učenici će prebrojavanjem doći do ukupnog broja rukovanja:

1. Tri učenika rukovala su se ukupno tri puta.
2. Četiri učenika rukovala su se ukupno šest puta.
3. Pet učenika rukovalo se ukupno deset puta.

Učenici će, s obzirom da su skupine male, točno izbrojati rukovanja, ali na temelju ovog zadatka ne mogu doći do generalizacije. Kako bi učenici uočili pravilnost, dobivaju sljedeći zadatak:

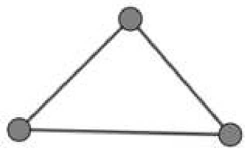
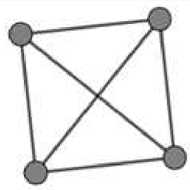
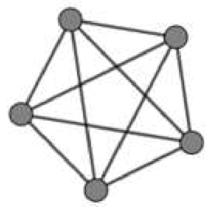
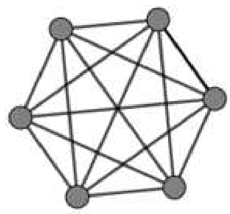
Zadatak 2. Ispunite tablicu sa slike 3.1 tako da upišete broj rukovanja i skicirate graf koji predstavlja rukovanja u svakom koraku.

Broj učenika koji sudjeluje u rukovanju	Ukupan broj rukovanja	Graf koji predstavlja rukovanja
2		
3		
4		
5		
6		

Slika 3.1: Primjer prazne tablice za učenike

Rješenje i diskusija: Učenici će tablicu popunjavati prebrojavanjem rukovanja (dovoljno male skupine da se točno odredi broj rukovanja). Nakon što popune drugi stupac, svako rukovanje trebaju prikazati grafom. Primjer jednog učeničkog rješenja prikazan je na slici 3.2.

Nakon riješenog drugog zadatka upitamo učenike kako bi problem rukovanja riješili za veći broj ljudi, na primjer za skupinu od 30 osoba. Učenici će uočiti da prebrojavanje rukovanja nije praktično rješenje za veće skupine ljudi. Također će zaključiti da je potrebno pronaći neku pravilnost koju ćemo onda iskoristiti za računanje broja rukovanja za skupinu od n ljudi. U tu svrhu učenicima dajemo sljedeći zadatak:

Broj učenika koji sudjeluje u rukovanju	Ukupan broj rukovanja	Graf koji predstavlja rukovanja
2	1	
3	3	
4	6	
5	10	
6	15	

Slika 3.2: Primjer ispunjene tablice sa slike 3.1

Zadatak 3. Promotrite ispunjenu tablicu sa slike 3.2 i pokušajte otkriti ovisnost broja rukovanja o broju ljudi.

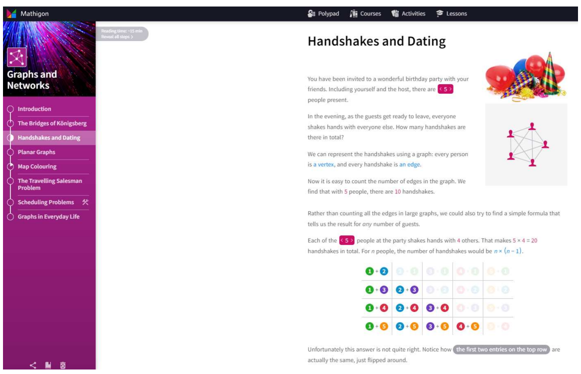
Rješenje i diskusija: Učenici će generalizacijom nepotpunom indukcijom otkriti pravilo, odnosno formulu za izračun broja rukovanja za n osoba (proučavanjem redaka iz tablice).

Uočit će redom:

1. Dvije osobe rukuju se jednom.
2. Tri osobe rukuju se s preostale dvije (jer se ne smiju rukovati sami sa sobom). Kako u jednom rukovanju sudjeluju dvije osobe, dobivamo dvostruki broj rukovanja.
3. Četiri osobe rukuju se s preostale tri (jer se ne smiju rukovati sami sa sobom). Kako u jednom rukovanju sudjeluju dvije osobe, dobivamo dvostruki broj rukovanja.
4. Pet osoba rukuje se s preostalih četvero (jer se ne smiju rukovati sami sa sobom). Kako u jednom rukovanju sudjeluju dvije osobe, dobivamo dvostruki broj rukovanja.
5. Šest osoba rukuje se s preostalih petero (jer se ne smiju rukovati sami sa sobom). Kako u jednom rukovanju sudjeluju dvije osobe, dobivamo dvostruki broj rukovanja.

Dakle, ako tražimo broj rukovanja između n osoba, svaka će se osoba rukovati s preostalih $n-1$ osobom (jer se osoba ne rukuje sama sa sobom). Dobivamo da broj rukovanja iznosi $n(n-1)$. Na taj način dobivamo dvostruki broj rukovanja (jer se u svakom rukovanju rukuju dvije osobe). Preostaje još rezultat podijeliti s dva. Konačno, broj rukovanja za n osoba onda možemo izračunati po formuli $\frac{n(n-1)}{2}$ iz čega slijedi da će se 30 osoba rukovati ukupno $\frac{30(30-1)}{2} = 435$ puta. Ovaj problem također može biti primjeren za motivacijski zadatak kod otkrivanja ukupnog broja dijagonala kod mnogokuta.

Za ovaj problem također postoji mnogo digitalnih sadržaja pomoću kojih učenici mogu raditi samostalno. Jedan takav primjer nalazi se na web stranici *Mathigon* na linku https://mathigon.org/course/graph-theory/handshakes. Postoji i hrvatska verzija aktivnosti, međutim zasad nije dovršena. Primjer aktivnosti nalazi se na slici 3.3.



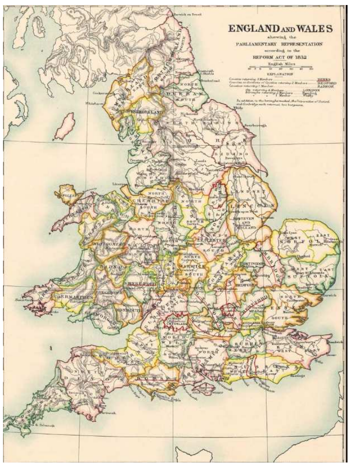
Slika 3.3: Mathigon:Problem rukovanja

Poglavlje 4

Problem četiri boje

4.1 Povijesni kutak

Još jedan važan problem iz teorije grafova upravo je *problem četiri boje*. Spomenuti problem glasi: "Možemo li (zemljopisnu) kartu obojiti s najviše četiri boje tako da su susjedne zemlje različito obojane?" Problem se iz tog razloga spominje još i pod nazivom *bojanje karte*. Prvu formulaciju ovog problema dao je matematičar Francis Guthrie sredinom 19. stoljeća. On je 1852. godine bojao kartu engleske grofovije te uočio da mu za bojanje ne treba više od četiri boje. Slika karte prikazana je na slici 4.1.

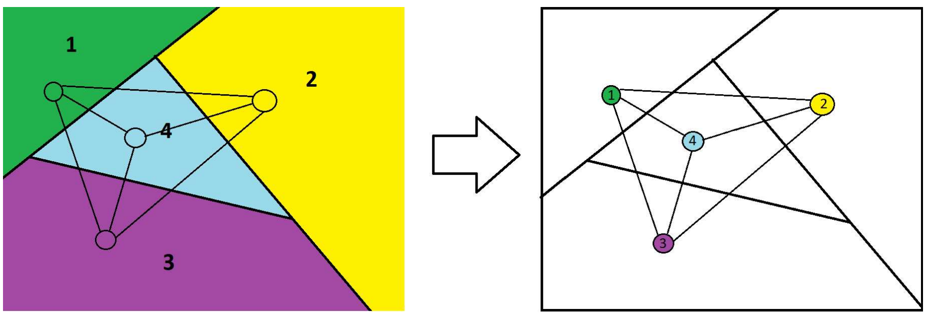


Slika 4.1: Karta Engleske i Walesa [preuzeto s *mathigon.org*]

Guthrie se zapitao vrijedi li njegova pretpostavka za bilo koju kartu, tj. jesu li četiri boje dovoljne da se svaka karta oboji tako da su susjedne zemlje različito obojane. Ako se dvije zemlje dodiruju samo u točki, one ne dijele granicu i ne smatraju se susjednima pa stoga mogu biti obojane istom bojom. Kako svoju pretpostavku nije mogao dokazati, njegov mlađi brat Frederick je njegove bilješke proslijedio svom profesoru Augustusu De Morganu. Iako je De Morgan smatrao da je problem zanimljiv, ni on nije mogao doći do njegova rješenja. Interes matematičara za *problemom četiri boje* se tijekom godina smanjivao sve dok 1878. godine matematičar Arthur Cayley nije objavio analizu problema te tako ponovno pokrenuo raspravu. Godinu dana kasnije Sir Alfred Bray Kempe objavio je dokaz spomenutog problema, a taj dokaz bio je prihvaćen sve do 1890. godine kada je Percy John Heawood pronašao pogrešku u njegovom dokazu. Zanimljivo je da taj dokaz slovi kao najpoznatiji pogrešan dokaz u matematici. Heawood je nakon toga dokazao da svaku kartu možemo obojati s pet boja. Problem četiri boje su konačno dokazali Kenneth Appel i Wolfgang Haken 1976. godine pomoću računala. Bio je to prvi veći teorem koji je dokazan uz pomoć računala te ga čovjek (još uvijek) ne može provjeriti. Kasnije su se pojavljivale i jednostavnije verzije dokaza, ali je svim dosad objavljenim verzijama zajednička upotreba računala pri dokazivanju.

4.2 Teorem četiri boje

Svaka karta se sastoji od povezanih regija (ili država) odvojenih granicama odnosno bridovima. Dvije regije sa zajedničkim bridom zovemo susjednima. Bridovi se sastaju u točkama odnosno vrhovima, a dvije države koje se dodiruju samo u jednoj točki ne smatramo susjednima (smiju se obojiti istom bojom). Planarni graf možemo nacrtati u ravnini tako da se bridovi sijeku samo u vrhovima što povlači da od svake karte možemo konstruirati planarni graf. Primjer je prikazan na slici 4.2. Na istoj slici vidimo da smo svaku regiju s karte zamijenili vrhom grafa, a dva vrha su međusobno povezana ako su odgovarajuće regije susjedne. Na ovaj način se problem bojanja regija svodi na problem bojanja vrhova planarnog grafa tako da su susjedni vrhovi različitih boja.



Slika 4.2: Prikaz karte planarninim grafom

Dokažimo prvo *teorem o pet boja* odnosno da je svaki planarni graf *5-obojiv*. Za dokaz teorema potrebna su nam dva sljedeća teorema koje navodimo bez dokaza, a dokazi se mogu pogledati u [13].

Teorem 4.1. *U planarnom grafu postoji barem jedan vrh stupnja manjeg od šest (susjedan je s najviše pet drugih vrhova).*

Teorem 4.2. *Graf je planaran ako i samo ako u sebi ne sadrži potpun graf K_5 ili $K_{3,3}$ (graf sa šest vrhova koji su grupirani u dvije skupine od po tri vrha, tako da u istoj skupini nikoja dva nisu susjedna, a susjedni su sa svakim iz druge skupine).*

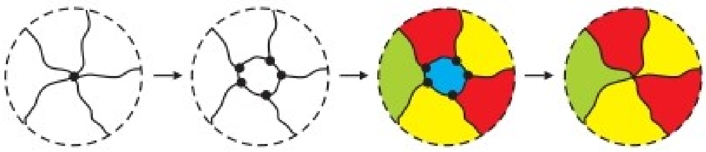
Teorem 4.3. ***(Teorem o pet boja)*** *Svaki planarni graf moguće je obojiti s najviše pet boja, pri čemu susjedni vrhovi nisu obojeni istom bojom.*

Dokaz. Za grafove s malim brojem vrhova, tvrdnju teorema možemo provjeriti direktno. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za grafove s manje od n vrhova. Promatramo planarni graf G s n vrhova. Po teoremu 4.1 graf sadrži najmanje jedan vrh stupnja manjeg od 6. Označimo taj vrh sa v. Ako je vrh v stupnja manjeg od pet imamo sljedeće: vrh v udaljimo iz grafa G sa njegovim bridovima. Dobiveni graf je po pretpostavci obojiv s najviše pet boja. Vratimo vrh v nazad u graf G. Za bojenje susjednih vrhova vrha v trebamo najviše četiri boje, a v možemo obojiti jednom od preostalih boja. Promotrimo sada slučaj kada je $deg(v) = 5$. Neka su a, b, c, d, e vrhovi susjedni vrhu v. Po teoremu 4.2 vrhovi a, b, c, d, e ne tvore K_5 u G. Stoga zaključujemo da barem jedan par vrhova nije povezan bridom. Neka su to bridovi a i c. Udaljimo iz grafa G bridove $(v, b), (v, d), (v, e)$. Udaljimo iz grafa i bridove (v, a) i (v, c), a sve bridove koji dolaze do vrhova a i c produžimo do vrha v kojeg označimo s v^*. Tako smo izbacili vrhove a i c iz grafa. Graf dobiven na taj način može se obojiti s najviše pet boja. Bojanje dobivenog grafa određuje i bojanje grafa G. Kako vrhovi a i c nisu susjedni, dobivaju boju vrha v^*. Za bojanje vrhova b, d i e potrebne su najviše tri boje (a određene su bojanjem grafa kojeg smo dobili izbacivanjem vrhova a i c). Sada za bojanje vrha v trebamo još jednu boju. Time je teorem dokazan. □

Teorem 4.4. ***(Teorem o četiri boje)*** *Svaki planaran graf moguće je obojiti s najviše četiri boje pri čemu susjedni vrhovi nisu obojeni istom bojom.*

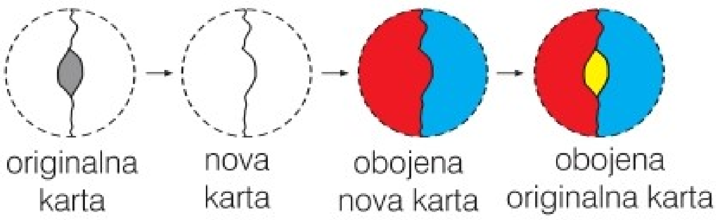
Dokaz problema temelji se na Kempeovim tvrdnjama o reducibilnosti. Teorem je dokazan pomoću računala, a beskonačan broj mogućih karata reduciran je na 1936 konfiguracija. Računalo je te konfiguracije moralo provjeravati jednu po jednu, a za to je bilo potrebno čak 1200 sati samog rada računala. Tek su 1997. godine Robertson, Sanders, Seymour i Thomas objavili jednostavniji dokaz na 40 stranica. Kako je dokaz ovog teorema izuzetno kompliciran i dugačak, ovdje ćemo pokušati u kratkim crtama objasniti o čemu se radi.

Cayley je prvo dokazao da, ako proizvoljnoj karti od n regija već obojenoj s četiri boje dodamo još jednu regiju, onda se i nova karta sastavljena od $n + 1$ regije također može obojiti s četiri boje. Također je uočio da je dovoljno promatrati samo tzv. *kubne karte*. To su karte kod kojih se u svakom čvoru (vrhu) dodiruju točno tri regije. Ako se u nekom vrhu susreće više država, onda na taj vrh postavimo malu kružnu "zakrpu", obojimo takvu kartu, a zatim uklonimo "zakrpu". Primjer je prikazan na slici 4.3.



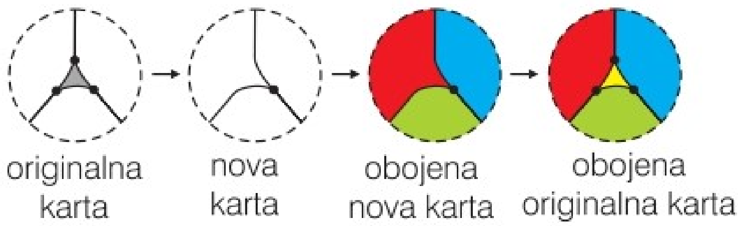
Slika 4.3: Kubna karta [preuzeto iz [5]]

Na kraju, zaključio je da se bojanje karata možemo izvesti tako da sve regije koje leže uz rub karte obojimo s najviše tri boje. Svoje zaključke pokušao je najprije dokazati indukcijom, međutim bilo je nemoguće pronaći metodu za proširivanje karte s n regija na kartu s $n + 1$ regijom koja bi vrijedila općenito. Nakon neuspješnih pokušaja indukcije, Clayley je promijenio pristup problemu te pretpostavio da teorem ne vrijedi, odnosno da postoje karte za čije bojanje trebamo najmanje pet boja. Među takvim kartama, on je izabrao onu s najmanjim brojem regija i tu kartu nazvao *najmanjim uljezom*, a zatim pokušao dokazati da takve karte ne postoje. Prvo je pokazao da *najmanji uljez* ne sadrži regiju koja ima samo dva susjeda (*dvokut*). Ukloni li se takvoj državi jedan brid, dobivamo kartu s dvije regije. Takvu kartu možemo obojiti s dvije boje. Ako uklonjeni brid vratimo, za preostalu regiju imamo na raspolaganju još dvije boje pa tvrdnja vrijedi. Vizualizacija je prikazana na slici 4.4.



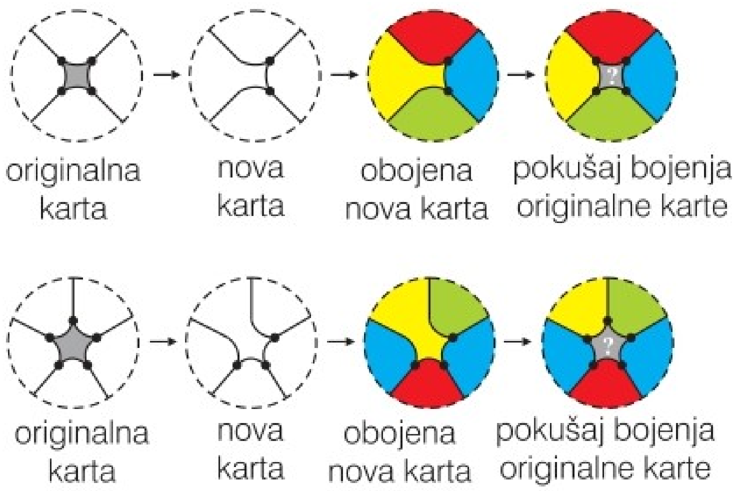
Slika 4.4: Dvokut [preuzeto iz [5]]

Slično je pokazao da najmanji uljez ne sadrži regiju koja ima tri susjeda (*trokut*). Uklanjanjem jednog brida, dobije se karta s tri regije koja se može obojiti s tri boje. Vraćanjem uklonjenog brida, za preostalu regiju iskoristimo četvrtu, neiskorištenu boju. Primjer je prikazan na slici 4.5.



Slika 4.5: Trokut [preuzeto iz [5]]

Nakon toga, ova metoda više ne vrijedi (vizualno prikazano na slici 4.6).

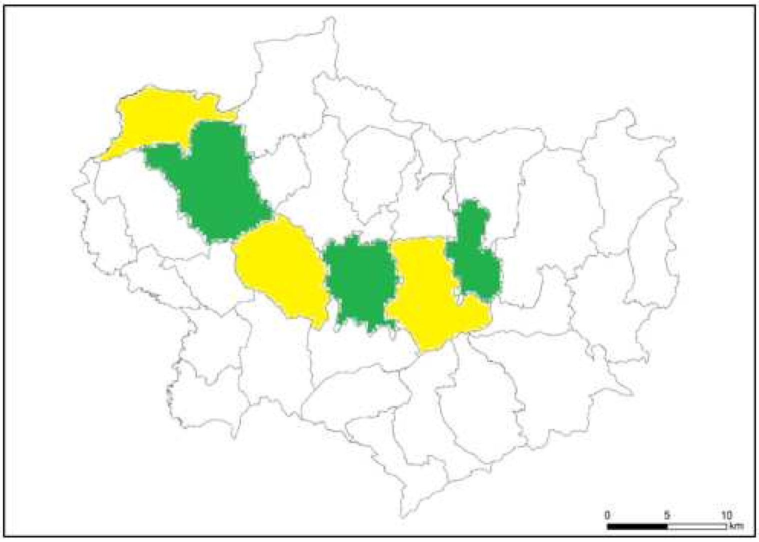


Slika 4.6: Prikaz regija s četiri i pet susjeda [preuzeto iz [5]]

Slična tehnika može se primijeniti kako bi se pokazalo da je teorem o šest boja točan.

Iako Cayley nije uspio dokazati *teorem o četiri boje*, ideja dokaza pokazala se korisnom u daljnjim pokušajima dokazivanja. Kempe je koristeći Cayleyeve ideje razvio metodu poznatu pod nazivom *metoda Kempeovih lanaca*. Kempeov lanac definiramo kao niz vrhova koji su obojeni s dvije naizmjenične boje. Jedan Kempeov lanac prikazan je na slici 4.7.

Kempeovi lanci ključni su za dokaz teorema o četiri boje, međutim desetak godina kasnije Heawood je u njegovoj metodi pronašao pogrešku. On je dao kontraprimjer metodi Kempeovih lanaca, čime je osporio spomenutu metodu, ali nije opovrgnuo sami problem. Usput je dokazao i teorem 4.3 koji možemo iskazati i ovako:

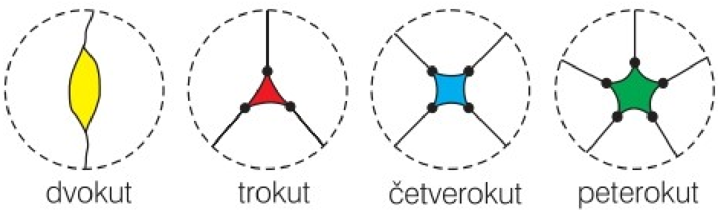


Slika 4.7: Prikaz jednog Kempeovog lanca

Teorem 4.5. *Svaku kartu možemo obojiti najviše s pet boja tako da su susjedne regije obojane različitim bojama.*

Iako je taj teorem "slabiji", važan je u daljnjim pokušajima dokazivanja. Kasniji pokušaji dokazivanja teorema o četiri boje podijelili su matematičare u dvije skupine: oni koji su se usmjerili na pronalaženje *neizbježnih skupova* i oni koji su se usmjerili na pronalaženje *reducibilnih konfiguracija*.

Skup regija prikazanih na slici 4.8 naziva se neizbježan skup. Ideja neizbježnih skupova temelji se na teoremu 4.1. Neka je skup A skup koji sadrži vrhove sa stupnjem manjim od šest. Tada je A neizbježan skup u proizvoljnom planarnom grafu. Matematičari koji su se bavili ovom idejom, tražili su neizbježne skupove koji su produženci od skupa A.



Slika 4.8: Neizbježni skup [preuzeto iz [5]]

Preostali matematičari proučavali su *najmanje uljeze* te su prateći Kempeov dokaz zaključili da najmanji uljez ima barem 13 regija. Reducibilnu konfuguraciju definiramo kao skup regija koje se mogu pojaviti u najmanjem uljezu. Dakle, za potpun dokaz bilo je potrebno dokazati da je *peterokut* (regija koja ima pet susjeda) reducibilan. Međutim, pokazalo se da je to bilo izuzetno teško dokazati.

Tadašnji pokušaji dokazivanja teorema o četiri boje, tj. pronalaženja neizbježnih skupova i reducibilnih konfiguracija bili su međusobno neovisni, a prvi značajniji napredak ostvaren je korištenjem *izbacivanja*, pristupa u kojem se planarni graf promatra kao sustav sličan električnoj mreži, gdje su vrhovi pozitivnog i negativnog naboja.

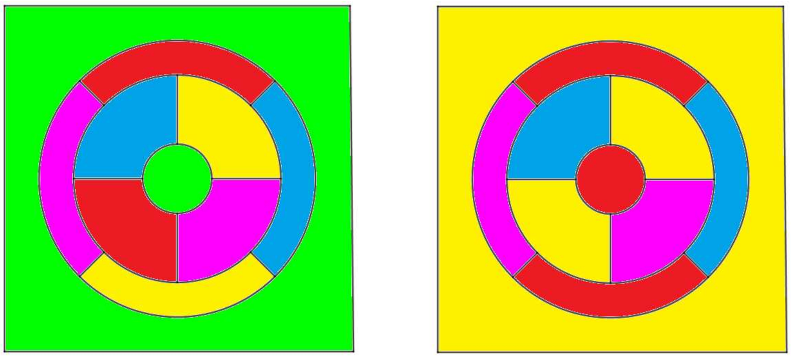
Metoda izbacivanja temelji se na pretpostavci da se teorem o četiri boje može dokazati ako se pronađe neizbježni skup reducibilnih konfiguracija. To je ujedno i prvi pokušaj dokazivanja teorema koji objedinjuje dva dotadašnja pristupa. Pronalaženjem takvog skupa, dokazalo bi se da svaka karta mora sadžavati barem jednu od konfiguracija iz neizbježnog skupa, a kako je svaka od tih konfiguracija reducibilna, ona ne može biti dio najmanjeg uljeza. Stoga najmanji uljezi ne postoje pa bi toerem o četiri boje bio dokazan.

Heesch i Dürre prvi pokušavaju pronaći takav skup, a u testiranju reducibilnosti različitih konfiguracija prvi puta koriste računalo (bez kojeg dokaz nije ni moguće provesti). Na problemu nastavljaju raditi Haken i Appel, koji su uspjeli napraviti program za traženje neizbježnih skupova reducibilnih konfiguracija. Njihov se dokaz konačno svodi na provjeravanje reducibilnosti u 1936 slučaja, a iako ga mnogi matematičari nisu smatrali valjanim, dokaz je bio točan. Također i danas mnogi matematičari ovaj dokaz ne smatraju valjanim upravo zbog uloge računala u njegovoj provedbi.

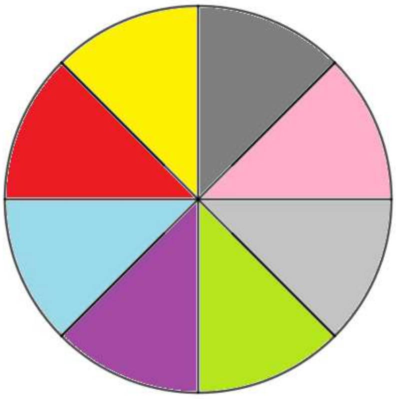
Kao što je već spomenuto, pokušaji dokazivanja ili opovrgavanja ovog teorema bili su neuspješni. Postoje dva poznata kontraprimjera, a koji to zapravo nisu. U prvom kontraprimjeru pokušava se nacrtati jedna regija koja dodiruje sve ostale regije. U tom slučaju, preostale regije morali bismo obojiti s tri boje (jer je teorem o četiri boje uvijek točan). Međutim, ako se koncentriramo samo na jednu veliku regiju, promakne nam da preostale tri regije možemo obojati koristeći samo tri boje. Primjer je napravljen po uzoru na [6] i prikazan na slici 4.9.

Drugi kontraprimjer kosi se s pretpostavkom teorema tako da koristi regiju koja se sastoji od dijelova koji se međusobno ne dodiruju ili ne dopušta da različito obojimo regije koje se dodiruju u samo jednoj točki. Primjer je prikazan na slici 4.10.

Pogledajmo u sljedećem potpoglavlju kako teorem o četiri boje možemo predstaviti učenicima kao dodatnu temu u nastavi matematike.



Slika 4.9: Kontraprimjer koji to zapravo nije



Slika 4.10: Kontraprimjer koji to zapravo nije 2

4.3 Problem četiri boje u nastavi matematike

Problem bojanja karte prikladan je za istraživanje u nastavi jer je intuitivno jasan i lako razumljiv učenicima, a možemo ga predstaviti i učenicima mlađe dobi. Kroz rješavanje spomenutog problema, učenici će razvijati svoje kritičko mišljenje, razmjenjivati ideje, ali i razvijati svoje sposobnosti rješavanja problema. Također, učenici će raznim strategijama pokušati doći do rješenja pa će tako razvijati logičko mišljenje. Važno je da učenici međusobno surađuju i razmjenjuju strategije unutar razreda odnosno skupina.

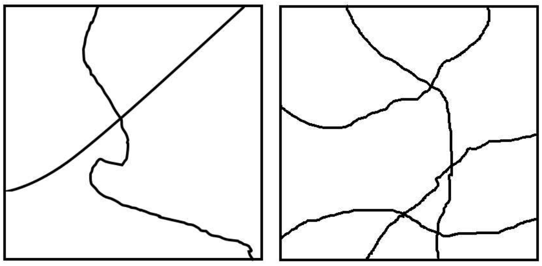
Prije same aktivnosti nastavnik treba opisati i demonstrirati problem na kojem će učenici raditi. Za demonstracijski primjer može se iskorisiti mapa šahovske ploče kod koje su nam potrebne samo dvije boje kako bismo je obojali.

Aktivnost *Pomozimo kartografu u izradi karata!*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da je svaku (zemljopisnu) kartu moguće obojiti s najviše četiri boje.

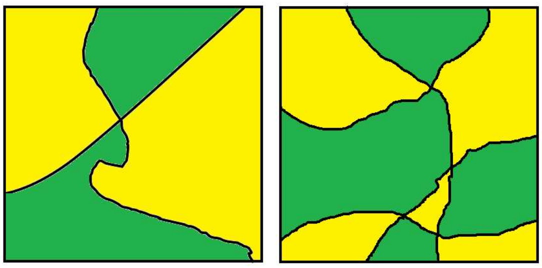
Ova aktivnost prikladna za učenike osnovne škole, a može se raditi već i u nižim razredima. Učenicima možemo zadati sljedeći zadatak:

Zadatak 1. Obojite karte sa slike 4.11 sa što manje različitih boja tako da susjedne zemlje nisu iste boje. Ako se dvije zemlje dodiruju samo u točki, one ne dijele granicu pa stoga mogu biti obojane istom bojom.



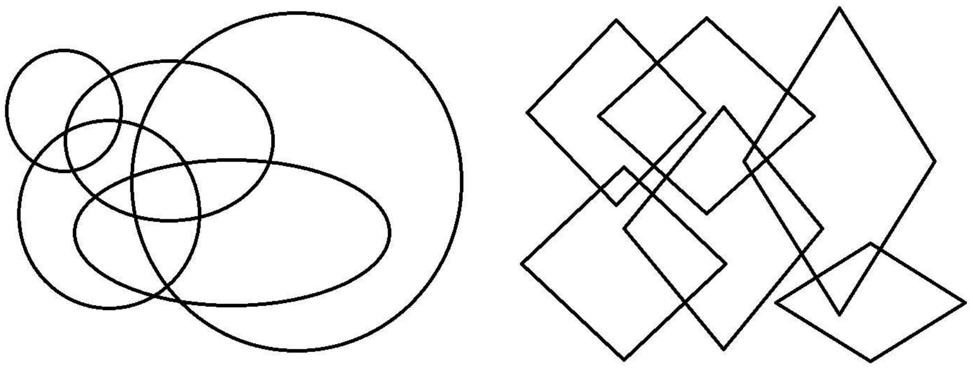
Slika 4.11: Karte za bojanje

Rješenje i diskusija: Očekuje se da će učenici uočiti da se obje dane karte mogu obojati s najviše dvije boje. Također je moguće da će učenici za bojanje trebati više boja pa ih treba razuvjeriti da su za obje karte sa slike 4.11 ipak dovoljne samo dvije boje. Primjer učeničkog rješenja je na slici 4.12.



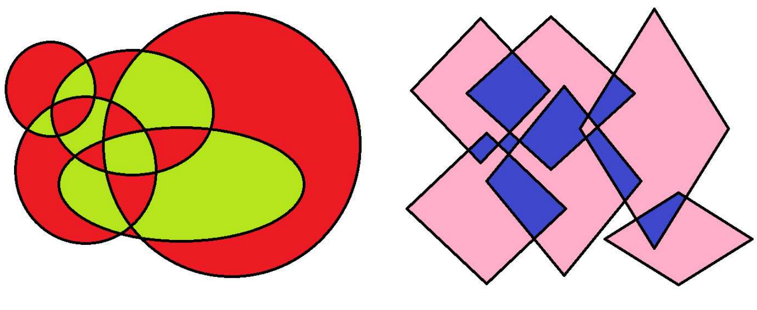
Slika 4.12: Primjer učeničkog rješenja zadatka 1

Zadatak 2. Obojite mape sa slike 4.13 sa što manje različitih boja tako da susjedne regije nisu iste boje. Ako se dvije regije dodiruju samo u točki, one ne dijele granicu pa stoga mogu biti obojane istom bojom.



Slika 4.13: Predložak za bojanje

Rješenje i diskusija: Učenici će i ovdje uočiti da je zadane mape moguće obojiti s najviše dvije boje. Moguće je da će neki učenici koristiti i više boja pa ih treba razuvjeriti kako bi uvidjeli da su nam zaista dovoljne samo dvije boje. Primjer mogućeg učeničkog rješenja nalazi se na slici 4.14.

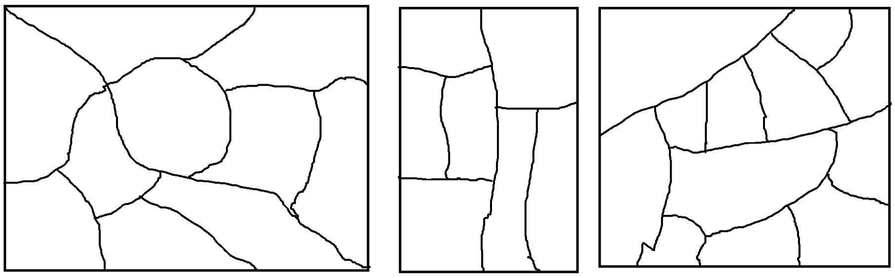


Slika 4.14: Primjer učeničkog rješenja zadatka 2

Kartu koju je moguće obojiti sa samo dvije boje možemo kreirati tako da crtamo zatvorene petlje (bilo kojih oblika) jedne preko drugih. Primjeri takvih karata nalaze se na slici 4.13. Učenici mogu i sami kreirati ovakve mape i tako eksperimentirati s raznim oblicima i zatvorenim petljama.

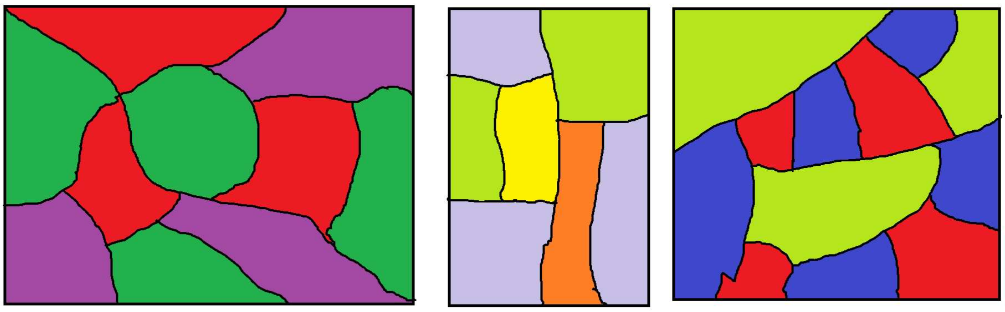
Nakon prethodnih zadataka učenici dobivaju karte kod kojih dvije boje više neće biti dovoljne. Učenicima će za bojanje karata sa slike 4.15 biti potrebne najmanje tri boje. Učenici dobivaju sljedeći zadatak:

Zadatak 3. Obojite karte sa slike 4.15 sa što manje različitih boja tako da susjedne zemlje nisu iste boje. Ako se dvije zemlje dodiruju samo u točki, one ne dijele granicu pa stoga mogu biti obojane istom bojom.



Slika 4.15: Karte za bojanje 2

Rješenje i diskusija: Učenici će uočiti da kod ovih karata dvije boje više nisu dovoljne. Također će uočiti da za bojanje karata sa slike 4.15 trebaju najmanje tri boje. Također diskutiramo s učenicima o odabiru boja za pojedine karte. Primjer učeničkog rješenja nalazi se na slici 4.16. Nakon svih riješenih zadataka, diskutiramo s učenicima o odabiru boja



Slika 4.16: Primjer učeničkog rješenja zadatka 3

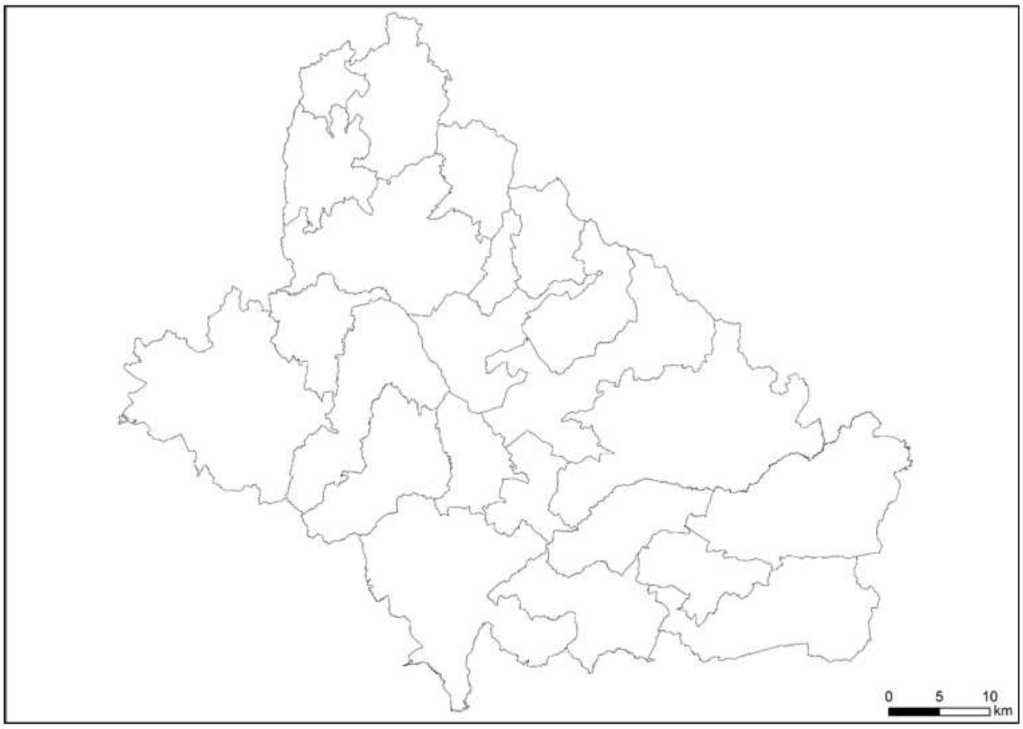
boja za pojedine karte. Važno je potaknuti učenike da svojim riječima pokušaju objasniti koliko im je boja bilo potrebno za pojedini zadatak i zašto.

S učenicima predmetne nastave, od petog do osmog razreda, možemo raditi na sličan način, ali možemo zadati kompliciranije mape (karte) s više područja za bojanje. Za potrebe ove aktivnosti koriste se mape županija u Hrvatskoj i mape općina u hrvatskim županijama.

Aktivnost *Obojimo Hrvatsku!*

Cilj aktivnosti: Učenici će otkriti da je svaku (zemljopisnu) kartu moguće obojiti s najviše četiri boje.

Zadatak 1. Dane su karte hrvatskih županija podijeljenih na općine. Obojite karte sa slike 4.17 i slike 4.18 sa što manje boja tako da susjedne općine nisu iste boje. Ako se dvije općine dodiruju samo u točki, one ne dijele granicu pa stoga mogu biti obojane istom bojom.



Slika 4.17: Predložak za bojanje: Bjelovarsko-bilogorska županija

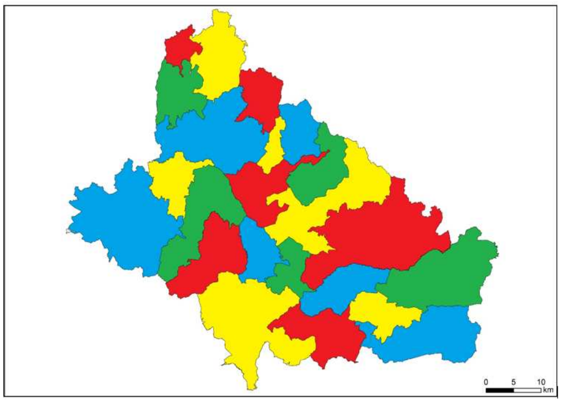
Slika 4.18: Predložak za bojanje: Istarska županija

Rješenje i diskusija: Učenici će uočiti da za bojanje trebaju najmanje četiri boje. Diskutiramo s učenicima o odabiru boja i potičemo učenike da objasne zašto su im bile potrebne samo četiri boje. Također ih potičemo da objasne strategije koje su koristili prilikom bojanja. Neke od mogućih strategija su:

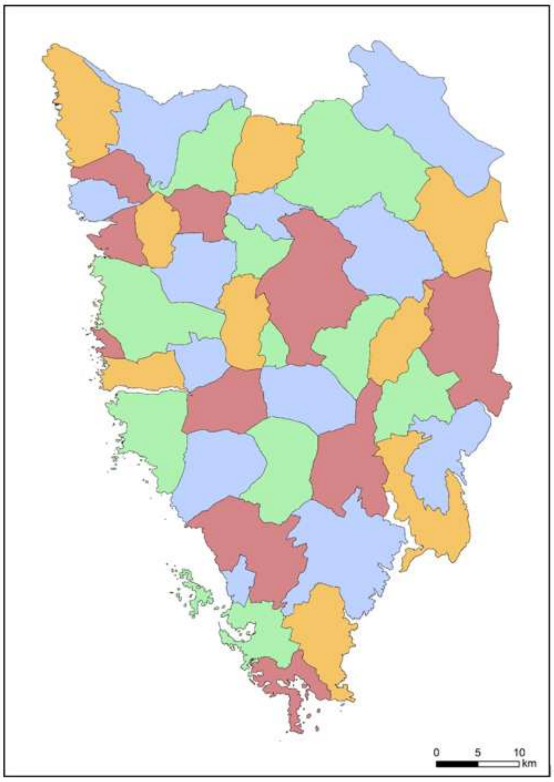
1. Bojanje "po redu" (a ne nasumično).

2. Bojanje se započinje s dvije boje i provodi koliko je moguće. Treća boja se dodaje kada dvije boje više nisu dovoljne. Koriste se tri boje sve dok se ne pokaže potreba za četvrtom.

Primjeri učeničkih rješenja dani su na slikama 4.19 i 4.20.

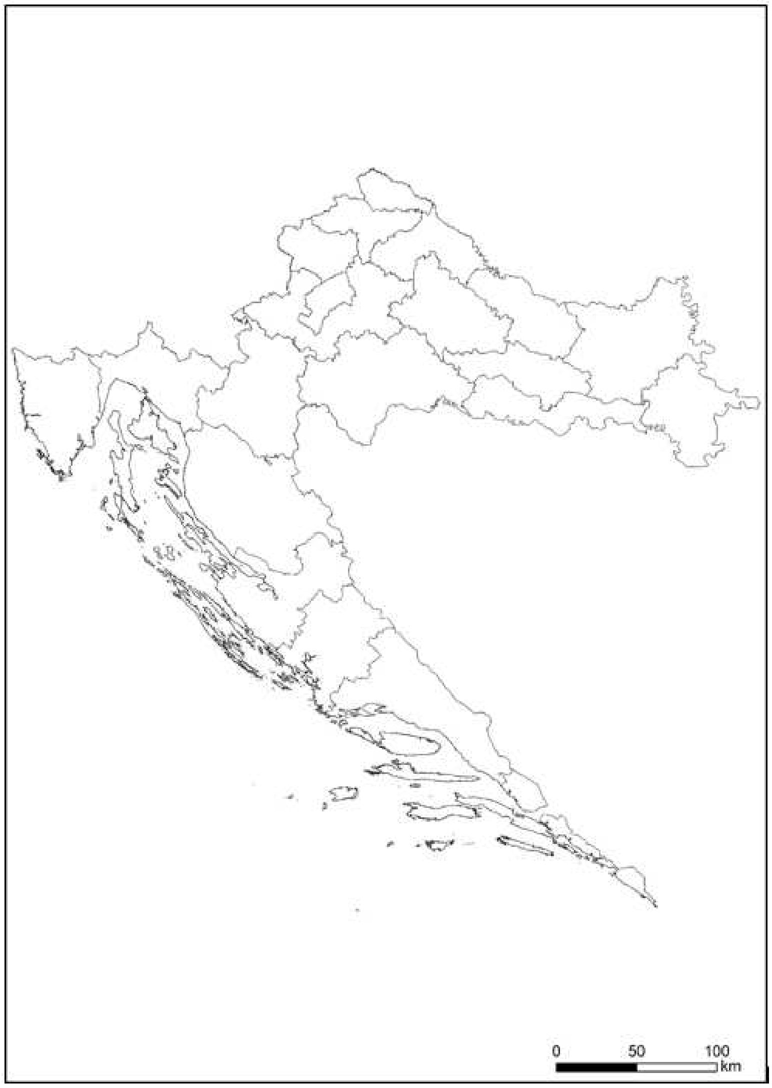


Slika 4.19: Primjer učeničkog rješenja: Bjelovarsko-bilogorska županija



Slika 4.20: Primjer učeničkog rješenja: Istarska županija

Zadatak 2. Dana je karta Hrvatske podijeljena na županije. Obojite zadanu kartu sa slike 4.21 sa što manje boja tako da susjedne županije nisu iste boje. Ako se dvije županije dodiruju samo u točki, one ne dijele granicu pa stoga mogu biti obojane istom bojom.



Slika 4.21: Predložak za bojanje: Republika Hrvatska

Rješenje i diskusija: Ponavljamo diskusiju iz prethodnog zadatka i očekujemo da učenici utvrde zaključeno. Primjer učeničkog rješenja dan je na slici 4.22.

Nakon provedene aktivnosti bojanja s učenicima još jednom komentiramo broj boja koje su koristili za svaki zadatak i strategije koje su birali prilikom rješavanja zadataka.

Slika 4.22: Primjer učeničkog rješenja: Republika Hrvatska

Nakon ove aktivnosti možemo učenicima zadati zadatak u kojem sami pokušavaju sastaviti mape (karte) koje je moguće obojati s dvije, tri ili četiri boje. Također možemo i zadati da pokušaju sastaviti kartu koja zahtijeva upotrebu pet različitih boja. Kako je dokazano da bilo koju mapu možemo obojiti sa samo četiri različite boje, učenici ovaj zadatak neće uspjeti riješiti jer uvijek možemo pronaći rješenje koje zahtijeva upotrebu samo četiri različite boje.

Nakon što provedemo prve dvije aktivnosti, učenicima pokažemo da svaku mapu možemo prikazati kao planarani graf (prikazano na 4.2). Objasnimo učenicima da planarni graf prikazujemo u ravnini tako da se njegovi bridovi sijeku samo u vrhovima. Kroz raspravu s učenicima, dolazimo do rješenja da svaka zemlja (regija) predstavlja vrh grafa, a svaka granica brid grafa. Kada svi učenici shvate kako se iz dobvene mape dobiva planarni graf, s učenicima provodimo sljedeću aktivnost.

Aktivnost *Iz jednog prikaza u drugi!*

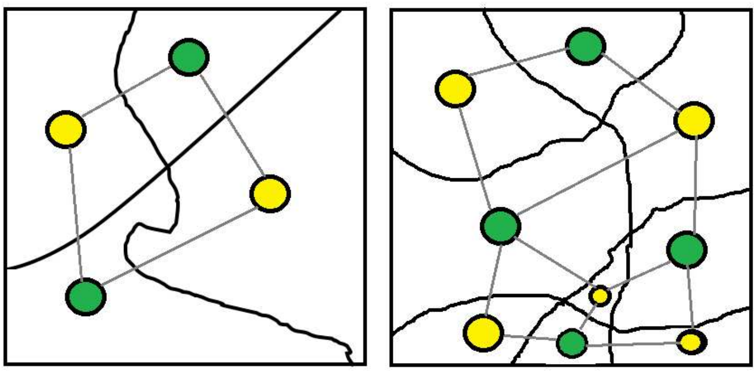
Cilj aktivnosti: Učenici će prikazivati dane karte planarnim grafovima i obrnuto.

Zadatak 1. Mape sa slike 4.11 te 4.15 prikažite planarnim grafovima. Obojite dobivene planarne grafove tako da boja svakog vrha odgovara boji svake regije.

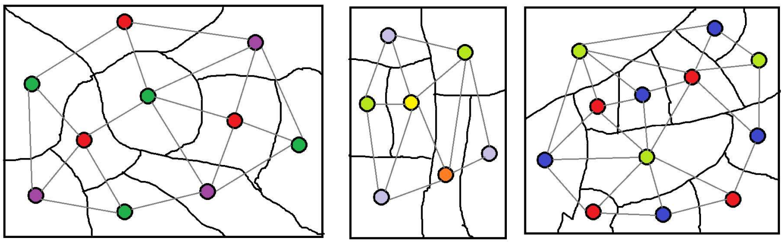
Rješenje i diskusija: Očekuje se da će za mape sa slike 4.11 učenici lako doći do rješenja te da će dobiti ispravne planarne grafove. Kod mapa sa slike 4.15 učenici bi mogli imati više problema jer je na slikama više regija, ali i više različitih boja. Nastavnik treba prodiskutirati s učenicima o odabiru strategije rješavanja zadatka. Jedna od mogućih strategija može biti sljedeća:

1. Svaku regiju označimo točkom (označimo krugom).
2. Spajamo susjedne točke redom sa svim susjedima.
3. Obojimo dobiveni graf tako da boje pojedinih vrhova odgovaraju bojama odgovarajućih regija.

Primjeri mogućih učeničkih rješenja nalaze se na slici 4.23 i slici 4.24.



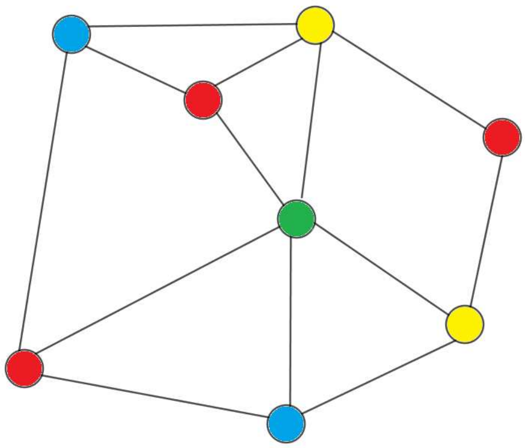
Slika 4.23: Od karte do planarnog grafa 1



Slika 4.24: Od karte do planarnog grafa 2

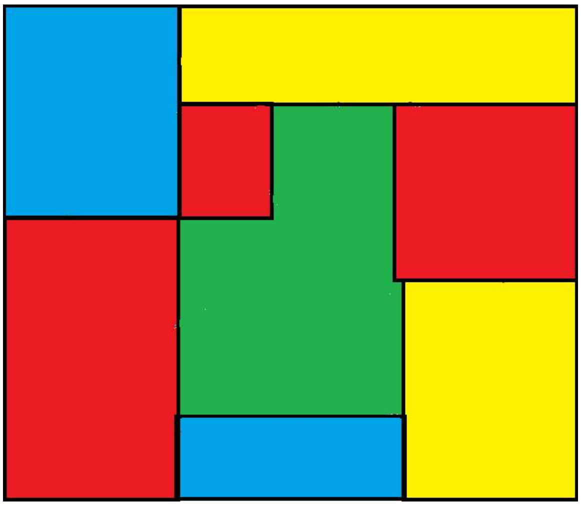
Nakon prvog zadataka, pitamo učenike možemo li napraviti obrnuto: ako imamo zadan planarni graf, možemo li za njega napraviti odgovarajuću kartu? Očekuje se da učenici potvrdno odgovore na pitanje, nakon čega slijedi sljedeći zadatak.

Zadatak 2. Za dobiveni planarni graf prikazan na slici 4.25 nacrtajte kartu. Obojite dobivenu kartu tako da boja svake regije odgovara boji svakog vrha planarnog grafa.



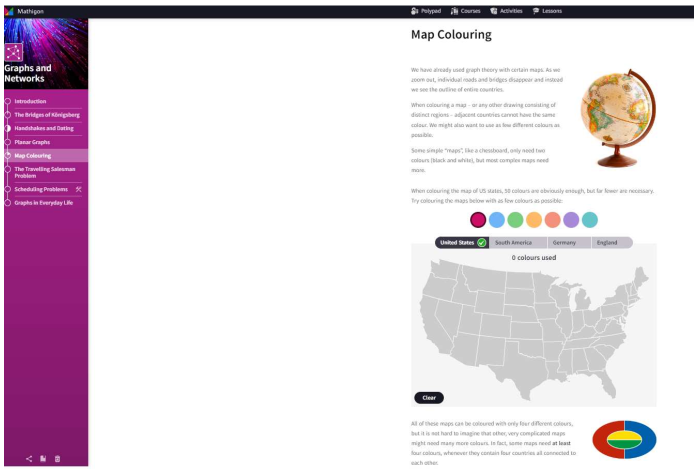
Slika 4.25: Planarni graf

Rješenje i diskusija: Karte koje će učenici dobiti mogu se razlikovati (svatko će regije nacrtati drugačije). Treba diskutirati s učenicima zašto je svaka takva karta dobra. Također treba potaknuti učenike da opišu način na koji su radili i da ponude neke svoje načine razmišljanja. Primjer učeničkog rješenja nalazi se na slici 4.26.



Slika 4.26: Primjer učeničkog rješenja za graf sa slike 4.25

Za ovaj problem također ima mnogo digitalnih sadržaja pomoću kojih učenici mogu raditi samostalno. Jedan takav primjer nalazi se na web stranici *Mathigon* na linku https://mathigon.org/course/graph-theory/map-colouring.
Ponuđene su različite karte i sedam različitih boja. Zadatak je da se dane karte oboje sa što manje boja. Postoji i hrvatska verzija aktivnosti, međutim nije u potpunosti uređena. Primjer aktivnosti nalazi se na slici 4.27.



Slika 4.27: Mathigon: Problem bojanja

Bibliografija

[1] Witten I. Fellows M. Bell, T., *Classic Computer Science Unplugged: Graph Colouring*, (2021), https://classic.csunplugged.org/activities/graph-colouring/.

[2] Britanicca, *Koningsberg bridge problem*, (2010), https://www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem.

[3] M. Buchler, *Spock, Euler, and Madison: Graph theory in the Classroom*, (2013), https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1143&context=honors.

[4] Mammana M. F. Ferrarello, D., *Graph Theory in Primary, Middle and High School*, (2018), https://www.researchgate.net/publication/321755401_Graph_Theory_in_Primary_Middle_and_High_School.

[5] S.. Gračan, *Četiri su dovoljne*, (2009), https://mis.element.hr/fajli/715/41-08.pdf.

[6] Klobučar A. Gregurić I, *Problem četiri boje*, (2010), https://hrcak.srce.hr/file/89408.

[7] J. L. Hein, *Discrete Structures, Logic, and Computability*, (2017), https://books.google.hr/books?id=kmaBCwAAQBAJ&pg=PA703&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

[8] J. Morris, *Combinatorics: Subgraphs, complete graphs, and the Handshaking Lemma*, (2023), https://www.cs.uleth.ca/~morris/Combinatorics/html/sect_graph-theory-Deletion.html.

[9] I. Nakić, *Diskretna matematika*, (2011), https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf.

[10] M. O. Pavčević, *Uvod u teoriju grafova*, Element, 2006.

[11] L. A. Robinson, *Graph theory for the Middle School*, (2006), https://dc.etsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3590&context=etd.

[12] L. Rogers, *The Four Colour Theorem*, (2011), https://nrich.maths.org/6291.

[13] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

Sažetak

Ovaj diplomski rad bavi se teorijom grafova, granom matematike koja proučava strukturu i karakteristike grafova te njenom primjenom u dodatnoj nastavi matematike. Na početku rada predstavljeni su osnovni pojmovi i definicije potrebne za razumijevanje rada. U drugom poglavlju fokus je na problemu sedam mostova grada Königsberga, koji je riješio Leonhard Euler u prvoj polovici 18. stoljeća te tako utemeljio teoriju grafova. Ovdje su također dane definicije i teoremi vezani uz Eulerove i skoro-Eulerove grafove. U trećem poglavlju pobliže je predstavljen problem rukovanja. Četvrto poglavlje bazira se na problemu bojanja karti odnosno možemo li (zemljopisnu) kartu obojiti s najviše četiri boje tako da su susjedne zemlje različito obojane? Kroz rad se ističe važnost proučavanja teorije grafova u matematici i kako teoriju grafova približiti učenicima raznih uzrasta. Teorija grafova ne pripada redovnoj nastavi matematike pa se aktivnosti predložene u radu mogu iskoristiti na dodatnoj nastavi ili u sklopu matematičkih projekata.

Summary

This thesis deals with graph theory, a branch of mathematics that studies the structure and characteristics of graphs, as well as its application in additional mathematics education. The introductory section presents basic concepts and definitions necessary for understanding the thesis. The second chapter focuses on the problem of the seven bridges of the city of Königsberg, which was solved by Leonhard Euler in the first half of the 18th century, thus laying the foundation for graph theory. Here, definitions and theorems related to Eulerian and semi-Eulerian graphs are also given. In the third chapter, the handshaking problem is discussed in more detail. The fourth chapter is based on the problem of map coloring, that is, whether we can color a (geographical) map with a maximum of four colors so that neighboring countries are colored differently. The thesis emphasizes the importance of studying graph theory in mathematics and how to make it more accessible to students of various ages. Graph theory does not belong to the regular mathematics curriculum, so the suggested activities in the thesis can be used in additional teaching or as part of mathematical projects.

Životopis

Rođena sam 20. veljače u Zaboku. Završila sam Osnovnu školu Lijepa naša u Tuhlju, a nakon toga sam upisala Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku, smjer jezična gimnazija. Preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički upisala sam na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakultetua Sveučilišta u Zagrebu 2017. godine. 2021. godine završila sam preddiplomski studij te sam upisala diplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički na istom fakultetu. Tokom studija radila sam kao student u Centru za poslovnu agenciju Prizma CPI u Zagrebu i u Ericsson Nikola Tesla servisima. Sudjelovala sam u raznim projektima, uključujući i metodičku radionicu *Inquiry based activities for the learning STEM*.