Quineovi ''Novi temelji'' teorije skupova

Zlatunić, Gabrijela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Gabrijela Zlatunić

QUINEOVI „NOVI TEMELJI” TEORIJE SKUPOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vedran Čačić

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mom anđelu čuvaru — nadam se da si ponosna.

Sadržaj

Uvod

Na pitanje što je teorija skupova i što ona predstavlja u svijetu matematike, gotovo svatko daje odgovor temeljen na jednom sustavu, odnosno jednom načinu zadavanja te teorije. Zermelo–Fraenkelova aksiomatizacija postala je i ostala sinonim pojmu teorije skupova, barem laicima koji nisu htjeli istraživati postoji li jednostavniji, elegantniji pristup. Ne umanjujući veličinu teorije na kojoj se danas zasniva skoro svaka grana matematike, želimo ukazati na to da postoje alternative stavljajući jednu od njih pod reflektor.

Matematičar i filozof Willard van Orman Quine 1937. godine objavljuje članak *New Foundations for Mathematical Logic* u časopisu *American Mathematical Monthly* predstavljajući drugačiju aksiomatski zadanu teoriju skupova, danas poznatu pod nazivom „New Foundations" ili kratko NF. Quine u svojoj teoriji dopušta postojanje skupa svih rednih brojeva, skupa svih kardinalnih brojeva i, najkontroverznije, skupa svih skupova te uspijeva izbjeći paradokse koji su u tom razdoblju rušili velike matematičke teorije. Da su takvi objekti obično bili izvor problema govori činjenica da tadašnje dvije velike teorije, Zermelo–Fraenkelova teorija skupova i Russellova teorija tipova, niječu postojanje istih[1] — izbjegavajući tako odgovore na velika pitanja poput onog u kojim okolnostima ti objekti uistinu dovode u pitanje konzistentnost ili, bolje, adekvatnost sustava. Neočekivano, Quine svoju teoriju zasniva upravo na dvjema teorijama navedenim u prethodnoj rečenici, uzimajući iz svake ono što mu odgovara — tipizaciju kao način ograničavanja formula iz jedne i neovisnost varijabli o tipu te intuitivno zadavanje pojmova iz druge teorije.

Čitatelj se može pitati što je Quinea potaknulo na razvoj ove teorije ili što ga je toliko smetalo u već postojećima da odluči tražiti novu. Neki su razlozi više nego očiti: sustavi pretrpani složenim, neintuitivnim aksiomima, korisno primjenjivim tek na nekolicinu u moru objekata, sustavi zbog veličine podložni određenim paradoksima koji dovode u pitanje konzistentnost teorije, sustavi koji ne slijede stare zahtjeve simetričnosti[2] ili sustavi koji

[1] Russelova teorija tipova zapravo ne niječe postojanje univerzalne klase, ali ju, s dosta opreza, veže za određeni tip. Dakle, postoji univerzalna klasa svakog pojedinog tipa.

[2] Prevođenje sustava u jezik klasične logike koji traži simetriju formule i njene negacije, što u Zermelo–Fraenkelovoj teoriji skupova ne vrijedi — primjerice, ako je $\{x \mid \phi\}$ skup, onda $\{x \mid \neg\phi\}$ ne može biti skup. Obrat općenito ne vrijedi.

objekte diskriminiraju po veličini se na prvi pogled ne čine kao valjani temelji matematike.

Vođen time, Quine svijetu predstavlja teoriju, skromnu i elegantnu s jednim aksiomom i jednom shemom aksioma, a opet tako silnu da i taj mali broj osnovnih elemenata uspijeva izgraditi sve, ili kao što će se kasnije pokazati, gotovo sve što se od takve teorije očekivalo. On, jednostavno rečeno, promatra samo „lijepe" (stratificirane) formule koje, po njemu, generiraju skupove, a sve kompliciranije izraze svrstava u svijet klasa, čime vraća značaj klasičnom pristupu uvažavajući zakon simetrije (negacija stratificirane formule je stratificirana, odnosno komplement skupa je opet skup).

Kako onda tako jednostavan, a tako moćan sustav nije nadišao ostale i zasjeo na tron? Kontroverzni pristup nije naišao na odobravanje i podršku tadašnjih matematičkih velikana — možda zato što je upravo on pokazivao neeleganciju njihovih pristupa, a možda zato što se konzistentnost te teorije nije mogla (i još uvijek ne može[3]) dokazati. Veliki udarac teoriji zadaje švicarski matematičar Ernst Specker koji 1953. godine u *Proccedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* daje dokaz da u njoj ne vrijedi aksiom izbora. Bio bi to kraj teorije, odnosno njenog proučavanja, da Ronald B. Jensen 1969. godine nije predstavio modificiranu verziju Quineove teorije. On teoriji „New Foundations" dodaje **atome** nazivajući je „New Foundations with Urelements" ili NFU. Ta je teorija relativno konzistentna s Peanovom aritmetikom, a aksiom izbora je nezavisan i relativno konzistentan s njom — pa dodavanjem aksioma beskonačnosti i, najbitnije, aksioma izbora dobijemo ponovo teoriju relativno konzistentnu s NFU.

U ovom radu najprije ćemo, slijedeći [1], zadati teoriju NF i prikazati definicije nekoliko bitnih pojmova želeći naglasiti razlike u definiranju istih u okvirima ove teorije i njihovom današnjem „usađenom" shvaćanju nastalom pod utjecajem teorije ZF. Zatim ćemo, prateći povijesni razvoj, predstaviti Speckerov dokaz dovoljno detaljno da čitatelj može shvatiti njegovu veličinu i posljedice te na kraju predstaviti teoriju NFU naglašavajući samo razlike u odnosu na NF.

[3]Postoji Gabbayev dokaz [4] koji nije još provjeren i objavljen u *peer-reviewed* časopisu, ali se čini da nema bitnijih grešaka i da bi pitanje konzistentnosti teorije NF konačno moglo biti riješeno.

Poglavlje 1

Teorija NF

1.1 Stratificirane formule i tipizacije

Quine na početku svog rada [7] navodi da se svaki dio matematike može prevesti u logiku. Preciznije, smatrao je da je svaki izraz sastavljen od logičkih i matematičkih simbola moguće prevesti u čisti logički izraz, a onda posljedično, sve izgraditi u jedinstvenom svijetu logike. Iako navodi vrijednost i važnost logike kao forme koju su Whitehead i Russell koristili u razvoju *Principiae* [9], kao pravi pobornik čistog jezika i još čišće teorije naglašava da se mogao koristiti mnogo oskudniji skup logičke notacije. Kako je teorija nastala prije više od pola stoljeća, njegova notacija ne živi u današnjem svijetu pa ćemo u navođenju sintakse potrebne za razvoj teorije pratiti ideju prevodeći notaciju u danas čitljiviju i razumljiviju.
Naglasimo da cijelo prvo poglavlje, do na razliku između teorija NF i NFU, vjerno slijedi radnu verziju disertacije [1] T. Adlešića uzimajući istu kao najdetaljniji i najbolje strukturiran izvor.

Definicija 1.1.1. ***Alfabet*** *teorije* NF *sadrži:*

- *(individualne) varijable:* $x, y, z, \ldots$*;*
- *logičke simbole:* $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \exists, \forall$*;*
- *nelogičke (relacijske) simbole:* $\in, =$*;*
- *pomoćne simbole (zagrade):* $($, $)$.

Definicija 1.1.2. ***Atomarna formula*** *je svaka riječ oblika* $x \in y$ *ili* $x = y$*,*
gdje su x *i* y *varijable alfabeta teorije* NF.

Definicija 1.1.3. *Pojam* ***formule*** *definiramo rekurzivno:*

1. *Svaka atomarna formula je formula.*
2. *Ako je ϕ formula, onda je $\neg\phi$ formula.*
3. *Ako su ϕ i μ formule, onda su $(\phi \wedge \mu)$, $(\phi \vee \mu)$, $(\phi \rightarrow \mu)$ i $(\phi \leftrightarrow \mu)$ formule.*
4. *Ako je x varijabla i ϕ formula, onda su $\exists x\, \phi$ i $\forall x\, \phi$ formule.*

Postavljeni temelji u potpunosti se oslanjanju na logiku prvog reda. Valja navesti da nije riječ samo o sintaksnom prijenosu osnovnih pojmova, nego i sematičkom pa će čitatelju odmah biti jasno kakve vrijednosti poprimaju individualne varijable (kako to biva u aksiomatskom zadavanju teorija prvog reda, varijable su predstavnici objekata opisanih teorijom — u našem slučaju, skupova). I ostali simboli, logički i nelogički (poput jednakosti), preuzeti iz logike prvog reda imaju jasnu standardnu interpretaciju. Novost predstavlja samo značenje dano simbolu „biti element", odnosno $\in$, kojeg interpretiramo ovako: x kao objekt (skup) pripada skupu y ili y sadrži element x.

Slobodni (vezani) nastup varijable u formuli definiramo na standardni način. U svakoj atomarnoj formuli svaki nastup varijable je slobodan. U formulama oblika $\forall x\, \phi$ i $\exists x\, \phi$ svaki nastup varijable x je vezan. Ako su ϕ i μ formule te x i y različite varijable takve da x ima slobodni (vezani) nastup u formuli ϕ, odnosno μ, tada je taj nastup varijable x slobodan (vezan) i u formulama $\neg\phi$ (odnosno $\neg\mu$), $(\phi \wedge \mu)$, $(\phi \vee \mu)$, $(\phi \rightarrow \mu)$, $(\phi \leftrightarrow \mu)$, $\exists y\, \phi$ (odnosno $\exists y\, \mu$), $\forall y\, \phi$ (odnosno $\forall y\, \mu$). Kažemo da je varijabla x **slobodna** u formuli ϕ ako postoji barem jedan njen slobodni nastup, a ako pak postoji barem jedan njen nastup u formuli ϕ i nijedan nije slobodan, kažemo da je **vezana**. S $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ označavamo da formula ϕ nema slobodnih varijabli osim $x_1, x_2, \ldots, x_n$. To ne znači nužno da su te varijable sve slobodne u formuli ϕ.

U nastavku definiramo stratificirane formule koje Quine uvodi po uzoru na teoriju tipova. Smatrajući ih podobnima za izgradnju skupova, ističe ih u teoriji pritom ne ignorirajući ostale (nestratificirane) formule. Njih jednostavno ne koristi za izgradnju novih skupova. U svom članku [7, str. 79] navodi kako se teorija tipova istaknula upravo zbog jednostavnosti zanemarivanja nestratificiranih formula i time izbjegavanja različitih paradoksa — naglašavajući da je njegov sustav uspio isto bez nepotrebnog isključivanja, samo s pravom terminologijom i preciznijim restrikcijama (do kojih ćemo doći).

Definicija 1.1.4. *Neka je ϕ formula. Kažemo da je ϕ* ***stratificirana*** *ako postoji preslikavanje tp_ϕ sa skupa varijabli $Var(\phi) := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ koje grade formulu ϕ u skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ takvo da*

- *za svaku potformulu formule ϕ oblika $x = y$ vrijedi $tp_\phi(x) = tp_\phi(y)$, a*
- *za svaku potformulu formule ϕ oblika $x \in y$ vrijedi $tp_\phi(y) = tp_\phi(x) + 1$.*

Broj $tp_\phi(x)$ zovemo ***tip*** *varijable x u formuli ϕ, a preslikavanje tp_ϕ koje zadovoljava navedene uvjete zovemo* ***tipizacija*** *formule ϕ.*

Napomena 1.1.5. *Skupovi $Var(\phi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $\mathbb{N}$, spomenuti u definiciji 1.1.4, zapravo su skupovi u metateoriji i osim naziva nemaju ništa zajedničko sa skupovima o kojima naša teorija* NF *govori.*

Navedeni uvjeti se još nazivaju **uvjeti stratifikacije** za formulu ϕ pa možemo reći: formula je stratificirana ako za nju postoji preslikavanje koje zadovoljava uvjete stratifikacije.

Definicija 1.1.6. *Neka je ϕ formula. Kažemo da su varijable x i y iz $Var(\phi)$* ***atomarno povezane*** *i pišemo $x \parallel y$ ako je barem jedna od atomarnih formula $x \in y$, $y \in x$, $x = y$ ili $y = x$ potformula formule ϕ.*

Mi ćemo zapravo promatrati refleksivno i tranzitivno zatvorenje relacije $\parallel$ i označavati tu relaciju s $\parallel^*$. Detaljnije — ako je $x \parallel^* y$, znači da postoji konačno mnogo varijabli $z_1, z_2, \ldots, z_n$ takvih da vrijedi $x \parallel z_1 \parallel z_2 \parallel \ldots \parallel z_n \parallel y$ ili je varijabla y zapravo varijabla x. Kažemo da su x i y **povezane** varijable ako vrijedi $x \parallel^* y$.

Definicija 1.1.7. *Kažemo da je formula ϕ* ***povezana*** *ako su sve njezine varijable povezane.*

Lema 1.1.8. *Neka je ϕ stratificirana formula te tp_ϕ i tp'_ϕ tipizacije. Ako za $x, y \in Var(\phi)$ vrijedi $x \parallel^* y$, onda vrijedi $tp_\phi(x) - tp_\phi(y) = tp'_\phi(x) - tp'_\phi(y)$.*

Dokaz. Između varijabli formule ϕ definiramo relaciju R obzirom na tipizacije tp_ϕ i tp'_ϕ na sljedeći način: $x\ R\ y$ ako i samo ako je $tp_\phi(x) - tp_\phi(y) = tp'_\phi(x) - tp'_\phi(y)$.
Relacija R je:

- refleksivna: $tp_\phi(x) - tp_\phi(x) = 0 = tp'_\phi(x) - tp'_\phi(x)$.
- simetrična: Ako za x i y vrijedi $x\ R\ y$, odnosno $tp_\phi(x) - tp_\phi(y) = tp'_\phi(x) - tp'_\phi(y)$, onda očito vrijedi $tp_\phi(y) - tp_\phi(x) = -(tp_\phi(x) - tp_\phi(y)) = -(tp'_\phi(x) - tp'_\phi(y)) = tp'_\phi(y) - tp'_\phi(x)$, tj. $y\ R\ x$.

- tranzitivna: Ako za x, y, z vrijedi $x \ R \ y$ i $y \ R \ z$, tj. $tp_\phi(x) - tp_\phi(y) = tp'_\phi(x) - tp'_\phi(y)$ i $tp_\phi(y) - tp_\phi(z) = tp'_\phi(y) - tp'_\phi(z)$, onda je $tp_\phi(x) - tp_\phi(z) = tp_\phi(x) - 0 - tp_\phi(z) = (tp_\phi(x) - tp_\phi(y)) + (tp_\phi(y) - tp_\phi(z)) = (tp'_\phi(x) - tp'_\phi(y)) + (tp'_\phi(y) - tp'_\phi(y)) = tp'_\phi(x) - tp'_\phi(z)$, tj. $x \ R \ z$.

Dakle, R je relacija ekvivalencije. Očito R sadrži relaciju $\|$ — za sve x, y takve da $x \parallel y$ je $y \in x$, $x \in y$, $x = y$ ili $y = x$ potformula formule ϕ. Iz uvjeta stratifikacije lako vidimo jednakost traženih razlika i zaključujemo da je $x \ R \ y$. Kako je $\|^*$ najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži $\|$, mora biti $\|^* \subseteq R$. Dakle, $x \|^* y$ povlači $x \ R \ y$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Teorem 1.1.9. *Ako je $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ stratificirana i povezana formula, onda postoje cijeli brojevi $k_1, k_2, \ldots, k_n$ takvi da vrijedi: za svaku stratificiranu (ne nužno povezanu) formulu μ u kojoj je ϕ potformula i za svaku tipizaciju tp_μ formule μ vrijedi $k_i = tp_\mu(x_i) - tp_\mu(x_1)$, za sve $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Dokaz. Neka je tp_ϕ neka tipizacija za ϕ. Definiramo $k_i := tp_\phi(x_i) - tp_\phi(x_1)$. Neka je μ proizvoljna stratificirana formula u kojoj je ϕ potformula i neka je tp_μ proizvoljna tipizacija od μ. ϕ je potformula od μ pa je restrikcija tipizacije tp_μ na $Var(\phi)$ tipizacija od ϕ. Nadalje, ϕ je po pretpostavci povezana pa vrijedi $x_i \|^* x_1$, za svaki i, $1 \le i \le n$. Po lemi 1.1.8 vrijedi $tp_\mu(x_i) - tp_\mu(x_1) = tp_\mu \restriction_{Var(\phi)} (x_i) - tp_\mu \restriction_{Var(\phi)} (x_1) = tp_\phi(x_i) - tp_\phi(x_1) = k_i$, za svaki i, $1 \le i \le n$. $\square$

U nastavku smatramo da je svaka stratificirana formula ujedno i povezana bez posebnog naglašavanja (obično će iz zapisa formule biti jasno vidljiva povezanost).

1.2 Aksiomi i apstrakcijski termi

Cijela se teorija NF, kako smo u uvodu spomenuli, zasniva na dva aksioma koje Wagemakers u svom djelu [8] opisuje ovako: aksiom stratificirane komprehenzije, odnosno instanca takvog aksioma osigurava postojanje skupa svih elemenata koji zadovoljavaju stratificiranu formulu, dok aksiom ekstenzionalnosti utvrđuje jedinstvenost takvog skupa. Precizno:

Aksiom ekstenzionalnosti:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y). \tag{1.1}$$

Stratificirana komprehenzija: Za stratificiranu formulu $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ vrijedi

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \phi(z, x_1, \ldots, x_n)). \tag{1.2}$$

Budući da za danu stratificiranu formulu možemo definirati skup svih elemenata koji zadovoljavaju tu formulu te da je taj skup jedinstven (za danu formulu), za njega uvodimo posebnu notaciju — apstrakcijski term.

Definicija 1.2.1. *Neka je $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ stratificirana formula. Definiramo **apstrakcijski term** $t(x_1, \ldots, x_n)$ sa slobodnim varijablama $x_1, \ldots, x_n$ kao*

$$t(x_1, \ldots, x_n) := \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\}. \tag{1.3}$$

*Za term $t(x_1, \ldots, x_n) = \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$ kažemo da je **zadan** formulom $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$, a za skup kojeg taj term denotira kažemo da je **definiran** formulom $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$.*

Naglasimo da, ako apstrakcijske terme definiramo bez uvjeta stratificiranosti formule, „objekt" koji takav term određuje nije nužno skup, odnosno ne mora postojati skup čiji elementi su točno oni (skupovi) koji zadovoljavaju formulu. Objasnimo: aksiom stratificirane komprehenzije ne određuje kada nešto nije skup te ne možemo dati odgovor na pitanje što točno opisuje neki apstrakcijski term zadan nestratificiranom formulom. Ponekad će to biti prava klasa (kao $\{x \mid x \notin x\}$), a ponekad skup (kao $\{x \mid x \neq x \wedge x \in x\} = \emptyset$).

Apstrakcijski term uvodimo u jezik proširujući pojam (atomarnih) formula na sljedeći način: svaka (atomarna) formula osim varijabli može sadržavati apstrakcijske terme. Takve formule nazivamo **formulama u proširenom jeziku**. Pokažimo da ovako zadana proširenja jezika ne krše dosad uspostavljeni red, odnosno da se uvijek mogu eliminirati ne narušavajući semantiku.

Napomena 1.2.2. *Neka su $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ i $\mu(w, y_1, \ldots, y_m)$ stratificirane formule. Asptrakcijske terme koji se pojavljuju u (atomarnim) formulama eliminiramo na sljedeći način:*

1. $x \in \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\} :\Leftrightarrow \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$.
2. $x = \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\} :\Leftrightarrow \forall y(y \in x \leftrightarrow y \in \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\})$.
3. $\{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\} \in x :\Leftrightarrow (\exists y \in x)(y = \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\})$.
4. $\{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\} = \{z \mid \mu(z, y_1, \ldots, y_m)\} :\Leftrightarrow$
   $\forall x(\phi(x, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \mu(x, y_1, \ldots, y_m))$, *gdje je x nova varijabla.*

5. $\{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\} \in \{z \mid \mu(z, y_1, \ldots, y_m)\} :\Leftrightarrow$
   $\exists t(\mu(t, y_1, \ldots, y_m) \wedge t = \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\})$, *gdje je* t *nova varijabla.*

Iako govorimo samo o notacijskim promjenama kada spominjemo apstrakcijske terme, prethodna napomena daje naslutiti da ćemo, radi jednostavnosti i lakšeg praćenja rada, termima pridružiti svojstva koja posjeduje skup koji taj term opisuje. Također, želeći jednostavnije provjeravati stratificiranost formule u proširenom jeziku i izbjeći ponavljajuće eliminacije, pridružit ćemo tipove ne samo varijablama, nego i apstrakcijskim termima koji su sadržani u toj formuli.

Definicija 1.2.3. *Neka je* μ *formula u proširenom jeziku i neka su* $t_i := \{z_i \mid \phi_i(z_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})\}$, $i = 1, \ldots, n$ *svi apstrakcijski termi koji se pojavljuju u* μ, *pri čemu su* ϕ_i *stratificirane formule s pripadnim tipizacijama* tp_{ϕ_i}. *Preslikavanje* tp *takvo da je* $tp(x_{i_j}) = tp_{\phi_i}(x_{i_j})$ *za sve* i, j *proširujemo na apstrakcijske terme definirajući* $tp(t_i) := tp_{\phi_i}(z_i) + 1$, *za svaki* i. *Kažemo da je formula* μ ***stratificirana u proširenom jeziku*** *ako postoji tipizacija* tp_μ *takva da je* $tp_\mu(t_i) = tp_{\phi_i}(z_i) + 1$, *za sve* i.

Prešutno podrazumijevamo da su sve varijable formula ϕ_i koje zadaju redom pripadne terme t_i također varijable „velike” formule μ — naime, one bi to doista i bile da eliminiramo sve apstrakcijske terme.

Dokažimo da definicija 1.2.3 ispravno dodjeljuje tipove, odnosno da vrijedi: formula u proširenom jeziku je stratificirana ako i samo ako je stratificirana formula dobivena iz formule u proširenom jeziku eliminacijom svih terma.

Teorem 1.2.4. *Neka je* μ' *stratificirana formula u proširenom jeziku i neka su* $t_1, \ldots, t_n$ *svi apstrakcijski termi u* μ'. *Tada je formula* μ, *dobivena iz formule* μ' *eliminacijom apstrakcijskih terma* $t_1, \ldots, t_n$ *stratificirana.*

Dokaz. Dovoljno je tvrdnju dokazati za $n = 2$, budući da su oba relacijska simbola mjesnosti 2.
Neka su $t_1 = \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$ i $t_2 = \{w \mid \sigma(w, y_1, \ldots, y_m)\}$ apstrakcijski termi koji se pojavljuju u formuli μ'. Pripadne tipizacije označimo s tp_ϕ, tp_σ i $tp_{\mu'}$. Definiramo preslikavanje tp takvo da vrijedi $tp(u) := tp_{\mu'}(u)$, za svaku varijablu koja je zajednička formulama μ i μ'. Za varijable nastale eliminacijom apstrakcijskih terma razlikujemo 5 slučajeva:

- Ako je $u \in t_1$ potformula od μ', nakon eliminacije dobijemo $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$. Kako je u u obje formule μ i μ', tp je za nju definiran. Dodefiniramo još $tp(a) := tp_\phi(a)$ za svaku varijablu a formule ϕ. Time tp zadovoljava uvjete stratifikacije.

- Ako je $u = t_1$ potformula of μ', onda nakon eliminacije dobijemo $\forall b(b \in u \leftrightarrow b \in t_1)$, tj. $\forall b(b \in u \leftrightarrow \phi(b, x_1, \dots, x_n))$, gdje je b nova varijabla. Definiramo $tp(b) := tp_\phi(z)$ i $tp(a) := tp_\phi(a)$, za svaku varijablu a formule ϕ. Budući da je $tp_{\mu'}(u) = tp_{\mu'}(t_1)$ i $tp_{\mu'}(t_1) = tp_\phi(z) + 1$, vrijedi $tp(u) = tp_{\mu'}(t_1) = tp_\phi(z) + 1 = tp(b) + 1$. Ponovo, tp zadovoljava uvjete stratifikacije.

- Ako je $t_1 \in u$ potformula od μ', eliminacijom terma dobijemo $(\exists v \in u)(\forall b(b \in v \leftrightarrow \phi(b, x_1, \dots, x_n)))$, gdje su v i b nove varijable pa definiramo $tp(v) := tp_\phi(z) + 1$, $tp(b) := tp_\phi(z)$ i $tp(a) := tp_\phi(a)$ za svaku varijablu a formule ϕ. Očito vrijedi $tp(u) = tp_{\mu'}(u) = tp_{\mu'}(t_1)+1 = (tp_\phi(z)+1)+1 = (tp(b)+1)+1 = tp(v)+1$ te $tp(v) = tp_\phi(z) + 1 = tp(b) + 1$, odnosno tp zadovoljava uvjete stratifikacije.

Preostala su dva slučaja, međusobno isključiva: ako je $t_1 = t_2$ potformula formule μ' ili ako je $t_1 \in t_2$ potformula formule μ'. Ne mogu istovremeno obje biti potformule jer tada μ' ne bi bila stratificirana u proširenom jeziku. Zadajmo, dakle, za ta dva slučaja, vrijednosti preslikavanja tp.

- Ako je $t_1 = t_2$ potformula formule μ', nakon eliminacije dobijemo $\forall x(\phi(x, x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \sigma(x, y_1, \dots, y_m))$, gdje je x nova varijabla. Formula μ' je stratificirana pa vrijedi $tp_{\mu'}(t_1) = tp_{\mu'}(t_2)$, odnosno $tp_\phi(z) + 1 = tp_\sigma(w) + 1$. Definiramo $tp(x) := tp_\phi(z) = tp_\sigma(w)$ i $tp(a) = tp_\phi(a)$ za svaku varijablu a formule ϕ i $tp(b) = tp_\sigma(b)$ za svaku varijablu b formule σ. Ako postoji zajednička varijabla v formula ϕ i σ, ona mora biti slobodna u obje formule pa vrijedi $v = x_i = y_j$, za neke $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Ponovo, formula μ' je stratificirana u proširenom jeziku pa vrijedi $tp_{\mu'}(v) = tp_\phi(x_i) = tp_\sigma(y_j)$. Dakle, tp je dobro definirana u varijabli v.

- Ako je $t_1 \in t_2$ potformula formule μ', nakon eliminacije dobijemo $\exists u(\sigma(u, y_1, \dots, y_m) \wedge \forall x(x \in u \leftrightarrow \phi(x, x_1, \dots, x_n)))$, gdje su u i x nove slobodne varijable. Definiramo $tp(u) := tp_\sigma(w)$, $tp(x) := tp_\phi(z)$, $tp(a) = tp_\phi(a)$ za svaku varijablu a formule ϕ i$tp(b) = tp_\sigma(b)$ za svaku varijablu b formule σ. Ako postoji zajednička varijabla formula ϕ i σ, ona mora biti slobodna u obje formule, pa kao u prethodnom slučaju, zaključujemo da je tp dobro definirano preslikavanje.

Dakle, preslikavanje tp zadovoljava uvjete stratifikacije kada se eliminiraju svi apstrakcijski termi formule μ', odnosno formula μ je stratificirana u osnovnom jeziku teorije. □

Sada možemo i termima koji denotiraju neke skupove pridružiti tipove.

Napomena 1.2.5. *Neka je $t = \{z \mid \phi(z, x_1, \dots, x_n)\}$ apstrakcijski term i $\phi(z, x_1, \dots, x_n)$ stratificirana formula. Apstrakcijskom termu t i njegovim parametrima $x_1, \dots, x_n$ pridružujemo tipove pomoću tipizacije formule $z \in u \leftrightarrow \phi(z, x_1, \dots, x_n)$. Tip nove varijable u zapravo je tip apstrakcijskog terma t.*

1.3 Skupovne operacije u NF

Uvedimo sada osnovne skupove i skupovne operacije te pokažimo lakoću definiranja istih. Najprije ćemo definirati prazan skup detaljno navodeći način njegove izgradnje. Za sve ostale, s obzirom na jednak način zadavanja, navodimo (i dokazujemo gdje je to potrebno) samo stratificiranost pripadnih formula.

Teorem 1.3.1. *Formula $x = x$ je stratificirana.*

Dokaz. Neka je dana formula $x = x$, za proizvoljnu varijablu x. Pokažimo da je ova atomarna formula stratificirana. Tražimo preslikavanje zadano s $tp(x) = n$, gdje je n prirodan broj, koje zadovoljava uvjet $x^n = x^n$, odnosno tražimo prirodni broj za koji vrijedi $n = n$. Očito za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $n = n$ pa bez smanjenja općenitosti uzimamo $n := 1$. Dakle, pronašli smo tipizaciju $tp(x) = 1$ koja zadovoljava uvjet(e) stratifikacije pa zaključujemo da je formula $x = x$ stratificirana. □

Teorem 1.3.2. *Formula $x \neq x$ je stratificirana.*

Dokaz. Neka je dana formula $x \neq x$, za proizvoljnu varijablu x. Najprije zadanu formulu napišimo u osnovnom jeziku kao $\neg(x = x)$. Dokazali smo u teoremu 1.3.1 da je formula $x = x$ stratificirana formula. Objasnimo još zašto vrijedi tvrdnja da je negacija stratificirane formule ponovo stratificirana formula. Očito za svaku atomarnu potformulu neke stratificirane formule ϕ vrijedi da je potformula formule $\neg\phi$, i obrnuto. Dakle, uz iste uvjete stratifikacije zaključujemo da je formula $\neg\phi$ stratificirana. Dakle, $\neg(x = x)$ je stratificirana formula. □

Po teoremu 1.3.2 i aksiomu stratificirane komprehenzije, klasa svih x takvih da je $x \neq x$ je uistinu skup. Taj skup označavamo s $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$ i nazivamo **prazan skup**.

Jednako tako, klasa svih x koji zadovoljavaju formulu $x = x$ je skup koji nazivamo (shodno intuiciji) **skup svih skupova** i označavamo s V. Naglasak stavljamo na sam naziv ovog skupa — naime, Quine ovaj skup naziva **univerzalnim skupom**, što u svijetu NFa nije ništa doli sintaksna razlika. Kada uvedemo teoriju NFU, naglasit ćemo postojanje obaju skupova i vidjeti razlike među njima, ali trenutno su to samo dva pojma koja referiraju na isti objekt — skup. Zanimljivo je spomenuti da V, kako mu naziv kaže, sadrži sve skupove, a kako je i sam skup, sadrži sam sebe, odnosno vrijedi $\mathsf{V} \in \mathsf{V}$. Tada je formula $\exists x(x \in x)$ istinita, ali nije stratificirana. Uistinu, varijabla lijevo od znaka $\in$ morala bi imati tip za jedan manji od tipa varijable na desnoj strani da bi uvjeti stratifikacije bili zadovoljeni, a kako imamo istu varijablu s obje strane znaka pripadnosti i kako jedna varijabla ne može u nekoj formuli imati pridružene različite tipove, jednostavno zaključujemo da željeno pridruživanje ne postoji, odnosno da ta formula ne može biti stratificirana.

Iz dokaza teorema 1.3.1 i 1.3.2 vidimo da je dovoljno naći jednu konkretnu tipizaciju (najčešće onu koja poprima vrijednosti 1, 2, ...). Ubuduće ćemo kao argument da je formula stratificirana navesti samo tu tipizaciju zajedno s formulom pišući tipove ponad varijabli.

Podskup uvodimo na standardni način:

Definicija 1.3.3. *Kažemo da je x* ***podskup*** *od y i pišemo $x \subseteq y$ ako vrijedi $(\forall z \in x)(z \in y)$. Ako vijedi $x \subseteq y \land x \neq y$, pišemo $x \subset y$.*

Iz zapisa $(\forall z^1 \in x^2)(z^1 \in y^2)$ slijedi da je formula $x \subseteq y$ (odnosno formula za koju je to pokrata) stratificirana.

Uvedimo i jednostavne skupovne operacije u naš jezik. Neka su x i y proizvoljni skupovi. Definiramo skupove $x \cup y := \{z \mid z \in x \lor z \in y\}$, $x \cap y := \{z \mid z \in x \land z \in y\}$ te $x \setminus y := \{z \mid z \in x \land z \notin y\}$ koje redom nazivamo **unija**, **presjek** i **skupovna razlika** skupova x i y. Da su to uistinu skupovi dokazuje sljedeći teorem.

Teorem 1.3.4. *Formule $(z \in x \lor z \in y)$, $(z \in x \land z \in y)$ te $(z \in x \land z \notin y)$ su stratificirane.*

Dokaz. Tvrdnje slijede iz zapisa tih formula u obliku: $(z^1 \in x^2 \lor z^1 \in y^2)$, $(z^1 \in x^2 \land z^1 \in y^2)$ te $(z^1 \in x^2 \land z^1 \notin y^2)$. □

Teorem 1.3.5. *Vrijedi:*

1. *Klasa $\bigcup x := \{z \mid (\exists t \in x)(z \in t)\}$ je skup.*
2. *Klasa $\bigcap x := \{z \mid (\forall t \in x)(z \in t)\}$ je skup.*
3. *Klasa $x^c := \{z \mid z \notin x\}$ je skup.*
4. *Klasa $\mathscr{P}(x) := \{z \mid z \subseteq x\}$ je skup.*
5. *Klasa $\{x\} := \{z \mid z = x\}$ je skup.*
6. *Klasa $\mathscr{P}_1(x) := \{z \mid (\exists t \in x)\forall u(u \in z \leftrightarrow u = t)\}$ je skup.*

Dokaz. Pokažimo da navedeni termi uistinu denotiraju skupove:

- Term $\bigcup x$ zadan je stratificiranom formulom $(\exists t^2 \in x^3)(z^1 \in t^2)$ pa denotira skup.

- Term $\bigcap x$ zadan je stratificiranom formulom $(\forall t^2 \in x^3)(z^1 \in t^2)$, dakle denotira skup.
- Term x^c zadan je stratificiranom formulom $(z^1 \notin x^2)$ pa po aksiomu stratificirane komprehenzije denotira skup.
- Term $\mathscr{P}(x)$ zadan je stratificiranom formulom $(\forall t^1 \in z^2)(t^1 \in x^2)$ pa denotira skup.
- Term $\{x\}$ zadan je stratificiranom formulom $z^1 = x^1$ pa i on denotira skup.
- Term $\mathscr{P}_1(x)$ zadan je stratificiranom formulom $(\exists t^1 \in x^2)\forall u^1(u^1 \in z^2 \leftrightarrow u^1 = t^1)$. Dakle, i on denotira skup. □

Skupove $\bigcup x$, $\bigcap x$ i x^c nazivamo redom **unija**, **presjek** i **komplement** od x. Naglasimo da teorija NF vjerno opisuje Booleovu algebru, za razliku od teorije ZF, pa definicija komplementa — onog „globalnog" — ima smisla.
Skupove $\mathscr{P}(x)$, $\{x\}$ i $\mathscr{P}_1(x)$ nazivamo redom **partitivni skup** od x, **singleton** od x i **singleton partitivni skup** od x.[1]

Apstrakcijski termi s lijeve strane znaka „|", osim varijable, mogu sadržavati apstrakcijski term. Objasnimo kako takve (ugniježđene) apstrakcijske terme eliminirati.

Napomena 1.3.6. *Neka su $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ i $\mu(w, x_1, \ldots, x_k)$ formule. Ugniježđene apstrakcijske terme eliminiramo na sljedeći način:*

$$\{\{w \mid \mu(w, x_1, \ldots, x_k)\} \mid \phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\} :=$$
$$\{z \mid \exists x_1 \ldots \exists x_n(\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \wedge z = \{w \mid \mu(w, x_1, \ldots, x_k)\})\}$$

Uočimo da se singleton partitivni skup skupa x može definirati preko ugniježđenog apstrakcijskog terma: $\mathscr{P}_1(x) = \{\{t\} \mid t \in x\}$.

Napomena 1.3.7. *Uvodimo pokratu $\mathscr{P}_1^2(x) := \mathscr{P}_1(\mathscr{P}_1(x))$, za $x \in V$.*

Teorem 1.3.8. *Neka je $\mu(w, x_1, \ldots, x_k)$ stratificirana formula, $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ stratificirana formula s pripadnim preslikavanjem tp_ϕ, $s = \{w \mid \mu(w, x_1, \ldots, x_k)\}$ apstrakcijski term i $t = \{s \mid \phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\}$ ugniježđeni apstrakcijski term. Ako je formula $z \in s \leftrightarrow \mu(z, x_1, \ldots, x_k)$ stratificirana i ako su tipovi varijabli $x_1, \ldots, x_n$ određeni preslikavanjem tp_ϕ, onda je tip ugniježđenog terma t za jedan veći od tipa terma s.*

---

[1]Ovdje leži ljepota teorije NF — sada uistinu možemo reći da shodno logici definiramo skupove i skupovne operacije te iz zapisa formula koje opisuju njihove elemente obično lako vidimo da su stratificirane.

1.4 Relacije

U sustav koji gradimo uvodimo sada nešto značajnije pojmove poput relacija, funkcija i klasa ekvivalencije. Navedeni pojmovi bitni su sastojci Speckerovog dokaza pa ćemo, prateći isti, uvoditi i po potrebi dokazivati svojstva novododanih gradivnih elemenata. Za početak definiramo uređeni par dvaju skupova uzimajući definiciju Kuratowskog kao dovoljno dobru.

Definicija 1.4.1. *Neka su $x, y \in \mathsf{V}$ proizvoljni.*
Definiramo njihov ***uređeni par*** *kao $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$.*

Naglasimo da x i y iz definicije 1.4.1 moraju imati jednak tip u nekoj stratificiranoj formuli u kojoj se pojavljuju x, y i (x, y) kao term. Nadalje, uređeni par (x, y) kao term u nekoj stratificiranoj formuli mora imati tip za dva veći od tipa pridruženog varijablama ili termima x i y. Uistinu, tvrdnja slijedi iz zapisa (iz kojeg se vidi i povezanost) te formule u obliku: $z^2 \in (x, y)^3 \leftrightarrow z^2 = u^2 \vee z^2 = v^2$, gdje su $u = \{x^1\}, v = \{x^1, y^1\}$.

Definicija 1.4.2. *Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Njihov* ***Kartezijev produkt*** *je skup $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.*

Analogno objašnjenju ponašanja tipova x i y i tipa njihovog uređenog para u nekoj stratificiranoj formuli, zaključujemo da Kartezijev produkt skupova X i Y, odnosno term koji ga denotira u nekoj stratificiranoj formuli koja ga sadrži zajedno s X i Y, mora imati tip za dva veći od tipa pridruženog varijablama, odnosno termima X i Y.

Definicija 1.4.3. *Proizvoljni podskup $R \subseteq \mathsf{V} \times \mathsf{V}$ nazivamo* ***relacija****.*

Neka je R relacija. Ako vrijedi $(x, y) \in R$, kažemo da su x i y u relaciji R i pišemo $x\ R\ y$. Ako pak vrijedi $(x, y) \notin R$, kažemo da x i y nisu u relaciji R i pišemo $x \not R\ y$. Ako se $x\ R\ y$ pojavljuje u nekoj stratificiranoj formuli kao potformula, tada x i y moraju imati isti tip u toj formuli, a relacija R mora imati tip za tri veći od toga.

Kažemo da je R binarna relacija **na** X ako je $R \subseteq X \times X$. Za tako definiranu binarnu relaciju na X kažemo da je **refleksivna** ako za svaki $x \in X$ vrijedi $x\ R\ x$, odnosno da je **irefleksivna** ako ne postoji $x \in X$ takav da vrijedi $x\ R\ x$. Dalje, kažemo da je R **simetrična** ako za sve $x, y \in X$ za koje je ispunjeno $x\ R\ y$ vrijedi $y\ R\ x$, **antisimetrična** ako za sve $x, y \in X$ koji imaju svojstvo $x\ R\ y$ i $y\ R\ x$ vrijedi $x = y$ te da je **tranzitivna** ako za sve $x, y, z \in X$ koji imaju svojstvo $x\ R\ y$ i $y\ R\ z$ vrijedi $x\ R\ z$.

Navodimo teorem (dokaz se može naći u [1]) koji potkrijepljuje sljedeće: Za bilo koju stratificiranu formulu s dvije slobodne varijable istog tipa postoji binarna relacija između bilo koja dva skupa, koja predstavlja ostvarenje te formule u njihovom Kartezijevom produktu.

Teorem 1.4.4. *Neka je $\phi(x, y)$ stratificirana formula s dvije slobodne varijable x i y. Ako u toj formuli x i y imaju isti tip, onda za svaka dva skupa X i Y postoji binarna relacija R između X i Y takva da vrijedi $x \ R \ y \leftrightarrow \phi(x, y)$, za sve $x \in X$, $y \in Y$.*

Za relaciju R iz teorema 1.4.4 kažemo da je **definirana** između skupova X i Y **stratificiranom formulom** ϕ.

Teorem 1.4.5. *Formule $\exists y(x \ R \ y)$ i $\exists x(x \ R \ y)$ su stratificirane.*

Dokaz. Tvrdnje slijede iz zapisa $\exists y^1(x^1 \ R^4 \ y^1)$ i $\exists x^1(x^1 \ R^4 \ y^1)$. □

Definiramo **domenu relacije** R, gdje je $R \subseteq \mathsf{V} \times \mathsf{V}$, kao $dom(R) := \{x \mid \exists y(x \ R \ y)\}$ i **sliku relacije** R kao $rng(R) := \{y \mid \exists x(x \ R \ y)\}$. Uočimo da slika ili domena relacije R kao term neke stratificirane formule ima tip za dva manji od tipa relacije R u toj formuli. Naime, ako je varijablama x i y pridružen tip n u toj stratificiranoj formuli, onda, već znamo, relacija R ima tip $n + 3$. Da domena ili slika relacije R kao termi imaju tip $n + 1$ slijedi iz zapisa $x^1 \in dom(R^4)^2 \leftrightarrow \exists \, y^1(x^1 \ R^4 \ y^1)$, odnosno $y^1 \in rng(R^4)^2 \leftrightarrow \exists \, x^1(x^1 \ R^4 \ y^1)$.

Za skup X definiramo **identitetu** na X kao $id_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ (odnosno formulom $x = y$ između skupova X i X). Neka su R i R' relacije. Definiramo kompoziciju relacija R i R' kao $R' \circ R := \{(x, z) \mid \exists y(x \ R \ y \wedge y \ R' \ z)\}$. I posljednje, za relaciju R definiramo **inverz** od R kao $R^{-1} := \{(y, x) \mid x \ R \ y\}$. Lako vidimo da inverz R^{-1} ima isti tip kao relacija R u nekoj stratificiranoj formuli. Da kompozicija dviju relacija istog tipa ima taj tip slijedi iz zapisa u obliku: $u^3 \in (R' \circ R)^4 \leftrightarrow \exists x^1 \exists z^1 \exists y^1(x^1 \ R^4 \ y^1 \wedge y^1 \ R^4 \ z^1 \wedge u^3 = (x^1, z^1)^3)$.

Definiramo **sliku skupa** A po relaciji R kao $R[A] := \{y \mid (\exists x \in A)(x \ R \ y)\}$ i **prasliku skupa** B po relaciji R kao $R^{-1}[B] := \{x \mid (\exists y \in B)(x \ R \ y)\}$.

Definicija 1.4.6. *Neka je R relacija na skupu X. Kažemo da je R* ***relacija ekvivalencije*** *na X ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna.*

Sve uvedeno do sad vodi do sljedećih, očekivanih pojmova: klase ekvivalencije i kvocijentnog skupa. Dakle, ako imamo relaciju ekvivalencije R na skupu X, definiramo **klasu ekvivalencije** elementa $x \in X$ kao skup $[x]_R := \{y \mid y \in X \wedge x \ R \ y\}$. Sada, lako iz zapisa

$y^1 \in [x]^2_R \leftrightarrow x^1\ R^4\ y^1$ vidimo da ako se $[x]_R$ pojavljuje kao term u nekoj stratificiranoj formuli u kojoj x ima tip n, $[x]_R$ ima tip $n+1$.

Definiramo **kvocijentni skup** skupa X po relaciji R kao $X/R := \{[x]_R \mid x \in X\}$. Da je X/R skup potvrđuje stratificirana formula $z^2 \in (X^2/R^4)^3 \leftrightarrow (\exists x^1 \in X^2)(z^2 = [x^1]^2_R)$.

Očekivana posljedica postojanja kvocijentnog skupa je particioniranje skupa X.

Teorem 1.4.7. *Neka je R relacija ekvivalencije na skupu X.*
Tada skup X/R čini particiju skupa X: svi skupovi $[x]_R \in X/R$ su neprazni, međusobno disjunktni i u uniji daju cijeli X.

Uvodimo pojam dobre uređenosti skupa na standardni način. Pojam najmanjeg elementa ne uvodimo posebno jer nam, eksplicitno zadan, nije od pretjerane važnosti (Specker u dokazu samo pretpostavlja dobar uređaj pojedinih skupova ne koristeći pojam najmanjeg elementa, a u velikom dijelu dokaza jedino je važno da je uređaj totalan, odnosno da su svaka dva elementa usporediva što lako slijedi iz dobre uređenosti promatranjem dvočlanih podskupova).

Definicija 1.4.8. *Neka je $<$ relacija na skupu X. Kažemo da je $<$ **dobar uređaj** na X ako je relacija irefleksivna, tranzitivna i svaki neprazni podskup od X ima najmanji element, odnosno ako vrijedi*

$$\forall x(x \nless x) \land \forall x \forall y \forall z(x < y \land y < z \to x < z) \land$$
$$((\forall S \in \mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\})(\exists s_0 \in S)(\forall s \in S \setminus \{s_0\})(s_0 < s)).$$

Definicija 1.4.9. *Neka su X i Y proizvoljni skupovi i neka je $f \subseteq X \times Y$ binarna relacija koja ima svojstvo da za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni $y \in Y$ takav da su x i y u relaciji R, odnosno vrijedi $(f \subseteq X \times Y) \land (\forall x \in X)(\exists!\, y \in Y)(x\ f\ y)$. Tada binarnu relaciju f nazivamo **funkcija sa X u Y** i označavamo s $f : X \to Y$, umjesto $x\ f\ y$ pišemo standardno $y = f(x)$, a za formulu $(f \subseteq X \times Y) \land (\forall x \in X)(\exists!\, y \in Y)(x\ f\ y)$ uvodimo pokratu $func(f, X, Y)$, odnosno standardno $f : X \to Y$.*

Da je formula $func(f, X, Y)$ stratificirana slijedi iz zapisa $(f^4 \subseteq X^2 \times Y^2)^4 \land (\forall x^1 \in X^2)(\exists!\, y^1 \in Y^2)(x^1\ f^4\ y^1)$. Za skup f koji zadovoljava $func(f, X, Y)$, za neke X i Y, kažemo da ima **funkcijsko svojstvo**. Često ćemo u dijelovima Speckerova dokaza samo naglasiti da neki skup ima funkcijsko svojstvo, odnosno da je on funkcija. To će zapravo značiti da (često očito) zadovoljava spomenutu formulu.

Definiramo i skup svih funkcija sa skupa X u skup Y, gdje su X i Y skupovi, kao $Y^X := \{f \mid \mathit{func}(f, X, Y)\}$.

Postupak definicije funkcije termom bit će od značaja u Speckerovu dokazu.

Propozicija 1.4.10. *Neka je $t(x)$ term. Ako u stratificiranoj formuli $\{x\}$ i $t(x)$ imaju isti tip, onda za svaki skup A postoji funkcija f (s domenom $\mathscr{P}_1(A)$) takva da vrijedi $f(\{x\}) = t(x)$, za svaki $x \in A$.*

Dokaz. Formula $(\exists x^1 \in A^2)(p = (\{x^1\}^2, t(x^1)^2))$ je stratificirana pa možemo definirati skup $f := \{p \mid (\exists x \in A)(p = (\{x\}, t(x)))\}$ koji očito ima funkcijsko svojstvo. Dakle, f je funkcija za koju vrijedi $f(\{x\}) = t(x)$. □

Pojmove poput surjekcije, injekcije i bijekcije uvodimo na standardni način. Neka su X i Y proizvoljni skupovi i neka je f funkcija sa X na Y. Kažemo da je f **surjekcija sa** X **na** Y ako je slika funkcije f cijeli skup Y, odnosno $\mathit{func}(f, X, Y) \wedge \mathit{rng}(f) = Y$ te pišemo $\mathit{surj}(f, X, Y)$ kao pokratu za navedenu formulu. Kažemo da je f **injekcija sa** X **u** Y ako vrijedi da su za sve različite $x \in X$ pridružene funkcijske vrijednosti iz skupa Y također međusobno različite ili — kako će formula reći — da je inverzna relacija f^{-1} sa slike funkcije f na skup X funkcija, odnosno $\mathit{func}(f, X, Y) \wedge \mathit{func}(f^{-1}, \mathit{rng}(f), X)$ što pišemo $\mathit{inj}(f, X, Y)$. **Bijekciju** između X i Y definiramo kao funkciju f sa X na Y koja je surjekcija i injekcija, $\mathit{surj}(f, X, Y) \wedge \mathit{inj}(f, X, Y)$, što pišemo $\mathit{bij}(f, X, Y)$.

1.5 Prirodni brojevi

Uvodimo prirodne brojeve — na prvi pogled na standardni način, ali s ogromnom reprezentativnom razlikom. Naime, dok u teoriji ZF prirodni broj predstavlja samo određeni reprezentant klase ekvivalencije, u teoriji NF on predstavlja čitavu tu klasu.

Teorem 1.5.1. *Formula $(\exists z \in y)(y \setminus \{z\} \in x)$ je stratificirana.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz zapisa $(\exists z^1 \in y^2)(y^2 \setminus \{z^1\}^2 \in x^3)$. □

Skup $0 := \{\emptyset\}$ nazivamo **nula**. Prazan skup je skup po teoremu 1.3.2 pa je i nula kao singleton praznog skupa ponovo skup (teorem 1.3.5). Za proizvoljni skup x definiramo **sljedbenik** od x kao skup $Sc(x) := \{y \mid (\exists z \in y)(y \setminus \{z\} \in x)\}$. Term $Sc(x)$ je zadan stratificiranom formulom (teorem 1.5.1) pa uistinu denotira skup.
Iz zapisa $y^2 \in Sc(x^1)^3 \leftrightarrow (\exists z^1 \in y^2)(y^2 \setminus \{z^1\}^2 \in x^3)$ vidimo da u svakoj stratificiranoj formuli u kojoj se pojavljuje, $Sc(x)$ ima isti tip kao x. Često ćemo koristiti alternativnu definiciju sljedbenika. Pokažimo da je takva ekvivalentna upravo uvedenoj.

Teorem 1.5.2. *Za svaki skup x vrijedi $Sc(x) = \{y \cup \{z\} \mid y \in x \wedge z \notin y\}$.*

Dokaz. Neka je $t \in \{y \cup \{z\} \mid y \in x \wedge z \notin y\}$ proizvoljan. Tada je $t = y' \cup \{z'\}$, za neki $y' \in x$ i $z' \notin y'$. Treba dokazati da postoji $u \in t$ takav da je $t \setminus \{u\} \in x$. Takav u je upravo z'. Zaista, vrijedi $z' \in t$ i $t \setminus \{z'\} = y \in x$. Dakle, $t \in Sc(x)$.
Neka je $s \in Sc(x)$ proizvoljan. Tada postoji $z'' \in s$ takav da je $s \setminus \{z''\} \in x$. No, tada za $y'' := s \setminus \{z''\}$ vrijedi $s = y'' \cup \{z''\}$, $y'' \in x$ i $z'' \notin y''$ pa je $s \in \{y \cup \{z\} \mid y \in x \wedge z \notin y\}$. □

Definicija 1.5.3. *Neka je x skup. Kažemo da je x **induktivan** ako vrijedi $0 \in x \wedge (\forall y \in x)(Sc(y) \in x)$, što pišemo $Ind(x)$.*

Lako vidimo da je skup svih skupova V induktivan.

Definicija 1.5.4. *Skup $\mathbb{N} := \bigcap\{x \mid Ind(x)\}$ nazivamo **skup prirodnih brojeva**.*

Iz zapisa $0^1 \in x^2 \wedge (\forall y^1 \in x^2)(Sc(y^1)^1 \in x^2)$ slijedi da je formula $Ind(x)$ stratificirana pa je klasa $\{x \mid Ind(x)\}$ uistinu skup. Nadalje, presjek skupova je ponovo skup po teoremu 1.3.5 pa zaključujemo da je $\mathbb{N}$ dobro definiran.
Svaki $x \in \mathbb{N}$ nazivamo **prirodni broj**. Objasnimo što se u ovoj teoriji krije iza nekog prirodnog broja. Broj 0 je skup koji se sastoji samo od praznog skupa. Broj 1 sastoji se od svih jednočlanih skupova, odnosno $1 = \mathscr{P}_1(\mathsf{V})$, broj 2 od svih dvočlanih skupova pa lako zaključujemo da je svaki prirodni broj n skup koji se sastoji od svih n-članih skupova. Ovo je jedna, vrlo vrijedna, elegantna prednost teorije NF — napokon možemo poistovjetiti ono što čovjeku intuicija nalaže: prirodni broj n i svojstvo posjedovanja n elemenata.

Definicija 1.5.5. *$FIN := \bigcup \mathbb{N}$ nazivamo **skup konačnih skupova**.*
*Za skup x kažemo da je **beskonačan** ako nije konačan, odnosno ako je $x \notin FIN$.*

Za skup konačnih skupova vrijede već poznate tvrdnje, primjerice: podskup konačnog skupa je konačan, presjek konačnih skupova je konačan i unija konačno mnogo konačnih skupova je konačna.

Da bismo mogli primijeniti indukciju na skup prirodnih brojeva, trebamo najprije dokazati da je on induktivan, a onda, s obzirom da bez aksioma beskonačnosti ne možemo znati je li skup $\mathbb{N}$ beskonačan, primjenjivat ćemo formulu (svojevrsno *induktivno pravilo*) koja proizlazi iz standardne indukcije. Dokažimo najprije da je skup prirodnih brojeva induktivan.

Lema 1.5.6. *Skup prirodnih brojeva* $\mathbb{N}$ *je induktivan.*

Dokaz. Pokažimo da skup $\mathbb{N}$ zadovoljava svojstva induktivnog skupa, tj. da vrijedi $0 \in \mathbb{N}$ i za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $Sc(y) \in \mathbb{N}$.

- Tvrdimo da je $0 \in \mathbb{N}$. Po definiciji, svaki induktivni skup sadrži 0 pa je 0 element presjeka svih takvih, odnosno $0 \in \bigcap\{x \mid Ind(x)\}$, što je upravo skup $\mathbb{N}$.

- Neka je $y \in \mathbb{N}$ proizvoljan. To znači da je $y \in x$, za svaki induktivni skup x. Tada, za svaki takav skup x vrijedi (po definiciji 1.5.3) $Sc(y) \in x$. Kako je $Sc(y)$ element svakog induktivnog skupa, tako pripada presjeku svih induktivnih skupova, odnosno $Sc(y) \in \mathbb{N}$.

Zaključujemo, dakle, da je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ induktivan skup. □

Proučimo odnos između Peanove aritmetike i aksioma teorije NF. Peanova aritmetika zadana je s četiri aksioma i jednom shemom aksioma.

(P1) $0 \in \mathbb{N}$

(P2) $(\forall n \in \mathbb{N})(Sc(n) \in \mathbb{N})$

(P3) $(\forall n \in \mathbb{N})(0 \neq Sc(n))$

(P4) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(Sc(n) = Sc(m) \rightarrow n = m)$

(P5) Neka je $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ formula. Tada vrijedi sljedeće:

$$(\phi(0, x_1, \ldots, x_n) \land (\forall n \in \mathbb{N})(\phi(n, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow (\phi(Sc(n), x_1, \ldots, x_n))) \\ \rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\phi(n, x_1, \ldots, x_n)$$

Iz definicije 1.5.4 slijede aksiomi (P1) i (P2), kada iste shvaćamo kao formule teorije NF. Pokažimo da vrijedi i (P3).

Propozicija 1.5.7. *Aksiom* (P3) *vrijedi u teoriji* NF.

Dokaz. Tvrdimo da ne postoji prirodni broj n takav da je njegov sljedbenik jednak 0. Pretpostavimo suprotno tvrdnji. Neka je n_0 jedan takav prirodni broj, odnosno neka za njega vrijedi $Sc(n_0) = 0$. Tada vrijedi $x \in Sc(n_0) \leftrightarrow (\exists y \in x)(x \setminus \{y\} \in n_0)$. Jedini skup koji zadovoljava formulu $x \in Sc(n_0) = 0$ je prazan skup pa on jedini zadovoljava lijevu stranu, ali kao takav (prazan skup) ne zadovoljava desnu jer ne postoji $y \in x = \emptyset$. Zaključujemo, dakle, da ne postoji prirodni broj čiji je sljedbenik jednak nuli. □

Princip matematičke indukcije ne možemo preuzeti u potpunosti.[2] Naime, ne možemo je primijeniti na proizvoljnu formulu jer ne znamo određuje li ona skup ako nije stratificirana. Kako se moglo pretpostaviti, ograničimo li aksiom na svijet stratificiranih formula, isti će vrijediti u teoriji NF.
Iskazujemo teorem koji to potkrijepljuje:

Teorem 1.5.8. *Neka je $\phi(x, x_1, \dots, x_n)$ stratificirana formula. Tada vrijedi sljedeće:*

$$(\phi(0, x_1, \dots, x_n) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(\phi(n, x_1, \dots, x_n) \to \phi(Sc(n), x_1, \dots, x_n)) \\ \to (\forall n \in \mathbb{N})\phi(n, x_1, \dots, x_n).$$

Standardni princip matematičke indukcije glasi ovako:

$$0 \in S \wedge (\forall x \in S)(Sc(x) \in S) \to (\forall y \in \mathbb{N})(y \in S), \tag{1.4}$$

i neposredna je posljedica definicije skupa prirodnih brojeva kao presjeka svih induktivnih skupova.

Ovdje nailazimo i na drugi problem u preuzimanju matematičke indukcije, a to je operiranje na beskonačnim skupovima. Mi pak ne znamo je li naš skup prirodnih brojeva konačan ili beskonačan pa, ponovo, standardnu matematičku indukciju ne možemo primijeniti na njega. Precizno, u konačnom univerzumu ne možemo uvijek realizirati $z \notin y \in x$ (recimo za $x = \{\mathsf{V}\}$) pa može biti $Sc(x) = \emptyset$. Da bismo je mogli koristiti, iskazujemo indukciju u nešto drugačijem obliku restringirajući se na skupove koji ne sadrže prazan skup. Dokazat ćemo da je formula takve „krnje” matematičke indukcije izvediva iz standardne (1.4).

Teorem 1.5.9. *Iz formule* (1.4) *slijedi formula*

$$0 \in S \wedge (\forall x \in S \setminus \{\emptyset\})(Sc(x) \neq \emptyset \to Sc(x) \in S) \to (\forall y \in \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\})(y \in S). \tag{1.5}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je S skup takav da je $0 \in S$ i za svaki neprazni $x \in S$ vrijedi da njegov sljedbenik, ako je neprazan, pripada skupu S. Tvrdimo da svaki neprazni prirodni broj pripada skupu S.
Definiramo skup $S' := S \cup \{\emptyset\}$. Očito vrijedi $0 \in S'$. Neka je $x \in S'$ proizvoljan.

[2]Valja napomenuti da ni Peanova aritmetika kao teorija prvog reda ne obuhvaća matematičku indukciju u potpunosti. Izvorno se aksiom (P5) odnosio na bilo kakav podskup skupa prirodnih brojeva, ne samo na one koji se mogu opisati formulom, a znamo da svih podskupova skupa prirodnih brojeva ima značajno više ($\mathfrak{c}$) od onih opisivih formulom ($\aleph_0$).

Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $x = \emptyset$, onda je očito $Sc(x) = \emptyset$. Uistinu, ne postoji skup koji pripada skupu $\emptyset$ pa niti jedan skup y ne zadovoljava alternativnu definiciju sljedbenika iskazanu teoremom 1.5.2.
- Ako je $x \neq \emptyset$, onda zbog $x \in S \cup \{\emptyset\}$ mora biti $x \in S$. Tada je ili $Sc(x) = \emptyset \in S'$, ili je $Sc(x) \neq \emptyset$, pa prema pretpostavci formule (1.5), mora biti $Sc(x) \in S \subseteq S'$.

Dakle, skup S' zadovoljava uvjete formule (1.4) pa, prema istoj, sadrži sve prirodne brojeve, odnosno vrijedi $\mathbb{N} \subseteq S' = S \cup \{\emptyset\}$ iz čega lako slijedi $\mathbb{N} \setminus \{\emptyset\} \subseteq S$. □

Pokušajmo slikovito približiti čitatelju o kakvoj je restrikciji riječ kada koristimo našu „krnju" indukciju. Zamislimo standardnu matematičku indukciju kao tablicu čiji su retci formule koje opisuju skupove, a stupci ti skupovi. Ako iz te tablice izbacimo retke koje sadrže nestratificirane formule i stupce čiji skupovi sadrže prazan skup kao element, dobijemo „krnju" matematičku indukciju.

Napominjemo da ćemo u svim dokazima u nastavku zasnovanim na principu matematičke indukcije koristiti formulu (1.5). Kako je ista izvediva iz (1.4) po prethodnom teoremu, osim dokazivanja stratificiranosti formule koja gradi dani skup tamo gdje to nije jasno na prvi pogled, nećemo ništa posebno naglašavati.

Aksiom (P4) zasad ostavljamo po strani pa ćemo na kraju drugog poglavlja, kada dokažemo da aksiom beskonačnosti vrijedi u teoriji NF, vidjeti da aksiom (P4) vrijedi kao njemu ekvivalentna.

1.6 Kardinalni brojevi

Uvedimo kardinalne brojeve na prirodni i intuitivni način — definiramo relaciju ekvipotentnosti između dva skupa, a onda promatramo klase ekvivalencije s obzirom na tu relaciju.

Definicija 1.6.1. *Neka su X i Y skupovi. Definiramo relaciju* ***ekvipotentnosti*** *tih dvaju skupova kao $X \sim Y :\Leftrightarrow \exists f \; bij(f, X, Y)$.*

Za skupove X i Y takve da je $X \sim Y$ kažemo da su **ekvipotentni**.

Definicija 1.6.2. *Definiramo skup* ***kardinalnih brojeva*** *kao*

$$Card := \mathsf{V}/(\sim) = \{[x]_\sim \mid x \in \mathsf{V}\}.$$

Elemente skupa $Card$ nazivamo **kardinalni brojevi**, a klasu ekvivalencije zovemo $[x]_\sim$ **kardinalni broj skupa** x i označavamo s $|x|$. Vidimo da $|x|$ ima tip za jedan veći od tipa pridruženog x u bilo kojoj stratificiranoj formuli u kojoj se oba pojavljuju.

Pokažimo da nijedan kardinalni broj nije prazan.

Teorem 1.6.3. $\emptyset \notin Card$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. da postoji $k_0 \in Card$ takav da je $k_0 = \emptyset$. $k_0 \in Card$ pa po definiciji 1.6.2 postoji $x \in \mathsf{V}$ takav da je $k_0 = [x]_\sim = \{z \mid z \sim x\} = \emptyset$. Zbog refleksivnosti relacije $\sim$ vrijedi $x \sim x$ pa imamo $x \in [x]_\sim = \emptyset$, što je kontradikcija. Dakle, skup kardinalnih brojeva ne sadrži prazan skup. □

Navodimo teorem koji pokazuje da su neprazni prirodni brojevi klase ekvivalencije po relaciji $\sim$.

Teorem 1.6.4. *Neka je x prirodni broj, $y \in x$ i z proizvoljni. Tada vrijedi $z \in x \leftrightarrow y \sim z$.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po x u formuli $(\forall y \in x)\forall z(z \in x \leftrightarrow \exists f\, bij(f, y, z))$. Pretpostavimo da je $x = 0$. Neka su $y \in x$ i z proizvoljni. Iz $y \in x$ i $x = 0$ slijedi $y = \emptyset$. Pretpostavimo da je $z \in x$. Tada očito vrijedi da je z skup i $z = \emptyset = y$ pa postoji (prazna) bijekcija između ta dva skupa. Pretpostavimo sada da je $y \sim z$. To znači da postoji bijekcija f između y i z, a kako je $y = \emptyset$, f je bijekcija između $\emptyset$ i z pa mora vrijediti $z = rng(f) = rng(\emptyset) = \emptyset \in 0 = x$. Dakle, $z \in x$.

Pretpostavimo da je x takav da je $Sc(x) \neq \emptyset$ i da tvrdnja vrijedi za dani x. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $Sc(x)$. Neka su $y \in Sc(x)$ i z proizvoljni. Po teoremu 1.5.2 iz $y \in Sc(x)$ zaključujemo da je y oblika $y = a \cup \{u\}$, za $a \in x$ i $u \notin a$. Pretpostavimo da vrijedi $z \in Sc(x)$. Tada je $z = b \cup \{v\}$, gdje je $b \in x$ i $v \notin b$. Kako su $a \in x$ i $b \in x$, po pretpostavci indukcije slijedi da postoji bijekcija f između skupova a i b. Definiramo bijektivno preslikavanje između skupova y i z vrlo intuitivno: neka je $g := f \cup \{(u, v)\}$. Klasa g je očito skup s funkcijskim svojstvom pa je funkcija, a svojstvo bijektivnosti je naslijedila od funkcije f proširenjem uređenim parom elemenata koji svakako nisu gradili parove u f pa to proširenje ne narušava ništa. Dakle, g je bijekcija između skupova y i z pa vrijedi $y \sim z$.

Pretpostavimo sada da je $y \sim z$. To znači da postoji bijekcija f' između y i z pri čemu mora vrijediti $z = f'[a] \cup \{f'(u)\}$, gdje je $y = a \cup \{u\}$. Funkcija f' je očito bijekcija između skupova a i $f'[a]$ pa po pretpostavci indukcije zaključujemo $f'[a] \in x$. Nadalje, $f'(u) \notin f'[a]$ jer je f' injekcija pa vrijedi $z \in Sc(x)$. □

Na kraju poglavlja uvodimo uređaj na skupu $Card$. Kako ćemo vidjeti uskoro, „pogrešna" pretpostavka da je skup kardinalnih brojeva dobro uređen s obzirom na nj bit će glavna vodilja Speckerovog dokaza.

Definicija 1.6.5. *Na skupu kardinalnih brojeva uvodimo relaciju $\leq$. Kažemo da je kardinalni broj m* ***manji ili jednak*** *kardinalnom broju n i pišemo $m \leq n$ ako postoje skupovi $a \in m$ i $b \in n$ takvi da vrijedi $a \subseteq b$. Kažemo da je kardinalni broj m* ***strogo manji*** *od kardinalnog broja n i pišemo $m < n$ ako je $m \leq n$ i $m \neq n$.*

Dokažimo da vrijedi i alternativna formulacija:

Propozicija 1.6.6. *Neka su m i n kardinalni brojevi. Tada $m \leq n$ ako i samo ako za svaki skup $b' \in n$ postoji skup $a' \in m$ takav da je $a' \subseteq b'$.*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $(\forall b' \in n)(\exists a' \in m)(a' \subseteq b')$. Ako tvrdnja vrijedi za svaki $b' \in n$, a n je kao kardinalni broj neprazan (teorem 1.6.3), tada sigurno postoji $b \in n$ takav da za njega postoji $a \in m$ takav da vrijedi $a \subseteq b$.
Pretpostavimo sada da je $m \leq n$. To znači da postoje $a_0 \in m$ i $b_0 \in n$ takvi da je $a_0 \subseteq b_0$. Neka je $b \in n$ proizvoljan. Trebamo pronaći $a \in m$ takav da je $a \subseteq b$. Znamo da vrijedi $b_0 \sim b$ jer su b_0 i b ekvipotentni skupovi (nalaze u istoj klasi ekvivalencije — kardinalnom broju n). To znači da postoji bijekcija f između ta dva skupa. Definiramo skup a na sljedeći način: $a := f[a_0]$. Očito je $a \subseteq b$ i f je injekcija sa skupa a_0 na skup b, odnosno $f \restriction_{a_0}$ je bijekcija između skupova a_0 i a. Dakle, $a \in m$. □

Više informacija o strogom zasnivanju teorija NF i NFU kao i pojmovima koji su pritom potrebni, čitatelj može naći u [1] i [2].

Poglavlje 2

Specker i aksiom izbora

Specker svoj dokaz uspijeva predstaviti na svega tri stranice dokazujući tek nekolicinu tvrdnji, vrlo škrto i oskudno, vjerojatno smatrajući da je na prvi pogled jasno zašto one vrijede u svijetu NFa ili kako ih prethodne tvrdnje impliciraju koristeći „pretpostavku suprotnog” koja je zapravo oblik aksioma izbora. Mi ćemo, ipak, podrobnije i detaljnije dokazati (gotovo) svaku točku njegovog dokaza, barem one dijelove tih točaka čija će se konstrukcija dokaza razlikovati od prethodnih. Želimo tako čitatelju približiti ideju, njen razvoj i veličinu posljedica nastalih njenim uspješnim provođenjem.

2.1 Činjenice o kardinalnim brojevima

Lema 2.1.1. $\mathsf{V} = \mathscr{P}(\mathsf{V})$.

Dokaz. Pokazat ćemo da vrijede obje inkluzije.
Da je $\mathscr{P}(\mathsf{V}) \subseteq \mathsf{V}$, slijedi iz definicija tih dvaju skupova. Naime, svi elementi od $\mathscr{P}(\mathsf{V})$ su skupovi (preciznije, podskupovi skupa V pa onda nužno skupovi), a V sadrži sve skupove pa sadrži i sve elemente skupa $\mathscr{P}(\mathsf{V})$. Dokažimo drugu inkluziju. Neka je $x \in \mathsf{V}$ proizvoljan. Tada za svaki $y \in x$ vrijedi da je y skup (elementi skupa su skupovi), odnosno $y \in \mathsf{V}$. To znači $x \subseteq \mathsf{V}$, tj. $x \in \mathscr{P}(\mathsf{V})$, što smo trebali dokazati. Dakle, vrijedi $\mathsf{V} = \mathscr{P}(\mathsf{V})$. □

Korolar 2.1.2. $|\mathscr{P}(\mathsf{V})| = |\mathsf{V}|$.

Dokaz. Slijedi direktno iz leme 2.1.1. Ti skupovi, kao jednaki, pripadaju istoj klasi ekvivalencije (svojstvo refleksivnosti) što zapravo znači da su im kardinalnosti jednake. □

Lema 2.1.3. *Ako je* $|X| = |Y|$*, onda je* $|\mathscr{P}(X)| = |\mathscr{P}(Y)|$.

Dokaz. Neka je $|X| = |Y|$, odnosno $[X]_\sim = [Y]_\sim$. To znači $\forall Z(Z \sim X \leftrightarrow Z \sim Y)$. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije (refleksivna) pa za $Z := X$ zaključujemo da je $X \sim Y$. Tada postoji bijekcija $f : X \to Y$. Tvrdimo da postoji bijekcija $g : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$.

Za svaki podskup $S \subseteq X$ definiramo skup $T := f[S]$. Pokažimo da je preslikavanje $g : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$, $g(S) = T$ dobro definirano i da je bijekcija. Lako vidimo da su ovako definirani skupovi T stvarno elementi skupa $\mathscr{P}(Y)$ — naime, f ide u skup Y pa je svaki $f(x)$ element skupa Y, odnosno $T \subseteq Y$.

Pretpostavimo da za dva skupa $S, S' \subseteq X$ vrijedi $g(S) = g(S')$, odnosno $\{f(s) \mid s \in S\} = \{f(s') \mid s' \in S'\}$. Kada bi skupovi S i S' bili različiti, kontrapozicijom aksioma ekstenzionalnosti postojao bi neki z koji je (bez smanjenja općenitosti) u S, ali ne i u S'. Tada $f(z) \in g(S) = g(S')$ znači $(\exists z' \in S')(f(z) = f(z'))$, no $z \neq z'$ (jer $z' \in S'$, a $z \notin S'$), što je u kontradikciji s injektivnošću funkcije f.

Neka je $T \in \mathscr{P}(Y)$, odnosno $T \subseteq Y$ proizvoljan,. Funkcija f je bijekcija pa postoji njen inverz, odnosno dobro je definiran skup $\{f^{-1}(Y) \mid y \in T\}$ i jednak je skupu $f^{-1}[T]$. Označimo taj skup sa S. Očito je $g(S) = T$. Dakle, funkcija g je surjekcija.

Pronašli smo bijekciju između skupova $\mathscr{P}(X)$ i $\mathscr{P}(Y)$ pa su oni po definiciji ekvipotentni skupovi. To pak znači da pripadaju istoj klasi ekvivalencije, odnosno da su reprezentanti iste klase ekvivalencije, odnosno vrijedi $[\mathscr{P}(X)]_\sim = [\mathscr{P}(Y)]_\sim$ što je ekvivalentno s $|\mathscr{P}(X)| = |\mathscr{P}(Y)|$. □

Lema 2.1.4. $|\mathscr{P}_1(X)| = |\mathscr{P}_1(Y)|$ *ako i samo ako je* $|X| = |Y|$.

Dokaz. Neka je $|X| = |Y|$. Tvrdimo da je $|\mathscr{P}_1(X)| = |\mathscr{P}_1(Y)|$. Pretpostavka $|X| = |Y|$ povlači da postoji bijekcija sa skupa X na skup Y. Označimo jednu takvu s f. Prema propoziciji 1.4.10 dobro je definirana funkcija g sa skupa $\mathscr{P}_1(X)$ na skup $\mathscr{P}_1(Y)$ s $g(\{x\}) := \{f(x)\}$. Uistinu, za proizvoljni $x \in X$ vrijedi $\{x\} \in \mathscr{P}_1(X)$ i $g(\{x\}) \in \mathscr{P}_1(Y)$ — naime, zbog $f(x) \in Y$ je očito $\{f(x)\} \in \mathscr{P}_1(Y)$. Pokažimo da je ona bijekcija.

Neka je $b \in \mathscr{P}_1(Y)$ proizvoljan. Tada postoji $y \in Y$ takav da je $b = \{y\}$. Funkcija f je surjekcija pa postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Označimo $a := \{x\}$. Očito je $a \in \mathscr{P}_1(X)$. Pronašli smo, dakle, za proizvoljni skup $b \in \mathscr{P}_1(Y)$, skup $a \in \mathscr{P}_1(X)$ takav da je $g(a) = g(\{x\}) = \{f(x)\} = \{y\} = b$ pa zaključujemo da je funkcija g surjekcija.

Pretpostavimo da za dva skupa $a, b \in \mathscr{P}_1(X)$ vrijedi $g(a) = c = g(b)$, gdje je $c = \{y\} \in \mathscr{P}_1(Y)$. Pretpostavke $a \in \mathscr{P}_1(X)$ i $b \in \mathscr{P}_1(X)$ povlače da postoje skupovi $x_1 \in X$ i $x_2 \in X$ takvi da je $a = \{x_1\}$ i $b = \{x_2\}$. Tvrdimo da je $a = b$, odnosno da je $x_1 = x_2$. Vrijedi: $\{y\} = c = g(a) = g(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$ i $\{y\} = c = g(b) = g(\{x_2\}) = \{f(x_2)\}$. Iz jednakosti jednočlanih skupova lako zaključujemo da vrijedi $f(x_1) = y = f(x_2)$.

Funkcija f je injekcija pa jednakost funkcijskih vrijednosti povlači jednakost argumenata, odnosno mora vrijediti $x_1 = x_2$.

Dakle, funkcija g je bijekcija pa po definiciji 1.6.1 zaključujemo da su skupovi $\mathscr{P}_1(X)$ i $\mathscr{P}_1(Y)$ ekvipotentni, a time imaju isti kardinalni broj.

Neka je $|\mathscr{P}_1(X)| = |\mathscr{P}_1(Y)|$. Tvrdimo da je $|X| = |Y|$. Neka je g' bijekcija između skupova $\mathscr{P}_1(X)$ i $\mathscr{P}_1(Y)$. Definiramo funkciju (odmah navodeći tipove varijabli koji potvrđuju da je funkcija dobro definirana) $f' := (\bigcup g'(\{x^1\}^2)^2)^1$, $x^1 \in X^2$. Lako vidimo da je $\bigcup g'(\{x\})$ element skupa Y. Uistinu, za odabrani $\{x\} \in \mathscr{P}_1(X)$, postoji jedinstveni $\{y\} \in \mathscr{P}_1(Y)$ takav da je $g'(\{x\}) = \{y\}$. Uniranjem skupa $\{y\}$ dobijemo skup y. Pokažimo da je f' bijekcija.

Neka je $y \in Y$ proizvoljan. Očito je $\{y\} \in \mathscr{P}_1(Y)$ pa postoji $a \in \mathscr{P}_1(X)$ oblika $a = \{x\}$, za neki $x \in X$, takav da je $g'(a) = \{y\}$, odnosno $g'(\{x\}) = \{y\}$. To po definiciji funkcije f' znači da je $f'(x) = \bigcup g'(a) = \bigcup \{y\} = y$ pa zaključujemo da je f' surjekcija.

Neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da vrijedi $f'(x_1) = y = f'(x_2)$, za neki $y \in Y$. Tvrdimo da je $x_1 = x_2$. Znamo da (općenito govoreći) $\bigcup t = v \land t = \{u\} \Rightarrow v = u$ pa $f'(x_1) = y$ povlači $g'(\{x_1\}) = \{y\}$, a $f'(x_2) = y$ povlači $g'(\{x_2\}) = \{y\}$.
Imamo $y = f'(x_1) = \bigcup g'(\{x_1\}) = f'(x_2) = \bigcup g'(\{x_2\})$. Skupovi $g'(\{x_1\})$ i $g'(\{x_2\})$ su jednočlani kao elementi skupa $\mathscr{P}_1(Y)$. Dakle, $g'(\{x_1\}) = g'(\{x_2\}) = \{y\}$ pa iz injektivnosti funkcije g' slijedi $\{x_1\} = \{x_2\}$. Skupovi su jednaki ako su im svi elementi jednaki, a s obzirom na to da oba skupa imaju po jedan element, zaključujemo $x_1 = x_2$. Dakle, funkcija f' je injekcija pa je bijekcija.

Uspostavili smo bijektivno preslikavanje između skupova X i Y pa su oni ekvipotentni, a onda i iste kardinalnosti. $\square$

Lema 2.1.5. $|\mathscr{P}(\mathscr{P}_1(X))| = |\mathscr{P}_1(\mathscr{P}(X))|$, *za svaki skup X.*

Dokaz. Neka je X proizvoljni skup. Uspostavljamo bijekciju f između skupova $\mathscr{P}(\mathscr{P}_1(X))$ i $\mathscr{P}_1(\mathscr{P}(X))$. Za proizvoljni $S \in \mathscr{P}(X)$ definiramo $f(\{S\}) := \mathscr{P}_1(S) = \{\{x\} \mid x \in S\}$. Očito $\{x\} \in \mathscr{P}_1(X)$, za svaki $x \in S \subseteq X$ pa je $\mathscr{P}_1(S) \subseteq \mathscr{P}_1(X)$, odnosno $\mathscr{P}_1(S) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}_1(X))$. Da je f funkcija vidimo iz zapisa $f^6(\{S^2\}^3) = \{\{x^1\}^2 \mid x^1 \in S^2\}^3$ (propozicija 1.4.10). Pokažimo da je bijekcija.

Neka je $T \in \mathscr{P}(\mathscr{P}_1(X))$ proizvoljan. Tada T kao podskup skupa $\mathscr{P}_1(X)$ sadrži samo jednočlane skupove pa je oblika $T = \{\{x\} \mid x \in S\}$, za neki $S \subseteq X$. Vrijedi, dakle, $S \in \mathscr{P}(X)$, a onda $\{S\} \in \mathscr{P}_1(\mathscr{P}(X))$ pa smo pronašli element domene funkcije f koji se preslikao u T — zaključujemo da je funkcija f surjekcija.

Neka su $S', S'' \in \mathscr{P}(X)$ takvi da vrijedi $f(S') = T = f(S'')$, gdje je $T \in \mathscr{P}(\mathscr{P}_1(X))$. To zapravo znači $f(S') = \{\{s'\} \mid s' \in S'\} = T = \{\{s''\} \mid s'' \in S''\}$. Sada je lako zaključiti da su skupovi S' i S'' jednaki, a time je funkcija f injekcija, odnosno bijekcija.

Zaključujemo da su zadani skupovi ekvipotentni pa željena tvrdnja vrijedi. □

Korolar 2.1.6. $|\mathscr{P}(\mathscr{P}_1(\mathsf{V}))| = |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|$.

Dokaz. Primjenom lema 2.1.5 i 2.1.1, $|\mathscr{P}(\mathscr{P}_1(\mathsf{V}))| = |\mathscr{P}_1(\mathscr{P}(\mathsf{V}))| = |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|$. □

2.2 (Konačni) kardinalni brojevi

Uvodimo pojmove konačnog kardinalnog broja. Lako ćemo vidjeti da je konačni kardinalni broj zapravo prirodni broj.

Definicija 2.2.1. *Kažemo da je x **konačni kardinalni broj** ako je on kardinalni broj i podskup skupa FIN.*

Brojeve 1, 2 i 3 definiramo kao kardinalne brojeve skupova s jednim, dva, odnosno tri elementa, tj. tako da vrijedi $1 := |\{\emptyset\}|$, $2 := |\{\mathsf{V}, \emptyset\}|$ i $3 := |\{\{\emptyset\}, \{\mathsf{V}\}, \{\mathsf{V}, \emptyset\}\}|$. Lako vidimo da je $\emptyset \neq \mathsf{V}$ ($\mathsf{V} \in \mathsf{V}$, ali i $\mathsf{V} \notin \emptyset$), a onda i $\{\emptyset\} \neq \{\mathsf{V}\}$. Već ovdje uočavamo da su ta tri konačna kardinalna broja zapravo prirodni brojevi — konkretno, 1 kao prirodni broj je skup svih jednočlanih skupova iz V što je zapravo jedna klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim$, a time kardinalni broj svakog skupa te iste klase.

Lema 2.2.2. *Za svaki skup x vrijedi: x je konačni kardinalni broj $\Leftrightarrow$ x je prirodni broj i $x \neq \emptyset$.*

Dokaz. Neka je x konačni kardinalni broj, odnosno neka je $x \subseteq FIN$ i $x \in Card$. Po teoremu 1.6.3 je $x \neq \emptyset$ pa postoji skup $a \in x$ za koji je $a \in FIN$. Tada $a \in \bigcup \mathbb{N}$ što znači da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $a \in n$. Po teoremu 1.6.4 zaključujemo da za svaki $b \in n$ vrijedi $b \sim a$. Svaki takav b „živi" i u x jer je x kao kardinalni broj upravo tako definiran. Također, x ne sadrži skupove koji nisu ekvipotentni s a pa znamo da je svaki $c \in x$ u n. Zaključujemo da je $x = n \in \mathbb{N}$, dakle x je prirodni broj.

Neka je $x \neq \emptyset$ prirodni broj. Tvrdimo da je x konačni kardinalni broj.

1. Tvrdimo da je $x \in Card$. Pretpostavka $x \neq \emptyset$ znači da postoji neki $b \in x$. Tvrdimo da je $x = |b|$, odnosno da vrijedi $\forall t(t \in x \leftrightarrow t \sim b)$. Upravo to dokazuje teorem 1.6.4 što znači da je x kardinalni broj skupa b pa je $x \in Card$.

2. Tvrdimo da je x konačni kardinalni broj. Po pretpostavci, x je neprazni prirodni broj pa postoji $d \in x \in \mathbb{N}$ iz čega slijedi $d \in \bigcup \mathbb{N} = FIN$. Dakle, $x \subseteq FIN$ pa zajedno s točkom 1. zaključujemo da je x konačni kardinalni broj. □

Propozicija 2.2.3. *Svaka injekcija $f : x \to x$, gdje je x konačni skup, je surjekcija.*

Dokaz. Neka je x konačan. Dokaz provodimo indukcijom po kardinalnosti skupa x koju ćemo označiti s n. Ako je $n = 0$, tada je nužno svaka injekcija f s praznog skupa u prazan skup također i surjekcija jer $rng(f) \subseteq \emptyset$ povlači $rng(f) = \emptyset$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaku injekciju sa skupa y u samog sebe, za bilo koji $y \in n$. Tvrdimo da je svaka injekcija s $(n+1)$-članog skupa u samog sebe također surjekcija. Neka je, dakle, $x \in n+1$ i neka je $f : x \to x$ proizvoljna injekcija. Kako je $x \in n+1$, to postoje skupovi a i b takvi da je $a \in n$, $b \notin a$ i $a \cup \{b\} = x$. Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $f(b) = b$, onda je restrikcija $f \restriction_a$ injekcija kao restrikcija injekcije i za svaki $t \in a$ vrijedi $t \neq b$ pa je $f(t) \neq f(b)$. Po pretpostavci indukcije $f \restriction_a$ je surjekcija, odnosno $rng(f \restriction_a) = a$ pa je $rng(f) = f[x] = f[a \cup \{b\}] = f[a] \cup f[\{b\}] =$ $rng(f \restriction_a) \cup \{f(b)\} = a \cup \{b\} = x$. Dakle, f je surjekcija.

- Ako je $f(b) = u \in a$, onda postoji $s \in a$ takav da je $f(s) = b$. Uistinu, kada ne bi postojao takav s, tada bi bilo $rng(f) \subseteq a$ pa bi po pretpostavci indukcije $f \restriction_a : a \to a$ bila surjekcija, odnosno poprimala bi $u = f(b)$, što je kontradikcija s injektivnošću od f. Definiramo funkciju g sa skupa a u a, $g := f \setminus \{(b,u),(s,b)\} \cup \{(s,u)\}$. Lako vidimo da je g najprije skup, a onda i funkcija jer je dobivena kao unija disjunktnih skupova — restrikcije $f \restriction_{a \setminus \{s\}}$ i skupa $\{(s,u)\}$.

  Dokažimo da je g injekcija. Neka su t i t' različiti elementi iz a. Tada je najviše jedan od njih jednak s. Ako je (bez smanjenja općenitosti) $t = s$, onda je $g(t) = g(s) = u$, dok je $f(t') = g(t')$ jer je $t' \in a \setminus \{s\}$. Funkcija f je injekcija pa poprima vrijednost u samo u b što znači da su u i $f(t')$, odnosno $g(t)$ i $g(t')$ različiti. Ako su oba različita od s, onda imamo $g(t) = f(t) \neq f(t') = g(t')$ jer je f po pretpostavci injekcija. U oba smo slučaja dobili da je $g(t) \neq g(t')$ pa zaključujemo da je g injekcija. Budući da je g injekcija na skupu a kardinalnosti n, zaključujemo, po pretpostavci indukcije, da je g surjekcija. Tvrdimo da iz tog slijedi i surjektivnost funkcije f. Neka je $y \in x$ proizvoljan. Ako je $y = b$, onda je $y = f(s)$. Inače je $y \in a = rng(g)$ pa postoji $t'' \in a$

takav da je $y = g(t'')$. Ako je $t'' \neq s$, onda je $f(t'') = g(t'') = y$, a ako je $t'' = s$, onda je $y = g(t'') = g(s) = u = f(b)$. U svakom slučaju smo pronašli element iz x koji se preslikao u y pa zaključujemo da je f surjekcija. □

Korolar 2.2.4. *Ako je $x \subset y \in FIN$, onda je $x \nsim y$.*

Dokaz. Neka su x i y takvi da je $x \subset y \in FIN$. Tada postoji $t \in y \setminus x$. Tvrdimo da x i y nisu ekvipotentni skupovi. Pretpostavimo suprotno, da je $x \sim y$. Tada postoji bijekcija $f : y \to x$. Sada za navedeni t postoji $u \in x$ takav da je $f(t) = u$. Promotrimo restrikciju $f\restriction_x$. Kao restrikcija injekcije i sama je injekcija, a onda, po propoziciji 2.2.3, i surjekcija. Postoji, dakle, $s \in x$ takav da je $f(s) = u = f(t)$. Očito $t \neq s$ (jer $t \notin x$, a $s \in x$), što je u kontradikciji s injektivnošću funkcije f. Zaključujemo, dakle, da nije moguće uspostaviti bijekciju između skupova x i y pa oni nisu ekvipotentni. □

Definiramo zbrajanje u skupu *Card* na sljedeći način:

Definicija 2.2.5. *Neka su $x, y \in Card$. Definiramo **zbroj** kardinalnih brojeva x i y kao $x + y := |a \cup b|$, gdje je $x = |a|$, $y = |b|$ i $a \cap b = \emptyset$. Ako ne postoje takvi skupovi a i b, definiramo $x + y := \emptyset$.*

Lako je vidjeti da prethodna definicija ne ovisi o izboru reprezentanata (dokaz je isti kao u teoriji ZF). Ovako definirano zbrajanje je asocijativno i komutativno. Uistinu, binarna operacija unije na skupovima je komutativna i asocijativna[1] pa nam je svejedno kako uniramo skupove, a onda i kako zbrajamo kardinalnosti tih skupova, odnosno njihovih unija.

Korolar 2.2.6. *Vrijedi* $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$ *i* $1 + 2 = 3$.

Dokaz. $0 + 1 = |\emptyset| + |\{\emptyset\}| = |\emptyset \cup \{\emptyset\}| = |\{\emptyset\}| = 1$
$1 + 1 = |\{\emptyset\}| + |\{\mathsf{V}\}| = |\{\emptyset\} \cup \{\mathsf{V}\}| = |\{\mathsf{V}, \emptyset\}| = 2.$
$1 + 2 = |\{\{\mathsf{V}, \emptyset\}\}| + |\{\{\mathsf{V}\}, \{\emptyset\}\}| = |\{\{\mathsf{V}, \emptyset\}\} \cup \{\{\mathsf{V}\}, \{\emptyset\}\}| = |\{\{\mathsf{V}, \emptyset\}, \{\mathsf{V}\}, \{\emptyset\}\}| = 3.$ □

Lema 2.2.7. *Za proizvoljni skup a vrijedi $|a| = 1$ ako i samo ako postoji skup x takav da je $a = \{x\}$.*

Dokaz. Neka je skup a takav da je $|a| = 1 = |\{\emptyset\}|$. Tada postoji bijekcija $f : \{\emptyset\} \to a$. Ona je surjekcija pa je $a = rng(f) = f[\{\emptyset\}] = \{f(\emptyset)\} = \{x\}$, za $x := f(\emptyset)$.
Neka je skup a oblika $a = \{x\}$. Tada je $f = \{(x, \emptyset)\}$ bijekcija između $\{x\}$ i $\{\emptyset\}$ pa je $|a| = |\{x\}| = |\{\emptyset\}| = 1$. □

[1]Komutativnost i asocijativnost binarne operacije unije nismo posebno uvodili, ali za tim nije ni bilo potrebe. Čitatelju će odmah biti jasno, iz definicije unije dvaju skupova, zašto ona ima takva svojstva.

Lema 2.2.8. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $Sc(n) = n + 1$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ako je $Sc(n) = \emptyset$, tada teorem 1.5.2 možemo interpretirati ovako: za svaki skup $y \in n$ vrijedi da ne postoji skup $z \notin y$, a onda, po definiciji zbrajanja kardinalnih brojeva vrijedi 2.2.5 da je $n + 1 = \emptyset$.

Pretpostavimo da je $Sc(n) \neq \emptyset$. Neka je $y \in Sc(n)$ proizvoljan. Tada postoji z koji zadovoljava formulu $z \in y \land y \setminus \{z\} \in n \in \mathbb{N}$. Možemo li pronaći $a \in n$ i $b \notin a$ takve da su skupovi y i $a \cup \{b\}$ ekvipotentni? Lako vidimo da su $a := y \setminus \{z\}$ i $b := z$ takvi skupovi. Očito $b \notin a$ te $|a \cup \{b\}| = n + 1$. Proizvoljni skup $y \in Sc(n)$ smo rastavili na dva skupa čija unija ima kardinalnost $n + 1$. Dakle, vrijedi $y \in n + 1$.

Neka je $x \in n + 1$ proizvoljan. Neka su a i c skupovi takvi da je $x := a \cup \{c\}$, $a \in n$, i $c \notin a$. Tvrdimo da je $x \in Sc(n)$. To očito vrijedi jer $x = a \cup \{c\}$ zadovoljava formulu iz teorema 1.5.2. □

Lema 2.2.9. *Ako je n konačni kardinalni broj i $n + 1 \neq \emptyset$, onda je $n + 1$ konačni kardinalni broj.*

Dokaz. Neka je n konačni kardinalni broj i neka je $n + 1 \neq \emptyset$. Po lemi 2.2.2 vrijedi da je n prirodni broj. Naime, u slučaju da je $n = \emptyset$, po definiciji 2.2.5 bi bilo i $n + 1 = \emptyset$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Dalje, lema 2.2.8 povlači da je $n + 1$ sljedbenik prirodnog broja pa je i sam prirodni broj (lema 1.5.6). Sada, opet po lemi 2.2.2, samo u drugom smjeru, zaključujemo da je $n + 1$ konačni kardinalni broj. □

Lema 2.2.10. *Za konačne kardinalne brojeve m, n i p takve da je $m = n + p$ vrijedi $n \leq m$ i $p \leq m$.*

Dokaz. Neka su m, n i p konačni kardinalni brojevi takvi da je $m = n + p$ dobro definiran (neprazan) zbroj kardinalnih brojeva. Tvrdimo da je $n \leq m$ i $p \leq m$. Po definiciji 2.2.5, $m = n + p$ znači da postoje skupovi $a \in n$ i $b \in p$ takvi da je $a \cup b \in m$ i $a \cap b = \emptyset$. Očito je $a \subseteq a \cup b$ i $b \subseteq a \cup b$ pa po definiciji 1.6.5 slijedi $n \leq m$ i $p \leq m$. □

Lema 2.2.11. *Ako za konačne kardinalne brojeve m, n, p i q vrijedi $p \leq m$ i $q \leq n$ i $m + n$ je dobro definiran (neprazan) konačni kardinalni broj, onda je $p + q \leq m + n$.*

Dokaz. Neka su m, n, p i q konačni kardinalni brojevi takvi da je $p \leq m$, $q \leq n$ i $m+n \neq \emptyset$. Tvrdimo da je $p + q \leq m + n$. Iz pretpostavke da je dobro definiran zbroj $m + n$, po definiciji 1.6.5 slijedi da postoje neprazni disjunktni skupovi $a \in m$ i $b \in n$ takvi da je $a \cup b \in m + n$. Nadalje, po propoziciji 1.6.6 za skup $a \in m$ postoji skup $c \in p$ takav da je $c \subseteq a$, a za skup $b \in n$ postoji skup $d \in q$ takav da je $d \subseteq b$. Presjek skupova a i b je prazan skup pa je i presjek njihovih podskupova također prazan skup, tj. mora vrijediti $c \cap d = \emptyset$. Dakle, zbroj $p + q$ je dobro definiran. Također, iz $c \subseteq a$ i $d \subseteq b$ slijedi $c \cup d \subseteq a \cup b$ pa smo u uvjetima definicije 1.6.5. Slijedi, dakle, $p + q \leq m + n$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 2.2.12. *Za konačne kardinalne brojeve m i n vrijedi: ako je $m < n$, onda je $m+1 \leq n$.*

Dokaz. Neka su m i n konačni kardinalni brojevi takvi da je $m < n$. To znači da je $m \leq n$ i $m \neq n$. Zbog $m \leq n$ postoje skupovi $a \in m$ i $b \in n$ takvi da je $a \subseteq b$. Iz $m \neq n$ zaključujemo da skupovi a i b nisu ekvipotentni, a onda je očito a pravi podskup skupa b. Postoji, dakle, $t \in b \setminus a$. Tada je presjek $a \cap \{t\} = \emptyset$ pa je dobro definiran (neprazan) zbroj $m + 1$. Lako vidimo da vrijedi $a \cup \{t\} \subseteq b$ pa po definiciji 1.6.5 zaključujemo da je $m + 1 \leq n$, što je i trebalo dokazati. □

Kako smo najavili, dokaz da ne vrijedi aksiom izbora u teoriji NF provodimo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo, dakle, da je skup kardinalnih brojeva *Card* dobro uređen skup obzirom na relaciju $\leq$ uvedenu u definiciji 1.6.5. Uobičajenim tehnikama se može vidjeti da je ta pretpostavka ekvivalent aksiomu izbora: precizno, totalnost tog uređaja ekvivalentna je Zornovoj lemi.

Lema 2.2.13. *Ako je $n + 1$ konačni kardinalni broj, onda vrijedi $n < n + 1$.*

Dokaz. Neka je $n + 1$ konačni kardinalni broj. Po lemi 2.2.10 slijedi $n \leq n + 1$. Tvrdimo da je $n \neq n + 1$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. da je $n = n + 1$. Kako je $n + 1$ konačni kardinalni broj, postoji skup $a \in n + 1$, a onda postoji $b \in a$ takav da je $a \setminus \{b\} \in n$ (lema 2.2.8). Iz pretpostavke $n = n + 1$ slijedi da postoji bijekcija f sa skupa a na skup $a \setminus \{b\}$. Promotrimo restrikciju te funkcije na skup $a \setminus \{b\}$ s kodomenom $a \setminus \{b\}$. Očito je ona injekcija kao restrikcija injekcije. Iz $a \in n + 1 \subseteq FIN$ zaključujemo da je a konačan skup pa po propoziciji 2.2.3 slijedi da je restrikcija $f \restriction_{a\setminus\{b\}}$ surjekcija. To pak znači da je slika te restrikcije $rng(f \restriction_{a\setminus\{b\}}) = a \setminus \{b\}$. Dakle, za $f(b) \in a \setminus \{b\}$ postoji $x \in a \setminus \{b\}$ takav da je $f(x) = f \restriction_{a\setminus\{b\}} (x) = f(b)$. Pronašli smo dva različita elementa iz skupa a čije su slike jednake što je u kontradikciji s pretpostavkom injektivnosti funkcije f. Zaključujemo da vrijedi $n \neq n + 1$. □

Lema 2.2.14. *Ako je m konačni kardinalni broj, onda postoje konačni kardinalni brojevi n, p i q takvi da je ili $m = n + n + n$ ili $m = p + p + p + 1$ ili $m = q + q + q + 2$. Svaki od ova tri slučaja isključuje preostala dva.*

Dokaz. Dokaz egzistencije provodimo indukcijom po m. Kako istu možemo primijeniti samo na skupove koji pak moraju biti definirani stratificiranim formulama, uvjerimo se da je formula $\exists n \exists p \exists q(m = n + n + n \vee m = p + p + p + 1 \vee m = q + q + q + 2)$ (sa slobodnom varijablom m) stratificirana. Lako vidimo da apstrakcijski term koji opisuje zbrajanje dvaju kardinalnih brojeva $x + y$ ima isti tip kao varijable ili termi x i y u bilo kojoj stratificiranoj formuli.[2] To očito pokazuje da je navedena formula stratificirana pa činjenicu da vrijedi za svaki (prirodni neprazni) m možemo dokazati indukcijom.

Baza indukcije: Ako je $m = 0$, onda za $n := 0$ imamo
$n + n + n = 0 + 0 + 0 = |\emptyset| + |\emptyset| + |\emptyset| = |\emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset| = |\emptyset| = 0 = m$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za konačni kardinalni broj m, odnosno da se $m \neq \emptyset$ može prikazati ili kao $m = n' + n' + n'$ ili $m = p' + p' + p' + 1$ ili $m = q' + q' + q' + 2$, gdje su n', p' i q' neki konačni kardinalni brojevi. Po lemi 2.2.10 znamo da je $n' \leq m$, $p' \leq m$ i $q' \leq m$. Pretpostavimo da je $m + 1 \neq \emptyset$. Tada po lemi 2.2.9 slijedi da je $m + 1$ konačni kardinalni broj. To pak znači da postoje skupovi a i b takvi da je $a \in m$, $\{b\} \in 1$, $b \notin a$ i $a \cup \{b\} \in m + 1$.

1. Ako je $m = n' + n' + n'$, onda je očito $m + 1 = n' + n' + n' + 1$ pa za $p := n'$ vrijedi $m + 1 = p + p + p + 1$.

2. Ako je $m = p' + p' + p' + 1$, onda je $m + 1 = (p' + p' + p' + 1) + 1 = p' + p' + p' + (1 + 1) = p' + p' + p' + 2$ pa za $q := p'$ vrijedi $m + 1 = q + q + q + 2$.

3. Ako je $a \in m = q' + q' + q' + 2 = q' + q' + q' + 1 + 1$, onda postoje u parovima disjunktni skupovi $a_1 \in q'$, $a_2 \in q'$, $a_3 \in q'$, $\{b_1\}$ i $\{b_2\}$ (što zapravo znači $b_i \notin a_j$, za $1 \leq i \leq 2$ i $1 \leq j \leq 3$) takvi da je $a = a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup \{b_1\} \cup \{b_2\}$. Iz pretpostavke $b \notin a$ slijedi da je $\{b_1\}$ disjunktan sa svim spomenutim podskupovima skupa a. Tada je dobro definiran zbroj $q' + 1$ — vrijedi $a_1 \cup \{b_1\} \in q' + 1$ (kao i unije oblika $a_j \cup \{b_j\}$) pa je $q' + 1 \neq \emptyset$. To pak po lemi 2.2.9 znači da je $q' + 1$ konačni kardinalni broj. Sada je dobro definiran zbroj $m + 1 = (q' + q' + q' + 2) + 1 = (q' + 1) + (q' + 1) + (q' + 1)$ pa za $n := q' + 1$ dobijemo zapis $m + 1 = n + n + n$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo još da bilo koji takav „rastav” konačnog kardinalnog broja m isključuje preostala dva. Pretpostavimo suprotno.

[2]Jednakost tipova proizlazi iz definicije zbroja kardinalnih brojeva preko unije skupova. Lako se vidi da reprezentanti a i b kardinalnih brojeva m i n redom imaju isti tip kao reprezentant $a \cup b$ njihovog zbroja u bilo kojoj stratificiranoj formuli, što slijedi iz zapisa $z^1 \in (a^2 \cup b^2)^2 \leftrightarrow z^1 \in a^2 \vee z^1 \in b^2$.

Moguća su tri slučaja:

- Pretpostavimo da postoje konačni kardinalni brojevi m, n i p takvi da je $m = n+n+n$ i $m = p + p + p + 1$, odnosno $n + n + n = p + p + p + 1$. Zbog pretpostavke totalnosti uređaja $\leq$ na skupu *Card*, mora vrijediti točno jedna od dvije mogućnosti:
  - Ako je $p < n$, onda je, po lemi 2.2.12, $p + 1 \leq n$. Primijenimo li lemu 2.2.11 i komutativnost i asocijativnost zbrajanja, dobit ćemo nejednakost
    $(p + 1) + (p + 1) + (p + 1) = p + p + p + 1 + 1 + 1 \leq n + n + n$.
    S druge strane, po lemi 2.2.13 vrijedi
    $p + p + p + 1 < p + p + p + 1 + 1 < p + p + p + 1 + 1 + 1$.
    Sada imamo $m = p+p+p+1 < p+p+p+1+1 < p+p+p+1+1+1 \leq n+n+n = m$, odnosno $m < m$, što je u kontradikciji s irefleksivnošću uređaja.
  - Ako je $n \leq p$, onda je, po lemi 2.2.11, $n + n + n \leq p + p + p$. S druge strane, po lemi 2.2.13 vrijedi $p + p + p < p + p + p + 1$ pa imamo
    $m = n + n + n \leq p + p + p < p + p + p + 1 = m$, tj. $m < m$, što je kontradikcija.
- Pretpostavimo sada da postoje konačni kardinalni brojevi m, n i q takvi da vrijedi $m = n + n + n$ i $m = q + q + q + 2$, što pak znači $n + n + n = q + q + q + 2$. Ponovo, zbog pretpostavke totalnosti uređaja $\leq$ na skupu *Card*, vrijedi točno jedna od dvije mogućnosti:
  - Ako je $q < n$, onda je, po lemi 2.2.12, $q + 1 \leq n$, a onda primjenom leme 2.2.11 dobijemo nejednakost $(q+1)+(q+1)+(q+1) \leq n+n+n$. Zbog asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja možemo pisati
    $q + q + q + 2 + 1 = q + q + q + 1 + 1 + 1 = (q + 1) + (q + 1) + (q + 1)$.
    Po lemi 2.2.13 vrijedi $q + q + q + 2 < q + q + q + 2 + 1$.
    Sada imamo: $m = q + q + q + 2 < q + q + q + 2 + 1 \leq n + n + n = m$, odnosno $m < m$, što je kontradikcija.
  - Ako je $n \leq q$, onda je, po lemi 2.2.11, $n + n + n \leq q + q + q$. Primijenimo li lemu 2.2.13 dva puta (prvi put na konačni kardinalni broj $q + q + q$, a onda na $q+q+q+1$), vidimo da vrijedi $q+q+q < q+q+q+1 < q+q+q+1+1 = q+q+q+2$. Vrijedi, dakle, $m = n + n + n \leq q + q + q < q + q + q + 2 = m$, tj. $m < m$, što je kontradikcija.
- Na kraju, pretpostavimo da postoje konačni kardinalni brojevi m, p i q takvi da vrijedi $m = p + p + p + 1$ i $m = q + q + q + 2$, odnosno $p + p + p + 1 = q + q + q + 2$. Još jednom, zbog pretpostavke totalnosti uređaja $\leq$ na skupu *Card*, vrijedi točno jedna od dvije mogućnosti:

– Ako je $q < p$, onda je, po lemi 2.2.12, $q + 1 \leq p$. Sada Primijenimo lemu 2.2.11 pa vidimo da vrijedi $(q + 1) + (q + 1) + (q + 1) \leq p + p + p$. S druge strane, Primijenimo lemu 2.2.13 najprije na konačni kardinalni broj $p + p + p$ (pa dobijemo $p + p + p < p + p + p + 1$), a onda na konačni kardinalni broj $q + q + q + 2$ (pa vidimo da vrijedi $q + q + q + 2 < q + q + q + 2 + 1$). Također, zbog asocijativnosti i komutativnosti zbrajanja na skupu *Card* možemo pisati $q+q+q+2+1 = q+q+q+1+1+1 = (q+1)+(q+1)+(q+1)$. Sada imamo $m = q + q + q + 2 < (q + 1) + (q + 1) + (q + 1) \leq p + p + p < p + p + p + 1 = m$, odnosno $m < m$, što je kontradikcija.
– Ako je $p \leq q$, onda je, po lemi 2.2.11, $p+p+p \leq q+q+q$, odnosno (primjenom iste leme) $p + p + p + 1 \leq q + q + q + 1$. Primijenimo lemu 2.2.13 na konačni kardinalni broj $q+q+q+1$ pa dobijemo $q+q+q+1 < q+q+q+1+1 = q+q+q+2$. Sada vidimo da je $m = p + p + p + 1 \leq q + q + q + 1 < q + q + q + 2 = m$, tj. $m < m$, što je kontradikcija.

□

2.3 Potencije s bazom 2

Definicija 2.3.1. *Za kardinalni broj oblika $m = |\mathscr{P}_1(a)|$, za neki skup a, definiramo kardinalni broj $2^m := |\mathscr{P}(a)|$. Ako ne postoji skup a takav da je $\mathscr{P}_1(a) \in m$, definiramo $2^m := \emptyset$.*

Iz lema 2.1.4 i 2.1.3 slijedi da definicija 2.3.1 ne ovisi o konkretnom skupu a.

Korolar 2.3.2. $2^{|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|} = |\mathsf{V}|$.

Dokaz. Primijenimo korolar 2.1.2 i definiciju 2.3.1 i dobijemo $2^{|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|} = |\mathscr{P}(\mathsf{V})| = |\mathsf{V}|$. □

Korolar 2.3.3. $2^{|\mathscr{P}_1^2(\mathsf{V})|} = |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|$.

Dokaz. Po napomeni 1.3.7 je $\mathscr{P}_1^2(\mathsf{V}) = \mathscr{P}_1(\mathscr{P}_1(\mathsf{V}))$. Primijenimo li lemu 2.1.5, a onda korolar 2.1.2, dobijemo

$$2^{|\mathscr{P}_1^2(\mathsf{V})|} = 2^{|\mathscr{P}_1(\mathscr{P}_1(\mathsf{V}))|} = |\mathscr{P}(\mathscr{P}_1(\mathsf{V}))| = |\mathscr{P}_1(\mathscr{P}(\mathsf{V}))| = |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|.$$ □

Lema 2.3.4. *$2^m = \emptyset$ ako i samo ako $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < m$.*

Dokaz. Dokazat ćemo ekvivalentnost negacija tih tvrdnji: postoji skup a takav da je $\mathscr{P}_1(a) \in m$ ako i samo ako je $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| \geq m$ (pri negiranju tvrdnje $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < m$ koristili smo totalnost uređaja $<$ na $Card$, što je posljedica aksioma izbora).
Ako je $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| \geq m$, onda, po propoziciji 1.6.6, postoji skup $c \subseteq \mathscr{P}_1(\mathsf{V})$ takav da je $c \in m$. Sada iz $c \subseteq \mathscr{P}_1(\mathsf{V})$ slijedi $c = \mathscr{P}_1(b)$, za neki skup b pa je $2^m = |\mathscr{P}(b)| \neq \emptyset$.
Ako je $2^m \neq \emptyset$, onda postoji skup a takav da je $\mathscr{P}_1(a) \in m$. Znamo da za svaki skup x vrijedi $\mathscr{P}_1(x) \subseteq \mathscr{P}_1(\mathsf{V})$ pa je $\mathscr{P}_1(a) \subseteq \mathscr{P}_1(\mathsf{V})$, a onda, po definiciji 1.6.5, imamo
$m = |\mathscr{P}_1(a)| \leq |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})\big|$. □

Propozicija 2.3.5. *Ako je $2^m \neq \emptyset$, onda je $m < 2^m$.*

Dokaz. Uočimo da je ovo zapravo Cantorov osnovni teorem.
Neka je $2^m \neq \emptyset$. Tvrdimo da je $m \leq 2^m$ i $m \neq 2^m$. Uistinu, iz pretpostavke $2^m \neq \emptyset$ slijedi da postoji a takav da je $\mathscr{P}_1(a) \in m$. Očito je $\mathscr{P}_1(a) \subseteq \mathscr{P}(a)$ pa lako zaključimo da vrijedi $m \leq 2^m$ (definicija 1.6.5). Tvrdimo da je $m \neq 2^m$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, da je $2^m = m$. To znači da možemo uspostaviti bijekciju f između skupova $\mathscr{P}_1(a)$ i $\mathscr{P}(a)$, gdje je a takav da je $\mathscr{P}_1(a) \in m$. Promotrimo klasu $\{x \mid x \in a \wedge x \notin f(\{x\})\}$. Formula $x^1 \in a^2 \wedge x^1 \notin f^5(\{x^1\}^2)$ je očito stratificirana pa je definirana klasa skup. Označimo taj skup s b. Sada iz $b \in \mathscr{P}(a)$ i pretpostavke da je f bijekcija zaključujemo da postoji skup $c \in a$ takav da je $\{c\} = f^{-1}(b) \in \mathscr{P}_1(a)$. Pitamo se je li $c \in b$ ili $c \notin b$? Kada bi bilo $c \notin b$, tada bi $b = f(\{c\})$ povlačilo $c \in b$, što je kontradikcija. Kada bi, pak, bilo $c \in b$, dobili bismo (čitajući uvjete skupa b) $c \notin f(\{c\}) = b$, što je ponovo kontradikcija. U oba smo slučaja došli do kontradikcije pa zaključujemo da pretpostavka nije istinita, odnosno da ne vrijedi $2^m = m$. □

Korolar 2.3.6. $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < |\mathsf{V}|$.

Dokaz. Po definiciji 2.3.1 i korolaru 2.1.2 vrijedi $2^{|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|} = |\mathscr{P}(\mathsf{V})| = |\mathsf{V}| \neq \emptyset$ pa primjenom propozicije 2.3.5 i korolara 2.3.2 dobijemo tvrdnju. □

Propozicija 2.3.7. *Ako je $m \leq n$ i $2^n \neq \emptyset$, onda je $2^m \neq \emptyset$ i $2^m \leq 2^n$.*

Dokaz. Neka je $m \leq n$ i $2^n \neq \emptyset$. Tada postoji skup c takav da je $\mathscr{P}_1(c) \in n$. Sada, po propoziciji 1.6.6, postoji skup $t \subseteq \mathscr{P}_1(c)$ pa je t oblika $t = \mathscr{P}_1(d)$, za neki $d \subseteq c$. Očito za svaki podskup skupa d vrijedi da je također podskup skupa c (tranzitivnost relacije $\subseteq$) pa je $\mathscr{P}(d) \subseteq \mathscr{P}(c)$, što po definiciji 1.6.5 znači $2^m \leq 2^n$. □

Napomena 2.3.8. *Formula $2^m = n$ je stratificirana ako m i n imaju isti tip. Uistinu, čitajući definiciju 2.3.1, lako vidimo stratificiranost formule*

$$(\nexists a^2(\mathscr{P}_1(a^2)^3 \in m^4) \wedge n^4 = \emptyset)^4 \vee (\exists a^2(\mathscr{P}_1(a^2)^3 \in m^4) \wedge n^4 = |\mathscr{P}(a^2)^3|)^4.$$

2.4 Svojstva funkcije transfera T

Do sad smo operirali s kardinalnim brojevima tipski ujednačenih elemenata. Što kada želimo usporediti kardinalnosti skupova različitih tipova? Promotrimo dva skupa $x, y \in 2$. Neka je $x = \{t, s\}$. Očito je $x \in 2$ i $\{x, y\} \in 2$, ali 2 kojem pripada x nije istog tipa kao 2 kojem pripada skup $\{x, y\}$ (štoviše, u bilo kojoj stratificiranoj formuli u kojoj se pojavljuju tipa je za jedan većeg od tipa pridruženog 2 kojem pripada x). Sada lako vidimo da su kardinalni brojevi kojima pripadaju neki skup a i njegov singleton partitivni skup (barem) različitog tipa (a intuitivno a i $\mathscr{P}_1(a)$ imaju isti broj elemenata) pa to možemo iskoristiti da bismo definirali pomoćnu funkciju koja „pomiče" tipove kardinalnih brojeva.

Definicija 2.4.1. *Definiramo $T(m)$ za kardinalni broj m kao:*
$T(|a|) = |\mathscr{P}_1(a)|$, gdje je $m = |a|$.

Iz leme 2.1.4 slijedi da definicija 2.4.1 ne ovisi o reprezentantu a kardinalnog broja m.

Lema 2.4.2. $T(0) = 0$, $T(1) = 1$, $T(2) = 2$, $T(|\mathsf{V}|) = |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|$, $T(|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|) = |\mathscr{P}_1^2(\mathsf{V})|$.

Dokaz. Tvrdnje $T(|\mathsf{V}|) = |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|$ i $T(|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|) = |\mathscr{P}_1^2(\mathsf{V})|$ su samo uvrštavanje skupa V, odnosno $\mathscr{P}_1(\mathsf{V})$ u definiciju 2.4.1.
Za $m = 0$ vrijedi $\emptyset \in m$ kao jedini element skupa 0 i vrijedi $\mathscr{P}_1(\emptyset) = \emptyset$, odnosno $\mathscr{P}_1(\emptyset) \in 0$ pa je $T(0) = 0$.
S obzirom na to da za proizvoljni jednočlani skup $a = \{x\}$ njegov singleton partitivni skup je oblika $\mathscr{P}_1(a) = \{\{x\}\}$, vidimo da je $\mathscr{P}_1(a) \in 1$ pa vrijedi $T(1) = 1$.
Analogno, za proizvoljni dvočlani skup $b = \{y_1, y_2\}$, njegov singleton partitivni skup je oblika $\mathscr{P}_1(b) = \{\{y_1\}, \{y_2\}\}$ pa je $\mathscr{P}_1(b) \in 2$. Dakle, $T(2) = 2$. □

Baš kako smo dokazali da T preslikava 1 u 1 i 2 u 2, lako zaključimo da to vrijedi za svaki pojedini konačni kardinalni broj. Međutim, ne možemo dokazati $(\forall n \in \mathbb{N})(T(n) = n)$ jer formula $T(n) = n$ nije stratificirana pa na istu ne možemo primijeniti indukciju.

Lema 2.4.3. *Ako su m, n i $m+n$ kardinalni brojevi, onda vrijedi $T(m+n) = T(m) + T(n)$.*

Dokaz. Neka su m, n takvi kardinalni brojevi da je dobro definiran kardinalni broj $m+n$. Tada postoje skupovi $a \in m$ i $b \in n$ takvi da je $a \cap b = \emptyset$. Tvrdimo da je $\mathscr{P}_1(a) \cap \mathscr{P}_1(b) = \emptyset$. Uistinu, kada bi postojao skup $c \in \mathscr{P}_1(a) \cap \mathscr{P}_1(b)$, postojali bi i skupovi $x \in a$, $y \in b$, takvi da je $\{x\} \in \mathscr{P}_1(a)$ i $\{y\} \in \mathscr{P}_1(b)$ i $\{x\} = c = \{y\}$. Skupovi su jednaki ako su im elementi jednaki pa bi moralo vrijediti $x = y$, čime bi presjek skupova a i b bio neprazan, što je u kontradikciji s polaznom pretpostavkom. Vrijedi, dakle, $\mathscr{P}_1(a) \cap \mathscr{P}_1(b) = \emptyset$.

Tvrdimo da je $\mathscr{P}_1(a \cup b) = \mathscr{P}_1(a) \cup \mathscr{P}_1(b)$. Neka je $x' \in \mathscr{P}_1(a \cup b)$ proizvoljan. Tada postoji $y' \in a \cup b$ takav da je $x' = \{y'\}$. Očito $y' \in a$ ili $y' \in b$, isključivo (presjek skupova a i b je prazan). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $y' \in a$. Tada je $x' = \{y'\} \in \mathscr{P}_1(a) \subseteq \mathscr{P}_1(a) \cup \mathscr{P}_1(b)$. Time je dokazana jedna inkluzija: $\mathscr{P}_1(a \cup b) \subseteq \mathscr{P}_1(a) \cup \mathscr{P}_1(b)$. Neka je sad $x'' \in \mathscr{P}_1(a) \cup \mathscr{P}_1(b)$ proizvoljan. Kako je $\mathscr{P}_1(a) \cap \mathscr{P}_1(b) = \emptyset$, vrijedi $x'' \in \mathscr{P}_1(a)$ ili $x'' \in \mathscr{P}_1(b)$, isključivo. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x'' \in \mathscr{P}_1(b)$. Tada postoji $y'' \in b$ takav da je $x'' = \{y''\}$. Sada $y'' \in b$ povlači $y'' \in a \cup b$, a onda nužno $x'' \in \mathscr{P}_1(a \cup b)$. Dakle, vrijedi i $\mathscr{P}_1(a) \cup \mathscr{P}_1(b) \subseteq \mathscr{P}_1(a \cup b)$, odnosno $\mathscr{P}_1(a \cup b) = \mathscr{P}_1(a) \cup \mathscr{P}_1(b)$. Zaključno, lako vidimo da je
$T(m+n) = T(|a \cup b|) = |\mathscr{P}_1(a \cup b)| = |\mathscr{P}_1(a) \cup \mathscr{P}_1(b)| = |\mathscr{P}_1(a)| + |\mathscr{P}_1(b)| = T(m) + T(n)$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Lema 2.4.4. *Ako za dva konačna kardinalna broja m i n vrijedi $m+1 = n+1$, gdje su $m+1$ i $n+1$ dobro definirani konačni kardinalni brojevi, onda je $m = n$.*

Dokaz. Neka su m i n konačni kardinalni brojevi takvi da su $m+1$ i $n+1$ dobro definirani konačni kardinalni brojevi i da vrijedi $m+1 = n+1$. Tvrdimo da je $m = n$. Pretpostavimo suprotno, da je $m \neq n$. Zbog totalnosti uređaja $<$ vrijedi barem jedna od dvije mogućnosti: $m < n$ ili $n < m$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $m < n$. Iz pretpostavke $n+1 \neq \emptyset$ slijedi da postoje skupovi $c \in n$ i $d \notin c$ takvi da je $c \cup \{d\} \in n+1$. Za dani skup c, po propoziciji 1.6.6, postoji skup $a \in m$ takav da je $a \subset c$ (očito je $a \neq c$ jer je $m \neq n$). Sada očito vrijedi $d \notin a$ (jer $d \notin c$) pa je $a \cup \{d\} \subset c \cup \{d\}$ i $a \cup \{d\} \in m+1 = n+1$, iz čega slijedi $a \cup \{d\} \sim c \cup \{d\}$, što je nemoguće po korolaru 2.2.4. $\square$

Lema 2.4.5. *Ako je m konačni kardinalni broj, onda je $m \neq T(m) + 1$ i $m \neq T(m) + 2$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po m.
Neka je $m = 0$. Primjenom leme 2.2.13 i korolara 2.2.6 dobijemo: $0 < 0 + 1 = T(0) + 1$ i $0 < 0 + 1 < 0 + 1 + 1 = 0 + 2 = T(0) + 2$. Dakle, $0 \neq T(0) + 1$ i $0 \neq T(0) + 2$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za konačni kardinalni broj m. Neka je $m + 1$ konačni kardinalni broj takav da je $m + 1 \neq \emptyset$.

Tvrdimo da je $m+1 \neq T(m+1)+1$ i $m+1 \neq T(m+1)+2$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji. Razlikujemo dva slučaja:

- Neka je $m+1 = T(m+1)+1$. Zbog pretpostavke da je $m+1$ dobro definiran kardinalni broj, $T(m+1)$ možemo zapisati kao $T(m) + T(1)$, što je pak, po lemi 2.4.2, jednako $T(m) + 1$. Imamo, dakle, jednakost: $m + 1 = (T(m) + 1) + 1$ pa, po lemi 2.4.4, slijedi jednakost $m = T(m) + 1$ što je u kontradikciji s pretpostavkom indukcije.
- Neka je $m+1 = T(m+1)+2$. Ponovo lako zaključujemo da možemo pisati $T(m+1) = T(m) + T(1) = T(m) + 1$ pa imamo $m + 1 = (T(m) + 1) + 2 = T(m) + (1 + 2) = T(m) + (2 + 1) = (T(m) + 2) + 1$. Vrijedi, dakle, $m + 1 = (T(m) + 2) + 1$. Koristeći lemu 2.4.4, dobijemo jednakost $m = T(m) + 2$ što je u kontradikciji s pretpostavkom indukcije.

U oba smo slučaja došli do kontradikcije pa zaključujemo da za $m + 1$ mora vrijediti
$m + 1 \neq T(m + 1) + 1$ i $m + 1 = T(m + 1) + 2$. □

Lema 2.4.6. *Za sve $m, n \in Card$ vrijedi $m \leq n$ ako i samo ako je $T(m) \leq T(n)$.*

Dokaz. Neka su m i n kardinalni brojevi takvi da je $m \leq n$. Tvrdimo da je $T(m) \leq T(n)$. Uistinu, iz nejednakosti $m \leq n$ i definicije 1.6.5 slijedi da postoje skupovi $a \in m$ i $b \in n$ takvi da je $a \subseteq b$. No, onda je očito $\mathscr{P}_1(a) \subseteq \mathscr{P}_1(b)$. Doista, za proizvoljni $x \in \mathscr{P}_1(a)$ postoji $t \in a$ takav da je $x = \{t\}$. Iz $a \subseteq b$ slijedi da je $t \in b$ pa onda i $x = \{t\} \in \mathscr{P}_1(b)$. Kako je x bio proizvoljan, zaključujemo da vrijedi $\mathscr{P}_1(a) \subseteq \mathscr{P}_1(b)$, odnosno, po definiciji 1.6.5 vrijedi $|\mathscr{P}_1(a)| \leq |\mathscr{P}_1(b)| \Rightarrow T(m) \leq T(n)$.
Neka su sad m i n kardinalni brojevi takvi da je $T(m) \leq T(n)$. Tada postoje skupovi $c \in m$ i $d \in n$ takvi da vrijedi $\mathscr{P}_1(c) \subseteq \mathscr{P}_1(d)$. Ponovo lako vidimo da to povlači $c \subseteq d$. Uistinu, za proizvoljni $s \in c$ vrijedi $\{s\} \in \mathscr{P}_1(c) \subseteq \mathscr{P}_1(d)$ pa očito vrijedi $s \in d$, odnosno vrijedi $c \subseteq d$ a onda po definiciji 1.6.5 zaključujemo da vrijedi $m \leq n$. □

Lema 2.4.7. *Ako je $m \leq T(n)$, onda postoji p takav da je $m = T(p)$.*

Dokaz. Neka su m i n kardinalni brojevi takvi da je $m \leq T(n)$. Neka je $x \in n$ proizvoljan (postoji zbog $n \neq \emptyset$). Tada je $T(n) = T(|x|) = |\mathscr{P}_1(x)|$. Po propoziciji 1.6.6 za svaki $c \in T(n)$ postoji skup $a \in m$ takav da je $a \subseteq c$. Dakle, za $c := \mathscr{P}_1(x)$ postoji skup $a \in m$ takav da je $a \subseteq c$. Skup a je podskup singleton partitivnog skupa pa je i sam singleton partitivni skup, odnosno postoji skup $b \subseteq x$ takav da je $a = \mathscr{P}_1(b)$. Označimo s $p := |b|$. Pronašli smo, dakle, kardinalni broj p takav da je $T(p) = |\mathscr{P}_1(b)| = |a| = m$, što je i trebalo dokazati. □

Korolar 2.4.8. *Ako je $m \leq |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|$, onda postoji p takav da je $m = T(p)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $m \leq |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|$. To po lemi 2.4.2 možemo zapisati kao $m \leq T(|\mathsf{V}|)$. Sada tvrdnja slijedi iz leme 2.4.7. □

Korolar 2.4.9. *Za svaki $m \in Card$ vrijedi $2^{T(m)} \neq \emptyset$.*

Dokaz. Neka je m proizvoljni kardinalni broj. Svaki kardinalni broj je neprazan pa postoji $a \in m$. Svaki skup je podskup skupa svih skupova V. Dakle, $a \subseteq \mathsf{V}$, iz čega zaključujemo $m \leq |\mathsf{V}|$. Po lemi 2.4.6 zaključujemo da je $T(m) \leq T(|\mathsf{V}|)$ te iz leme 2.3.4 (obratom po kontrapoziciji) zaključujemo da je $2^{T(m)} \neq \emptyset$. □

Lema 2.4.10. *Ako je $2^m \neq \emptyset$, onda je $T(2^m) = 2^{T(m)}$.*

Dokaz. Neka je $2^m \neq \emptyset$. Tada postoji skup a takav da je $m = |\mathscr{P}_1(a)|$ i za taj a vrijedi $2^m = |\mathscr{P}(a)|$. Primijenimo li redom lemu 2.1.5 i definiciju 2.3.1, dobit ćemo

$$T(2^m) = T(|\mathscr{P}(a)|) = |\mathscr{P}_1(\mathscr{P}(a))| = |\mathscr{P}(\mathscr{P}_1(a))| = 2^{|\mathscr{P}_1(\mathscr{P}_1(a))|} = 2^{T(|\mathscr{P}_1(a)|)} = 2^{T(m)}. \quad \square$$

2.5 Iteracija potenciranja s bazom 2

Definicija 2.5.1. *Za neki skup x i relaciju R definiramo **zatvorenje** skupa x u odnosu na relaciju R kao $Clos(x, R) := \bigcap\{y \mid x \subseteq y \wedge R[y] \subseteq y\}$.*

Napomena 2.5.2. *$\Phi(m)$ je skup svih kardinalnih brojeva oblika $m, 2^m, 2^{2^m}, \ldots,$ gdje je m neki kardinalni broj. Bitno je naglasiti da $\Phi(m)$ ne sadrži prazan skup jer iteriranje stane prije njega (jer bi svaki element poslije praznog skupa bio prazan skup).*

Definicija 2.5.3. *Neka je $Q := \{(m^1, n^1)^3 \mid m^1 \in Card^2 \wedge n^1 \in Card^2 \wedge 2^{m^1} = n^1\}$ i m i n su istog tipa. $\Phi(m) := Clos(\{m\}, Q)$.*

Primijetimo da je Q skup jer su, po napomeni 2.3.8, m i n, u izrazu $2^m = n$, istog tipa.

Lema 2.5.4. *Ako je $2^m = \emptyset$, onda je $\Phi(m) = \{m\}$.*

Dokaz. Neka je $2^m = \emptyset$. Tvrdimo da je $\Phi(m) = \{m\}$. Po definiciji zatvorenja 2.5.1 se lako dobije $\{m\} \subseteq \Phi(m)$. Pokažimo obrnutu inkluziju. Neka je $t \in \Phi(m)$ proizvoljan. To znači $t \in \bigcap\{y \mid m \in y \wedge Q[y] \subseteq y\}$, tj. kad god je $m \in y$ i $Q[y] \subseteq y$, tada je $t \in y$. Promotrimo skup $y' := \{m\}$. Očito je $m \in y'$ i $Q[y'] = \emptyset$ (jer je $2^m = \emptyset \notin Card$) pa je $Q[y'] \subseteq y'$. Prema upravo napisanom mora biti $t \in y' = \{m\}$. Vrijedi, dakle, $t = m$, odnosno $\Phi(m) = \{m\}$. □

Korolar 2.5.5. $\Phi(|\mathsf{V}|) = \{|\mathsf{V}|\}$, *dakle* $|\Phi(|\mathsf{V}|)| = 1$.

Dokaz. Po korolaru 2.3.6 je $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < |\mathsf{V}|$. Primijenimo na to lemu 2.3.4 uz $m := |\mathsf{V}|$ pa zaključimo da je $2^m = \emptyset$. Sada po lemi 2.5.4 vidimo da je $\Phi(|\mathsf{V}|) = \{|\mathsf{V}|\}$, a to po lemi 2.2.7 znači da je $|\Phi(|\mathsf{V}|)| = 1$. □

Lema 2.5.6. *Ako je $n \in \Phi(m)$, onda je $m \leq n$.*

Dokaz. Neka je $n \in \Phi(m)$. Po definiciji 2.5.3 vrijedi
$n \in Clos(\{m\}, Q) = \bigcap\{y \mid \{m\} \subseteq y \subseteq Card \wedge Q[y] \subseteq y\}$. To pak znači: kad god je $m \in y \subseteq Card$ i $Q[y] \subseteq y$, onda je $n \in y$.
Definiramo $y' := \{t \mid m \leq t\}$. Očito je $m \in y'$ i $y' \subseteq Card$. Kad god je $t \in y'$ i $2^t \neq \emptyset$, onda je $m \leq t < 2^t$ (zbog propozicije 2.3.5). Time je $2^t \in y'$, odnosno vrijedi $Q[y'] \subseteq y'$.
Zaključujemo $n \in y'$, odnosno $m \leq n$. □

Korolar 2.5.7. *Ako je $2^m \neq \emptyset$, onda $m \notin \Phi(2^m)$.*

Dokaz. Neka je $2^m \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, da je $m \in \Phi(2^m)$. Tada, po lemi 2.5.6, mora biti $2^m \leq m$, što je u kontradikciji s propozicijom 2.3.5. Vrijedi, dakle, $m \notin \Phi(2^m)$. □

Lema 2.5.8. *Ako je $2^m \neq \emptyset$, onda je $\Phi(m) = \{m\} \cup \Phi(2^m)$.*

Dokaz. Neka je $2^m \neq \emptyset$. Dokazat ćemo obje inkluzije između $\Phi(m)$ i $\{m\} \cup \Phi(2^m)$.
Pokažimo da je $\Phi(m) \subseteq \{m\} \cup \Phi(2^m)$. Neka je $t \in \Phi(m)$ proizvoljan. To znači da je $t \in Clos(\{m\}, Q)$ što, ponovo, čitamo kao: kad god je $m \in y \subseteq Card$ i $Q[y] \subseteq y$, tada je $t \in y$. Neka je z' proizvoljan takav da je $2^m \in z' \subseteq Card$ i $Q[z'] \subseteq z'$. Očito je $z' \in a$, gdje smo označili $a := \{w \mid 2^m \in w \subseteq Card \wedge Q[w] \subseteq w\}$, odnosno $\Phi(2^m) = \bigcap a \subseteq z'$.
Definiramo $y' := \{m\} \cup z'$. Očito je $m \in y'$ i $y' \subseteq Card$.
Tvrdimo da je $Q[y'] \subseteq y'$. Neka je $s \in y'$ proizvoljan. Tada je $s = m$ ili $s \in z'$.

- $s = m$ povlači $Q(s) = Q(m) = 2^m \in y'$ jer je $2^m \in z' \subseteq y'$ po definiciji skupa z'.
- $s \in z'$ povlači $Q(s) \in Q[z'] \subseteq z' \subseteq \{m\} \cup z' = y'$.

Dobili smo, dakle, da je slika od $s \in y'$ ponovo u y'. Zaključujemo da je $Q[y'] \subseteq y'$, a onda po definiciji zatvorenja vrijedi $t \in y'$, odnosno $t = m$ ili $t \in z'$. U prvom slučaju je očito $t \in \{m\} \cup \Phi(2^m)$, a u drugom je također $t \in \Phi(2^m)$ zbog proizvoljnosti $z' \in a$.
Neka je sada $n \in \{m\} \cup \Phi(2^m)$ proizvoljan. Unija je očito disjunktna zbog korolara 2.5.7. Ako je $n = m$, očito vrijedi $n \in \Phi(m)$.
Pretpostavimo sada da je $n \in \Phi(2^m)$. To znači da kad god je $2^m \in y \subseteq Card$ i $Q[y] \subseteq y$, onda je $n \in y$. Tvrdimo da je $n \in \Phi(m)$. Neka je $u \subseteq Card$ proizvoljan takav da je $m \in u$ i $Q[u] \subseteq u$. Tada je $2^m = Q(m) \in Q[u] \subseteq u$, odnosno vrijedi $2^m \in u \subseteq Card$ i $Q[u] \subseteq u$, iz čega zaključujemo $n \in u$. Zbog proizvoljnosti u imamo $n \in \Phi(m)$, što je i trebalo dokazati. □

Korolar 2.5.9. *Ako je $2^m \neq \emptyset$, onda je $|\Phi(m)| = |\Phi(2^m)| + 1$.*

Dokaz. Neka je $2^m \neq \emptyset$. To znači da $m \notin \Phi(2^m)$ (korolar 2.5.7), odnosno unija $\{m\} \cup \Phi(2^m)$ je disjunktna. Tvrdnja sada slijedi po lemi 2.5.8 i definiciji 2.2.5. □

Lema 2.5.10. *Ako je $2^m = \emptyset$, onda je $|\Phi(T(m))| \in \{2, 3\}$.*

Dokaz. Neka je m takav da vrijedi $2^m = \emptyset$. To po lemi 2.3.4 znači da vrijedi $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < m$. Funkcija T čuva uređaj (lema 2.4.6) pa vrijedi $T(|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|) \leq T(m)$, odnosno, po definiciji 2.4.1, $|\mathscr{P}_1^2(\mathsf{V})| \leq T(m)$. Znamo da je $2^{T(m)} \neq \emptyset$ (korolar 2.4.9). Primjenom propozicije 2.3.7 i korolara 2.3.3 dobijemo $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| = 2^{|\mathscr{P}_1^2(\mathsf{V})|} \leq 2^{T(m)}$.

- Ako je $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < 2^{T(m)}$, onda po lemi 2.5.8 vrijedi $\Phi(T(m)) = \{T(m)\} \cup \Phi(T(2^m)) = \{T(m)\} \cup \Phi(2^{T(m)})$. Iz $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < 2^{T(m)}$, po lemi 2.3.4 zaključujemo da je $2^{2^{T(m)}} = \emptyset$, a onda smo u uvjetima leme 2.5.4 pa mora biti $\Phi(2^{T(m)}) = \{2^{T(m)}\}$. Sada vrijedi $\Phi(T(m)) = \{T(m), 2^{T(m)}\}$, i pritom je $T(m) < 2^{T(m)}$ prema propoziciji 2.3.5 pa su elementi skupa $\Phi(T(m))$ različiti. Dakle, $|\Phi(T(m))| = 2$.
- Ako je $|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| = 2^{T(m)}$, onda po korolaru 2.3.2 imamo $2^{|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|} = |\mathsf{V}|$ pa je $\Phi(T(m)) = \{T(m)\} \cup \Phi(2^{T(m)})$. Očito je $2^{T(m)} \neq \emptyset$ (korolar 2.4.9) pa primjenom leme 2.5.8 dobijemo $\Phi(2^{T(m)}) = \{2^{T(m)}\} \cup \Phi(2^{2^{T(m)}})$. Vrijedi da je $2^{T(m)} = |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})| < |\mathsf{V}| = 2^{|\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|} = 2^{2^{T(m)}}$ (primijenimo redom korolare 2.3.6 i 2.3.2) pa je $2^{2^{2^{T(m)}}} = \emptyset$ (lema 2.3.4), a onda $\Phi(2^{2^{T(m)}}) = \{2^{2^{T(m)}}\} = \{|\mathsf{V}|\}$. Sada imamo $\Phi(T(m)) = \{T(m), 2^{T(m)}, 2^{2^{T(m)}}\} = \{T(m), |\mathscr{P}_1(\mathsf{V})|, |\mathsf{V}|\}$, i opet vrijedi $T(m) < 2^{T(m)} < 2^{2^{T(m)}}$ (svi su elementi različiti) prema propoziciji 2.3.5. Dakle, $|\Phi(T(m))| = 3$. □

2.6 Kontradikcija

Lema 2.6.1. *Ako je $\Phi(T(m))$ konačan, onda je i $\Phi(m)$ konačan.*

Dokaz. Neka je m kardinalni broj takav da je $\Phi(T(m))$ konačan. To znači da postoji prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|\Phi(T(m))| = n$. Dokaz provodimo indukcijom po n — tvrdimo da vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\forall m(\Phi(T(m)) \in n \rightarrow (\exists n' \in \mathbb{N})(\Phi(m) \in n')).$$

Baza indukcije: Neka je $n = 0$. Tada je $\Phi(T(m)) = \emptyset$, a to nije moguće jer je $T(m) \in \Phi(T(m))$. Dakle, pretpostavka baze ne vrijedi pa je tvrdnja trivijalno ispunjena po principu *ex falso quodlibet*.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$ — dakle, da je za svaki m ispunjeno: ako vrijedi $\Phi(T(m)) \in k$, onda postoji $k' \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(m) \in k'$.
Korak indukcije: Neka je m proizvoljan takav da vrijedi $\Phi(T(m)) \in k + 1$. Tražimo $l \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(m) \in l$. Znamo da je, po korolaru 2.5.9 i lemi 2.4.10, $l + 1 = |\Phi(T(m))| = |\Phi(2^{T(m)})| + 1 = |\Phi(T(2^m))| + 1$. Po lemi 2.4.4 je $|\Phi(T(2^m))| = k$. Sada $\Phi(T(2^m))$ zadovoljava uvjete pretpostavke indukcije pa postoji $k'' \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(2^m) \in k''$. Ako je $2^m = \emptyset$, onda je po lemi 2.5.4, $\Phi(m) = \{m\}$ jednočlan pa je konačan. Pretpostavimo sada da je $2^m \neq \emptyset$. Tada je po korolaru 2.5.9 $|\Phi(m)| = |\Phi(2^m)| + 1 = k'' + 1$. Iz leme 2.2.9 slijedi da je $\Phi(m)$ konačan skup kao element konačnog kardinalnog broja. Pronašli smo, dakle, prirodni broj $l := k'' + 1$ takav da je $\Phi(m) \in l$. □

Lema 2.6.2. *Ako je $\Phi(m)$ konačan, onda je i $\Phi(T(m))$ konačan te vrijedi $|\Phi(T(m))| = T(|\Phi(m)|) + l$, gdje je $l = 1$ ili $l = 2$.*

Dokaz. Najprije dokazujemo da vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\forall m(\exists l \in \{1, 2\})\Big(\Phi(m) \in n \rightarrow (|\Phi(T(m))| = T(|\Phi(m)|) + l)\Big).$$

Baza indukcije: Neka je $n = 0$. Tada bi pretpostavka $\Phi(m) \in 0$ povlačila $\Phi(m) = \emptyset$, a to je nemoguće ($\Phi(m)$ sadrži barem m) pa zaključujemo da je baza trivijalno ispunjena.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$.
Korak indukcije: Neka je $n = k + 1$. Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $k = 0$, odnosno $n = 1$, onda je $\Phi(m) = \{m\}$. Tvrdimo da je $2^m = \emptyset$. Uistinu, kada bi bilo $2^m \neq \emptyset$, onda bismo imali $m \neq 2^m$ po propoziciji 2.3.5 pa bi skup $\Phi(m)$ sadržavao barem dva različita elementa, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je jednočlan. Kako je ispunjeno $2^m = \emptyset$, po lemi 2.5.10 znamo da je $|\Phi(T(m))| = 2$ ili $|\Phi(T(m))| = 3$ što možemo zapisati kao $|\Phi(T(m))| = 1 + l = T(1) + l = T(|\Phi(m)|) + l$, za neki $l \in \{1, 2\}$.

- Ako je $n \geq 2$, onda je $|\Phi(m)| \geq 2$ pa je $2^m \neq \emptyset$. Po korolaru 2.5.9 je $|\Phi(m)| = |\Phi(2^m)| + 1$ pa je sigurno $|\Phi(2^m)| < |\Phi(m)|$ po lemi 2.2.12. Nadalje, znamo da je $2^{T(m)} \neq \emptyset$ (korolar 2.4.9) pa je, po lemama 2.5.8 i 2.4.10, $\Phi(T(m)) = \{T(m)\} \cup \Phi(2^{T(m)}) = \{T(m)\} \cup \Phi(T(2^m))$. To pak znači $|\Phi(T(m))| = 1 + |\Phi(T(2^m))|$. Pretpostavka indukcije vrijedi za $\Phi(2^m)$ pa postoji $l \in \{1, 2\}$ takav da je $|\Phi(T(2^m))| = T(|\Phi(2^m)|) + l$. Imamo, dakle, $|\Phi(T(m))| = |\Phi(T(2^m))| + 1 = (T(|\Phi(2^m)|) + l) + 1 = (T(|\Phi(2^m)|) + 1) + l$. To je, pak, po lemama 2.4.3 i 2.5.8 jednako $T(|\Phi(2^m)| + 1) + l) = T(|\Phi(m)|) + l$.
  Dokazali smo da je ispunjeno $|\Phi(T(m))| = T(|\Phi(m)|) + l$, gdje je $l \in \{1, 2\}$.

Trebamo još dokazati da vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\forall m(\Phi(m) \in n \to (\exists n' \in \mathbb{N})(\Phi(T(m)) \in n')).$$

Baza indukcije: Neka je $n = 0$. Tada bi iz pretpostavke $\Phi(m) \in 0$, slijedilo $\Phi(m) = \emptyset$, što nije moguće pa zaključujemo da je baza trivijalno ispunjena.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$: $\forall m(\Phi(m) \in k \to (\exists k' \in \mathbb{N})(\Phi(T(m)) \in k'))$.
Neka je $n = k + 1$, odnosno neka je $|\Phi(m)| = k + 1$. Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $k = 0$, odnosno $n = 0 + 1 = 1$, onda je $\Phi(m) \in 1$, odnosno $\Phi(m) = \{m\}$. Kako smo već argumentirali u bazi indukcije kojom smo dokazali prethodnu tvrdnju, $\Phi(m) = \{m\}$ uistinu povlači $2^m = \emptyset$, a onda po lemi 2.5.10 vrijedi $|\Phi(T(m))| \in \{2, 3\}$ pa je $\Phi(T(m))$ konačan.

- Ako je $n \geq 2$, onda je $|\Phi(m)| \geq 2$ pa je $2^m \neq \emptyset$. Po lemi 2.5.8 imamo $\Phi(m) = \{m\} \cup \Phi(2^m)$, a onda po korolaru 2.5.9, $|\Phi(m)| = |\{m\}| \cup |\Phi(2^m)|$. Očito je $|\Phi(2^m)| = k$ pa na nj možemo primijeniti pretpostavku indukcije. To znači da postoji $k' \in \mathbb{N}$ takav da je $\Phi(T(2^m)) \in k'$, odnosno $\Phi(2^{T(m)}) \in k'$. Kako je $2^{T(m)} \neq \emptyset$ (korolar 2.4.9), možemo, po korolaru 2.5.9 pisati $|\Phi(T(m))| = |\Phi(2^{T(m)})| + 1$. Zbroj je dobro definiran zbog leme 2.5.8 pa je $\Phi(T(m)) \in k' + 1$, gdje je $k' + 1$ konačni kardinalni broj po lemi 2.2.9, a onda i prirodni broj. Pronašli smo, dakle, prirodni broj koji sadrži $\Phi(T(m))$ pa je taj skup konačan.

Time smo dokazali da je $\Phi(T(m))$ konačan skup kad god je $\Phi(m)$ konačan. □

Lema 2.6.3. *Postoji kardinalni broj m takav da je $\Phi(m)$ konačan i da je $T(m) = m$.*

Dokaz. Označimo s $c := \{n \in Card \mid \Phi(n) \in FIN\}$. Skup c je neprazan jer sadrži barem $|V|$ po korolaru 2.5.5. Skup kardinalnih brojeva je dobro uređen skup[3] pa postoji najmanji

[3]Naglasimo da je ovo jedino mjesto u radu gdje baš koristimo da je uređaj dobar. Svugdje drugdje smo koristili samo totalnost.

kardinalni broj u c — označimo ga s m. $\Phi(m)$ je konačan skup pa je, po lemi 2.6.2 takav i $\Phi(T(m))$. Dakle, $T(m) \in c$. Kako je m najmanji element u c, vrijedi $m \leq T(m)$. Sada prema lemi 2.4.7 postoji kardinalni broj p takav da je $m = T(p)$. Nejednakost $m \leq T(m)$ zapišemo kao $T(p) \leq T(T(p))$ pa na to primijenimo lemu 2.4.6 i dobijemo nejednakost $p \leq T(p)$. Kako je $\Phi(m) = \Phi(T(p))$ konačan, to je po lemi 2.6.1 i skup $\Phi(p)$ konačan, a onda je $p \in c$. Sada imamo $p \leq T(p) = m$, a m je najmanji kardinalni broj u c pa mora biti $m = p$, odnosno vrijedi $p = T(p)$, a onda iz $T(p) = p$ slijedi $T(m) = T(T(p)) = T(p) = m$. Pronašli smo, dakle, kardinalni broj m takav da je $\Phi(m)$ konačan i da je $T(m) = m$. □

Lema 2.6.4. *Postoji konačni kardinalni broj n takav da je $n = T(n) + 1$ ili $n = T(n) + 2$.*

Dokaz. Po lemi 2.6.3 postoji m takav da je $\Phi(m)$ konačan skup i da je $T(m) = m$. Označimo $n := |\Phi(m)|$. Prema lemi 2.6.2 vrijedi $n = |\Phi(m)| = |\Phi(T(m))| = T(|\Phi(m)|) + l = T(n) + l$, gdje je $l \in \{1, 2\}$. □

Napomena 2.6.5. *Kako vidimo, lema 2.6.4 je u kontradikciji s lemom 2.4.5. Došli smo, dakle, do kontradikcije pa zaključujemo da je pretpostavka dobre uređenosti skupa kardinalnih brojeva obzirom na relaciju $\leq$ iz definicije 1.6.5 bila pogrešna. Tada Zornova lema ne vrijedi, a onda, posljedično ne vrijedi ni aksiom izbora — odnosno isti je opovrgljiv u teoriji* NF.

2.7 Posljedice

Ovako specifičan, ali genijalan način na koji je opovrgnut aksiom izbora gotovo je groteskan, mogli bismo reći zajedljiv, u usporedbi s jednostavnošću kojom se teorija NF krasi. Što to zapravo znači za teoriju? U vremenu prihvaćanja teorije skupova kao (značajne) grane matematike, ovakav dokaz potvrdio je ispravnost potpunog okretanja teoriji ZF kao jedinoj, pravoj formulaciji teorije skupova — barem je to tako vidjelo veliko matematičko društvo tog vremena. No, otvoreno pitanje konzistentnosti teorije pokazuje da ista ipak nije uminula. Gabbay [4] i Holmes [5] samo su neka imena matematičara koji su velik dio svoje znanstvene karijere posvetili proučavanju teorije NF i kao takvi, pokušali istu uvesti u svijet priznatih teorija.

Da ne bi sve posljedice bile sive i teške, navest ćemo one od većeg, pozitivnog značaja. Pokažimo kako činjenica da aksiom izbora ne vrijedi u teoriji NF povlači aksiom beskonačnosti. Iskažimo najprije aksiom izbora u nešto elementarnijem obliku negoli smo ga uveli u Speckerovu dokazu.

Označimo s $PART$ skup $\{B \mid \emptyset \notin B \wedge (\forall x \in B)(\forall y \in B)(x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)\}$ skup svih familija nepraznih u parovima disjunktnih skupova. Tada aksiom izbora glasi:

$$(\forall B \in PART)\,\exists C\,(\forall x \in B)\,\exists! t\,(t \in C \cap x) \tag{2.1}$$

Može se vidjeti da je ovaj iskaz ekvivalentan pretpostavci dobre uređenosti skupa kardinalnih brojeva u odnosu na uređaj uveden definicijom 1.6.5.

Iskazujemo i dokazujemo restrikciju aksioma izbora na konačne skupove. Na taj ćemo način, pretpostavkom suprotnog dokazati da aksiom beskonačnosti vrijedi u teoriji NF.

Teorem 2.7.1. ***Aksiom „konačnog" izbora:***

$$(\forall B \in FIN \cap PART)\,\exists C\,(\forall x \in B)\,\exists! t\,(t \in C \cap x) \tag{2.2}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n, gdje je $n := |B|$ konačni kardinalni broj.
Neka je $n = 0$. Samo je $\emptyset \in 0$ pa zaključujemo da za prazan skup B postoji skup $C := \emptyset$ takav da je tvrdnja trivijalno zadovoljena.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za konačni kardinalni broj n. Neka, dakle, za svaki $B \in n$ takav da $\emptyset \notin B$ i za svaka dva različita elementa x i y iz B vrijedi $x \cap y = \emptyset$, postoji skup C takav da za svaki element x iz B postoji jedinstveni $t \in C \cap x$.
Neka je $B \in n + 1$ proizvoljan takav da $\emptyset \notin B$ i za svaka dva različita elementa koja mu pripadaju vrijedi da su disjunktni. Po definiciji zbrajanja kardinalnih brojeva postoji $b \in B$ takav da je $B \setminus \{b\} \in n$. Uočimo da je $\emptyset \notin B \setminus \{b\}$ i da je disjunktnost međusobno različitih elemenata naslijeđena iz nadskupa B. Sada na skup $B' := B \setminus \{b\}$ možemo primijeniti pretpostavku indukcije. To znači da postoji skup C' takav da za svaki $x \in B \setminus \{b\}$ postoji jedinstveni $t \in C' \cap x$. Kako je $b \neq \emptyset$ (inače bi bilo $\emptyset = b \in B$), sigurno postoji element u b. Uzmimo jedan takav i označimo ga s u. Definirajmo skup $C := C' \setminus b \cup \{u\}$. Pokažimo da je C traženi skup koji zadovoljava tvrdnju.
Neka je $x \in B$ proizvoljan. Razlikujemo dva slučaja:

- $x = b$. Tada je skup $C \cap b = (C' \setminus b \cup \{u\}) \cap b = (C' \setminus b \cap b) \cup (\{u\} \cap b) = \emptyset \cup \{u\} = \{u\}$ jednočlan.

- $x \neq b$, tj. $x \in B \setminus \{b\}$. Sada po pretpostavci indukcije postoji jedinstveni $t \in C'$ takav da je $C' \cap x = \{t\}$. Tada je $C \cap x = (C' \setminus b \cup \{u\}) \cap x = (C' \setminus b \cap x) \cup (\{u\} \cap x)$. Vrijedi $C' \setminus b \cap x = (C' \cap x) \setminus b = \{t\} \setminus b = \{t\}$ jer $t \notin b$ (x i b su disjunktni). Dalje, $\{u\} \cap x = \emptyset$ jer $u \notin x$ (ponovo, x i b su disjunktni kao različiti elementi od C). Dakle, skup $\emptyset \cup \{t\} = \{t\}$ je jednočlan. $\square$

Korolar 2.7.2. *Aksiom beskonačnosti vrijedi u teoriji* NF.

Dokaz. Kada aksiom beskonačnosti ne bi vrijedio, svaki bi skup u NF bio konačan. Tada bi iz teorema 2.7.1 slijedilo da vrijedi elementarni oblik aksioma izbora. Precizno, imali bismo $PART \subseteq V \subseteq FIN$, pa bi bilo $FIN \cap PART = PART$. On povlači Zornovu lemu, a ona pak povlači dobru uređenost skupa kardinalnih brojeva, što smo dokazali da ne vrijedi (Speckerov dokaz). □

Sada aksiom (P4) vrijedi kao aksiom u teoriji NF. Uistinu, teorem koji ćemo iskazati pokazuje da su četiri velike tvrdnje zapravo ekvivalentne i da sve vrijede zahvaljujući aksiomu beskonačnosti za kojeg smo dokazali da vrijedi u teoriji NF. Iskaz teorema preuzet je iz [8]. Znatiželjniji čitatelji u navedenom radu mogu pronaći dokaz navedenog teorema.

Teorem 2.7.3. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $\mathsf{V} \notin FIN$;
2. $\emptyset \notin \mathbb{N}$;
3. $\mathbb{N} \subseteq Card$;
4. (P4): $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(Sc(n) = Sc(m) \to n = m)$.

Sada konačno možemo potvrditi da vrijede tvrdnje za koje intuicija, kao nametnuta, navodi da je trivijalno tako. Zaista, skup prirodnih brojeva je beskonačan i ne sadrži prazan skup pa je kao takav uistinu podskup skupa kardinalnih brojeva — odnosno svaki prirodni broj je kardinalni broj. Značajno je također napomenuti da više nema potrebe spominjati „krnju" indukciju — koju smo uveli zbog „straha" operiranja s praznim skupom kao elementom, nego vidimo da ona standardna indukcija (i dalje definirana samo za stratificirane formule) vrijedi na cijelom, beskonačnom, skupu $\mathbb{N}$. I ne izostavimo aksiom (P4) Peanove aritmetike koji pokazuje injektivnost sljedbenika kao takvog.

Poglavlje 3

Teorija NFU

Ne želeći rad završiti u negativnom tonu i time ostaviti dojam da teorija NF nije vrijedna daljnjeg proučavanja, u ovom poglavlju (kako smo u uvodu najavili) dajemo kratki pregled modificirane verzije navedene teorije sada poznate pod nazivom NFU — *New Foundations with Urelements*. S obzirom na to da je teorija nastala iz teorije NF (Jensen, koji ju je uveo [6], zove je „Mala modifikacija" teorije NF), nema potrebe za podrobnim i detaljnim uvođenjem. Prateći naš razvoj teorije NF, naglašavat ćemo koje su razlike te gdje i zašto one igraju značajnu ulogu.

Osnovni pojmovi

Počinjemo od alfabeta teorije NFU. On je zapravo alfabet teorije NF, s tim da skup nelogičkih (relacijskih) simbola (kojeg u teoriji NF čine simboli jednakosti i „biti element") proširujemo dodajući novi simbol: *set*. Kako sam naziv teorije dade naslutiti, osnovni elementi teorije nisu više samo skupovi. Time je interpretacija simbola *set* jasna — tim jednomjesnim relacijskim simbolom ćemo naznačiti da je neki objekt uistinu skup.
Nadalje, definiciju atomarne formule proširujemo na sljedeći način: atomarna formula je svaka atomarna formula iz definicije 1.1.2, kao i svaka riječ alfabeta teorije NFU oblika $set(x)$, gdje je x varijabla.

Aksiomi

Teoriju NFU aksiomatiziramo s dva aksioma i jednom shemom aksioma.[1] Predstavimo ih:

(Slabi) aksiom ekstenzionalnosti:

$$\forall x \forall y (set(x) \land set(y) \land \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y). \tag{3.1}$$

Aksiom skupovnosti:

$$\forall x \forall y (y \in x \to set(x)). \tag{3.2}$$

Stratificirana komprehenzija: Za svaku stratificiranu formulu $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ vrijedi

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y (set(y) \land \forall z (z \in y \leftrightarrow \phi(z, x_1, \ldots, x_n))). \tag{3.3}$$

Budući da prave klase (one koje su nužno definirane nestratificiranim formulama) ne smatramo objektima teorija NF ni NFU, iz aksioma skupovnosti obratom po kontrapoziciji zaključujemo sljedeće: ako neki objekt nije skup (dakle, ako je atom), onda on ne sadrži elemente.

Definicija apstrakcijskog terma ostaje nepromijenjena, ali načine eliminacije apstrakcijskih terma koji se pojavljuju u formuli modificiramo. Preciznije, u napomeni 1.2.2 u čijoj su pretpostavci zadane stratificirane formule $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ i $\mu(w, y_1, \ldots, y_m)$, drugu točku mijenjamo u:

$$x = \{z \mid \phi(u, x_1, \ldots, x_n)\} :\Leftrightarrow set(x) \land \forall y (y \in x \leftrightarrow y \in \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n\})$$

i dodajemo novu:

$$set(\{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\}) :\Leftrightarrow \exists t (t = \{z \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\}).$$

Čemu modifikacija druge točke napomene 1.2.2? Da bismo bili u stanju razlikovati prazan skup od atoma, osigurali smo da je apstrakcijski term uistinu jednak varijabli koja predstavlja skup. U protivnom, za formulu koja je uvijek lažna (poput $x \neq x$), mogli bismo kao realizaciju dobiti atom, što ne želimo.

[1] Postoje i druge aksiomatizacije poput [3].

Lako vidimo da za svaki element x vrijedi: $\forall x(set(x) \leftrightarrow (\exists y(y \in x) \vee x = \emptyset)$. Nadalje, formula $set(x)$ je stratificirana što lako vidimo iz zapisa $set(x^1)$.

Kako smo već naglasili u prvom poglavlju, u teoriji NF svi objekti su bili skupovi pa smo skup koji zadaje stratificirana formula $x = x$ nazvali skupom svih skupova označivši ga s V. Naglasili smo također da je takav skup Quine nazivao univerzalnim skupom, ali da to nije ništa doli sintaksna razlika — u NF. U teoriji NFU skup svih skupova će biti $SET := \{x \mid set(x)\}$, a V (zadan istom stratificiranom formulom kao u NF) će označavati **univerzalni skup**. Koja je razlika između ta dva skupa? Skup SET sadrži samo skupove, a V sve skupove i atome (ako takvi postoje). Da je neki x (term ili varijabla) skup, sada možemo zapisati i kao $x \in SET$. Kako smo argumentirali za V, i skup SET je primjer skupa x koji zadovoljava nestratificiranu formulu $\exists x(x \in x)$ čineći je istinitom.

Definicije skupovnih operacija ostaju nepromijenjene. Tek podskup redefiniramo (potrebno naglasiti i u definiciji da su obje strane uistinu skupovi): skup x je podskup skupa y ako vrijedi $set(x) \wedge set(y) \wedge (\forall z \in x)(z \in y)$.
Valja napomenuti da su sve skupovne operacije, kako im i naziv kaže, definirane samo za skupove. Iznimka je definicija singletona — za bilo koji objekt x definiramo singleton od x kao $\{x\} := \{y \mid x = y\}$. Iako nama u ovom radu to nije od značaja (prvenstveno jer ne opisujemo teoriju NFU, nego ju navodimo kao dobru modifikaciju nama bitne teorije NF), valja napomenuti da je ovakva definicija dobra ako želimo promatrati uređene parove bilo kakvih objekata iz V (što možemo napraviti ako je riječ o uređenim parovima Kuratowskog).

Preostaje još redefinirati eliminaciju ugnježđenih apstrakcijskih terma:
Neka su $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ i $\mu(w, x_1, \ldots, x_k)$ formule. Ugniježđene apstrakcijske terme eliminiramo na način:

$$\{\{w \mid \mu(w, x_1, \ldots, x_k)\} \mid \phi(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots, y_m)\} :=$$

$$\{z \mid \exists x_1 \ldots \exists x_n(\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \wedge z = \{w \mid \mu(w, x_1, \ldots, x_k)\}) \wedge set(z)\}.$$

Time smo naveli sve razlike u temeljnim definicijama teorije NFU u odnosu na teoriju NF. Vidimo da tek nekoliko uvedenih promjena u osnovnim definicijama rezultira konzistentnom teorijom proizašlom iz NF. Kako smo naglasili na kraju prvog poglavlja, ponavljamo i ovdje - strogo i cjelokupno zadanu teoriju NFU znatiželjni čitatelj moće će pronaći u [1] i [2].

Rad završavamo zahvalom kolegi Tinu Adlešiću na ustupanju radne verzije njegove disertacije. Uistinu, uz tako detaljan i kompletan izvor gotovo da nije bilo potrebe tražiti druga djela kao reference.

Bibliografija

[1] T. Adlešić, „Aksiomatizacije i modeli teorije NFU”, Doktorska disertacija u nastajanju, Prirodoslovno - matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2023.

[2] T. Adlešić i V. Čačić, „A Modern Rigorous Approach to Stratification in NF/NFU”, *Logica Universalis* 16(3) (2022.), str. 451–468.

[3] T. Adlešić i V. Čačić, „The cardinal squaring principle and an alternative axiomatization of NFU”, *Bulletin of the Section of Logic* (2023.).

[4] Gabbay, Murdoch J., *Consistency of Quine's New Foundations*, dostupno na `https://arxiv.org/abs/1406.4060`, 2023.

[5] M. R. Holmes, *Elementary Set Theory with a Universal Set*, dostupno na: `https://randall-holmes.github.io/head.pdf`, 1998.

[6] R. B. Jensen, „On the consistency of a slight (?) modification of Quine's 921 New Foundations”, *Words and Objections: Essays on the Work of W.V. Quine*, 1969.

[7] W. Quine, „New Foundations For Mathematical Logic”, *American Mathematical Monthly* 44.2 (1937.), str. 70–80.

[8] G. Wagemakers, „New Foundations - A survey of Quine's set theory”, dostupno na `https://eprints.illc.uva.nl/id/eprint/574/`, mag. rad, Instituut voor Tall, Logica en Informatie Publication Series, 1989.

[9] A. North Whitehead i B. Russell, *Principia Mathematica, Drugo izdanje*, Cambridge University Press, 1927.

Sažetak

Dajemo kratki pregled ovoga rada. Najprije uvodimo jezik teorije NF i sve osnovne pojmove na kojima je ona zasnovana. Zatim definiramo osnovne operacije na skupovima i uvodimo skupove od značaja poput skupa prirodnih brojeva i skupa kardinalnih brojeva. Želimo, barem ukratko, predstaviti ljepotu i gracioznost teorije NF zasnovane na jednostavnosti. Njena veličina ne bi bila upitna da nemamo drugo poglavlje — ono s druge strane preslikava sivu notu same teorije objašnjavajući, nadamo se dovoljno detaljno, zašto ista nije zaživjela, barem ne u svom prvotnom obliku. Težina Speckerovog teorema ne leži samo u dokazu (koliko god to bilo kontradiktorno veličini samog dokaza), nego i u posljedicama koje je tvrdnja imala na teoriju. Međutim, kako treće poglavlje da naslutiti, teorija je ipak bila dovoljno intrigantna i zanimljiva da je ovakav udarac nije slomio i bacio u zaborav. Tek nekolicina promjena u stvaranju jezika teorije rezultirala je (ne samo jednom) verzijom teorije koja ne samo da je relativno konzistentna s nekom već prihvaćenom teorijom u matematici, već ostaje konzistentnom i dodajući joj aksiom izbora i aksiom beskonačnosti — dvije tvrdnje nepomirljive u čistoj NF.

Summary

We provide a brief overview of this work. Firstly, we introduce the language of NF theory and all the fundamental concepts on which it is based. Then, we define basic operations on sets and introduce sets of significance such as the set of natural numbers and the set of cardinal numbers. We have attempted, at least briefly, to convey the beauty and elegance of NF theory based on its simplicity. Its magnitude would not be questionable if we did not have the second chapter, which, on the other hand, casts a shadow over the theory itself—explaining, hopefully in sufficient detail, why it has not caught on, at least not in its original form. The weight of Specker's theorem lies not only in its proof (in spite of its size) but in the consequences its assertion has on the theory. However, as hinted at in the third chapter, the theory is intriguing and interesting enough that such a blow does not break it and send it to oblivion. Only a few changes in the formulation of the theory's language result in multiple versions of the theory that are not only relatively consistent with previously accepted ones in mathematics, but also remain consistent when adding the axiom of choice and the axiom of infinity—two claims irreconcilable in pure NF.

Životopis

Moje ime je Gabrijela Zlatunić. Rođena sam i odrasla u malenom gradiću u srcu Bosne i Hercegovine, Gornjem Vakufu – Uskoplju. Kao učenik generacije s velikim afinitetom prema matematici i srodnim zanimanjima 2013. godine odlazim u Split gdje upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Dugih i mukotrpnih sedam godina kasnije, s diplomom i titulom sveučilišne prvostupnice matematike, dolazim u Zagreb gdje, 2020. godine upisujem diplomski studij Računarstva i matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.

Ljubav prema matematici postoji valjda oduvijek — još od osnovne škole gdje ste, kao „dobar matematičar" brži od ostalih, preko srednje škole u kojem vam nije jasno što je okolini toliko teško u gradivu iz matematike, do fakulteta, u kojem shvatite što znači teško gradivo. Ironično, ljepota se zapravo krije u toj težini i izazovu razumijevanja iste. Možda moje godine studiranja na prvi pogled govore suprotno, ali privrženost ovoj grani znanosti samo je rasla s godinama i pokazivala da bi svako drugo zvanje bilo pogrešno.