SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Biškup

PRIČA O BROJU e

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mentorici, izv. prof. dr. sc. Zrinki Franušić na strpljenju, trudu i podršci prilikom pisanja ovog rada.
Hvala dečku Mariu i svim prijateljima koji su ovo putovanje učinili nezaboravnim.
Najveće hvala mojoj obitelji na podršci i motivaciji tijekom cijelog obrazovanja.
Ja u čuda vjerujem. Posebno onda kada napravim sve što je u mojoj moći da se ona i dogode. (M.B.)

Sadržaj

Uvod

Neki brojevi u matematici smatrani su zanimljivijima od ostalih jer se ističu po nekom svojstvu, ili više njih, koje ih čini drugačijima pa su zbog toga plijenili pozornost mnogih matematičara tijekom povijesti. U njih spada i broj e, poznat kao *Eulerov broj* ili *Napierova konstanta* čija vrijednost do na prvih nekoliko decimalnih mjesta iznosi

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470937\ldots.$$

Znamenke tog broja i danas su zanimljive mnogima koji ih žele zapamtiti što ih je više moguće. Postoje i različiti mnemotehnički trikovi koji to omogućavaju. Jedan od njih je pamćenje rečenica čije duljine riječi predstavljaju znamenke broja e. Na primjer, prvih deset znamenki broja e možemo odrediti iz duljina riječi sljedeće rečenice:

To disrupt a playroom is commonly a practice of children.

Također, prvih nekoliko znamenaka broja e, točnije njih 16, možemo zapamtiti tako da 2.7 zapamtimo kao početak, zatim 1828 pamtimo kao godinu, i to dva puta, dok znamenke $45-90-45$ možemo povezati s veličinama unutarnjih kutova jednakokračnog pravokutnog trokuta.

Prve spoznaje o broju e dešavaju se krajem 16. stoljeća, odnosno početkom 17. stoljeća i vežu se uz pojavu prirodnog logaritama (John Napier, Henry Briggs), no one su indirektne. Za konkretnu "identifikaciju" broja e zaslužan je Jacques Bernoulli koji je 1683. godine proučavao problem složenih kamata. Međutim, naziv mu je dodijelio Leonhard Euler 1727. godine koji je i intenzivno proučavao njegova svojstva.

Broj e može se definirati, odnosno reprezentirati na različite načine. Najpoznatiji su kao limes niza $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, zatim kao suma reda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ te jedinistven broj takav da je površina ispod hiperbole $y=\frac{1}{x}$ na segmentu $[1,e]$ jednaka 1.

Između ostalog, broj e je zanimljiv po svojim svojstvima, iracionalnosti i transcendetsnosti. Iracionalnost broja e vežemo uz njegov razvoj u jednostavan verižni razlomak koji je, za razliku od njegovog decimalnog zapisa, pravilan:

$$e = [2, 1, \mathbf{2}, 1, 1, \mathbf{4}, 1, 1, \mathbf{6}, 1, 1, \mathbf{8}, 1, 1, \mathbf{10}, 1, \ldots] .$$

S druge strane, budući da ne postoji polinom s racionalnim koeficijentima takav da je broj e njegova nultočka, broj e nije algebarski broj već je transcendentan.

Broj e povezan je s četiri druga poznata broja: π, i, 1 te 0, kroz tzv. *Eulerov identitet*:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Euler je, krenuvši od reda potencija e^x, raznim supstitucijama i algebarskim manipulacijama povezao trigonometrijske funkcije sinus i kosinus s eksponencijalnom funkcijom te došao do formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ za koju mnogi navode da jedna od najčudesnijih matematičkih fomula. Ona između ostalog upućuje na to da se i kompleksni brojevi mogu izraziti preko broja e.

Uz broj π, možemo reći da je broj e najvažnija matematička konstanta koja se pojavljuje u različitim primjenama i situacijama i to ne samo iz polja metematike. Navedimo samo neke: složeno ukamaćivanje (ekonomija), model rasta populacije (biologija), radioaktivni raspad (fizika), normalna raspodjela (vjerojatnost i statistika), itd.

Na kraju recimo da smo u ovom radu obradili neke najvažnije aspekte ove konstante, no *priča o broju e* je daleko veća i kompleksnija.

Poglavlje 1

Povijest broja e

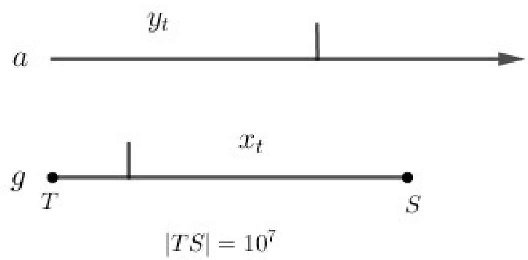
Broj e vezan je uz pojavu prirodnog logaritma krajem 16. i početkom 17. stoljeća, premda ga matematičari tog vremena nisu bili svjesni. Prvi ga je, u jednom od svojih pisama, označio veliki švicarski matematičar 18. stoljeća Leonhard Euler. Osim same oznake, Euler ima još mnoge zasluge u vezi svojstava ove konstante. U usporedbi s najpoznatijom matematičkom konstantom π, broj e je relativno "mlada" konstanta jer se za π zna već gotovo četiri tisućljeća.

Mnogi povjesničari matematike navode da se prva pojava broja e, iako ne ekspilicitno, može naći u radovima škotskog matematičara Johna Napiera (1550. - 1617.) koji je posvetio 20 godina života na konstrukciju prvih tablica logaritama u povijesti. One su pod nazivom *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* objavljene 1619. godine. Naime, tablice su nastale kao težnja tadašnjih matematičara i znanstvenika da olakšaju računanje na način da se množenje i dijeljenje brojeva iz trigonometrijskih tablica svede na zbrajanje i oduzimanje brojeva. Upravo je u tome bio smisao logaritama.

Napier je do pojma logaritma došao na neobičan način. Zamislio je dvije čestice a i g koje kreću u istom trenutku i gibaju se pravocrtno (slika 1).

Čestica a: Giba se po putu neograničene duljine jednoliko, konstantnom brzinom 10^7. To znači da u jednakim vremenskim intervalima prevaljuje isti prijeđeni put. S y_t označavamo put koji je prešla u trenutku t.

Čestica g: Giba se po putu ograničene duljine (s krajnjom točkom S) i u svakom trenutku t joj je brzina v_t razmjerna trenutnoj udaljenosti x_t do cilja S. U jednakim vremeniskim intervalima prevaljuje sve manji put, odnosno usporava i nikad ne može dostići točku cilja S.



Slika 1.1: Napierova definicija logaritma

Gledajući odnos između prijeđenog puta čestice a, y_t, i puta kojeg još treba prijeći čestica g, x_t, shvatio je da se radi o problemu ekvivalentnom onom koji množenje "pretvara" u zbrajanje. Odnosno, funkciju koja povezuje te dvije vrijednosti nazvao je logaritmom prema grčkim riječima *logos* (račun) i *arithmos* (broj). Danas tu funkciju nazivamo Napierovim logaritmom, a označit ćemo ju kao

$$y_t = \text{NapLog}\, x_t. \tag{1.1}$$

Napierova metoda kojom množenje svodi na zbrajanje nije bila niti lako razumljiva niti lako primjenjiva, stoga je on dugi niz godina radio na tablicama logaritama koje su bile od praktične koristi.

Interpretirajmo Napierov problem na suvremen način. Uočimo da je u početnom trenutku čestica a na poziciji 0, dok čestica g mora prijeći udaljenost 10^7. Iz toga slijedi da je

$$\text{NapLog}\, 10^7 = 0,$$

odnosno 10^7 je nultočka Napierovog logaritma. Također, ovaj logaritam je padajuća funkcija što proizlazi iz činjenice da što je g dalje od cilja, a je bliže polaznoj točki.

Za brzinu v_t čestice g u trenutku t u kojem treba još prijeći udaljenost x_t, odnosno kada je prešla udaljenost od $10^7 - x_t$ vrijedi

$$v_t = \frac{d}{dt}(10^7 - x_t) = -\dot{x}_t. \tag{1.2}$$

S druge strane, brzina v_t je u svakom trenutku t razmjerna trenutnoj udaljenosti x_t do cilja S, odnosno vrijedi

$$v_t = k \cdot x_t. \tag{1.3}$$

Dakle, iz (1.2) i (1.3) dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$-\dot{x}_t = k \cdot x_t.$$

Rješavanjem diferencijalne jednadžbe i korištenjem uvjeta $x_0 = 10^7$ slijedi

$$x_t = 10^7 \exp(-kt). \tag{1.4}$$

Deriviranjem jednakosti (1.4) po t dobivamo

$$\dot{x}_t = -k \cdot 10^7 \exp(-kt).$$

Iz prethodne jednakosti i iz (1.2) slijedi

$$-v_t = -k \cdot 10^7 \exp(-kt).$$

Iskoristimo li još uvjet $v_0 = 10^7$ dobivamo $k = 1$, odnosno vrijedi $x_t = 10^7 \exp(-t)$.

Za česticu a vrijedi da je njena brzina jednaka $\dot{y} = 10^7$ i $y_0 = 0$. Iz toga slijedi

$$y_t = 10^7 t. \tag{1.5}$$

Iz $x_t = 10^7 \exp(-t)$ dobivamo

$$t = \ln \frac{10^7}{x}. \tag{1.6}$$

Sada iz (1.1), (1.5) i (1.6) slijedi

$$\mathrm{NapLog} x = 10^7 \cdot \ln \frac{10^7}{x}.$$

Bitno je napomenuti da se u to vrijeme nije znalo da je u bazi Napierovog logaritma broj e. Za Napierovu tablicu logaritama saznao je profesor geometrije na Oxfordu, Henry Briggs (1561.–1631.). Briggs je smatrao da bi bilo puno zgodnije promatrati logaritme čija je nultočka 1 i za koje vrijedi da 10 puta veći broj ima za 1 veći logaritam, što je upravo dekadski logaritam. S time se složio i Napier. Briggs je 1624. godine objavio svoju prvu tablicu dekadskih logaritama pod nazivom *Arithmetica Logarithmica* te su po njemu dekadski logaritmi ponekad nazvani i Briggsovi logaritmi. Te iste godine dao je aproksimaciju broja $\log_{10} e$ premda e kao takav nije spominjao.

Neovisno o njima, logaritmima se bavio i švicarski urar, Joost Bürgi (1552.-1632.). Za razliku od Napiera, Bürgi promatra eksponencijalnu funkciju $x = a^y$ s bazom $a = 1.0001$ i promjene Δx koje uzrokuju male promjene eksponenta y za $\Delta y = 1$. Odnosno, promatra odnos $x + \Delta x = a^{y+1}, tj.\quad \Delta x = 10^{-4} x$. Svaki sljedeći član $x + \Delta x$ dobiva iz vrijednosti x

n	y_n	$x_n = a^{y_n}$	Δx_n	$x_n + \Delta x_n$
0	0	1	0.0001	1.0001
1	1	1.0001	0.00010001	1.00020001
2	2	1.00020001	0.000100020001	1.000300030001
3	3	1.00030003	0.000100030003	1.000400060003
4	4	1.00040006	0.000100040006	1.000500100006
5	5	1.0005001	0.00010005001	1.00060015001
$\vdots$				

Tablica 1.1: Bürgijeva tablica vrijednosti

pomicanjem zareza za 4 mjesta ulijevo i pribranjanjem vrijednosti x. Tako nastaje tablica vrijednosti $y, x, \Delta x$ za $y = 0, 1, 2, 3, ...$ Također, vrijedi da je $x_k \cdot x_l = x_m$ samo ako je $y_k + y_l = y_m$ za $k, l, m \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

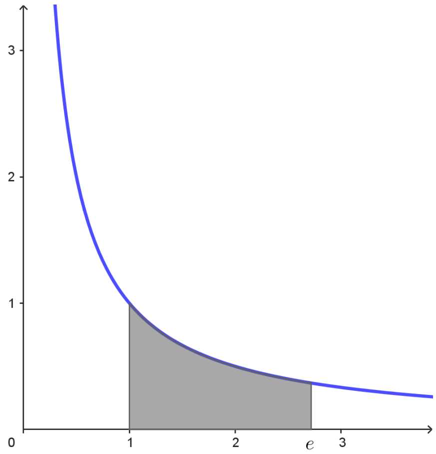
Za finiju razdiobu y-a (npr. za $\frac{y}{10^4}$) dobije se nova tablica za eksponencijalnu funkciju $x = (a_1)^y$, za $a_1 = a^{1000} = \left(1 + 10^{-4}\right)^{10^4}$. Uočimo da je $a_1 \approx 2,718145927$. Ako bismo ponavljali ovaj postupak profinjenja, u bazi bismo dobili sve bolju aproksimaciju broja e.

Osim kod logaritama, broj e se pojavljuje i kod računanja površine ispod istostrane hiperbole. Time se bavio francuski matematičar Saint-Vincent, no nije poznato je li uočio vezu s logaritmima, kao ni je li naišao na broj e. Vezu između logaritma i površine ispod istostrane hiperbole $xy = 1$ shvatio je matematičar Huygens (1629.-1695.). U tom je slučaju broj e takav da je površina ispod istostrane hiperbole od 1 do e jednaka 1. Iz tog svojstva proizlazi da je baza prirodnog logaritma broj e, ali naravno, to još nije bilo poznato matematičarima tog doba, iako su se polako približavali tome. Huygens je nazvao krivulju logaritamskom, premda bi danas to bila eksponencijalna krivulja s jednadžbom $y = ka^x$.

1668. godine njemački matematičar Nicholas Mercator objavio je tekst *Logarithmotechnia* u kojem je razvio funkciju $\ln(1 + x)$ u red potencija, kojeg je dobio iz geometrijskog reda, s ciljem da izračuna površinu ispod istostrane hiperbole. Također, prvi je upotrijebio naziv *prirodni logaritam* za logaritme s bazom e premda se broj e i dalje nije samostalno pojavio.

S druge strane, pojava broja e bila je vezana i uz problem kamata. Problemom računanja složene kamate bavio se Jacob Bernoulli (1655.-1705.). U slučaju neprekidne složene kamate promatrao je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



Slika 1.2: Površina ispod istostrane hiperbole koja je jednaka 1

Koristeći binomni teorem, pokazao je da je taj limes broj koji je između 2 i 3, stoga ovo možemo smatrati prvom aproksimacijom broja e. Također, ako gledamo da je na ovaj način definiran broj e, ovo je prvi put da je neki broj definiran pomoću limesa. Do tad, logaritam se smatrao samo brojem, dok je Jacob Bernoulli možda prvi shvatio logaritam kao funkciju inverznu eksponencijalnoj funkciji, a James Gregory je 1684. godine povezao logaritam s eksponentom.

Broj e prvi put se samostalno spominje u pismu kojeg je Leibniz napisao Huygensu pri čemu je Leibniz koristio oznaku b za taj broj. Oznaku za broj e koju danas koristimo prvi je uveo Euler 1731. godine u pismu kojeg je napisao Goldbachu. Nije točno poznato zašto baš e. Neki povezuju taj simbol s prvim slovom njegova imena, što i nije najverojatnije budući da je Euler bio skroman. Vjerojatnije da je razlog taj što su slova a, b, c i d bila već ranije korištena u matematici, tj. "zauzeta" za druge oznake.

1748. godine Euler je objavio djelo *Introductio in Analysin infinitorum* u kojem je pokazao da vrijedi

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{1.7}$$

te je također aproksimirao broj e na 18 decimala. Nije argumentirao kako je došao do zaključka, no ako uzmemo 20 pribrojnika iz izraza (1.7) dobit ćemo aproksimaciju broja e koju je dobio i Euler. U tom je djelu Euler također povezao funkcije sinus i kosinus s kompleksnom eksponencijalnom funkcijom. Razvio je broj e u beskonačan veržni razlomak te je uočio određene pravilnosti u tom razvoju. Nije dokazao da se te pravilnosti ponavljaju, ali je shvatio da bi taj dokaz bio dokaz iracionalnosti broja e.

U želji za određivnjem što većeg broja decimala broja e istaknuo se William Shanks koji je 1854. godine odredio prvih 137 decimala, a nakon ispravljanja pogreške u računu, odredio je prvih 205 decimala broja e. Zanimljivo je spomenuti da je potrebno 120 pribrojnika iz izraza (1.7) da bi se dobila aproksimacija broja e na 200 decimala.

Poglavlje 2

Definicija broja e

Euler broj e pojavljuje se u raznim matematičkim kontekstima pa se zbog toga može definirati, odnosno karakterizirati na različite načine: kao baza prirodnog logaritma, limes niza $(1 + \frac{1}{n})^n$, suma reda $\sum \frac{1}{n!}$, itd. Mi ćemo ga definirati na sljedeći način:

Definicija 2.1. *Broj e je pozitivan realan broj takav da je* $\ln e = 1$*, gdje je*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \tag{2.1}$$

$x > 0$.

Geometrijska interpretacija definicije broja e jest da je to broj za kojeg je površina ispod krivulje $y = \dfrac{1}{x}$ na segmentu $[1, e]$ jednaka 1 (slika 1).

Funkcija *prirodnog logaritma* $x \mapsto \ln x$ definirana s (2.1) u prethodnoj definiciji je derivabilna pa je stoga i neprekidna na domeni $\langle 0, +\infty\rangle$. Slika joj je čitav $\mathbb{R}$. Nadalje, direktno iz definicije pokazuje se da vrijedi:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
4. $\ln(a^r) = r \ln a$,

za $a, b > 0$ i racionalan broj r. Svojstvo 4 možemo po neprekidnosti proširiti za sve $x \in \mathbb{R}$. Budući da je funkcija $x \mapsto \ln x$ strogo rastuća s $\langle 0, +\infty\rangle$ na $\mathbb{R}$, ona je bijektivna. Njezin inverz naziva se *eksponencijalna funkcija* i označava s $x \mapsto \exp x$. Dakle,

$$\exp(\ln x) = x, \ \forall x > 0,$$

$$\ln(\exp x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kako je $\ln(a^x) = x \ln a$ za $x \in \mathbb{R}$, za $a = e$ dobivamo da je

$$\exp x = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Napomenimo da je eksponencijalna funkcija karakterizirana svojstvima da je njena derivacija jednaka njoj samoj i da joj je vrijednost u 0 jednaka 1.

Dokažimo sada navedena svojstva.
Najprije uočimo da svojstvo 1 slijedi direktno iz definicije (2.1) uvrštavanjem $x = 1$, stoga ga nećemo posebno dokazivati.

Propozicija 2.2. *Za $a, b > 0$ vrijedi*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Dokaz. Iz definicije (2.1) slijedi

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} \, dt$$

što možemo zapisati kao

$$\ln(ab) = \int_1^{a} \frac{1}{t} \, dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} \, dt. \tag{2.2}$$

Nadalje, iz definicije slijedi da je

$$\int_1^{a} \frac{1}{t} \, dt = \ln a. \tag{2.3}$$

Odredimo još čemu je jednak drugi integral u izrazu (2.2). Uvedimo supstituciju $u = \dfrac{t}{a}$. Tada je $du = \dfrac{1}{a} dt$. Nadalje, za $t = a$ slijedi da je $u = 1$, a za $t = ab$ vrijedi $u = b$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
\int_a^{ab} \frac{1}{t} \, dt &= \begin{bmatrix} u = \dfrac{t}{a} & t = a \to & u = 1 \\ du = \dfrac{1}{a} dt & t = ab \to & u = b \end{bmatrix} \\
&= \int_1^{b} \frac{1}{u \cdot a} \cdot a \, du \\
&= \int_1^{b} \frac{1}{u} \, du \\
&= \ln b. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Dakle, sada iz (2.3) i (2.4) slijedi da je izraz (2.2) jednak

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

što smo i htjeli dokazati. □

Propozicija 2.3. *Neka je $x > 0$ i r racionalan broj. Vrijedi*

$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^r)) = \frac{1}{x^r} \cdot rx^{r-1} = \frac{r}{x}.$$

S druge strane vrijedi da je

$$\frac{d}{dx}(r \ln x) = \frac{r}{x}.$$

Dakle, funkcije $x \mapsto \ln(x^r)$ i $x \mapsto r \ln x$, $x > 0$ imaju iste derivacije. Po osnovnom teoremu diferencijalnog računa slijedi da se te dvije funkcije razlikuju za konstantu, odnosno

$$\ln(x^r) = r \ln x + C, C \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da za $x = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} \ln(1^r) &= r \ln 1 + C \\ \ln 1 &= r \cdot 0 + C \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $\ln(x^r) = r \ln x$. □

Propozicija 2.4. *Za $a, b > 0$ vrijedi*

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Dokaz. Uočimo da ovo svojstvo proizlazi iz prethodnih. Primjenom svojstva 2 slijedi

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(ab^{-1}) = \ln a + \ln\left(b^{-1}\right).$$

Primijenimo li još na tu jednakost svojstvo 4 dobivamo

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

□

Poglavlje 3

Karakterizacije broja e

3.1 Broj e kao limes niza

Broj e može se prikazati kao limes niza $(1 + \frac{1}{n})^n$ što je vrlo korisno za njegovu numeričku aproksimaciju. Za to ćemo koristiti poznatu Bernoullijevu nejednakost (prema [12]) te ćemo ustanoviti konvergenciju navedenog niza realnih brojeva (prema [10]).

Teorem 3.1 (Bernoullijeva nejednakost)**.** *Neka je n prirodan broj i neka je x realan broj veći od -1. Tada vrijedi*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

Dokaz. Teorem se lako dokaže pomoću matematičke indukcije. Dokaz se može naći u [12]. □

Teorem 3.2 (Poopćenje Bernoullijeve nejednakosti)**.** *Ako je $x > -1$ i $\alpha < 0$ ili $\alpha > 1$, onda je*

$$(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x. \tag{3.1}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 0$.

Prisjetimo se osnovih pojmova realnih nizova: monotonost, omeđenost i konvergentnost. Niz realnih brojeva (a_n) je *monoton* ako je *rastući*, tj. ako za svaki prirodan broj n vrijedi da je

$$a_n \leq a_{n+1}$$

ili ako je *padajući*, tj. ako za svaki prirodan broj n vrijedi da je

$$a_n \geq a_{n+1}.$$

Niz realnih brojeva (a_n) je *omeđen odozgo* ako postoji realan broj M takav da je

$$a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

odnosno *omeđen odozdo* ako postoji realan broj m takav da je

$$a_n \geq m, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Niz realnih brojeva (a_n) *konvergira* k realnom broju $a \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε za koji je

$$|a_n - a| < \varepsilon, \ \forall n > n_\varepsilon,$$

što znači da se u svakoj ε-okolini oko točke a nalaze gotovo svi članovi niza (a_n), tj. samo njih konačno mnogo nalazi se izvan te okoline. Pišemo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Navedena tri pojma povezuje sljedeći važan teorem:

Teorem 3.3. *Svaki ograničen i monoton niz u $\mathbb{R}$ je konvergentan.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [10]. □

Teorem 3.4. *Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$. Ako je $a_n \leq b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [10]. □

Teorem 3.5. *Niz realnih brojeva (a_n) zadan svojim općim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je konvergentan.*

Dokaz. Dokažimo da je dani niz monoton.
Neka je $\alpha = \frac{n+1}{n}$ i $x = \frac{1}{n+1}$. Primjenom poopćenja Bernoullijeve nejednakosti (3.1) dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1 + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} > 1 + \frac{1}{n} \Big/^{\,n},$$

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{a_{n+1}} > \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n}.$$

Dakle, niz (a_n) je strogo rastući.

Dokažimo da je taj niz i ograničen. Zapišimo izraz $4^{\frac{1}{n}}$ na drugačiji način:

$$4^{\frac{1}{n}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \cdot (1+1)^{1+\frac{2}{n}}.$$

Ako stavimo da je $x = 1$ i $\alpha = 1 + \frac{2}{n}$, možemo primijeniti Bernoullijevu nejednakost:

$$\frac{1}{2} \cdot (1+1)^{1+\frac{2}{n}} > \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot 1\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}.$$

Dakle, vrijedi

$$4^{\frac{1}{n}} > 1 + \frac{1}{n},$$

odnosno

$$4 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

što znači da je niz (a_n) ograničen odozgo brojem 4.

Po teoremu 3.3 slijedi da je niz (a_n) konvergentan. □

Teorem 3.6.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{3.2}$$

Dokaz. Prema teoremu 3.5 postoji $a \in \mathbb{R}$ za koji je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a.$$

Stoga je i

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = a$$

pa logaritmiranjem dobivamo da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \ln a.$$

Uz supstituciju $y = \ln(1+x)$, prethodni limes prelazi u

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \ln a.$$

Uočimo da je

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - e^0}{y} = \frac{d}{dx}(e^x)\Big|_{x=0} = e^0 = 1.$$

Konačno, zaključujemo da je $\ln a = 1$ što znači da je $a = e$. □

Izraz (3.2) se često uzima kao definicija broja e. U tom slučaju je eksponecijalnu funkciju $\exp : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ moguće definirati kao

$$\exp(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0, \\ \frac{1}{f(-x)}, & x < 0, \end{cases}$$

gdje je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \ \forall x \in [0, +\infty\rangle.$$

3.2 Broj e kao suma reda

Kako bismo prikazali broj e pomoću sume reda, prisjetimo se što je to red i suma reda.

Neka je zadan niz realnih brojeva (a_n). Pridružimo nizu (a_n) niz njegovih *parcijalnih suma* (S_n) definiran na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Red je uređeni par koji se sastoji od niza (a_n) i niza pripadnih parcijalnih suma (S_n), odnosno $((a_n), (S_n))$. Za red se najčešće koristi oznaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{3.3}$$

a koristit ćemo ju i u ovom radu. Nadalje, element a_n zovemo *opći član reda* (3.3), a S_n je n-ta *parcijalna suma reda* (3.3).

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ realnih brojeva kažemo da je *konvergentan* ako je niz parcijalnih suma (S_n) tog reda konvergentan, odnosno ako postoji limes $\lim_{n\to\infty} S_n = s$. Broj $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ zove se *suma reda* i označava sa

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je *divergentan* ako je pripadni niz parcijalnih suma (S_n) divergentan.

Dokažimo sada da se broj e može zapisati kao suma reda.

Teorem 3.7.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{3.4}$$

Dokaz. Označimo s (a_k) i (b_k) nizove svojim općim članovima

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \ k > 0, \ \ b_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!}, \ k \geq 0.$$

Prema (3.2) je $\lim_{k\to\infty} a_k = e$. Iz binomnog teorema slijedi

$$\begin{aligned} a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= 1 + \binom{k}{1}\frac{1}{k} + \binom{k}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \binom{k}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^3 + \cdots + \binom{k}{k}\left(\frac{1}{k}\right)^k \\ &= 1 + k\frac{1}{k} + \frac{k(k-1)}{2!}\frac{1}{k^2} + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots 1}{k!} \cdot \frac{1}{k^k}, \end{aligned}$$

odnosno

$$a_k = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{k}\right). \tag{3.5}$$

Uočimo da za svaki pribrojnik u (3.5), osim prva dva, vrijedi

$$\frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-1}{k}\right) \leq \frac{1}{r!}. \tag{3.6}$$

Stoga iz (3.5) i (3.6) slijedi da je

$$a_k \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = b_k. \tag{3.7}$$

Nadalje, lako se vidi da za sve cijele brojeve $r > 1$ vrijedi

$$\frac{1}{r!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} < \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}. \tag{3.8}$$

Iz (3.7) i (3.8) dobivamo

$$a_k \leq b_k < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right). \tag{3.9}$$

Izraz u zagradi predstavlja sumu prvih k članova geometrijskog niza čiji je prvi član 1, a kvocijent $q = \frac{1}{2}$ pa je

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right). \tag{3.10}$$

Sada iz (3.9) i (3.10) slijedi

$$a_k \leq b_k < 1 + 2 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] < 3.$$

Dakle, vrijedi

$$2 \leq a_k \leq b_k < 3, \ \forall k \geq 1. \tag{3.11}$$

Niz (b_k) je ograničen i rastući (jer je $b_k - b_{k-1} = \frac{1}{k!} > 0$) pa je po teoremu 3.3 i konvergentan. Neka je

$$m = \lim_{k \to \infty} b_k.$$

Dokažimo da je $m = e$. Da bismo to dokazali, pokazat ćemo da je $m \leq e$ i $m \geq e$. Uočimo da $e \leq m$ slijedi iz (3.11) i teorema 3.4.

S druge strane, za svaki prirodni broj $r < k$ vrijedi

$$a_k \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \cdots + \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-1}{k}\right)$$

jer su svi od $(k - r)$ zanemarenih članova iz (3.5) nenegativni. Po teoremu 3.4 iz prethodne nejednakosti za $k \to \infty$ uz fiksan r dobivamo

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!} = b_r. \tag{3.12}$$

Ponovo, po teoremu 3.4 iz (3.12) kada $r \to \infty$ dobivamo

$$e \geq m.$$

Dakle, $m = e$. □

Ukoliko uzmemo izraz (3.4) kao definiciju broja e, eksponecijalnu funkciju $\exp : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ možemo definirati kao

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Poglavlje 4

Iracionalnost i transcendentnost broja e

4.1 Iracionalnost broja e

Kao što je ranije bilo spomenuto, Euler je u djelu *Introductio in Analysin infinitorum* dao razvoj broja e u verižni razlomak te shvatio da je taj razvoj upravo dokaz iracionalnosti broja e. Prisjetimo se najprije što je to verižni razlomak i kako iz razvoja u verižni razlomak nekog broja možemo zaključiti je li on racionalan ili iracionalan.

Verižni razlomci

Neka je α proizvoljan realan broj i neka je $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ (pri čemu $\lfloor \alpha \rfloor$ označava najveće cijelo od α). Ako je $a_0 \neq \alpha$ onda broj α možemo zapisati kao $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, tako da je $\alpha_1 > 1$. Nadalje, stavimo $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$. Analogno, ako je $a_1 \neq \alpha_1$ onda α_1 možemo zapisati u obliku $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$, tako da je $\alpha_2 > 1$ i stavimo $a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor$. Na opisani način nastavljamo postupak. Uočimo da se postupak nastavlja u nedogled ako je $a_n \neq \alpha_n$ za svaki n te staje ako je $a_n = \alpha_n$ za neki n. U slučaju da je $a_n = \alpha_n$ za neki n, broj α je racionalan. No vrijedi i obrat, ako je α racionalan, postupak će imati konačno mnogo koraka i tada je

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

što ćemo kraće zapisati kao

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n] .$$

Kažemo da smo broj α prikazali kao (ili razvili u) *konačni jednostavni verižni razlomak* (ili konačni jednostavni neprekidni razlomak).

U slučaju kada se opisani postupak nastavlja u nedogled, odnosno kada je $a_n \neq \alpha_n$ za svaki n, pišemo

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}, \tag{4.1}$$

ili kraće

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] \tag{4.2}$$

te kažemo da smo broj α prikazali kao *beskonačni jednostavni verižni razlomak*.

Brojevi $a_0, a_1, a_2, \dots$ iz jednostavnog verižnog razlomka, konačnog ili beskonačnog, nazivaju se *parcijalni kvocijenti*, odnosno a_n je tzv. n-ti *parcijalni kvocijent*. Napomenimo još da ćemo u nastavku rada umjesto „jednostavni verižni razlomak" koristiti samo „verižni razlomak". (Naime, općenito je verižni razlomak oblika

$$\alpha = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots}}},$$

ali jednostavni se isključivo odnose na slučaj $b_i = 1$, za sve i.)

Pojasnimo još smisao jednakosti između broja α i njegovog razvoja beskonačni verižni razlomak, odnosno što nam znače „tri točkice" u (4.1) i (4.2). S jedne strane one su označile da se postupak kojim računamo parcijalne kvocijente ponavlja u nedogled, no s druge strane ovdje se radi o limesu niza

$$[a_0, a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

kada k teži u beskonačno. Racionalan broj $\frac{p_k}{q_k}$, $k \geq 0$, nazivamo *k-ta konvergenta* od α. Dakle, pokazuje se da je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = \alpha,$$

što opravdava znak jednakosti u (4.1) i (4.2).

Niz konvergenti zadovoljava različita zanimljiva svojstva, ali mi ćemo istaknuti samo jedno koje nam je potrebno u radu.

Teorem 4.1. *Za $n \geq 2$ brojevi p_n i q_n zadovoljavaju rekurzije*

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

uz početne uvjete

$$\begin{aligned} &p_0 = a_0, \ p_1 = a_0 a_1 + 1, \\ &q_0 = 1, \ q_1 = a_1. \end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz se nalazi u [8], Lema 8.13. □

Nadalje, pokazuje se da je razvoj broja α u jednostavni verižni razlomak beskonačan ako i samo ako je broj α iracionalan. Navedena tvrdnja slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 4.2. *Ako je $a_0 \in \mathbb{Z}$ te $a_n \in \mathbb{N}$ za sve $n \geq 1$, tada postoji limes*

$$\lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n] = \alpha \tag{4.3}$$

i α je iracionalan broj. Obrnuto, za svaki iracionalni broj α postoji niz cijelih brojeva (a_n) takav da su $a_n \geq 1$, za sve $n \geq 1$, i za koji vrijedi (4.3).

Dokaz. Dokaz se nalazi u [8], Lema 8.22. □

Razvoj broja e u verižni razlomak

Euler je dobio

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}} = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots],$$

odnosno

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}} = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots].$$

Uočimo da umjesto početnog parcijalnog kvocijenta 2 možemo pisati $1, 0, 1$, to jest

$$1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} = 2 + \cdots .$$

Dakle, broj e možemo zapisati u obliku

$$e = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots, 1, 2k, 1, \ldots]. \tag{4.4}$$

Dokažimo to. Konkretno, ako je je $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ zapis verižnog razlomka (4.4) i $\frac{p_i}{q_i}$ njegova i-ta konvergenta, onda je potrebno pokazati da je

$$\lim_{i \to \infty} \frac{p_i}{q_i} = e.$$

Najprije, uočimo da vrijedi:

$$a_{3i+1} = 2i, \; a_{3i} = a_{3i+2} = 1.$$

Iz toga slijedi da su p_i i q_i jednaki:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1	1	2	3	8	11	19	87	106
q_i	1	0	1	1	3	4	7	32	39

Iako je $q_1 = 0$ iz čega slijedi da izraz $\frac{p_1}{q_1}$ nije definiran, to nam neće smetati. Slijedi da p_i i q_i zadovoljavaju sljedeće rekurzivne relacije:

$$\begin{aligned} p_{3n} &= p_{3n-1} + p_{3n-2}, & q_{3n} &= q_{3n-1} + q_{3n-2} \\ p_{3n+1} &= 2np_{3n} + p_{3n-1}, & q_{3n+1} &= 2nq_{3n} + q_{3n-1} \\ p_{3n+2} &= p_{3n+1} + p_{3n}, & q_{3n+2} &= q_{3n+1} + q_{3n}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Definirajmo integrale:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x \, dx \\ B_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x \, dx \\ C_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!} e^x \, dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Propozicija 4.3. *Za $n \geq 0$ vrijede relacije*

$$A_n = q_{3n}e - p_{3n}, \; B_n = p_{3n+1} - q_{3n+1}e, \; C_n = p_{3n+2} - q_{3n+2}e. \tag{4.7}$$

Skica dokaza. Relacije (4.7) se dokazuju se primjenom principa matematičke indukcije, korištenjem ranije definiranih rekurzivnih relacija (4.5) te relacija

$$A_n = -B_{n-1} - C_{n-1}, \tag{4.8}$$

$$B_n = -2nA_n + C_{n-1}, \tag{4.9}$$

$$C_n = B_n - A_n, \tag{4.10}$$

s početnim uvjetima

$$A_0 = e - 1, \; B_0 = 1, \; C_0 = 2 - e.$$

Uočimo da je relacija (4.10) trivijalna. Da bismo dokazali relaciju (4.8) koja je ekvivalentna relaciji $A_n + B_{n-1} + C_{n-1} = 0$ potrebno je integrirati obje strane jednadžbe koju dobivamo direktnom primjenom pravila za derivaciju umnoška

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x\right) = \frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x + \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^x + \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x.$$

Da bismo dokazali relaciju (4.9) koja je ekvivalentna relaciji $B_n + 2nA_n - C_{n-1} = 0$ potrebno je integrirati obje strane jednadžbe koju dobivamo primjenom pravila za derivaciju umnoška i dodatnih algebarskih manipulacija

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n(x-1)^{n+1}}{n!}e^x\right) = \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!}e^x + 2n\frac{x^n(x-1)^n}{n!}e^x - \frac{x^{n-1}(x-1)^n}{(n-1)!}e^x.$$

□

Budući da izrazi A_n, B_n i C_n teže 0 za $n \to \infty$. Iz prethodne propozicije slijedi da je

$$\lim_{i\to\infty} q_i e - p_i = 0.$$

Zbog toga što je $q_i \geq 1$ za $i \geq 1$ slijedi da je

$$\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = e.$$

Dakle, dokazali smo da broj e ima zapis u obliku beskonačnog verižnog razlomka, tj. e je iracionalan prema teoremu 4.2.

4.2 Transcendentnost broja e

Transcendentnost broja e dokazao je Charles Hermite 1873. godine. Tome je prethodio dokaz iracionalnosti broja e te Liouvilleov dokaz da brojevi e i e^2 nisu racionalni, kao ni rješenja kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima. Prije samog dokaza transcendentnosti broja e, prisjetimo se definicije transcendentnog broja.

Definicija 4.4. *Kompleksan broj α zove se* algebarski broj *ako postoji polinom $f(x)$ s racionalnim koeficijentima, različit od nulpolinoma, takav da je $f(\alpha) = 0$. Kompleksan broj se zove* transcendetan *ako nije algebarski.*

Teorem 4.5. *Broj e je transcendentan.*

Dokaz. Neka je f polinom stupnja m i neka je

$$I(t) = \int_0^t e^{t-x} f(x)\, dx \tag{4.11}$$

gdje je $t \geq 0$ proizvoljan realan broj. Parcijalnom integracijom dobivamo

$$I(t) = (-e^{t-x} f(x))\Big|_0^t + \int_0^t (-e^{t-x}) f'(x)\, dx = e^t f(0) - f(t) + \int_0^t e^{t-x} f'(x)\, dx.$$

Primjenimo parcijalnu integraciju na $\int_0^t e^{t-x} f'(x)$ i dobivamo

$$I(t) = e^t f(0) - f(t) + e^t f'(0) - f'(t) + \int_0^t e^{t-x} f''(x)\, dx.$$

Ponavljanjem postupka parcijalne integracije dobivamo

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) + \int_0^t e^{t-x} \underbrace{f^{(m+1)}(x)}_{=0}\, dx,$$

odnosno

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t). \tag{4.12}$$

Neka je g polinom dobiven iz polinoma f tako da svaki koeficijent zamijenimo apsolutnom vrijednosti tog koeficijenta. Tada iz (4.11) vidimo da vrijedi

$$|I(t)| \leq \int_0^t e^{t-x}|f(x)|\,dx \leq (e^t - 1)g(t) \leq te^t g(t). \tag{4.13}$$

Pretpostavimo da je *e algebarski broj stupnja n.* Tada postoje cijeli brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takvi da je $a_n, a_0 \neq 0$ i da je

$$a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \cdots + a_1 e + a_0 = 0. \tag{4.14}$$

Definirajmo

$$J := a_n I(n) + a_{n-1}I(n-1) + \cdots + a_1 I(1) + a_0 I(0), \tag{4.15}$$

gdje je I definiran kao u (4.11) za polinom f stupnja $m = p - 1 + pn$ koje je zadan s

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \cdots (x-n)^p, \tag{4.16}$$

pri čemu je p (dovoljno) veliki prosti broj.

Sada iz (4.12) i (4.14) slijedi

$$J = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(e^k \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(k) \right) = \sum_{j=0}^{m} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \right)}_{=0} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k),$$

odnosno

$$J = -\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_k f^{(j)}(k)$$

gdje je $m = (n+1)p - 1$.

S obzirom na definiciju (4.16) polinoma f može se zaključiti da je

- $f^{(j)}(k)$ djeljiv s $p!$ za sve $j \geq p$ i sve $k = 0, 1, \ldots, n$,
- $f^{(j)}(k) = 0$ za sve $j = 0, 1, \ldots, p-2$, $k = 0, 1, \ldots, n$,
- $f^{(p-1)}(k) = 0$ za sve $k = 1, \ldots, n$.

Dakle, $f^{(j)}(k)$ je djeljiv s $p!$ za sve j i $k = 0, 1, \ldots, n$, osim za $(j, k) = (p-1, 0)$. U tom slučaju je

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^p(-2)^p \cdots (-n)^p = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

cijeli broj koji je djeljiv s $(p-1)!$, ali uz pretpostavku da je $p > n$ onda je $f^{(p-1)}(0)$ nije djeljiv s $p!$. Nadalje, ako je $|a_0| < p$, onda je J cijeli broj različit od nule i djeljiv je s $(p-1)!$. Iz toga slijedi da je $|J| \geq (p-1)!$.

S druge strane, iz (4.13) slijedi da je

$$|J| \leq |a_1| \cdot e \cdot g(1) + \cdots + |a_n| \cdot n \cdot e^n \cdot g(n) \leq c^p.$$

Nadalje, vrijedi da je $g(k) \leq (2n)^m$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Zaista,

$$g(k) \leq k^{p-1}(k+1)^p(k+2)^p \cdots (k+n)^p \leq n^{p-1}(2n)^p(2n)^p \cdots (2n)^p \leq (2n)^{p-1+np} = (2n)^m.$$

Stoga je

$$|J| \leq \frac{|a_1| \cdot e + \cdots + |a_n| \cdot n \cdot e^n}{2n} \left((2n)^{(n+1)}\right)^p \leq c^p$$

za neki broj c neovisan o p. Dakle, dobili smo da je

$$(p-1)! \leq |J| \leq c^p$$

što je kontradikacija za broj p koji teži u beskonačnost jer lijeva strana nejednakosti raste brže nego desna strana.

Budući da smo krenuli od pretpostavke da je e algebarski broj i došli do kontradikcije, slijedi da je broj e transcendentan. $\square$

Poglavlje 5

Eulerov identitet

Poznato je da se Euler volio igrati formulama, baš kao što se djeca vole igrati igračkama te bi tako isprobavao razne supstitucije sve dok ne bi dobio nešto zanimljivo. Tako je iz formule

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

odgovarajućom supstitucijom i algebarskim manipulacijama dobio

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{5.1}$$

što odgovara redu potencija od e^x.

Nakon toga, Euler umjesto x u formulu (5.1) uvrštava ix. Na taj način dobiva

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots . \tag{5.2}$$

Koristeći činjenicu da simbol i odgovara drugom korijenu broja -1 i svojstva da se vrijednosti potencija tog broja ponavljaju periodički s periodom duljine 4 (odnosno, $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$, itd.), jednakost (5.2) može se zapisati kao

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots .$$

Sada Euler opet čini postupak koji izaziva čuđenje, a to je da mijenja poredak članova u jednadžbi na način da grupira sve realne članove zasebno od imaginarnih članova. To je bio nezamisliv potez jer mijenjanje poretka članova kod beskonačnih suma može utjecati na samu sumu, ili čak promijeniti konvergenciju reda. Ali Euler je živio u vremenu kada se moglo bezbrižno eksperimentirati s beskonačnim procesima. Stoga, promjenom poretka članova u jednadžbi Euler dobiva

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right).$$

U Eulerovo doba je već bilo poznato da su redovi koji se pojavljuju u zagradama redovi potencija trigonometrijskih funkcija kosinus i sinus, respektivno. Stoga Euler dolazi do formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{5.3}$$

Danas znamo da redovi potencija funkcija sinus i kosinus konvergiraju na cijelom $\mathbb{R}$ te je stoga manipulacija koju je napravio Euler dopuštena.

Zanimljivo je spomenuti da Euler nije bio prvi koji je došao do ove formule. Oko 1710. godine engleski matematičar Roger Cotes došao je do formule $\log(\cos\phi + i\sin\phi) = i\phi$ koja je ekvivalentna Eulerovoj formuli. Taj rezultat objavljen je posthumno u djelu *Harmonia mensurarum* 1722. godine.

Spomenimo i da je Abraham de Moivre otkrio poznatu formulu

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi$$

koja u svjetlu Eulerove formule prelazi u identitet $\left(e^{i\phi}\right)^n = e^{in\phi}$.

Naravno, Euler nije tu stao s dobivenom formulom (5.3). Ponovo je koristio supstituciju i to $-ix$ umjesto ix te je na taj način došao do formule

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \tag{5.4}$$

Zbrajanjem i oduzimanjem formula (5.3) i (5.4) izražava sinus i kosinus pomoću eksponencijalne funkcije, tj.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Nakon povezivanja trigonometrijskih funkcija s eksponencijalnom, bilo je teško očekivati da će išta nadmašiti ovo izvanredno otkriće. Ipak, Euler uvrštavanjem $x = \pi$ u formulu (5.3) te korištenjem da je $\cos\pi = -1$ i $\sin\pi = 0$ dobiva formulu

$$e^{\pi i} = -1$$

koju možemo zapisati kao

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Ova je formula poznata i kao *Eulerov identitet*, a svakako je i među najljepšim formulama u matematici budući da povezuje pet najvažnijih konstanti te tri najvažnije računske operacije. Ovih pet konstanti simboliziraju četiri glavne grane klasične matematike: aritmetiku (0 i 1), algebru (i), geometriju (π) i analizu (e).

Poglavlje 6

Broj e u primjenama

Broj e pojavljuje se u raznim granama znanosti te tako i u svakodnevnom životu. U nastavku su opisane najpoznatije situacije u kojima možemo pronaći broj e kao što su rast populacije, ukamaćivanje i vjerojatnost. Naravno, ovo nisu jedine situacije. Broj e može se naći npr. i kod računanja vremena poluraspada radioaktivnih materijala ili usporavanja tijela koje pada pri otporu zraka i slično.

6.1 Rast populacije

Broj e, odnosno eksponencijalna funkcija važna je u modeliranju rasta populacije. Tako se pojavljuje i u najjednostavnijem modelu, Malthusovom, u kojem se rješavanjem obične diferencijalne jednadžbe dolazi do eksponencijalne funkcije koja modelira rast populacije. Taj model nije savršen, na primjer implicira neograničeni rast populacije što znamo da u prirodi nije moguće te ne uzima u obzir ograničenja resursa populacije. Promotrit ćemo primjer razmnožavanja bakterija u zatvorenom sustavu i s konstantnim fizičkim uvjetima.

Neka je N_0 broj bakterija u početnom trenutku t_0, a N_t broj bakterija nakon t sati. Zbog konstantnih uvjeta u kojima se nalaze bakterije, broj bakterija će se svaki sat povećavati za određeni postotak r. Dakle, broj bakterija nakon jednog sata bit će jednak

$$N_1 = N_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^1,$$

nakon dva sata

$$N_2 = N_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2,$$

odnosno nakon t sati

$$N_t = N_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t.$$

Budući da bakterije mogu postići zrelost i početi se razmnožavati i prije nego što prođe jedan sat, gornje jednakosti predstavljaju samo aproksimacije za broj bakterija. Kako bi te aproksimacije bile što preciznije, mogli bismo gledati kraće vremenske intervale, npr. ako umjesto jednog sata gledamo pola sata dobivamo da je broj bakterija nakon t sati jednak

$$N_t = N_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{2}\right)^{2t}.$$

dok bi za četvertinu sata dobili

$$N_t = N_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{4}\right)^{4t}.$$

Analogno možemo nastaviti dalje s podjelom sata na manje dijelove. Podijelimo li ga na n dijelova, broj bakterija nakon t sati bit će jednak

$$N_t = N_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{nt}.$$

Za što bolju aproksimaciju gledamo sve veći broj podjela n što povlači da je vremenski interval sve manji, odnosno gledamo limes prethodnog izraza

$$N_t = \lim_{n\to\infty} N_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{nt}.$$

Na kraju primjenom $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{nt} = e^{xt}$ dobivamo

$$\begin{aligned} N_t &= N_0 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^{nt}, \\ N_t &= N_0 e^{\frac{r}{100}t}. \end{aligned}$$

6.2 Složena kamata

Kao što je ranije bilo rečeno, pojava broja e bila je vezana i uz problem kamata. Jacob Bernoulli proučavao je iznos ušteđevine nakon jedne godine ako je uloženi iznos jednak 1 franak, a godišnja kamata jednaka 100%. Dijelio je vrijeme ukamaćivanja na sve kraće intervale te je uočio da se takvim postupkom vrijednost uloženog novca približava broju e. Konkretno proveo je sljedeća razmatranja:

- Ako se kamata obračunava jednom godišnje onda za ulaganje od 1 franka na početku godine, na kraju dobivamo 2 franka.

- Ako se kamata obračunava dva puta godišnje, onda se nakon pola godine obračunava kamata u iznosu od 50% što znači da nakon pola godine dobivamo još 0.5 franaka. Na kraju godine ukamaćuje se glavnica od 1.5 franka s kamatom u iznosu od 50% što znači da smo na kraju godine dobili

$$1.5 + 1.5 \cdot 50\% = 1.5(1 + 0.5) = (1 + 0.5)^2 = 2.25$$

  franaka.

- Ako se kamata plaća svaka četiri mjeseca, uz početnu ulaganje od jednog franka na kraju imamo

$$1 \cdot (1 + 0.25)^4 = 2.44141.$$

- Obračunava li banka kamate svake sekunde, na kraju godine dobivamo iznos od približno 2.718281780499012 franka koji je već jako dobra aproksimacija broja e.

Opišimo taj postupak za neke opće vrijednosti. Pretpostavimo da želimo uložiti iznos P_0 na godinu dana po kamatnoj stopi od $r\%$. Iznos koji ćemo imati na kraju godine bit će jednak

$$P_1 = P_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^1.$$

Ako bi se kamate pripisivale svakih pola godine, iznos na kraju godine bio bi jednak

$$P_1 = P_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{2}\right)^2,$$

dok bi za dnevno pripisivanje kamata taj iznos bio jednak

$$P_1 = P_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{365}\right)^{365}.$$

Analognim postupkom dolazimo do izraza za ukupni iznos koji bismo imali nakon godinu dana obzirom na n intervala ukamaćivanja

$$P_1 = P_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^n.$$

Nadalje, ako bismo kamate računali neprekidno dobili bismo

$$P_1 = \lim_{n\to\infty} P_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^n,$$

$$P_1 = P_0 e^{\frac{r}{100}}.$$

Pogledamo li omjer dobivenog novca nakon godinu dana i uloženog novca, imamo

$$\frac{P_1}{P_0} = e^{\frac{r}{100}}. \tag{6.1}$$

U slučaju Bernoullijevog problema, to jest za $r = 100$ je $\frac{P_1}{P_0} = e$. Logaritmiranjem relacije (6.1), dobivamo postotak ukamaćivanja, odnosno

$$\ln P_1 - \ln P_0 = r\%.$$

Dakle, ako je interval ukamaćivanja dovoljno mali, kamatna stopa dobro aproksimira razliku logaritama dobivene i uložene vrijednosti.

6.3 Vjerojatnost

Broj e pojavljuje se i u vjerojatnosti. Na primjer, izvlačimo karte te je od n karata samo jedna od njih dobitna, a izvlačenje provodimo n puta. Pitamo se kolika je vjerojatnost da smo svih n puta izgubili.

Vjerojatnost da u jednom izvlačenju ne izvučemo dobitnu kartu jednaka je

$$P_1 = 1 - \frac{1}{n},$$

a vjerojatnost da u n izvlačenja nijednom ne izvučemo dobitnu kartu jednaka je

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Uočimo da bismo za sve veći n dobili

$$P_\infty = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Problem tajnice

Problem tajnice poznata je zagonetka u teoriji vjerojatnosti. Taj problem bavi se odabirom najbolje strategije pri biranju jedne od nekoliko alternativa, a da pritom ne znamo koja je od tih alternativa najbolja. Konkretan problem glasi ovako:

Direktor neke tvrtke treba zaposliti jednog od n prijavljenih kandidata za posao tajnika. Kandidate može intervjuirati jedan po jedan, bilo kojim redom, ali odluka o zapošljavanju *ili odbijanju mora biti donesena odmah nakon svakog pojedinog intervjua. Jednom odbijena osoba, ne može se ponovno pozvati, a proces odabira staje u trenutku kada je neka osoba prihvaćena. Ukoliko nitko od kandidata do posljednjeg nije odabran, posljednji kandidat mora biti prihvaćen. Kada će direktor imati najveću šansu za odabir najboljeg kandidata, ako pretpostavimo da postoji samo jedan najbolji kandidat?*

Pretpostavimo da direktor intervjuira r osoba te ih sve odbije, ali zabilježi najveći ostvaren rezultat na tim intervjuima. Zatim se intervjuiranje nastavlja sve dok prvi od preostalih kandidata ne ostvari bolji rezultat od zabilježenog te se taj kandidat prihvati. Ova strategija zvuči obećavajuće, ali je potrebno odrediti broj osoba koje će biti odbijene, tj. broj r. Uočimo da ako je broj r velik, riskiramo da ćemo odbiti najboljeg kandidata, a ako je taj broj malen, ne možemo dovoljno dobro rangirati odbijene kandidate.

Pretpostavimo da od 10 prijavljenih kandidata odmah odbijemo njih troje, odnosno $n = 10$ i $r = 3$. Za svako mjesto kandidata (i) vjerojatnost da je odabran najbolji kandidat, ako je njih r odbijeno, jednaka je umnošku vjerojatnosti da je odabran kandidat na i-tom mjestu i da je i-ti kandidat najbolji. Pri tome vodimo računa o tome da je to prvi kandidat koji ima bolji rezultat od rezultata odbijenih kandidata što ne garantira da je on i općenito najbolji kandidat.

- Ako se najbolji kandidat nalazi na nekom od prva tri mjesta, vjerojatnost da ćemo odabrati najboljeg kandidata jednaka je $P_3 = \frac{1}{10} \cdot 0 = 0$.
- Ako se najbolji kandidat nalazi na četvrtom mjestu, vjerojatnost da ćemo odabrati najboljeg kandidata jednaka je $P_4 = \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10}$.
- Ako se najbolji kandidat nalazi na mjestu 5, on će biti odabran ako je prijašnji najbolji kandidat na nekom od prva tri mjesta, ali nije na četvrtom mjestu. Dakle, vjerojatnost odabira kandidata na petom mjestu jednaka je $P_5 = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{4}$.
- Kandidat na mjestu 6 bit će odabran ako je prijašnji najbolji kandidat na nekom od prva tri mjesta, ali ne i na mjestima 4 i 5, odnosno $P_6 = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{5}$.

Nastavljajući tako dalje dobivamo da je vjerojatnost da je odabran najbolji kandidat (za $n = 10$ i $r = 3$) jednaka

$$P = \left(\frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{3}{9}\right)\frac{1}{10} \approx 0.399 = 39.9\%.$$

Općenito, vjerojatnost da smo odabrali najboljeg kandidata od njih n pri čemu smo ih prvih r odbili je

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n,$$

gdje je

$$P_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{i-1}.$$

Dakle,

$$P = \sum_{i=r+1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{i-1} = \frac{r}{n} \sum_{i=r+1}^{n} \frac{1}{i-1}. \tag{6.2}$$

Pomoću dobivene formule (6.2) mogli bismo za konkretne vrijednosti n izračunati optimalan broj odbijenih ljudi, r^*, koji bi maksimizirao traženu vjerojatnost. Ako bismo sve više povećavali broj n, vjerojatnost najboljeg odabira bi se sve više približavala vrijednosti $\frac{1}{e} \approx 36.8\%$. Također, optimalan broj odbijenih kandidata r^* raste s n te se može dobro aproksimirati s $\dfrac{n}{e}$.

Zaista, (6.2) zapišimo kao

$$P = \frac{r}{n} \sum_{i=r}^{n-1} \frac{n}{i} \frac{1}{n},$$

što se može prepoznati kao suma koja aproksimira integral

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

gdje je $x = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n}$ i $t = \lim_{n\to\infty} \frac{i}{n}$. Nadalje, kako je

$$P(x) = -x \ln x,$$

optimalna vrijednost za x je nultočka prve derivacije:

$$P'(x) = -\ln x - 1 = 0,$$

odnosno $x = 1/e$. Stoga je

$$P\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0.367 = 36.7\%.$$

Dakle, $\frac{r}{n} \approx \frac{1}{e}$, to jest $r \approx \frac{n}{e}$.

Bibliografija

[1] *e*, Wolfram MathWorld, https://mathworld.wolfram.com/e.html.

[2] *Why e, the Transcendental Math Constant, Is Just the Best*, Quanta magazine, https://www.quantamagazine.org/why-eulers-number-is-just-the-best-20211124/.

[3] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, 1975, http://www.infophysics.net/nt.pdf.

[4] S. Breuer i G. Zwas, *Numerical Mathematics: A Laboratory Approach*, Cambridge University Press, 1993.

[5] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1, skripta*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[6] ______, *Povijest matematike, skripta*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb, 2022.

[7] H. Cohn, *A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of e*, The American Mathematical Monthly **113** (2006), br. 1, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~marin/une_autre_crypto/articles_et_extraits_livres/Cohn_H_A_Short_proof_of_the_simple_convergent_of_e.pdf.

[8] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[9] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Cambridge University Press (2003), https://vignette.wikia.nocookie.net/math/images/b/b1/Mathematical-Constants.pdf/revision/latest?cb=20151116072431&path-prefix=ro.

[10] B. Guljaš, *Osnove matematičke analize, skripta*, 2019.

[11] J.R. Hass, M. D. Weir i G. B. Thomas, *The Logarithm Defined as an Integral*, California State University, Davis, https://math.libretexts.org/Courses/University_of_California_Davis/UCD_Mat_21B%3A_Integral_

Calculus/7%3A_Integrals_and_Transcendental_Functions/7.1%3A_The_Logarithm_Defined_as_an_Integral.

[12] I. Ilišević, *Bernoullijeva nejednakost*, Osječko - matematički list, br. 9, 1–6, https://hrcak.srce.hr/file/67174.

[13] E. Maor, *e: The Story of a Number*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

[14] M. Marušić, *Nizovi, nastavni materijal*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb.

[15] ______, *Redovi, nastavni materijal*, PMF-Matematički odsjek, Zagreb.

[16] J. J. O'Connor i E. F. Robertson, *The number e*, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland (2001), https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e/.

Sažetak

Tema ovog rada je poznata matematička konstanta broj e kojeg se još naziva *Eulerov broj* ili *Napierova konstanta*. Prirodno se pojavljuje kod kontinuirano rastućih procesa kao što su rast populacije ili izračuni kamata. Broj e može se definirati na više načina. Najčešće kao baza prirodnog logaritma, zatim limes niza $(1 + \frac{1}{n})^n$ te kao suma reda $\sum \frac{1}{n!}$. U radu je dan kratak povijesni pregled koji je doveo do spoznaje broja e. Pokazano je da iracionalan i transcendentan. Nadalje, opisano je kako se dolazi do poznatog *Eulerovog identiteta* koji povezuje najvažnije matematičke konstante 0, 1, π i e. Na kraju rada navode se primjeri problema iz stvarnog života koji upućuju na broj e.

Summary

The topic of this thesis is well-known mathematical constant number e, which is also called *Euler's number* or *Napier's constant*. It occurs naturally in continuously growing processes such as population growth or interest calculations. The number e can be defined in multiple ways. Most often as the base of the natural logarithm, then the limit of the sequence $(1+\frac{1}{n})^n$ and as the sum of the series $\sum \frac{1}{n!}$. The thesis gives a brief historical overview that led to the cognition of the number e. It is shown that it is irrational and transcendent. Furthermore, it is described how to get to the well-known *Euler's identity*, which connects the most important mathematical constants 0, 1, π and e. At the end of the thesis, examples of problems from real life that refer to the number e are given.

Životopis

Rođena sam 27. rujna 1999. godine u Varaždinu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 2006. godine u Osnovnoj školi Ludbreg. Po završetku osnovne škole, 2014. godine upisujem Prvu gimnaziju u Varaždinu, program opće gimnazije. 2018. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Na trećoj godini studiranja (2021. godine), dobivam Dekanovu nagradu za izuzetan uspjeh na studiju. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2021. godine upisujem diplomski studij Matematika, nastavnički smjer na istom fakultetu. Tijekom studiranja radim kao demonstrator iz kolegija Uvod u matematiku te kao kreator matematičkog sadržaja, a potom i edukativnih materijala u Photomath-u. ´