VaR analiza učinaka vanjskih šokova na malo otvoreno gospodarstvo s obzirom na pripadnost monetarnoj uniji

Žignić, Klara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Klara Žignić

VAR ANALIZA UČINAKA VANJSKIH ŠOKOVA NA MALO OTVORENO GOSPODARSTVO S OBZIROM NA PRIPADNOST MONETARNOJ UNIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc.
Nikola Sandrić

Zagreb, siječanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj obitelji na neizmjernoj podršci te stalnom ohrabrivanju i razumijevanju tijekom studija. Također zahvaljujem i prijateljima koji su mi bili oslonac i vjetar u leđa u izazovima akademskog života.

Sadržaj

Uvod

Ulazak u monetarnu uniju predstavlja značajnu strukturnu promjenu za zemlje pristupnice. Pridruživanjem monetarnoj uniji zemlje se odriču autonomne monetarne i tečajne politike, što ima značajne gospodarske i financijske reperkusije, ali i reperkusije za vođenje ukupne ekonomske politike.

Hrvatska je postala članicom europodručja u siječnju 2023. godine pa još uvijek nije moguće ocijeniti učinke uvođenja eura na gospodarska i financijska kretanja. Međutim, koristeći iskustva strukturno sličnih zemalja moguće je analizirati potencijalne učinke uvođenja eura na nove zemlje članice europodručja. U ovom radu se za procjenu potencijalnih učinaka uvođenja eura na hrvatsko gospodarstvo koristi iskustvo Slovenije s kojom Hrvatska dijeli mnogo zajedničkih strukturnih obilježja, poput veličine gospodarstva, stupnja otvorenosti, trgovinsku i financijsku povezanost s europodručjem i sl. Slovenija je euro uvela 2007. godine te se analiza temelji na razdoblju od šest godina prije (24 kvartala) ulaska u Eurozonu, te trinaest godina nakon, odnosno 52 kvartala, što predstavlja dovoljno velik uzorak za analizu.

U empirijskoj analizi koriste se vektorski autoregresijski modeli (VAR) malog otvorenog gospodarstva. VAR modeli pružaju adekvatan metodološki okvir za analizu ekonomskih i financijskih varijabli među kojima postoje značajne dinamičke međuovisnosti. U analizu su uključene tri najvažnije makroekonomske i financijske varijable koje se koriste u analizi utjecaja različitih šokova na mala otvorena gospodarstva: bruto domaći proizvod (BDP), stopa inflacije i kamatna stopa na tržištu novca.

Ovaj rad će biti organiziran na sljedeći način: U prvom poglavlju dat će se teorijska pozadina vektorskih autoregresijskih modela. Definirat će se osnovni pojmovi i opisati na matematičkoj razini koncepti vezani uz VAR modele relevantni za navedenu analizu. U drugom poglavlju procijenit će se konkretan model korišten za analizu rezultata te specificirati promatrane makroekonomske varijable i opisati korišteni podaci. U trećem poglavlju analizirat će se rezultati - funkcije impulsnog odziva te dekompozicija varijance dobiveni korištenjem programskog softvera R u kontekstu ekonomske teorije.

Poglavlje 1

Teorijski pregled VAR modela

1.1 Strukturni i reducirani VAR model

U ovom poglavlju definirat ćemo strukturni i reducirani VAR model reda p. O njemu praktično možemo razmišljati kao o modelu regresije sustava koji tretira sve varijable kao endogene i omogućuje im da ovise o p pomaka vrijednosti samih sebe i svih drugih varijabli u sustavu. Nadalje, prikazat ćemo postupak transformacije strukturnog VAR modela u njegov reducirani oblik koji nam je potreban kako bismo mogli procijeniti parametre modela metodom najmanjih kvadrata. U sljedećem poglavlju slijedimo pristup iz Enders (2014.).

Prisjetimo se za početak osnovnih definicija koje su nam potrebne kako bismo definirali VAR model.

Definicija 1.1.1. *Neka je* $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ *vjerojatnostni prostor i* $T \subseteq \mathbf{R}, T \neq 0$ *vremenski skup indeksa.* ***Stohastički proces*** *je familija slučajnih varijabli* $\{X_t : t \in T\}$ *na tom vjerojatnosnom prostoru.*

Definicija 1.1.2. *Stohastički proces je* ***stacionaran*** *ako se njegova statistička svojstva ne mijenjaju tijekom vremena.*

Detaljnije se stacionarnost definira kroz koncepte slabe i striktne stacionarnosti.

Definicija 1.1.3. *Za stohastički proces kažemo da je* ***slabo stacionaran*** *ako vrijedi:*

1. $\mathbf{E}[X_t] = \mu < \infty, \forall t \in T$
2. $\mathbf{E}[(X_t - \mu)^2] = \sigma^2 < \infty, \forall t \in T$
3. $\mathbf{E}[(X_t - \mu)(X_{t-h} - \mu)] < \infty, \forall t, h \in T.$

Definicija 1.1.4. *Za stohastički proces kažemo da je* ***striktno stacionaran*** *ako su zajedničke distribucije od* $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ *i* $(X_{t_{1+p}}, ..., X_{t_{k+p}})$ *jednake za svaki pozitivan cijeli broj k i za sve* $t_1, t_2, ..., t_k, p \in \mathbf{Z}$ *gdje je p pomak.*

Definicija 1.1.5. ***Čisti slučajni proces*** *(engl.white noise process) ili proces bijelog šuma* $e_t = (e_{1t}, ..., e_{it})$ *je niz nekoreliranih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem* 0 *i konstantnom varijancom* σ^2.

Kao ilustraciju zbog jednostavnosti uzmimo $p = 1$ te promatrajmo sustav sa dvije jednadžbe:

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \tag{1.1}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \tag{1.2}$$

pri čemu pretpostavljamo da su y_t i z_t stacionarne varijable, ε_{yt} i ε_{zt} su **nekorelirani čisti slučajni procesi** sa standardnim devijacijama σ_y i σ_z. Navedeni model nazivamo **strukturni (ili primitivni) VAR model prvog reda** sa dvije varijable.

Promatrajući sustav možemo primijetiti da varijable utječu jedna na drugu, odnosno z_t ima strukturni utjecaj na y_t i obrnuto te su greške i regresori korelirani kada su koeficijenti uz prošle vrijednosti regresora - γ_{ij} različiti od 0. Budući da se koeficijenti γ_{ij} odnose na utjecaj prošlih vrijednosti regresora y_t i z_t na trenutne vrijednosti regresora, greške i regresori će biti korelirani u slučaju netrivijalnih koeficijenata γ_{ij}. Iz tog razloga, model ne možemo procijeniti **metodom najmanjih kvadrata** te sustav prebacujemo u reducirani oblik kako bismo bili u mogućnosti procijeniti parametre modela koristeći navedenu metodu.

Zapišimo sustav matrično na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{y_t} \\ \varepsilon_{z_t} \end{bmatrix}$$

odnosno,

$$Bx_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

pri čemu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix}, x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, \Gamma_0 = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}, \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y_t} \\ \varepsilon_{z_t} \end{bmatrix}$$

Množenjem slijeva sa B^{-1}[1] dobivamo **reducirani (standardni) VAR model**:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \tag{1.3}$$

gdje su $A_0 = B^{-1}\Gamma_0, A_1 = B^{-1}\Gamma_1, e_t = B^{-1}\varepsilon_t$.
Neka su

$$A_0 = [a_{10}\, a_{20}], \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

[1]Pri čemu inverz matrice B postoji ukoliko vrijedi $detB \neq 0$.

te

$$e_t = [e_{1t}\, e_{2t}].$$

Koristeći navedenu notaciju možemo jednadžbu (1.3) zapisati na sljedeći način:

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t} \tag{1.4}$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t}. \tag{1.5}$$

Dobiveni model nazivamo **reducirani ili standardni VAR model** prvog reda.

Nadalje, kako je $e_t = B^{-1}\varepsilon_t$, e_{1t} i e_{2t} možemo prikazati kao kombinaciju šokova ε_{yt} i ε_{zt} na sljedeći način:

$$e_{1t} = \frac{\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}}{1 - b_{12}b_{21}}, e_{2t} = \frac{\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt}}{1 - b_{12}b_{21}}.$$

Budući da su iz definicije VAR modela ε_{yt} i ε_{zt} čisti slučajni procesi, slijedi:

$$E(e_{1t}) = \frac{E(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})}{1 - b_{12}b_{21}} = 0 \tag{1.6}$$

$$E(e_{1t}^2) = E\left[\frac{\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}}{1 - b_{12}b_{21}}\right]^2 = \frac{\sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2} \tag{1.7}$$

Također, jednaki izrazi vrijede i u slučaju e_{2t}.

Dakle, iz jednadžbe (1.6) vidimo da e_{1t} i e_{2t} imaju očekivanu vrijednost jednaku nuli. Kako je varijanca slučajne varijable X jednaka $Var(X) = \mathbb{E}(X)^2 - (\mathbb{E}(X))^2$ vrijedi da su varijance navednih procesa konstantne. Također, procesi su pojedinačno serijski nekorelirani, odnosno

$$E(e_{1t}e_{1t-i}) = E\left[\frac{(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})(\varepsilon_{yt-i} - b_{12}\varepsilon_{zt-i})}{(1 - b_{12}b_{21})^2}\right] = 0 \text{ za } i \neq 0 \tag{1.8}$$

Nadalje, kovarijanca $Cov(e_{1t}, e_{2t})$ je

$$\begin{aligned} E(e_{1t}e_{2t}) &= E\left[\frac{(\varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt})(\varepsilon_{zt} - b_{21}\varepsilon_{yt})}{(1 - b_{12}b_{21})^2}\right] \\ &= -\frac{b_{21}\sigma_y^2 + b_{12}\sigma_z^2}{(1 - b_{12}b_{21})^2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

što općenito nije jednako nuli, dakle e_{1t} i e_{2t} su korelirani. Kada bismo postavili restrikciju $b_{12} = b_{21} = 0$ navedeni procesi će biti nekorelirani.

Također, definirajmo i matricu varijanci-kovarijanci procesa e_{1t} i e_{2t}

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(e_{1t}) & \mathrm{cov}(e_{1t}, e_{2t}) \\ \mathrm{cov}(e_{1t}, e_{2t}) & \mathrm{var}(e_{2t}) \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Budući da su svi elementi matrice neovisni o vremenu, kraće možemo zapisati kao:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

gdje su $var(e_{it}) = \sigma_i^2$ i $cov(e_{1t}, e_{2t}) = \sigma_{12} = \sigma_{21}$.

Generalizacijom prikazanog modela definiramo **multivarijatni VAR model reda** p na sljedeći način:

Definicija 1.1.6. ***Multivarijatni vektorski autoregresijski proces reda*** *p je proces oblika*

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \cdots + A_p x_{t-p} + e_t \tag{1.12}$$

gdje su

$$\begin{aligned} x_t &= (n \times 1) - \textit{dimenzionalni vektor koji sadrži n endogenih stacionarnih varijabli} \\ A_0 &= (n \times 1) - \textit{dimenzionalni vektor konstanti} \\ A_i &= (n \times n) - \textit{dimenzionalne matrice autoregresijskih koeficijenata} \\ e_t &= (n \times 1) - \textit{dimenzionalni vektor slučajnih procesa.} \end{aligned}$$

Vektor slučajnih procesa $e_t = [e_{1t}...e_{nt}]$ još zovemo i **multivarijatni čisti slučajni proces**, **proces inovacija** ili **proces bijelog šuma** (engl.*white noise process*) za koji vrijedi $E(e_t) = 0, E(e_t e_t') = \Sigma_e$ te $E(e_t e_s') = 0$ za $s \neq t$, pri čemu je matrica Σ_e pozitivno-semidefinitna.

1.2 Procjena parametara modela

Prvi korak kod procjene parametara modela je odabir adekvatnog broja pomaka. Cilj je odabrati optimalni pomak p tako da model precizno opisuje ponašanje varijabli koje razmatramo. Pri tome je važno imati na umu da odabirom većeg pomaka p dobivamo na smanjenju reziduala i točnosti procjene unutar uzorka, no time se narušava sposobnost prognoze modela, tj. predviđanja izvan uzorka. Nadalje, dulji vremenski pomaci utječu na gubitak stupnjeva slobode (u pojedinačnim regresijskim jednadžbama), dok odabirom premalog broja pomaka riskiramo autokoreliranost grešaka. Kako bismo odredili točan broj pomaka p, koristit ćemo usporedbu informacijskih kriterija.

1.2.1 Kriteriji odabira adekvatnog broja pomaka p

1.2.1.1 Informacijski kriteriji

Informacijski kriteriji su mjere koje u isto vrijeme razmatraju broj parametara koje procjenjujemo u modelu te optimalnu vrijednost funkcije cilja koju optimiziramo pri procijeni tih parametara. Povećanjem broja vremenskih pomaka p dolazi do povećanja broja parametara u VAR modelu što dovodi do bolje optimalne vrijednosti funkcije cilja. Međutim, istovremeno je važno penalizirati višak parametara koji bi mogli biti nepotrebno uključeni u model i utjecati na gubitak stupnjeva slobode. Stoga se informacijski kriteriji računaju na način da nagrađuju veću optimalnu vrijednost funkcije cilja, ali istodobno kažnjavaju povećanje broja parametara. Na taj način, uvođenjem dodatnog pomaka u model, informacijski kriterij reagira na dva suprotna načina: dodatni pomak smanjuje sumu kvadrata reziduala te istovremeno povećava vrijednost penalizacije. U ovom konekstu, najbolji model će biti onaj koji minimizira informacijski kriterij.

Tri najpoznatija informacijska kriterija su **AIC (Akaike Information Criteria), SIC (Schwartz Information Criteria)** te **HQC (Hannan-Quinn Information Criteria)** koji računamo na sljedeći način:

$$AIC = T \ln |\hat{\Sigma}| + 2N \tag{1.13}$$

$$SIC = T \ln |\hat{\Sigma}| + N \ln(T) \tag{1.14}$$

$$HQC = T \ln |\hat{\Sigma}| + 2N \ln(\ln(T)), \tag{1.15}$$

gdje je N ukupni broj procijenjenih parametara u VAR modelu, $|\hat{\Sigma}|$ determinanta matrice kovarijance reziduala, a T broj opservacija u uzorku. Dakle, u n- varijatnom VAR modelu reda p i slobodnim koeficijentom, imamo $N = n^2 p + n$ te svaka od n jednadžbi ima np parametara s pomakom i slobodni koeficijent. Dodavanjem dodatnog parametra (regresora) smanjujemo $\ln |\Sigma|$ no povećavamo N.

Iz danih formula također možemo uočiti kako je Schwartzov kriterij najstroži budući da svaki dodatni parametar penalizira sa $\ln(T)$. ([3],[4],[8])

1.2.2 Stabilnost VAR modela

Kod autoregresijskih modela prvog reda, $AR(1)$ oblika $y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$, uvjet stabilnosti je da vrijedi $|a_1| < 1$. Na analogan način možemo pristupiti stabilnosti VAR modela prvog reda.

Iz jednadžbe (1.3) imamo:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t.$$

Koristeći rekurzivni pristup, uvrštavanjem x_{t-1} u jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} x_t &= A_0 + A_1(A_0 + A_1 x_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\ &= (I + A_1)A_0 + A_1^2 x_{t-2} + A_1 e_{t-1} + e_t \end{aligned}$$

pri čemu je I dvodimenzionalna jedinična matrica.

Nakon n iteracija dolazimo do izraza:

$$x_t = (I + A_1 + \ldots + A_1^n)A_0 + \sum_{i=0}^{n} A_1^i e_{t-i} + A_1^{n+1} x_{t-n-1}$$

Da bi model bio stabilan, **svojstvene vrijednosti matrice A_1 moraju biti manje od 1 po apsolutnoj vrijednosti.** U tom slučaju potencije od $A_1 (A_1^n)$ teže u 0 kad $n \to \infty$ (jer se matrica

A_1 može prikazati pomoću svojstvenih vektora i dijagonalizirane matrice čiji su elementi na dijagonali svojstvene vrijednosti od A_1, tj. $A_1^i = PD^iP^{-1}$) te izraz $A_1^{n+1}x_{t-n-1}$ ide u 0.

Nadalje, postoje sume $\sum_{i=1}^{\infty} A_1^i$, $\sum_{i=1}^{\infty} A_1^i e_{t-i}$ i $(I + A_1 + ... + A_1^n)$ te

$$(I + A_1 + \ldots + A_1^n)A_0 \to (I - A_1)^{-1}A_0 := \mu$$

Stoga, ako sve svojstvene vrijednosti matrice A_1 imaju vrijednost manju od 1 po apsolutnoj vrijednosti, pod VAR(1) model x_t iz jednadžbe (1.3) podrazumijevamo dobro definiran stohastički proces

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i}. \tag{1.16}$$

te uz $\Phi_i = A_1^i$ dobivamo

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i e_{t-i} \tag{1.17}$$

i navedeni proces nazivamo VMA reprezentacijom VAR modela. Za proces VAR(1) kažemo da je **stabilan** ako su svojstvene vrijednosti matrice A_1 po apsolutnoj vrijednosti manje od 1.

U tom slučaju svojstvene vrijednosti matrice A_1 zadovoljavaju jednadžbu

$$det(I\lambda - A_1) = 0$$

te su recipročne vrijednosti korijena karakteristične jednadžbe

$$det(I - A_1 z) = 0$$

što znači da korijeni karakteristične jednadžbe moraju biti izvan jediničnog kruga kako bi model bio stabilan. Dakle, svojstvene vrijednosti matrice A_1 su po apsolutnoj vrijednosti manje od 1 ako i samo ako polinom $det(I - A_1 z)$ nema korijena unutar i na kompleksnom jediničnom krugu, tj

$$det(I - A_1 z) \neq 0, \text{ za } |z| \leq 1. \tag{1.18}$$

Rezultat možemo poopćiti na VAR(p) proces budući da svaki VAR(p) proces možemo zapisati u obliku VAR(1) procesa. Preciznije, ako je x_t VAR(p) model kao u Definiciji 1.1.6, odgovarajući p dimenzionalni VAR(1).

$$X_t = \mathbf{A_0} + \mathbf{A}X_{t-1} + E_t$$

definiramo na način da postavimo:

$$X_t := \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ \vdots \\ x_{t-p+1} \end{bmatrix}, \mathbf{A_0} := \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, E_t := \begin{bmatrix} e_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

U tom slučaju svojstvene vrijednosti svih matrica A_i moraju biti po apsolutnoj vrijednosti manje od 1, odnosno treba vrijediti uvjet

$$det(I - \mathbf{A}z) \neq 0 = det(I - A_1 z - \cdots - A_p z^p) \neq 0, \text{ za } |z| \leq 1 \tag{1.19}$$

Ako je proces VAR(p) stabilan tada je i stacionaran. Iz tog razloga se **uvjet stabilnosti** često još naziva i **uvjet stacionarnosti**. Obrat ove tvrdnje ne vrijedi, odnosno proces koji nije stabilan nije nužno i ne stacionaran, tj. može postojati proces koji nije stabilan a da je stacionaran. ([6],[8])

1.2.3 Metoda najmanjih kvadrata

Sljedeći korak u procjeni modela je procjena koeficijenata korištenjem metode najmanjih kvadrata. U sljedećem poglavlju opisat ćemo **multivarijatnu metodu najmanjih kvadrata** koja se koristi za procjenu parametara modela slijedeći postupak baziran na Lutkepohl (2017). Promatramo vremenski niz $x_1, ..., x_T$, odnosno uzorak veličine T za svaku od K varijabli. Dodatno, pretpostavimo da su nam dostupne p preduzoračkih vrijednosti (presample) $x_{-p+1}, ..., x_0$ što nam je potrebno kako bi se matrica "lagova" mogla popuniti. U praksi, ukoliko imamo podatke iz 1990 godine i modeliramo $p = 2$ lagova, tada $t = 1$ mora odgovarati godini 1992 u ovoj notaciji. Ova dodatna podjela se radi kako bi se pojednostavila notacija.

Nadalje, u kontekstu multivarijatnog modela iz Definicije 1.1.6 definiramo

$$\begin{aligned}
X &: = (x_1, ..., x_T) \\
B &: = (A_0, A_1, ..., A_p) \\
Z_t &: = \begin{bmatrix} 1 \\ x_t \\ \vdots \\ x_{t-p+1} \end{bmatrix} \\
Z &: = (Z_0, ..., Z_{T-1}) \\
E &: = (e_1, ..., e_T) \\
\mathbf{x} &: = vec(X) \\
\beta &: = vec(B) \\
\mathbf{b} &: = vec(B') \\
\mathbf{e} &: = vec(E)
\end{aligned}$$

gdje je *vec* operator koji transformira matricu u vektor tako da uzima sve stupce matrice i stvara vektor spajanjem tih stupaca.

Koristeći ovu notaciju, model iz definicije 1.1.6 možemo zapisati kao

$$X = BZ + E, \tag{1.20}$$

odnosno

$$\begin{aligned} vec(X) &= vec(BZ) + vec(E) \\ &= (Z' \otimes I_K)vec(B) + vec(E), \end{aligned} \tag{1.21}$$

odnosno još jednostavnije

$$\mathbf{x} = (Z' \otimes I_K)\beta + \mathbf{e} \tag{1.22}$$

gdje je $\otimes$ **Kroneckerov produkt** matrica. Kroneckerov produkt možemo izračunati na sljedeći način - izračunamo $(Z_t' \otimes I_K)$ za svaki Z_t te označimo dobiveno sa M_t:

$$M_t = Z_t' \otimes I_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_t & 0 & x_{t-1} & 0 \\ 0 & x_t & 0 & x_{t-1} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

te je tada

$$Z' \otimes I_K = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_t \end{bmatrix}. \tag{1.24}$$

Ako je matrica kovarijanci grešaka e, Σ_e, tada je matrica kovarijanci za $\mathbf{e}$ je

$$\Sigma_{\mathbf{e}} = I_T \otimes \Sigma_e.$$

Dakle, kada želimo procijeniti β metodom najmanjih kvadrata, želimo odabrati procjenitelj koji minimizira

$$S(\beta) = \mathbf{e}'(I_T \otimes \Sigma_e)^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{e}'(I_T \otimes \Sigma_e^{-1})\mathbf{e} \tag{1.25}$$

provođenjem tehničkog postupka i matričnih operacija dobivamo procjenitelj

$$\hat{\beta} = ((ZZ')^{-1} \otimes I_K)\mathbf{x} \tag{1.26}$$

Matrično, procjenitelj zapisujemo kao

$$\hat{B} = YZ'(ZZ')^{-1}. \tag{1.27}$$

Da bismo dobili asimptotska svojstva metode najmanjih kvadrata, moramo se prisjetiti pojma procesa bijelog šuma, odnosno čistog slučajnog procesa definiranog u Definiciji 1.1.3, te također definiramo standardni čisti slučajni proces.

Definicija 1.2.1. *Čisti slučajni proces $e_t = (e_{1t}, ..., e_{Kt})$ zovemo* ***standardnim čistim slučajnim procesom*** *ako su e_t neprekidni slučajni vektori koji zadovoljavaju $E(e_t) = 0, \Sigma_u = E(u_t u_t')$nije singularna matrica, te su e_t i e_s nezavisni za $t \neq s$, i za neku konačnu konstantu c vrijedi*

$$E|e_{it}e_{jt}e_{kt}e_{mt}| \leq c \quad za \quad i, j, k, m = 1, ..., K$$

i sve t.

Zadnji uvjet iz navedene definicije znači da svi četvrti momenti postoje i ograničeni su, što će vrijediti ukoliko su e_t normalno distribuirani.

Uvjeti iz definicije su dovoljni da matrica ZZ'/T konvergira prema pozitivno definitnoj graničnoj matrici Γ te da

$$\frac{1}{\sqrt{T}} vec(UZ') \to N(0, \Gamma \otimes \Sigma_u)$$

po distribuciji.

Također, procjenitelj $\hat{B}$ je konzistentan i

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) = \sqrt{T} vec(\hat{B} - B) \to N(0, \Gamma^{-1} \otimes \Sigma_u)$$

po distribuciji.

Sve standardne greške možemo procijeniti uzimanjem korijena iz dijagonalnih elemenata procijenjene matrice varijanci-kovarijanci.

Matricu Σ_u možemo procijeniti konzistentno sa

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t \hat{e}_t'$$

gdje su $\hat{e}$ reziduali.

Budući da će se u ovom radu koristiti VAR model s restrikcijama, valja se zapitati hoće li procijenitelj biti valjan. No, Lutkepohl (2017) sugerira da kod linearnih restrikcija, može se koristiti ista procedura te su rezultati valjani asimptotski sa standardnim pretpostavkama kao u gornjem tekstu.

Da bi metoda najmanjih kvadrata davala točne procjene te se mogla provesti, sljedeće pretpostavke moraju biti zadovoljene:

1. Linearnost - odnos između zavisne i nezavisne varijable mora biti linearan.

2. Egzogenost nezavisne varijable,

$$\mathbf{E}[e_i|x_i] = 0$$

3. Nepostojanje multikolinearnosti,

$$\rho_{x_i,x_j} \neq 1, \forall i \neq j$$

4. Nepostojanje autokorelacije,
$$\sigma_{e_i,e_j} = 0, \forall i \neq j$$
5. Homoskedastičnost reziduala, tj.
$$\sigma^2 = konst.$$
6. Normalnost reziduala, odnosno
$$e \sim N(0, \sigma^2)$$

U sljedećem poglavlju opisat ćemo testove kojima možemo provjeriti istinitost pretpostavki 3-6 koje su vezane uz reziduale.

1.3 Testovi vezani uz inovacijske procese

1.3.1 Autokorelacija

Kako bi testirali autokorelacije reziduala, provodimo LM (*engl. Lagrange multiplier*) test. Pretpostavimo VAR model za vektor grešaka,

$$e_t = D_1 e_{t-1} + \cdots + D_h e_{t-h} + v_t \tag{1.28}$$

gdje je v_t multivarijatni čisti slučajni proces koji je jednak e_t ukoliko autokorelacija među rezidualima ne postoji.

U nultoj hipotezi pretpostavljamo da su sve matrice D_i nulmatrice, dok u alternativnoj negiramo tu činjenicu. Možemo ih zapisati kao

$$H_0 : D_1 = \cdots = D_h = 0$$
$$H_1 : \exists D_j \neq 0, j \in \{1, 2, ..., h\}$$

Za određivanje testne statistike koristimo pomoćni regresijski model

$$\hat{e}_t = A_0 + \sum_{i=1}^{p} A_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^{h} D_i \hat{e}_{t-i} + \varepsilon_t \tag{1.29}$$

te je testna statistika
$$LM = T(n - tr(\hat{\Sigma}_R^{-1} \hat{\Sigma}_U^{-1})) \sim \chi^2(hn^2) \tag{1.30}$$

gdje su $\hat{\Sigma}_R^{-1}$ i $\hat{\Sigma}_U^{-1}$ inverzi matrica varijanci-kovarijanci reziduala iz modela s ograničenjem i bez ograničenja.

1.3.2 Heteroskedastičnost

Heteroskedastičnost je česti problem na koji se nailazi kod VAR modela, i općenito linearne regresije. Pretpostavka koja mora biti zadovoljena kod jednostavne linearne regresije je homoskedastičnost varijance grešaka relacije, odnosno zahtjeva se da je varijanca greške relacije konstantna. Ukoliko varijanca nije konstantna, govorimo o problemu heteroskedastičnosti grešaka relacije. Kako bi testirali heteroskedastičnost, također možemo korististi LM test no trebamo još definirati i procijeniti pomoćni model:

$$vech(\hat{e}_t\hat{e}_{t'}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i vech(\hat{e}_{t-i}\hat{e}'_{t-i}) + \nu \tag{1.31}$$

pri čemu operator *vech* konstruira vektor tako da komponente tog vektora čine stupci donjeg trokuta neke kvadratne matrice sukcesivnim slaganjem. Primjerice, za matricu varijanci-kovarijanci

$$\Sigma = \begin{bmatrix} e_{1t}^2 & e_{1t}e_{2t} \\ e_{1t}e_{2t} & e_{2t}^2 \end{bmatrix}$$

imamo

$$vech(\Sigma) = \begin{bmatrix} e_{1t}^2 \\ e_{1t}e_{2t} \\ e_{2t}^2 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, testiramo sljedeće hipoteze:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q = 0$$
$$H_1 : \exists \beta_i \neq 0, i \in \{1, 2, ..., q\}$$

te je testna statistika

$$LM_q = \frac{1}{2}Tn(n+1) - Ttr(\hat{\Sigma}_{vech}\hat{\Sigma}_0^{-1}) \sim \chi^2(qn^2(n+1)^2/4) \tag{1.32}$$

gdje su $\hat{\Sigma}_{vech}$ i $\hat{\Sigma}_0$ matrica varijanci-kovarijanci reziduala iz pomoćnog modela i matrica varijanci-kovarijanci reziduala iz tog istog modela koja se dobije uvrštavanjem $q = 0$.

1.3.3 Normalnost

Za VAR modele bitno je provjeriti normalnost reziduala, jer u suprotnom može se dogoditi da model nije ispravan. Pri testiranju se najčešće koristi ideja univarijatnog Jarque i Bera (1987) testa proširenog na multivarijatni model. Ideja testa je provjeriti jesu li treći i četvrti moment reziduala usklađeni s onima iz normalne distribucije, odnosno koeficijent asimetrije i zaobljenosti se uspoređuju s tim veličinama iz normalne distribucije.

Definirajmo prvo **univarijatni Jarque i Bera** test. Budući da je normalna distribucija simetrična, koeficijent asimetrije normalne distribucije jednak je $\alpha_3 = 0$, a koeficijent zaobljenosti zadovoljava $\alpha_4 = 3\sigma^4 = 3 \cdot 1 = 3$.

Testna statistika definirana je s

$$JB = N\left(\frac{\lambda_3^2}{6} + \frac{(\lambda_4 - 3)^2}{24}\right) \sim \chi^2(2) \tag{1.33}$$

pri čemu su $\lambda_3 = \frac{\mu_3}{\sigma_3} = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3}$ i $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma_4} = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4}$, a μ očekivana vrijednost distribucije. U slučaju da testirana varijabla zadovoljava pretpostavku normalne distribuiranosti, testna statistika slijedi asimptotski hi-kvadrat distribuciju s 2 stupnja slobode.

Nulta i alternativna hipoteza se definiraju s:

$$H_0 : e \sim N(0, \sigma^2)$$
$$H_1 : e \nsim N(0, \sigma^2).$$

Proširenje na multivarijatni slučaj se provodi na sljedeći način: Za procijenjen vektor reziduala $\hat{e}_t$ matrica varijanci-kovarijanci $\hat{\Sigma}_e$ se dekomponira na dvije matrice P i P' tako da $\hat{\Sigma}_e = PP'$. Za određivanje matrice P postoji više mogućnosti - Doornik i Hansen (1994) predlažu da se koristi matrica korijena matrice $\hat{\Sigma}_e$, dok Lütkepohl (2005) predlaže provođenje Cholesky dekompozicije nad matricom varijanci-kovarijanci reziduala. Test se tada bazira na asimetriji i zaobljenosti standardiziranih reziduala, $\hat{e}_t^s = P^{-1}\hat{e}_t$. Izvod navedenog postupka može se naći u [6]. ([6],[7],[8])

1.4 Identifikacija modela

1.4.1 Funkcije impulsnog odziva

Da bismo definirali funkcije impulsnog odziva, potreban nam je vektorski autoregresijski model pomičnih prosjeka (engl. VMA), odnosno VMA reprezentacija VAR modela. Kako stacionarni VAR(p) model ima VMA reprezentaciju danu jednadžbom (1.17) isti zaključak vrijedi i za VAR(1) model. Zbog jednostavnosti uzmimo VAR(1) model

$$x_T = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t$$

za koji imamo VMA reprezentaciju:

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i e_{t-i}. \tag{1.34}$$

Matrično, VAR model iz prvog poglavlja možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

te njegovu VMA reprezentaciju zapisujemo matrično na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_{11}(i) & \phi_{12}(i) \\ \phi_{21}(i) & \phi_{22}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-i} \\ e_{2t-i} \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

Gornju jednadžbu koja je izražena u terminima $\{e_{1t}\}$ i $\{e_{2t}\}$ možemo zapisati u terminima $\{\varepsilon_{yt}\}$ i $\{\varepsilon_{zt}\}$.

Iz poglavlja 1 znamo da vektor pogrešaka možemo izraziti kao

$$\begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1-b_{12} & -b_{21} \\ -b_{12} & 1-b_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

pa kombiniranjem jednadžbi (1.33) i (1.34) dobivamo

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{1-b_{12}b_{21}} \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_{11}(i) & \phi_{12}(i) \\ \phi_{21}(i) & \phi_{22}(i) \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1-b_{12} & -b_{21} \\ -b_{12} & 1-b_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt-i} \\ \varepsilon_{zt-i} \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

Kako bi pojednostavili notaciju, definiramo matricu

$$\boldsymbol{\phi}_i = \frac{A_1^i}{1-b_{12}b_{21}} \begin{bmatrix} 1-b_{12} & -b_{21} \\ -b_{12} & 1-b_{21} \end{bmatrix}$$

te je sada MA reprezentacija

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t-i} \tag{1.39}$$

Koeficijenti ϕ_i mogu se koristiti kako bismo razumjeli kako šokovi u ε_{yt} i ε_{zt} utječu na cijele putanje nizova $\{y_t\}$ i $\{z_t\}$. Ovi koeficijenti zapravo djeluju kao multiplikatori učinka. Na primjer, $\phi_{12}(0)$ predstavlja trenutačni učinak jedinične promjene u ε_{zt} na y_t. Slično tome, $\phi_{11}(1)$ i $\phi_{12}(1)$ pokazuju odgovor y_t na jediničnu promjenu u ε_{yt-1} i ε_{zt-1} tijekom jednog vremenskog perioda budući da $i = 1$. Općenitije, element matrice Φ na mjestu (j,k), $\phi_{jk}(i)$ predstavlja učinak jedinične promjene u inovaciji ε_k na j-tu varijablu sustava, y_j u vremenskom periodu i. Važno je napomenuti da pomak za jedno razdoblje znači da $\phi_{11}(1)$ i $\phi_{12}(1)$ također opisuju utjecaje jediničnih promjena u ε_{yt} i ε_{zt} na y_{t+1}.

Sumacijom odgovarajućih koeficijenata $\phi_{jk}(i)$ dobivamo akumulirane učinke jediničnih promjena u ε_{yt} i ε_{zt}, odnosno sljedeću sumu

$$\sum_{i=0}^{n} \phi_{jk}(i). \tag{1.40}$$

pomoću koje možemo promatrati kumulativnu funkciju impulsnog odziva.

Puštanjem $n \to \infty$ dobivamo zbroj koji zovemo **multiplikator dugog roka**.

Također, ako pretpostavimo stacionarnost nizova y_t i z_t, vrijednosti koeficijenata $\phi_{jk}(i)$ konvergirat će u 0 kako i postaje veći budući da šokovi ne mogu imati trajni utjecaj na stacionarne nizove, pa vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\infty} \phi_{jk}^2(i) < \infty.$$

Skupovi koeficijenata $\phi_{jk}(i)$ zovu se **funkcije impulsnog odziva**. Prikazivanjem tih koeficijenata na grafu u odnosu na i možemo vizualno promatrati reakcije varijabli y_t i z_t na razne šokove. Zaključno, u kontekstu VAR modela, funkcije impulsnog odziva (IRF) prikazuju vremensku dinamiku učinaka uzrokovanih vanjskim šokovima na jednu ili više endogenih varijabli na neke ili sve ostale varijable unutar VAR sustava.

Da bismo interpretirali funkcije impulsnog odziva na smislen način, prvo moramo identificirati model kako bismo dobili strukturne parametre i strukturne šokove čije funkcije impulsnog odziva možemo analizirati, no problem je što koeficijente $\phi_{jk}(i)$ ne možemo procijeniti iz reduciranog modela. Dakle, želimo rekonstruirati strukturni VAR model iz procjenjenog reduciranog modela. U prvom poglavlju smo transformirali strukturni model u reducirani zbog koreliranosti grešaka i varijabli u strukturnom obliku, kako bi mogli procijeniti model metodom najmanjih kvadrata. No, ako uzmemo za primjer model iz poglavlja 1, VAR(1), bitno je primijetiti da u strukturnom modelu imamo 10 parametara za procjenu - 8 parametara iz jednadžbi te dodatna dva koji se odnose na varijance ε_{1t} i ε_{2t} jer $Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) = 0$, dok u reduciranom modelu imamo 6 parametara u jednadžbama te dodatna 3 koja se odnose na varijance grešaka i njihovu kovarijancu. Dakle, ukupno 10 parametara u strukturnom i 9 parametara u reduciranom modelu. Iz tog razloga na neki od parametara u strukturnom modelu moramo nametnuti ograničenje kako bismo mogli identificirati model. ([3],[8])

1.4.2 Cholesky dekompozicija

Jedna moguća metoda uvođenja restrikcija je **Cholesky dekompozicija** gdje se postavljaju restrikcije na matricu strukturnih parametara. Vratimo se ponovno na primjer VAR(1) modela iz prvog poglavlja te postavimo $b_{12} = 0$. Uvedena restrikcija rezultirat će asimetrijom u sustavu, budući da z_t neposredno utječe na y_t, dok y_t nema trenutni utjecaj na z_t, već utječe na z_t sa jednim vremenskim periodom odmaka. S postavljenim ograničenjem, jednadžbe (1.37) postaju

$$e_{1t} = \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt} \tag{1.41}$$
$$e_{2t} = \varepsilon_{zt} \tag{1.42}$$

te

$$var(e_1) = \sigma_y^2 + b_{12}^2\sigma_z^2 \tag{1.43}$$
$$var(e_2) = \sigma_z^2 \tag{1.44}$$
$$cov(e_1, e_2) = -b_{12}\sigma_z^2. \tag{1.45}$$

što je sustav od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice, a budući da smo procijenili matricu σ koja sadrži vrijednosti s lijeve strane sustava, vrijednosti na desnoj strani možemo definirati kao

$$\sigma_z^2 = var(e_2) \tag{1.46}$$
$$b_{12} = -cov(e_1, e_2)/\sigma_z^2 \tag{1.47}$$
$$\sigma_y^2 = var(e_1) - b_{12}^2\sigma_z^2. \tag{1.48}$$

Provođenjem procesa transformacije strukturnog modela u reducirani oblik, uz navedeni uvjet dobivamo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & b_{12}\\0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\begin{bmatrix}y_t\\z_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{10}\\b_{20}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\\gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{t-1}\\z_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\epsilon_{yt}\\\epsilon_{zt}\end{bmatrix} \tag{1.49}$$

$$\begin{bmatrix}y_t\\z_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -b_{12}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{10}\\b_{20}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -b_{12}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\\gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{t-1}\\z_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -b_{12}\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{yt}\\\varepsilon_{zt}\end{bmatrix} \tag{1.50}$$

$$\begin{bmatrix}y_t\\z_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{10}-b_{12}b_{20}\\b_{20}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_{11}-b_{12}\gamma_{21} & \gamma_{12}-b_{12}\gamma_{22}\\\gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{t-1}\\z_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{yt}-b_{12}\varepsilon_{zt}\\\varepsilon_{zt}\end{bmatrix} \tag{1.51}$$

Definiramo $a_{10}=b_{10}-b_{12}b_{20}$, $a_{11}=\gamma_{11}-b_{12}\gamma_{21}$, $a_{12}=\gamma_{12}-b_{12}\gamma_{22}$, $a_{20}=b_{20}$, $a_{21}=\gamma_{21}$, and $a_{22}=\gamma_{22}$ te dobivamo sljedeći model:

$$\begin{aligned}y_t &= a_{10}+a_{11}y_{t-1}+a_{12}z_{t-1}+e_{1t}\\z_t &= a_{20}+a_{21}y_{t-1}+a_{22}z_{t-1}+e_{2t}\end{aligned}$$

koji možemo procijeniti metodom najmanjih kvadrata te temeljem tih parametara možemo izračunati parametre strukturnog modela.

Također, možemo dobiti procjene za nizove inovacija ε_{yt} iε_{zt}. Naime, iz (1.42) možemo uočiti da reziduali iz druge jednadžbe predstavljaju procjene za ε_{zt}, dok iz jednadžbe (1.41) možemo dobiti procjene za ε_{yt}.

Budući da smo parametar b_{21} postavili na nulu, y_t nema trenutni učinak na z_t te šokovi u ε_{yt} i ε_{zt} imaju trenutni učinak na y_t, dok trenutni učinak na z_t ima samo šok u ε_{zt}.

Iz tog razloga je matrica **B** gornjetrokutasta, te je njezin inverz, $\mathbf{B}^{-1}$,

$$\begin{bmatrix}1 & -b_{12}\\0 & 1\end{bmatrix}$$

također gornjetrokutasta matrica te se prikazana tehnika dekomponiranja reziduala, **dekompozicija Choleskog** također naziva i **triangularizacija**.

Ako se prisjetimo matrice varijanci/kovarijanci, Σ iz prvog odjeljka, nju sada možemo prikazati pomoću matrice **B** kao

$$\Sigma = B^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma_y^2 & 0\\0 & \sigma_z^2\end{bmatrix}}_{\Sigma_e}(B^{-1})'. \tag{1.52}$$

Gornji izraz nazivamo **dekompozicija Choleskyog simetrične matrice** Σ. Budući da želimo iz procijenjene matrice Σ doći do Σ_e, matričnim operacijama dobivamo iz (1.49)

$$\Sigma_e = B\Sigma(B')^{-1}. \tag{1.53}$$

Ako poopćimo matricu Σ_e s dvije varijable na n varijabli, dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

gdje x predstavlja n-tu varijablu VAR sustava. Iz prikazane matrice lako možemo uočiti da je u slučaju VAR modela s n varijabli, potrebno uvesti $(n^2 - n)/2$ ograničenja kako bi iz procijenjenog reduciranog modela mogli identificirati strukturni model.

Kada bismo umjesto koeficijenta b_{21} postavili $b_{12} = 0$ dobili bismo drugačiju matricu Σ te posljedično i drugačije funkcije impulsnog odziva. Iz tog razloga bitno je imati na umu da je poredak varijabli u dekompoziciji Choleskog bitan te ga je potrebno ispravno odrediti, gdje se najneutjecajnija varijabla stavlja kao posljednja u poretku varijabli u modelu. ([3],[8])

1.4.3 Blok egzogenost

Kako bi identifikacija modela bila smislena, moramo uzeti u obzir ekonomsku teoriju i specifičnu situaciju modela. Budući da se rad bazira na utjecajima vanjskih šokova na malo otvoreno gospodarstvo, a zbog postavki modela, moramo uvesti restrikcije na navedene utjecaje. Općepoznato je da malo otvoreno gospodarstvo nema značajan utjecaj na veće područje- eurozonu u ovom slučaju te moramo navedeni ekonomski kontekst uključiti u model. Iz navedenih razloga strane varijable tretiramo kao egzogene za malo otvoreno gospodarstvo. Posljedično, model će biti podijeljen u dva bloka - euro blok i domaći blok.

Vektor x_t iz jednadžbe (1.3) koji predstavlja vektor endogenih varijabli, podijeljen je na dva bloka:

$$x_t = [y_t, z_t]^T$$

pri čemu y_t predstavlja gospodarstvoo eurozone, a z_t malo otvoreno gospodarstvo.

Sukladno tome, VAR model iz jednadžbe (1.6)možemo predstaviti na sljedeći način:

$$x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} A_{i,11} & A_{i,12} \\ A_{i,21} & A_{i,22} \end{bmatrix}, e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix},$$

gdje su $A_{i,11}$ i $A_{i,12}$ koeficijenti vezani uz gospodarstvo eurozone, a $A_{i,21}$ i $A_{i,22}$ koeficijenti vezani uz malo otvoreno gospodarstvo. Budući da malo otvoreno gospodarstvo nema značajan utjecaj na gospodarstvo eurozone, uvodimo restrikciju $A_{i,12} = 0$ što odgovara pretpostavci da domaći šokovi nemaju utjecaj na strani blok, dok strani šokovi i dalje mogu utjecati na domaće. Takva restrikcija naziva se **restrikcija blok-egzogenosti** te će se njena primjena detaljnije objasniti u narednom poglavlju nakon identifikacije modela i precizne definicije varijabli za model. ([2],[5])

1.5 Dekompozicija varijance

Uz analizu funkcija impulsnog odziva, korisno je dodati i **dekompoziciju varijance** inovacija kojom možemo bolje razumjeti međuodnose između varijabli u sustavu. Dekompozicija varijance prikazuje u postotnim udjelima, koliki udio grešaka je objašnjen njenim "vlastitim" šokovima u odnosu na šokove u drugim varijablama. Tako varijancu svake od varijabli u modelu možemo rastaviti na dio koji je uzrokovan "vlastitim" šokom, odnosno šokom u samoj toj varijabli, te dijelove koji su uzrokovani šokovima u drugim varijablama.

Krenimo od jednostavnijeg modela, odnosno onog iz jednadžbe (1.3) te pratimo postupak iz Enders (2014.):

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t$$

i pretpostavimo da su nam koeficijenti iz matrica A_0 i A_1 poznati. Želimo predvidjeti vrijednosti x_{t+i} uvjetno na opažene vrijednosti od x_t. Pomicanjem modela za jedan period unaprijed i uzimanjem uvjetnog očekivanja dobivamo:

$$E_t x_{t+1} = A_0 + A_1 x_t$$

pri čemu je pogreška predviđanja u razdoblju $t+1$, $x_{t+1} - E_t x_{t+1} = e_{t+1}$.

Ako model pomaknemo za dva perioda unaprijed, dobivamo:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= A_0 + A_1 x_{t+1} + e_{t+2} \\ &= A_0 + A_1(A_0 + A_1 x_t + e_{t+1}) + e_{t+2} \end{aligned}$$

te je predviđanje za x_{t+2}

$$E_t x_{t+2} = (I + A_1)A_0 + A_1^2 x_t$$

a pogreška predviđanja u razdoblju $t+2$, $x_{t+2} - E_t x_{t+2} = e_{t+2} + A_1 e_{t+1}$.

Generalizacijom postupka za n varijabli dobivamo:

$$E_t x_{t+n} = (I + A_1 + A_1^2 + \ldots + A_1^{n-1})A_0 + A_1^n x_t \tag{1.54}$$

te pripadnu pogrešku predviđanja:

$$e_{t+n} + A_1 e_{t+n-1} + A_1^2 e_{t+n-2} + \ldots + A_1^{n-1} e_{t+1} \tag{1.55}$$

Također možemo promotriti pogreške predviđanja za VMA reprezentaciju VAR modela i opisati pogreške predviđanja u terminima ε_t niza. Koristeći reprezentaciju iz 1.17 i prethodni postupak, imamo:

$$x_{t+n} = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i \varepsilon_{t+n-i}$$

pa je n- periodna pogreška predviđanja

$$x_{t+n} - E_t x_{t+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \varepsilon_{t+n-i}$$

Ako pogledamo samo varijablu y_t pogreška predviđanja za n perioda unaprijed je:

$$y_{t+n} - E_t y_{t+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\phi_{11}(0)\varepsilon_{y_{t+n}} + \phi_{11}(1)\varepsilon_{y_{t+n-1}} + \ldots + \phi_{11}(n-1)\varepsilon_{y_{t+1}} \right) \tag{1.56}$$

$$+ (\phi_{12}(0)\varepsilon_{z_{t+n}} + \phi_{12}(1)\varepsilon_{z_{t+n-1}} + \ldots + \phi_{12}(n-1)\varepsilon_{z_{t+1}}) \tag{1.57}$$

Uzmemo li varijancu te pogreške predviđanja i označimo je sa $\sigma_y(n)^2$ dobivamo:

$$\sigma^2_{y(n)} = \sigma^2_y \left(\phi_{11}(0)^2 + \phi_{11}(1)^2 + \ldots + \phi_{11}(n-1)^2 \right) \tag{1.58}$$

$$+ \sigma^2_z \left(\phi_{12}(0)^2 + \phi_{12}(1)^2 + \ldots + \phi_{12}(n-1)^2 \right) \tag{1.59}$$

Budući da su vrijednosti $\phi_{jk}(i)^2$ pozitivne, varijanca pogreške predviđanja se povećava kako se povećava n.

Sada možemo varijancu $\sigma^2_y(n)$ dekomponirati na dio koji je objašnjen njenim vlastitim šokovima te dio koji je objašnjen šokovima u varijabli z_t.

$$\sigma^2_{y(n)} = \underbrace{\sigma^2_y \left(\phi_{11}(0)^2 + \phi_{11}(1)^2 + \ldots + \phi_{11}(n-1)^2 \right)}_{\text{dio koji je objašnjen šokovima u varijabli } y_t}$$
$$+ \underbrace{\sigma^2_z \left(\phi_{12}(0)^2 + \phi_{12}(1)^2 + \ldots + \phi_{12}(n-1)^2 \right)}_{\text{dio koji je objašnjen šokovima u varijabli } z_t}$$

pa je udio u varijanci pogreške s obzirom na šokove u y_t i z_t

$$\frac{\sigma^2_y \left[\phi_{11}(0)^2 + \phi_{11}(1)^2 + \ldots + \phi_{11}(n-1)^2 \right]}{\sigma^2_{y(n)}} \quad \text{i} \quad \frac{\sigma^2_z \left[\phi_{12}(0)^2 + \phi_{12}(1)^2 + \ldots + \phi_{12}(n-1)^2 \right]}{\sigma^2_{y(n)}} \tag{1.60}$$

respektivno.

U većini istraživanja tipično je da varijabla u kratkom roku objašanjava gotovo cijelu pogrešku predviđanja vlastitim šokovima, te manje udjele u dužem roku.

Bitno je napomenuti da je redoslijed varijabli također bitan kod dekompozicije varijance. Naime, za identifikaciju nizova inovacija $\varepsilon_y t$ i ε_{zt} potrebno je restringirati matricu B, pa koristeći analogno objašnjenje kao i kod dekompozicije Choleskog zaključujemo da je poredak varijabli bitan.

Poglavlje 2

Empirijski model

Kako bismo analizirali utjecaj vanjskih šokova na gospodarstvo Slovenije u razdoblju prije i nakon ulaska zemlje u monetarnu uniju Eurozonu, koristimo dva VAR modela s restrikcijama blok egzogenosti. Prvi model predstavljat će utjecaje prije, a drugi nakon ulaska u monetarnu uniju. U daljnjem tekstu prvi model bit će adresiran kao **Model 1**, a drugi kao **Model 2**.

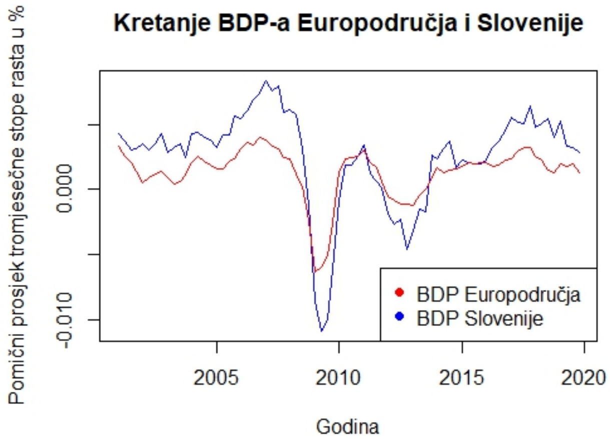
2.1 Podaci

Nezavisne varijable su BDP Slovenije i Eurozone, indeks potrošačkih cijena Slovenije i Eurozone te kamatne stope Euro područja u razdoblju od 2001.-2019. godine koje predstavljaju monetarnu politiku. Za kamatne stope koristimo "*shadow rate*" podatke, budući da su kamatne stope u prošlosti nakon krize 2008. većinom imale vrijednost nula te su se centralne banke u tom trenutku okrenule nekonvencionalnim monetarnim politikama, a *shadow rate* prikazuje na koji način bi se kamatne stope kretale kad bismo ih mogli spuštati ispod nule. Svi podaci su kvartalni te im je izvor Eurostat; podaci o bruto domaćem proizvodu su desezonirani i dani su u milijunima eura, a cijene su izražene u vidu indeksa 2015=100. Kako bismo lakše koristili i interpretirali varijable, podaci su logaritmirani te diferencirani. Također, zbog velikih oscilacija, primijenjena je tehnika zaglađivanja podataka - **metoda pomičnih prosjeka** kako bi se smanjio utjecaj kratkoročnih fluktuacija te bolje istaknuli trendovi u podacima, pogotovo u modelima s manjim brojem podataka. U ovom radu uzet je pomični prosjek 4 kvartala, odnosno srednja vrijednost svakih uzastopnih 4 kvartala.

Na Slici 2.1 prikazano je kretanje BDP-a Europodručja i Slovenije

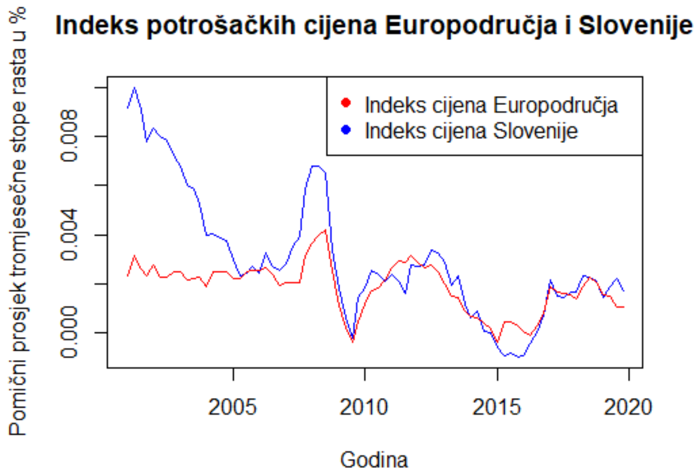
te iz slike možemo primijetiti usklađenost kretanja. Naime, korelacija između pomičnog prosjeka tromjesečnih stopa rasta BDP-a Europodručja i BDP-a Slovenije iznosi 0.90 za cijeli vremenski period. Korelacija u razdoblju 2001.-2007. prije ulaska Slovenije u Eurozonu iznosi 0.81, a nakon 0.91. Iz navedenog se već može pretpostaviti utjecaj monetarne unije na malo otvoreno gospodarstvo.

Slično, promatrajući pomični prosjek tromjesečne stope rasta indeksa potrošačkih cijena Europodručja i Slovenije, uočavamo harmonizirano kretanje nakon 2007. godine. Korelacije između pomičnih prosjeka tromjesečnih stopa rasta indeksa cijena Europodručja i Slovenije



Slika 2.1: Kretanje BDP-a Europodručja i Slovenije

Pomični prosjek tromjesečne stope rasta, u postotcima



Slika 2.2: Kretanje indeksa potrošačkih cijena Europodručja i Slovenije

Pomični prosjek tromjesečne stope rasta, u postotcima

iznosi 0.72 za cijelo razdoblje. Korelacija u razdoblju 2001.-2007. prije ulaska Slovenije u Eurozonu iznosi 0.34, a nakon 0.87.

Nadalje, navedene varijable podijeljene su u dva bloka: **strani blok** koji predstavlja gospodarstvo Euro područja - čine ga BDP Europodručja, indeks potrošačkih cijena te kamatna stopa. Drugi blok je **domaći blok** koji se sastoji od BDP-a Slovenije te indeksa potrošačkih cijena Slovenije.

2.2 Procjena parametara i identifikacija modela

Prateći proceduru opisanu u 1. poglavlju, krećemo sa procjenom parametara za navedena dva modela. Prisjetimo se modela iz definicije1.1.6. Naime, u ovom konkretnom slučaju imamo model

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + A_3 x_{t-3} + \cdots + A_p x_{t-p} + e_t \tag{2.1}$$

gdje vektor x_t sadrži 5 varijabli: BDP Europodručja, indeks cijena europodručja, monetarnu politiku (shadow rate), BDP Slovenije te indeks cijena Slovenije, odnosno

$$x_t = \begin{bmatrix} BDP_{EP} \\ HICP_{EP} \\ MP_{EP} \\ BDP_{SLO} \\ HICP_{SLO} \end{bmatrix}.$$

2.2.1 Odabir adekvatnog broja pomaka p

Kako bi model dobro opisivao podatke i veze među varijablama, moramo odabrati adekvatan broj pomaka što se može odrediti uspoređivanjem informacijskih kriterija. No, kako je uzorak prilično malen u ovim modelima, broj pomaka je odabran ručno, "*ad hoc*" te je potvrđena adekvatnost modela testovima za autokorelaciju, odnosno iz nepostojanja autokorelacije grešaka može se zaključiti da izbor pomaka nije netočan.

2.2.2 Postavljanje restrikcija

Kako bismo pravilno identificirali model, moramo na njega nametnuti određene restrikcije. To radimo na dva načina - **dekompozicijom Choleskog** postavljamo restrikcije na matricu strukturnih parametara te nakon toga uvodimo restrikciju **blok egzogenosti** na matricu koeficijenata.

Dakle, kao što je već spomenuto u poglavlju 1.4., uvodimo varijable u model prema njihovoj signifikantnosti, pri čemu je signifikantnost određena ekonomskom teorijom, te je taj poredak bitan za analizu funkcija impulsnog odziva te dekompoziciju varijance.
Varijable uvodimo sljedećim redoslijedom:

- Prva varijabla u poretku jest BDP Europodručja, za koji smatramo da ima signifikantan učinak na sve varijable u modelu.

- Sljedeća varijabla jest indeks potrošačkih cijena, za koju smatramo da također utječe na sve varijable u modelu osim BDP-a europodručja na koji nema neposredan učinak.

- Na treće mjesto postavljamo zadnju varijablu stranog bloka, monetarnu politiku odnosno kamatnu stopu.

- Četvrta varijabla u poretku jest BDP Slovenije za koji smatramo da ne utječe na strani blok, no i dalje utječe na petu varijablu koja će biti indeks potrošačkih cijena Slovenije.

Opisani poredak matrično prikazujemo na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} e_{BDP_{EP}} \\ e_{HICP_{EP}} \\ e_{EA_{MP}} \\ e_{BDP_{SLO}} \\ e_{HICO_{SLO}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & 0 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{BDP_{EP}} \\ \varepsilon_{HICP_{EP}} \\ \varepsilon_{EA_{MP}} \\ \varepsilon_{BDP_{SLO}} \\ \varepsilon_{HICO_{SLO}} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Na ovaj način smo nametnuli $n(n-1)/2 = 10$ ograničenja za pravilnu identifikaciju modela.

Nadalje, još trebamo uvesti i restrikcije blok-egzogenosti na koeficijente modela, što radimo postavljanjem koeficijenata uz varijable domaćeg bloka u jednadžbama varijabli stranog bloka na nulu.

Slijedom toga, model s dva bloka možemo zapisati na sljedeći način:

$$x_t = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} A_{i,11} & A_{i,12} \\ A_{i,21} & A_{i,22} \end{bmatrix}, e_t = \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix},$$

gdje y_t predstavlja varijable stranog bloka, a z_t domaćeg, te postavljanjem A_i, 12 dobivamo da domaći šokovi nemaju utjecaj na strani blok, dok strani šokovi i dalje mogu utjecati na domaće.

2.2.3 Metoda najmanjih kvadrata i analiza reziduala

Sljedeći korak je procjena koeficijenata metodom najmanjih kvadrata te u tom slučaju prvo moramo provjeriti jesu li sve pretpostavke metode najmanjih kvadrata u modelu zadovoljene.

Linearnost je zadovoljena budući da je model definiran tako da je veza između zavisne i nezavisne varijable linearna. Nepostojanje multikolinearnosti varijabli možemo ispitati računanjem Pearsonovog koeficijenta. Za modele koji obuhvaćaju razdoblje od 2001. do 2007. te 2007. do kraja podataka dobivamo sljedeće matrice s koeficijentima kolinearnosti:

```
              GDP_EA      HICP_EA       EA_MP      GDP_SLO   HICP_SLO
GDP_EA    1.00000000  0.09242821  0.8861512  0.81770350 -0.3922717
HICP_EA   0.09242821  1.00000000  0.1253140 -0.07236381  0.3412619
EA_MP     0.88615117  0.12531398  1.0000000  0.75458865 -0.4041290
GDP_SLO   0.81770350 -0.07236381  0.7545886  1.00000000 -0.5786129
HICP_SLO -0.39227169  0.34126187 -0.4041290 -0.57861285  1.0000000
```

i

```
             GDP_EA   HICP_EA     EA_MP   GDP_SLO   HICP_SLO
GDP_EA   1.00000000 0.1284324 0.6573614 0.9174780 0.03212953
HICP_EA  0.12843240 1.0000000 0.5117535 0.2222785 0.88680569
```

```
EA_MP    0.65736141 0.5117535 1.0000000 0.6046101 0.45281249
GDP_SLO  0.91747797 0.2222785 0.6046101 1.0000000 0.20496294
HICP_SLO 0.03212953 0.8868057 0.4528125 0.2049629 1.00000000
```

iz čega vidimo da ni za jednu kombinaciju varijabli ne vrijedi $\rho_{x_i x_j} = 1, i \neq j$ i zaključujemo da varijable nisu međusobno kolinearne.

Ostale pretpostavke ispitujemo testovima iz poglavlja 1.3. pri analizi reziduala.

Analizirajmo reziduale Modela 1 kako bismo bili sigurni da je procjena metodom najmanjih kvadrata valjana.

Prisjetimo se LM testa iz poglavlja 1.3.1. Korištenjem LM testa za autokorelaciju reziduala Modela 1 s jednim pomakom, dobivamo

```
Breusch-Godfrey LM test

data:  Residuals of VAR object var1r
Chi-squared = 39.204, df = 25, p-value = 0.03514
```

te na razini značajnosti od 1% ne možemo odbaciti nultu hipotezu, odnosno sve matrice D_i su jednake nuli iz čega možemo zaključiti da među rezidualima ne postoji autokorelacija.

Nadalje, korištenjem univarijatnog i multivarijatnog LM testa iz poglavlja 1.3.2 za testiranje heteroskedastičnosti reziduala dobivamo

```
$GDP_EA

ARCH test (univariate)

data:  Residual of GDP_EA equation
Chi-squared = 0.00050192, df = 1, p-value = 0.9821

$HICP_EA

ARCH test (univariate)

data:  Residual of HICP_EA equation
Chi-squared = 0.053028, df = 1, p-value = 0.8179

$EA_MP

ARCH test (univariate)

data:  Residual of EA_MP equation
Chi-squared = 0.014995, df = 1, p-value = 0.9025
```

```
$GDP_SLO

ARCH test (univariate)

data:  Residual of GDP_SLO equation
Chi-squared = 0.97241, df = 1, p-value = 0.3241

$HICP_SLO

ARCH test (univariate)

data:  Residual of HICP_SLO equation
Chi-squared = 0.028903, df = 1, p-value = 0.865

ARCH (multivariate)

data:  Residuals of VAR object var1r
Chi-squared = 243.51, df = 225, p-value = 0.1891
```

odnosno ni u jednom slučaju ne možemo odbaciti nultu hipotezu, iz čega zaključujemo da su reziduali homoskedastični.

Zadnji test koji provodimo jest Jarque-Bera test normalnosti, te također provodimo njegovu univarijatnu i multivarijatnu inačicu. U prvom slučaju, gdje se provodi istovremena usporedba koeficijenata zaobljenosti i asimetrije sa onima koji karakteriziraju normalnu distribuciju, za pojedinačne varijable dobivamo

```
JB-Test (univariate)

data:  Residual of GDP_EA equation
Chi-squared = 0.82145, df = 2, p-value = 0.6632


$HICP_EA

JB-Test (univariate)

data:  Residual of HICP_EA equation
Chi-squared = 1.9737, df = 2, p-value = 0.3727


$EA_MP
```

```
JB-Test (univariate)

data:  Residual of EA_MP equation
Chi-squared = 10.318, df = 2, p-value = 0.005747


$GDP_SLO

JB-Test (univariate)

data:  Residual of GDP_SLO equation
Chi-squared = 1.2959, df = 2, p-value = 0.5231


$HICP_SLO

JB-Test (univariate)

data:  Residual of HICP_SLO equation
Chi-squared = 0.73264, df = 2, p-value = 0.6933
```

Kod multivarijatne inačice kod istovremene usporedbe imamo

```
JB-Test (multivariate)

data:  Residuals of VAR object var1r
Chi-squared = 9.796, df = 10, p-value = 0.4586
```

te program još provodi test na način da zasebno uspoređuje koeficijent asimetrije i zaobljenosti te su u tom slučaju imamo sljedeći ispis:

```
Skewness only (multivariate)

data:  Residuals of VAR object var1r
Chi-squared = 5.5093, df = 5, p-value = 0.3569

Kurtosis only (multivariate)
```

```
data:  Residuals of VAR object var1r
Chi-squared = 4.2867, df = 5, p-value = 0.5089
```

Stoga, ni u jednom slučaju ne možemo odbaciti nultu hipotezu, odnosno zaključujemo da reziduali slijede normalnu distribuciju.

Analognu analizu provodimo i za Model 2.

Koristeći LM test za autokorelaciju reziduala Modela 2 s jednim pomakom dobivamo

```
Breusch-Godfrey LM test

data:  Residuals of VAR object var2r
Chi-squared = 33.359, df = 25, p-value = 0.1223
```

Dakle, na razini značajnosti 1% ne možemo odbaciti nultu hipotezu, odnosno među rezidualima ne postoji autokorelacija.

Nadalje, LM testom za heteroskedastičnost dobivamo sljedeći ispis:

```
$GDP_EA

ARCH test (univariate)

data:  Residual of GDP_EA equation
Chi-squared = 0.07824, df = 1, p-value = 0.7797

$HICP_EA

ARCH test (univariate)

data:  Residual of HICP_EA equation
Chi-squared = 4.6424, df = 1, p-value = 0.03119

$EA_MP

ARCH test (univariate)

data:  Residual of EA_MP equation
Chi-squared = 2.4683, df = 1, p-value = 0.1162


$GDP_SLO

ARCH test (univariate)
```

```
data:  Residual of GDP_SLO equation
Chi-squared = 0.0040238, df = 1, p-value = 0.9494

$HICP_SLO

ARCH test (univariate)

data:  Residual of HICP_SLO equation
Chi-squared = 0.069439, df = 1, p-value = 0.7922

ARCH (multivariate)

data:  Residuals of VAR object var2r
Chi-squared = 238.3, df = 225, p-value = 0.2591
```

Iz navedenog zaključujemo da ne možemo odbaciti nultu hipotezu na razini značajnosti 1% ni u jednom slučaju iz čega slijedi da su reziduali homoskedastični.

Nadalje, za normalnost imamo:

```
$GDP_EA

JB-Test (univariate)

data:  Residual of GDP_EA equation
Chi-squared = 8.254 , df = 2, p-value = 0.0672


$HICP_EA

JB-Test (univariate)

data:  Residual of HICP_EA equation
Chi-squared = 0.12093, df = 2, p-value = 0.9413


$EA_MP

JB-Test (univariate)

data:  Residual of EA_MP equation
```

```
Chi-squared = 2.2071, df = 2, p-value = 0.3317


$GDP_SLO

JB-Test (univariate)

data:  Residual of GDP_SLO equation
Chi-squared = 9.2215, df = 2, p-value = 0.0872


$HICP_SLO

JB-Test (univariate)

data:  Residual of HICP_SLO equation
Chi-squared = 5.1618, df = 2, p-value = 0.07571


$JB

JB-Test (multivariate)

data:  Residuals of VAR object var2r
Chi-squared = 10.2843, df = 10, p-value = 0.1053


$Skewness

Skewness only (multivariate)

data:  Residuals of VAR object var2r
Chi-squared = 9.512, df = 5, p-value= 0.07588


$Kurtosis

Kurtosis only (multivariate)

data:  Residuals of VAR object var2r
Chi-squared = 8.1964, df = 5, p-value = 0.0568
```

Dakle, modele možemo procijeniti metodom najmanjih kvadrata. Kako bismo proveli procjenu modela, u programskom softveru R koristimo funkciju **VAR**, te **restrict** kako bismo na model nametnuli restrikcije blok-egzogenosti.

Nadalje, moramo provjeriti jesu li modeli stabilni i stacionarni. Dobiveni su sljedeći korijeni karaterističnog polinoma:

```
Model 1: 0.9680031 0.8801557 0.5885655 0.482599 0.08939276
Model 2: 0.992463 0.9053993 0.9053993 0.7237819 0.3204397
```

Uočavamo da su svi korijeni manji od 1 po apsolutnoj vrijednosti, odnosno model je stabilan te onda i stacionaran.

Poglavlje 3

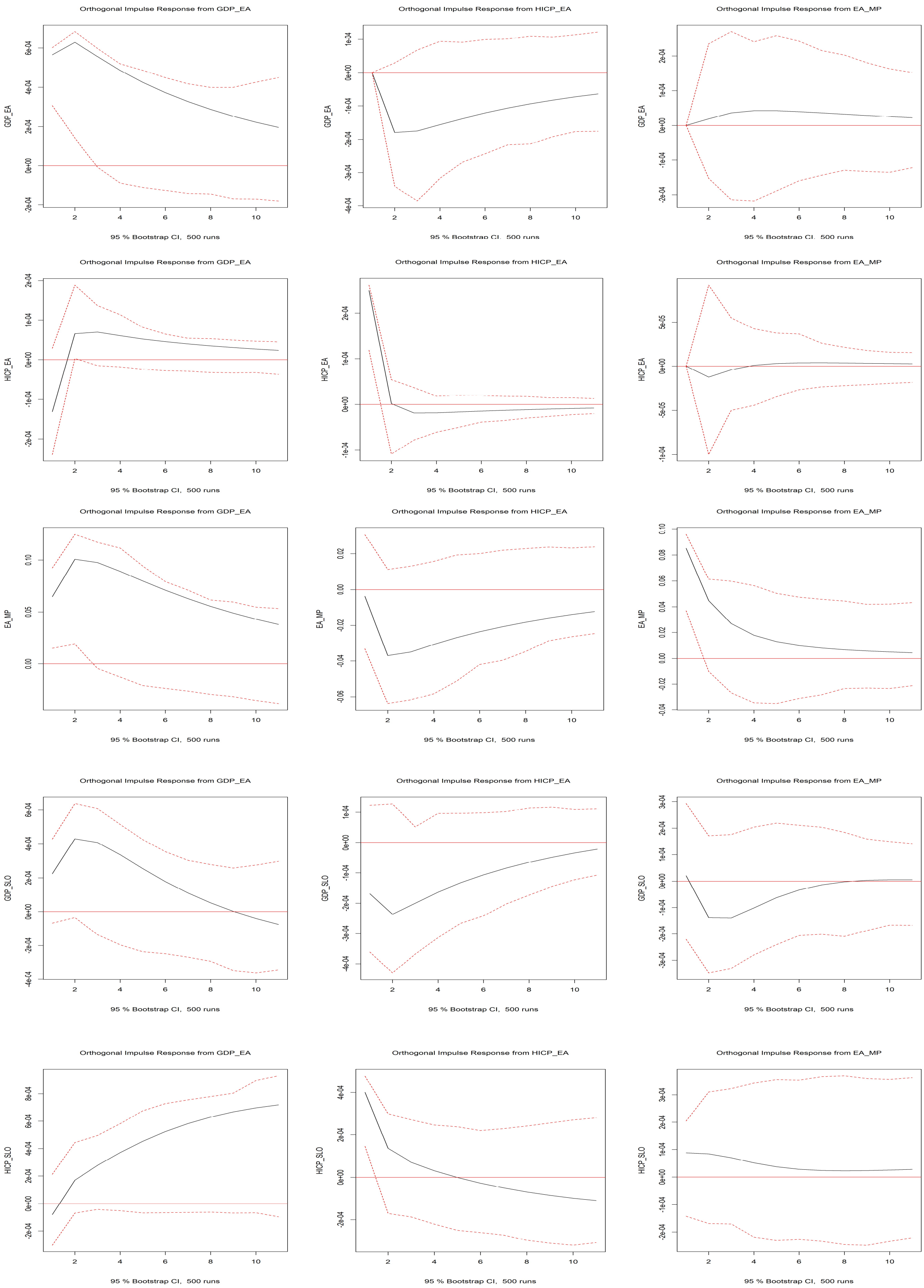
Analiza rezultata

U ovom poglavlju analiziramo rezultate procjene VAR modela. Analizirat ćemo funkcije impulsnog odziva kod kojih se razmatra učinak jediničnog šoka kroz vrijeme te također i kumulativne funkcije impulsnog odziva gdje se razmatra akumulirana vrijednost šoka, odnosno zbroj učinaka kroz svako razdoblje. Također, analizirat ćemo i dekompoziciju varijance varijabli. Analizirani grafovi prikazuju funkcije impulsnog odziva prvog i drugog modela svih kombinacija varijabli, pri čemu su iscrtane crvene linije granice 95%-tnog intervala pouzdanosti procijenjenih koeficijenata funkcije impulsnih odziva. Pri tome, ako je horizontalna os koja prolazi kroz nulu unutar navedenih linija, interpretacija jest da rezultati nisu signifikantni uz razinu pouzdanosti od 5%. Promatrani su šokovi promjena od jedne standardne devijacije impulsne varijable te posljedično kretanje druge specificirane varijable.

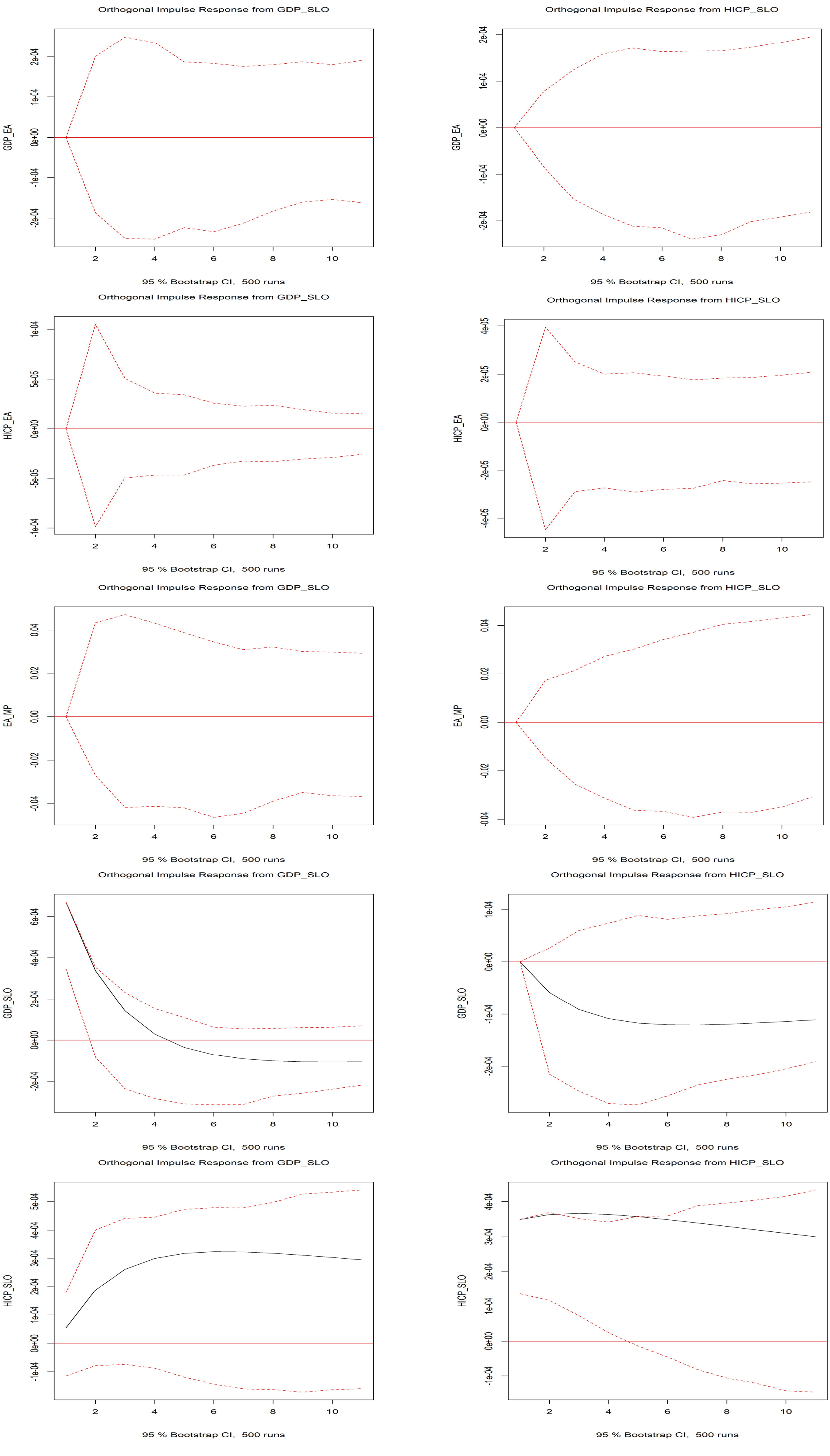
3.1 Funkcije impulsnog odziva

3.1.1 Funkcije impulsnog odziva prije ulaska Republike Slovenije u Europodručje

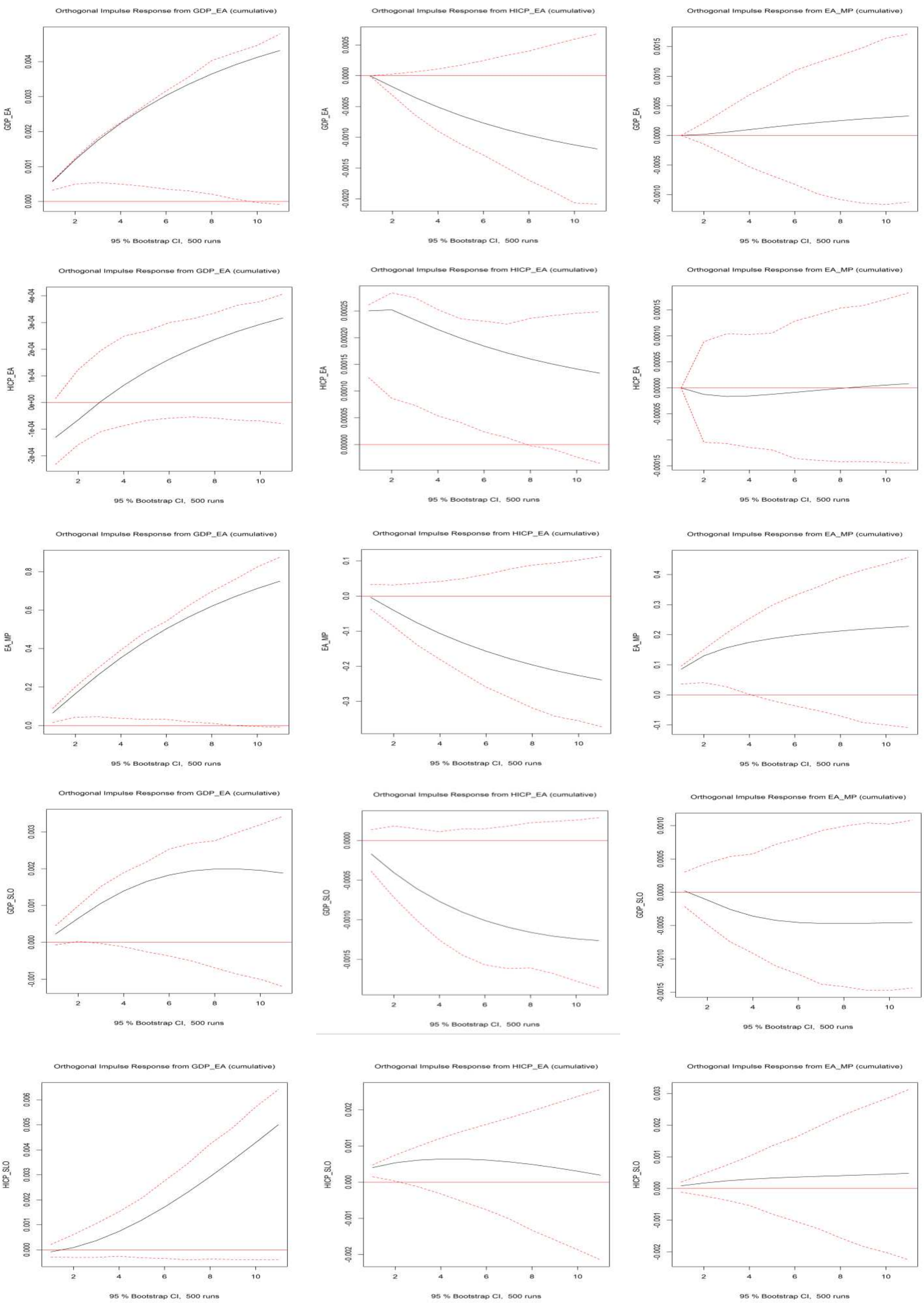
Sljedeći grafovi prikazuju funkcije impulsnog odziva, u kojima promatramo utjecaj promjene od jedne standardne devijacije impulsne varijable Europodručja na same varijable Europodručja te varijable Republike Slovenije prije ulaska u Eurozonu, na osnovi procijenjenih parametara VAR modela.



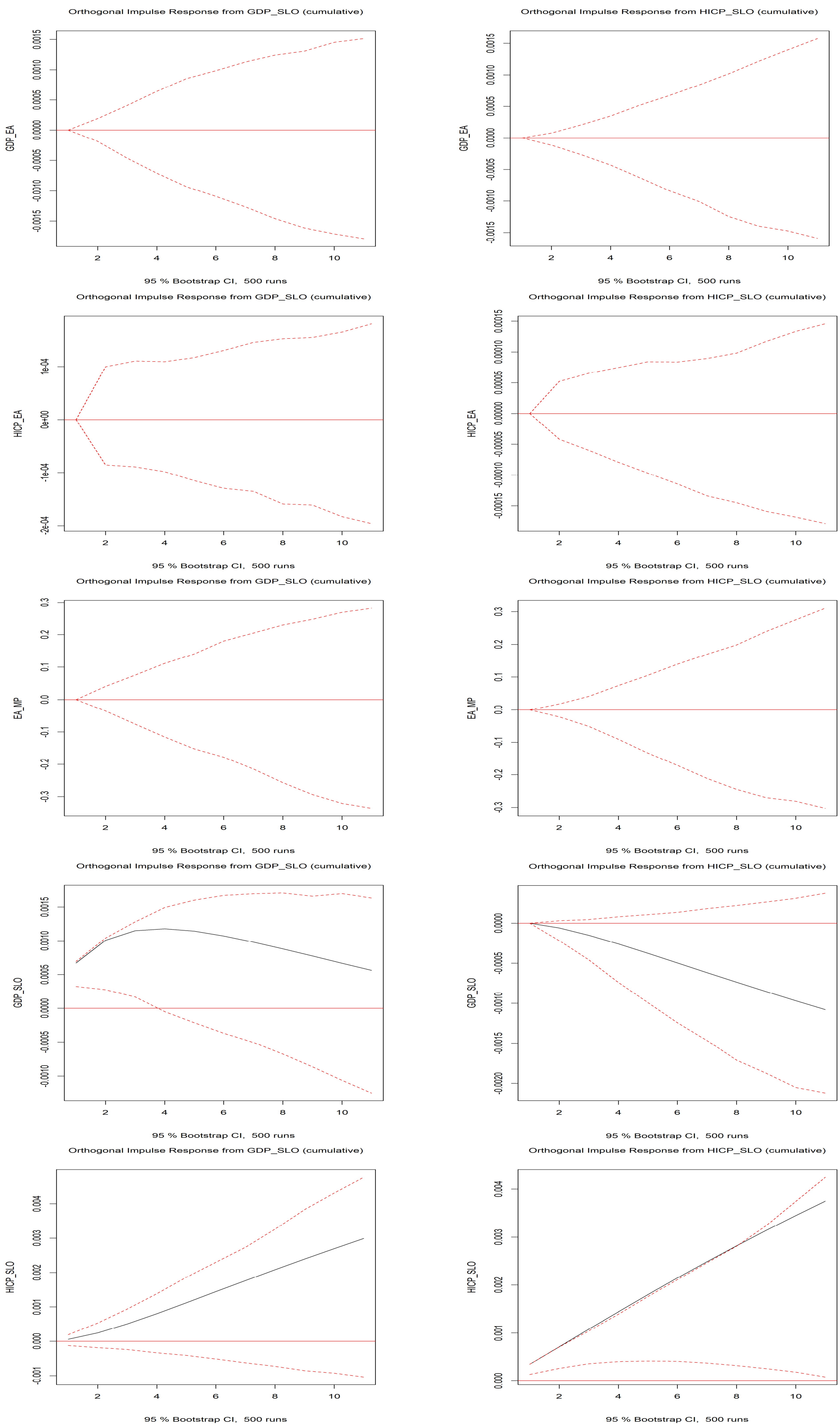
Slika 3.1: Funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Euro područja



Slika 3.2: Funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Slovenije



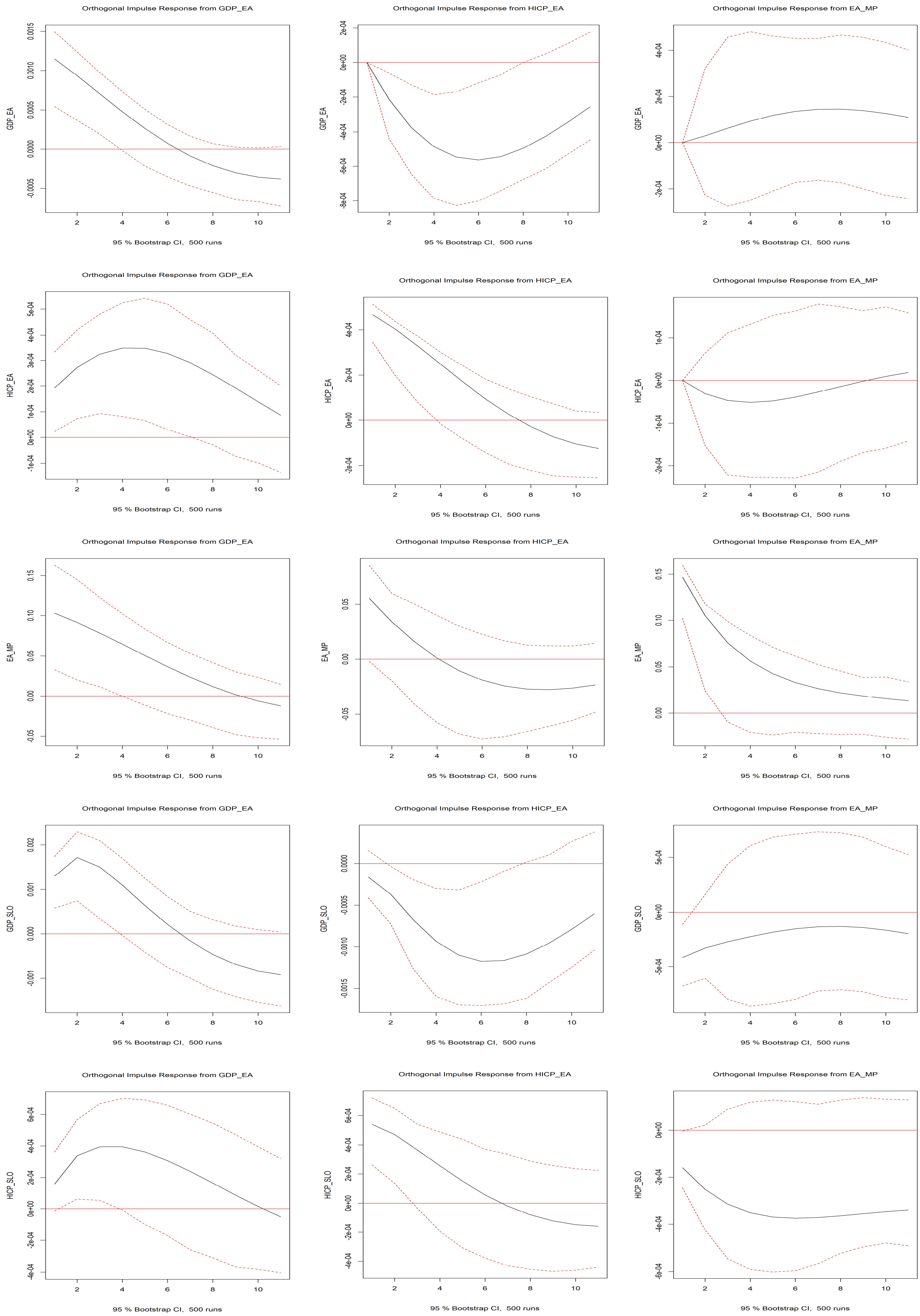
Slika 3.3: Kumulativne funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Euro područja



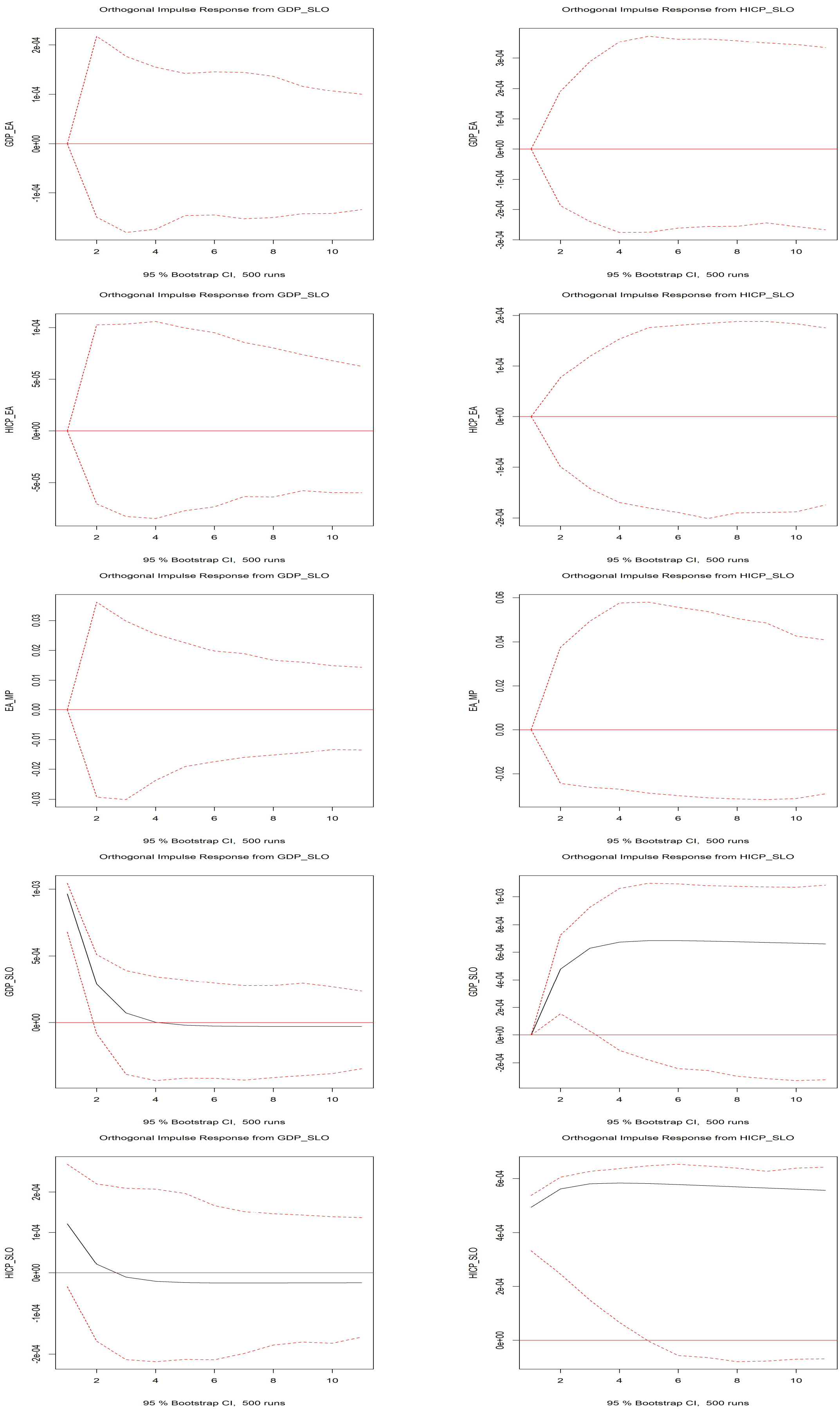
Slika 3.4: Kumulativne funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Slovenije

U skladu s očekivanjem, primjećujemo pozitivan utjecaj šokova varijabli europodručja na same sebe u prvim periodima. Nadalje, jedini signifikantni odziv varijable europodručja na šok u drugoj varijabli europodručja (izuzev na šokova varijabli na sebe same) jest pozitivna promjena stope rasta kamatne stope do trećeg razdoblja, na šok od jedne standardne devijacije u varijabli BDP-a europodručja. Ovaj je rezultat u skladu s ekonomskom pretpostavkom da će u uvjetima povećane ekonomske volatilnosti središnje banke nastojati stabilizirati tržište podizanjem kamatne stope. Promatrajući utjecaj šokova varijabli europodručja na varijable Republike Slovenije prije ulaska u eurozonu, zamjećujemo mali broj signifikantnih impulsa. Statistički značajan jest jedino šok od jedne standardne devijacije pomičnog prosjeka stope rasta indeksa cijena europodručja na pomični prosjek stope rasta indeksa cijena Republike Slovenije u prvom razdoblju. Iz grafa zaključujemo da je veza pozitivna, točnije da jedna standardna devijacija indeksa cijena europodručja rezultira povećanjem pomičnog prosjeka stope rasta cijena u Sloveniji za 0.04 postotna boda. Pozitivan smjer reakcije utjecaja u skladu je s implikacijama koje proizlaze iz povezanosti gospodarstva Republike Slovenije s gospodarstvom europodručja te svjedoče o ispravnoj karakterizaciji Republike Slovenije kao malog otvorenog gospodarstva s tijesnom cjenovnom povezanosti s europodručjem. Analizirajući djelovanje šokova varijabli Republike Slovenije na europodručje prije ulaska u eurozonu ne postoji reakcija, što je u skladu sa specifikacijom modela i postavkama blok-egzogenosti. S druge strane, utjecaj šokova varijabli Republike Slovenije na same sebe pozitivan je i signifikantan u prvom periodu za sve varijable kao što je bio slučaj i za europodručje. Također, valja istaknuti perzistentnost utjecaja šoka u indeksu cijena na pomični prosjek stope rasta indeksa cijena u Sloveniji, koji je signifikantan do petog razdoblja. Analizirajući utjecaje šokova kroz prizmu kumulativne funkcije impulsnog odziva, u modelima koji su stabilni, uočavamo stabiliziranje samog učinka šoka u dugom roku. Primjećujemo signifikantan kumulativni rast pomičnog prosjeka stope rasta BDP-a europodručja do devetog perioda po utjecaju promjene od jedne standardne devijacije BDP-a europodručja. Nadalje, uočavamo signifikantni, ali padajući utjecaj šoka indeksa potrošačkih cijena na kumulativno kretanje stope rasta cijena koji reflektira postepeno apsorpciju inicijalnog šoka kroz periode. Sličan signifikantan stabilizirajući uzorak pronalazimo i kod promatranja učinaka šoka monetarne politike na kumulativno kretanje kamatne stope u europodručju. Izuzev utjecaja šokova varijabli na same sebe, kao i na prethodnoj slici, ne pronalazimo signifikantne reakcije s iznimkom utjecaja šoka u pomičnom prosjeku BDP-a na kumulativan rast kamatnih stopa. Promatrajući utjecaj šokova varijabli u europodručju na kumulativno kretanje varijabli u Republici Sloveniji, još jednom potvrđujemo nesignifikantnost ustanovljenu pri analiziranju utjecaja po pojedinačnim kvartalima, osim spomenutog utjecaja šoka cijena. Utjecaj šokova varijabli Republike Slovenije na kumulativno kretanje varijabli u zemlji i pri kumulativnim funkcijama značajan je samo u slučaju utjecaja varijable na sebe samu.

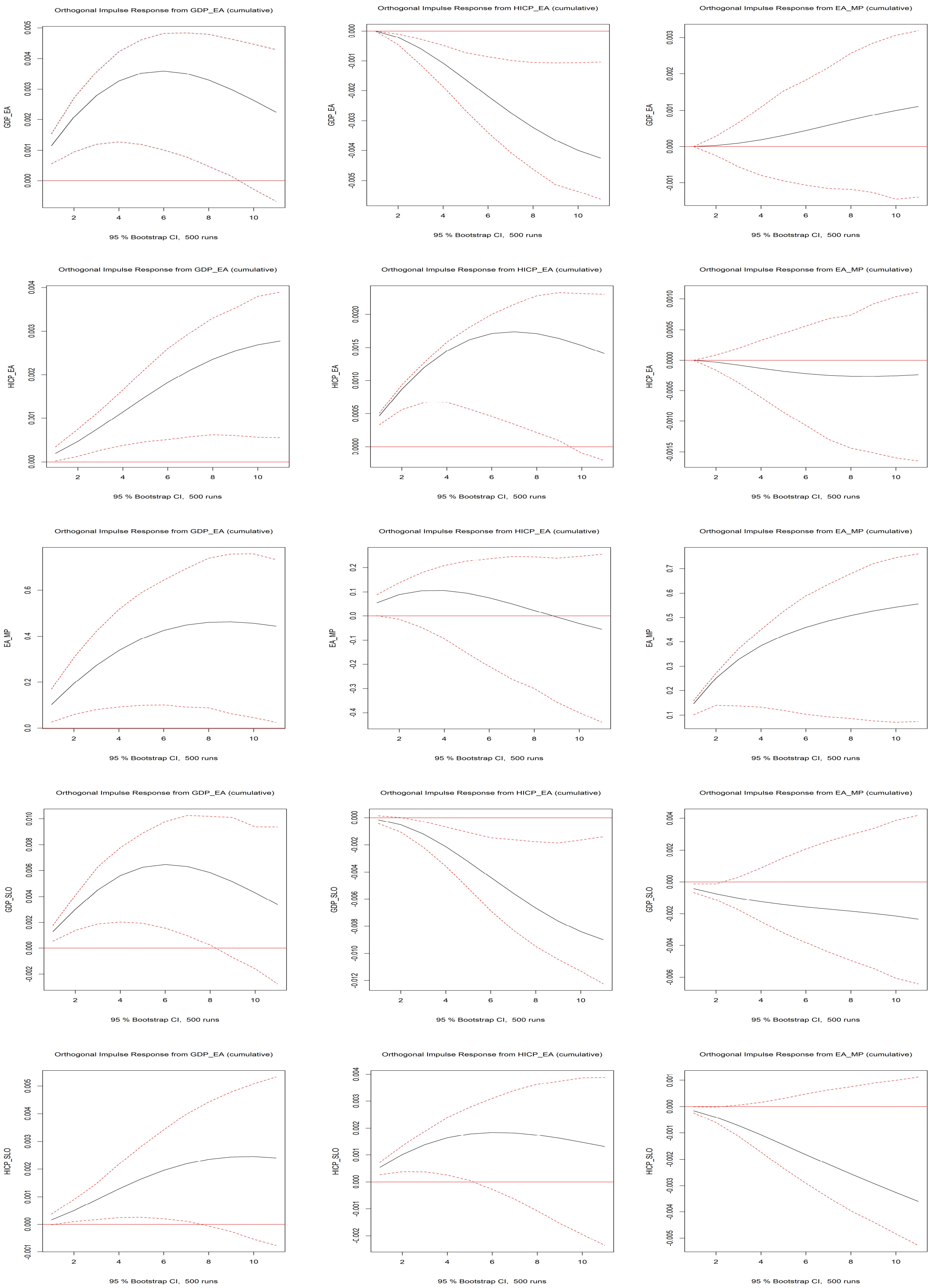
3.1.2 Funkcije impulsnog odziva nakon ulaska Republike Slovenije u Europodručje



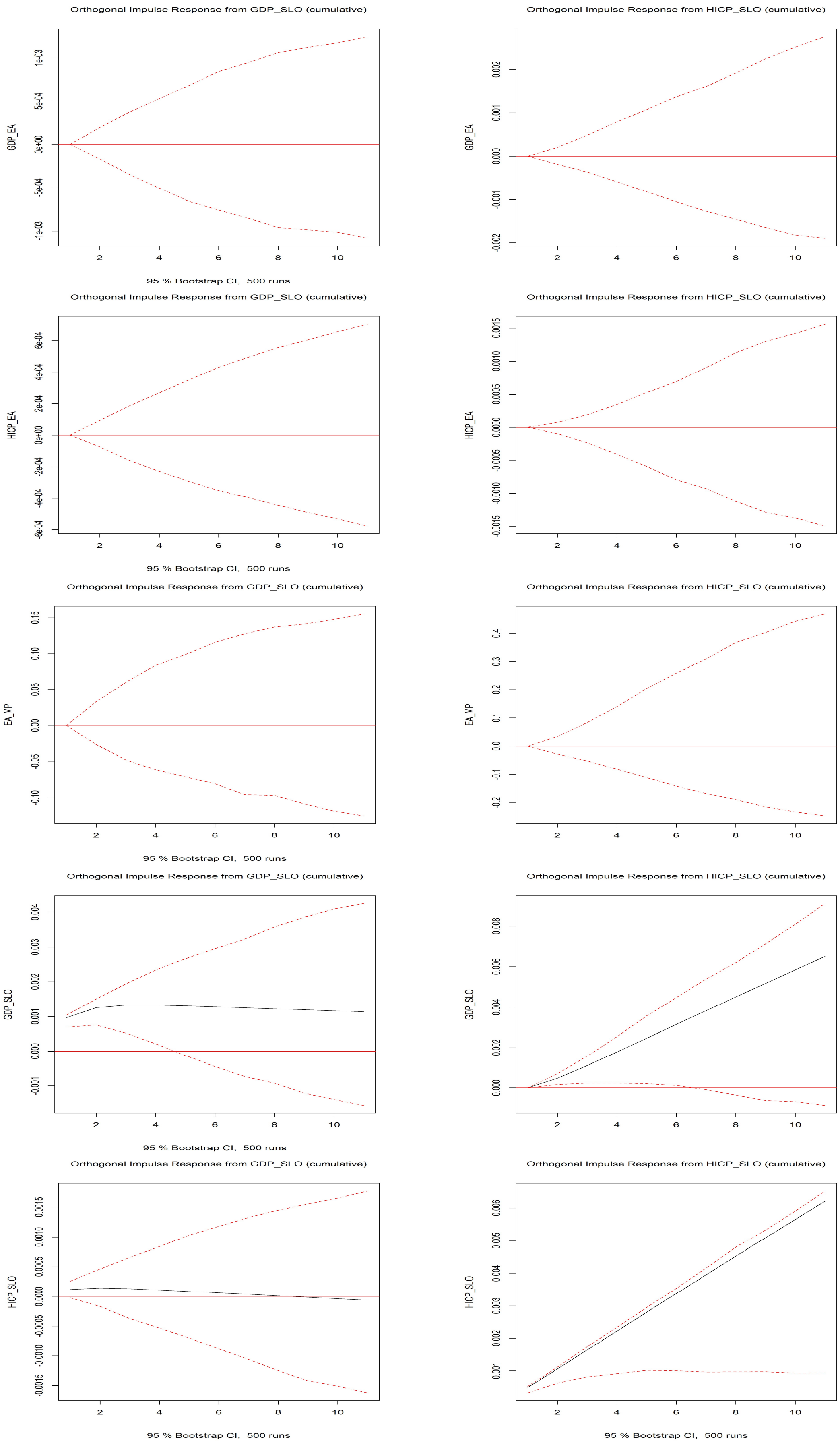
Slika 3.5: Funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Euro područja



Slika 3.6: Funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Slovenije



Slika 3.7: Kumulativne funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Euro područja

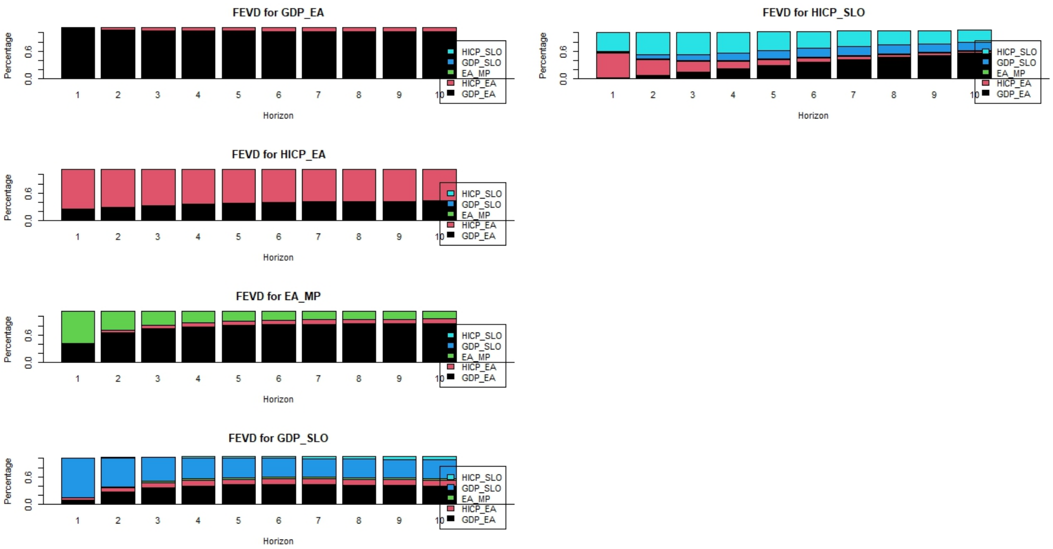


Slika 3.8: Kumulativne funkcije impulsnog odziva na impulse varijabli Slovenije

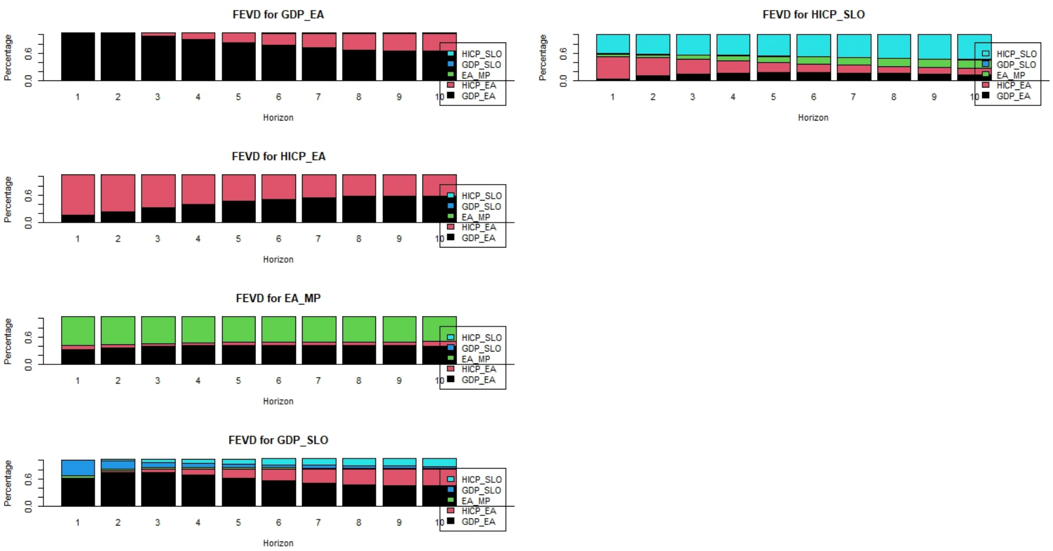
Nakon ulaska Republike Slovenije u europodručje, primjećujemo slične trendove signifikantnosti i smjera utjecaja šokova varijabli na reakciju drugih varijabli u samom europodručju. Uočljiva je razlika u perzistentnosti samih šokova na analizirana kretanja. Primjerice, u periodu nakon 2007. godine, promjena od jedne standardne devijacije pomičnog prosjeka stope rasta BDP-a rezultirala je u (pozitivnoj) reakciji u pomičnom prosjeku stope rasta indeksa potrošačkih cijena do sedmog promatranog razdoblja. Ključno je primijetiti kako je po ulasku Republike Slovenije u europodručje reakcija pomičnog prosjeka stope rasta BDP-a Slovenije signifikantna na šok u BDP-a eurozone i to do četvrtog promatranog razdoblja. Podsjetimo, u analiziranom razdoblju prije pristupanja Slovenije europodručju, promjena od jedne standardne devijacije BDP-a europodručja nije bila signifikantna za kretanje pomičnog prosjeka stope rasta BDP-a Slovenije ni za jedno od promatranih razdoblja. Istovjetne promjene u signifikantnosti primjećujemo i za utjecaj šoka u varijabli BDP-a europodručja na varijablu indeksa cijena te utjecaj šoka varijable koja opisuje monetarnu politiku na signifikantnost varijable indeksa cijena te BDP-a. S obzirom na to da je pristupanje zemlje monetarnoj uniji snažan signal ekonomske konvergencije te zemlje monetarnom području, ne iznenađuje ni signifikantnost kumulativnih reakcija. Šok u BDP-u europodručja značajan je i djeluje pozitivno na promjenu kumulativnog pomičnog prosjeka stope rasta BDP-a Slovenije do osmog promatranog razdoblja te promjenu (kumulativnog) pomičnog prosjeka stope rasta potrošačkog indeksa također do osmog razdoblja. Nadalje, šok u indeksu potrošačkih cijena u europodručju signifikantan je za pomični prosjek stope rasta indeksa potrošačkih cijena u Sloveniji sve do petog promatranog razdoblja. Također, bitno je istaknuti opaženu signifikantnost (negativnog) utjecaja monetarne politike u eurozoni na BDP i pad indeksa cijena u Republici Sloveniji nakon njihova ulaska u europodručje imajući u vidu neznačajne rezultate prvog modela (prije 2007. godine). Rezultati funkcija impulsnog odziva u skladu su s ekonomskim očekivanjem. Po ulasku zemlje u europodručje, ostvarena (ekonomska) konvergencija reflektira se u značajnijem utjecaju šokova varijabli monetarnog područja na gospodarske pokazatelje zemlje pristupnice. Analiza funkcija impulsnog odziva s podacima prije pristupanja Republike Slovenije eurozoni te usporedba s rezultatima analize nakon ulaska u europodručje potvrđuje smanjenje šokovnih asimetrija te potpuno usklađivanje monetarne politike.

3.2 Dekompozicija varijance

Kao što je već spomenuto u odjeljku 1.5., dekompozicijom varijance utvrđujemo koliki je udio varijance pogreške predviđanja pojedine varijable modelu uzrokovan šokovima u drugim varijablama, odnosno šokovima u samoj toj varijabli. Sljedeće slike prikazuju dekompoziciju varijance svih varijabli modela prije i nakon ulaska Slovenije u Eurozonu u razdoblju od narednih 10 kvartala.



Slika 3.9: Dekompozicija varijance Modela 1 (prije ulaska u EZ)



Slika 3.10: Dekompozicija varijance Modela 2 (nakon ulaska u EZ)

Iz slika možemo uočiti da je varijanca pogreške predviđanja pomičnog prosjeka stope rasta BDP-a Slovenije u razdoblju prije ulaska u Eurozonu u prvom kvartalu skoro u potpunosti objašnjena šokovima u toj istoj varijabli, dok u kasnijim periodima je veći udio objašnjen šokovima u stranom BDP-u. S druge strane, u razdoblju nakon ulaska u Eurozonu, varijanca pogreške predviđanja pomičnog prosjeka stope rasta BDP-a Slovenije je u prva dva kvartala objašnjena malim udjelom šokovima u toj istoj varijabli, dok je većinom objašnjena šokovima u BDP-u Europodručja te u kasnijim razdobljima još i šokovima u razini cijena Europodručja.

Nadalje, u varijanci pogreške predviđanja pomičnog prosjeka stope rasta indeksa potrošačkih cijena Slovenije, prije ulaska u Eurozonu u prvom razdoblju je većim dijelom objašnjen šokovima u Indeksu potrošačkih cijena Eurozone, no također, i "vlastiti" šokovi varijable imaju nezanemariv učinak od oko 45%. U daljnjih 3-6 kvartala varijanca pogreške predviđanja je objašnjena šokovima u više varijabli - domaćem i stranom BDP-u, te domaćoj i stranoj razini cijena, dok najveću težinu ima domaća razina cijena. U kvartalima 7-10 veću težinu ima BDP Eurozone. Zanimljivo je uočiti kako varijanca pogreške predviđanja pomičnog prosjeka stope rasta indeksa potrošačkih cijena Slovenije nije objašnjena šokovima u stopi rasta kamatne stope, ni u jednom razdoblju. S druge strane, nakon ulaska Slovenije u Eurozonu, vidljivo je da dio varijance pogreške predviđanja pomičnog prosjeka stope rasta indeksa potrošačkih cijena Slovenije objašnjen šokovima u stopi rasta kamatnih stopa Europodručja već od prvog razdoblja, te je veći udio objašnjen šokovima u domaćoj razini cijena, te također i stranoj razini cijena u prvih nekoliko kvartala.

Možemo pretpostaviti da je razlog za to postojanje vlastite monetarne politike i tečaja Slovenije u razdoblju prije ulaska u Eurozonu te mogućnost reagiranja istom na razinu cijena, što je također u skladu s većom osjetljivosti na šokove u BDP-u. Budući da je država sama donosila svoje mjere monetarne politike, ona je mogla reagirati na šokove istom.

Također, tečaj Slovenije je mogao oscilirati kao reakcija na šokove u stranom BDP-u, te na taj način direktno utjecati na domaću razinu cijena. S druge strane, nakon što je zemlja ušla u Eurozonu, "odrekla" se instrumenata monetarne politike i vlastitog tečaja, dajući mogućnost većem utjecaju monetarne politike Europodručja. Također, zbog napuštanja vlastite valute i usvajanja zajedničke, eliminirani su učinci valutnog tečaja, što pridonosi smanjenju osjetljivosti domaće razine cijena u odnosu na strani BDP. ([1])

Bibliografija

[1] M. Deskar-Škrbić, K. Kotarac i D. Kunovac, *The Third Round of the Euro Area Enlargement: Are the Candidates Ready?*, (2019), br. W-57, `https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2020.102205`.

[2] K. Dumičić, I. Palić i P. Sprajaček, *The role of external shocks in Croatia: block exogeneity SVAR approach*, Journal of economic and social development **1** (2014), br. 2, 44–54, `https://hrcak.srce.hr/135727`.

[3] W. Enders, *Applied Econometric Time Series*, Wiley, 2014.

[4] M. Guidolin i M. Pedio, *Essentials of Time Series for Financial Applications*, Academic Press, 2018.

[5] R. Horváth i M. Rusnák, *How important are foreign shocks in small open economy? The case of Slovakia*, (2008), br. 21/2008, `http://hdl.handle.net/10419/83321`.

[6] H. Lutkepohl, *New introduction to multiple time series analysis*, Springer, 2005.

[7] K. Lutz i H. Lutkepohl, *Structural Vector Autoregressive Analysis*, Cambridge University Press, 2005.

[8] T. Škrinjarić, *Odabrane teme primjenjene ekonometrije: Uvod u analizu vremenskih nizova*, Hrvatska narodna banka, 2018.

Sažetak

U ovom radu prezentiran je teorijski pregled vektorskih auto regresijskih (VAR) modela te objašnjena teorijska pozadina postupka procjene parametara i identifikacije modela. U sklopu toga detaljno su objašnjeni informacijski kriteriji, kriteriji stabilnosti modela te metoda najmanjih kvadrata kao metoda procjene modela. Predočeni su teorijski koncepti testova autokorelacije, heteroskedastičnosti i normalnosti reziduala čime je pružen teorijski okvir za analizu reziduala, koja se temelji na navedenim testovima, s ciljem provjere zadovoljenja pretpostavki metode najmanjih kvadrata. Dodatno, kao dio identifikacije modela objašnjene su dvije metode restringiranja - dekompozicija Choleskog te specifično za model iz rada - blok-egzogenost. Nadalje, prezentirana su dva VAR modela s restrikcijama blok - egzogenosti kojima su analizirani učinci vanjskih šokova na malo otvoreno gospodarstvo - Republiku Sloveniju u razdoblju prije i nakon pridruživanja zemlje monetarnoj uniji - Eurozonu. Modeli su procijenjeni i identificirani prema prezentiranoj teoriji. Zatim je napravljena usporedba modela s ciljem identifikacije učinaka pridruživanja monetarnoj uniji te su analizirane funkcije impulsnog odziva i dekompozicija varijance.

Summary

This thesis presents a theoretical overview of Vector AutoRegressive (VAR) models and explains the theoretical background of parameter estimation and model identification procedures. Within this context, information criteria, stability criteria, and the least squares method are thoroughly explained. The theoretical concepts of autocorrelation, heteroskedasticity, and normality tests for residuals are detailed, providing a theoretical framework for residual analysis based on these tests to verify the assumptions of the least squares method.

Additionally, as part of model identification, two restricting methods are presented: Cholesky decomposition and, specifically for the model in this paper, block exogeneity. Furthermore, two VAR models with block exogeneity restrictions are presented, analyzing the effects of external shocks on a small open economy - the Republic of Slovenia - in the periods before and after joining the monetary union - the Eurozone. The models are estimated and identified according to the presented theory. A comparison of the models is then conducted to identify the effects of joining the monetary union, and impulse response functions and variance decomposition are analyzed.

Životopis

Rođena sam 03.08.1999. u Čakovcu. Školovanje sam započela u IV. osnovnoj školi u Varaždinu. Nakon završetka osnovne škole, upisala sam Prvu gimnaziju u Varaždinu 2013. godine. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2017. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu na kojem sam u rujnu 2020. godine stekla titulu Sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Nakon završetka preddiplomskog studija, upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna Matematika.