

# Upravljanje multi-agentnim sustavima

---

Čačković, Filip

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:991366>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-19**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Filip Čačković

**UPRAVLJANJE MULTIAGENTNIM**  
**SUSTAVIMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Ivica Nakić

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Uvod u teoriju upravljanja</b>	<b>3</b>
1.1 Vremenski invarijantni sustavi u prostoru stanja . . . . .	3
1.2 Frekvencijska domena . . . . .	5
<b>2 Uvod u teoriju grafova</b>	<b>9</b>
2.1 Općenito o grafovima . . . . .	9
2.2 Poblje o usmjerenim grafovima . . . . .	11
2.3 Grafovi u testiranju . . . . .	12
<b>3 Uvod u teoriju multiagentnih sustava</b>	<b>17</b>
3.1 Općenito o multiagentnim sustavima . . . . .	17
3.2 Problem sporazuma na grafu . . . . .	20
<b>4 Upravljanje multiagentnim sustavima</b>	<b>23</b>
4.1 MAS na neusmjerenom grafu . . . . .	23
4.2 MAS na usmjerenom grafu . . . . .	25
4.3 Numerička implementacija . . . . .	29
<b>5 Rezultati testiranja</b>	<b>33</b>
5.1 Primjer 1. Graf $D$ - scale_free_directed_graph . . . . .	35
5.2 Primjer 2. Graf $N$ - gn_graph . . . . .	41
5.3 Primjer 3. Tri slična grafa: $J_6, J_7, J_{15}$ - random_k_out_graph . . . . .	47
<b>Bibliografija</b>	<b>55</b>

# Uvod

Teorija multiagentnih sustava (MAS) u sebi povezuje dva velika područja matematike: teoriju upravljanja i teoriju grafova. Teorija upravljanja usko je vezana uz razvoj inženjerstva i tehnologije. Radi se o jednoj od matematičkih grana gdje svi problemi dolaze iz realnog svijeta te zahtijevaju matematičke alate kako bi se moglo upravljati raznim sustavima. Teorija upravljanja koristi linearnu algebru i numeričku matematiku kao svoje glavne alate. Također, važnu ulogu imaju *Hardyjevi prostori* i pripadne norme. Norma  $H_\infty$  jedno je od važnijih parametara koji opisuje značajke nekog sustava.

Teorija MAS-a ubrzano se razvija zahvaljujući razvoju znanosti o mrežama te ima primjene u raznolikim disciplinama poput fizike, robotike, zrakoplovstva, elektrotehnike, biologije i psihologije.

Važnu ulogu u teoriji MAS-a igraju usmjereni grafovi. Neusmjereni grafovi intenzivno se proučavaju te su se razvili odgovarajući algebarski i spektralni alati za proučavanje takvih grafova. S druge strane, usmjereni grafovi postali su predmet intenzivnijih istraživanja tek u zadnjih dvadesetak godina.

U ovom radu proučava se pitanje upravljanja, to jest osjetljivosti multiagentnih sustava. Proučavanje osjetljivosti svodi se na računanje  $H_\infty$  norme djelovanja poremećaja na MAS koji je opisan neusmjerenim ili usmjerenim grafom. Računanje  $H_\infty$  norme numerički je vrlo zahtjevan proces. Motivacija za ovaj rad bio je članak [14] u kojem se pokazuje da se za povezane neusmjerene grafove računanje  $H_\infty$  norme svodi na računanje Moore-Penroseovog pseudoinverza, što je numerički jako povoljno.

Cilj ovog rada bio je testirati vrijedi li isti rezultat za MAS-e na usmjerenim grafovima pod istim uvjetima kao i za neusmjerene grafove. Testiranje se provodilo na slučajno generiranim grafovima uz pomoć *Python* biblioteke *NetworkX*.

Ovaj rad strukturiran je na sljedeći način: u prvom poglavlju donosimo kratki pregled pojmova i rezultata iz teorije upravljanja. U drugom poglavlju predstavljaju se rezultati za neusmjerene i usmjerene grafove. Kratki uvod u MAS-e dan je u trećem poglavlju. U četvrtom poglavlju prezentiramo rezultat iz [14] koji je bio motivacija ovog rada te donosimo izvod analognog rezultata za MAS-e na usmjerenim grafovima. Rezultati testiranja predstavljeni su u petom poglavlju.



# Poglavlje 1

## Uvod u teoriju upravljanja

### 1.1 Vremenski invarijantni sustavi u prostoru stanja

**Definicija 1.1.1.** Sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (ODJ) oblika

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t) &\in \mathbb{R}^n, & u(t) &\in \mathbb{R}^m, & y(t) &\in \mathbb{R}^p, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & A &\in M_n, & B &\in M_{nm}, \\ x(0) &= x_0, & C &\in M_{pn}, & D &\in M_{pm}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

nazivamo **vremenski invarijantni sustavi (LTI)** zapisan u prostoru stanja.

LTI sustav (1.1) označavamo sa  $G = (A, B, C, D)$  ili  $G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ .

Funkciju  $u$  nazivamo **ulaz**, a vektor  $y$  nazivamo **izlaz**.

**Napomena 1.1.2.** Sustav (1.1) je linearan. Također, sustav (1.1) je vremenski invarijantan budući da vrijedi:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(t) &:= u(t - T) \\ \tilde{x}(0) &:= x(T) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{y}(t) = y(t - T).$$

**Napomena 1.1.3.** Sustav (1.1) je linearni sustav ODJ prvog reda s početnim uvjetom, stoga rješenje postoji i jedinstveno je (vidi [23]).

**Definicija 1.1.4.** Za kvadratnu matricu  $A \in M_n$  definiramo **matričnu eksponencijalnu funkciju** sa:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

**Propozicija 1.1.5.** Za autonomni sustav, ( $u = 0$ ):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

rješenje je dano s  $x(t) = e^{At}x_0$ ,  $t \geq 0$ .

**Definicija 1.1.6.** Sustav

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

je **interno stabilan** ako za sve  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  vrijedi  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

**Definicija 1.1.7.** Kažemo da je matrica  $A \in M_n$  **Hurwitzova** ako je  $\Re(\lambda) < 0$  za sve svojstvene vrijednosti matrice. Ovdje s  $\Re(\lambda)$  označavamo realni dio kompleksnog broja  $\lambda$ .

**Propozicija 1.1.8.** Sustav (1.2) je interno stabilan ako i samo ako je matrica  $A$  Hurwitzova.

**Propozicija 1.1.9.** Rješenje sustava ODJ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

dano je sa

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.3)$$

**Propozicija 1.1.10.** Neka je dan sustav  $G = (A, B, C, D)$ . Tada je preslikavanje  $u \mapsto y$  dano sa

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + (g * u)(t) + Du(t), \quad (1.4)$$

gdje smo sa  $g$  označili funkciju  $g(t) = Ce^{At}B$ , a  $g * u$  označava konvoluciju funkcija  $g$  i  $u$ .

*Dokaz.* Primijenimo rješenje (1.3) na preslikavanje  $u \mapsto y$  i dobivamo

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau + Du(t) \\ &= Ce^{At}x_0 + (g * u)(t) + Du(t). \end{aligned}$$

□

Opširan pregled pojmova i rezultata teorije upravljanja može se pronaći u [5] i [25].



## 1.2 Frekvencijska domena

### Funkcija prijenosa

**Definicija 1.2.1.** *Laplaceova transformacija funkcije  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je preslikavanje*

$$s \mapsto \mathcal{L}(f)(s) = \hat{f}(s) := \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad s \in \mathbb{C}.$$

**Napomena 1.2.2.** *Općenito kod ovakve definicije ostaje pitanje konačnosti integrala iz definicije. Ovdje se uzima da je domena od  $\hat{f}$  skup svih  $s \in \mathbb{C}$  za koje integral konvergira.*

**Primjer 1.2.3.** *Kada na sustav (1.1) djelujemo Laplaceovom transformacijom dobivamo:*

$$\left. \begin{aligned} s\hat{x}(s) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}(s) = (sI - A)^{-1} B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D)\hat{u}(s). \end{cases}$$

Pritom preslikavanje  $\hat{u} \mapsto \hat{y}$  označavamo sa

$$\hat{y}(s) = \hat{G}(s)\hat{u}(s). \quad (1.5)$$

**Definicija 1.2.4.** *Za sustav  $G = (A, B, C, D)$  definiramo pripadnu funkciju prijenosa kao*

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1} B + D. \quad (1.6)$$

**Napomena 1.2.5.** *Uočimo da primjenom Laplaceove transformacije na izraz iz propozicije 1.1.10 možemo i alternativno doći do formule (1.5). Naime, uzmemo  $x(0) = 0$  pa primijenimo Laplaceovu transformaciju na funkciju  $g$ . Tada zbog  $\hat{g}(s) = \mathcal{L}(Ce^{At}B)(s) = C(sI - A)^{-1} B$ , dobivamo isti izraz.*

### Prostor $\mathcal{H}_\infty$ i $H_\infty$ norma

Općenito, nije od značajnog interesa promatrati rješenje  $y$  za neki specifični ulazni signal  $u$ . Značajnije je promatrati samo preslikavanje  $u \mapsto y$  te promatrati kako se ponaša  $y$  za cijelu klasu ulaza  $u$ . Jedan od pristupa je mjerenje  $H_\infty$  norme sustava  $G = (A, B, C, D)$ .

**Definicija 1.2.6.** *Za funkcije  $F$  u prostoru*

$$\mathcal{H}_\infty = \left\{ F : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^{m \times l} : F \text{ je analitička, } \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \bar{\sigma}(F(\lambda)) \leq \infty \right\}$$

definiramo  $H_\infty$  normu sa

$$\|F\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \bar{\sigma}(F(\lambda)).$$

Pritom je  $\mathbb{C}^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq 0\}$  te je  $\bar{\sigma}(\cdot)$  najveća singularna vrijednost matrice.

**Napomena 1.2.7.** Može se pokazati da se jednakost u definiciji postiže upravo na imaginarnoj osi,  $\sup_{\lambda \in \mathbb{C}^+} \bar{\sigma}(F(\lambda)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(F(i\omega))$ .

Izraz  $F(i\omega)$  zovemo **frekvencijski odziv** za frekvenciju  $\omega$ .

**Napomena 1.2.8.** Neka je dan sustav  $G = (A, B, C, D)$  i  $\hat{G}$  pripadna funkcija prijenosa. Tada je  $H_\infty$  norma sustava  $G$  definirana sa  $\|G\|_\infty = \|\hat{G}\|_\infty$ .

Analogno, izraz  $\hat{G}(i\omega)$  zovemo **frekvencijski odziv sustava** za frekvenciju  $\omega$ .

**Napomena 1.2.9.** Neka je dan sustav  $G = (A, B, C, D)$ . Tada je pripadna funkcija prijenosa  $\hat{G} \in \mathcal{H}_\infty$  ako i samo ako je matrica  $A$  Hurwitzova.

Norma  $H_\infty$  mjeri maksimalnu osjetljivost LTI sustava. Naime, što je veća vrijednost  $H_\infty$  norme LTI sustav je osjetljiviji i manje stabilan. Također,  $H_\infty$  norma je ključna metrika za procjenu kvalitete reduciranog modela, to jest  $H_\infty$  norma koristi se kod ocjene aproksimacije sustava velikih dimenzija sustavom manjih dimenzija.

Računanje  $H_\infty$  je prilično zahtjevno. Neki od rezultata pomoću kojih se računa  $H_\infty$  norma su sljedeći:

**Lema 1.2.10.** Neka je  $\gamma > 0$  i sustav  $G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$  takav da matrica  $A$  nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnoj osi.

Tada je  $\|G\|_\infty < \gamma$  ako i samo ako  $\bar{\delta}(D) < \gamma$  i Hamiltonova matrica

$$H = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B^* \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{bmatrix}$$

nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnoj osi. Pritom je  $R = \gamma^2 I - D^*D$ .

Ovaj rezultat otkriva pristup za računanje  $H_\infty$  norme. Naime, pomoću metode bisekcije, teoretski bi se mogla naći proizvoljno dobra aproksimacija  $H_\infty$  norme. S druge strane zahtjev da matrica  $H$  nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnoj osi treba pažljivo numerički provjeravati.

**Teorem 1.2.11.** Neka je  $\gamma > 0$  i sustav  $G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$  takav da matrica  $A$  nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnoj osi.

Tada je  $\|G\|_\infty < \gamma$  ako i samo ako  $\bar{\delta}(D) < \gamma$  i Riccatijeva jednadžba

$$A^*X + XA + (XB + C^*D)(\gamma^2 I - D^*D)^{-1}(B^*X + D^*C) + C^*C = 0$$

ima nenegativno rješenje  $X$ ,  $X = X^*$  takvo da je matrica  $A + B(\gamma^2 I - D^*D)^{-1}(B^*X + D^*C)$  Hurwitzova.

**Lema 1.2.12** (Ograničena realna lema). *Neka je  $\gamma > 0$  i sustav  $G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ .*

*Sljedeće je ekvivalentno:*

- i.) *Matrica  $A$  je Hurwitzova i  $\|G\|_\infty < \gamma$ .*
- ii.) *Postoji simetrična pozitivno definitna matrica  $P > 0$  takva da vrijedi linearna matricna nejednakost*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

Dokaz teorema 1.2.11, leme 1.2.10 i leme 1.2.12 može se pogledati u [25].

Riccatijeva jednadžba je nelinearna matricna jednadžba. Rješavanje linearne matricne nejednakosti je područje semidefinitne optimizacije. Rješavanje Riccatijevih jednadžbi ili linearnih matricnih nejednakosti je numerički zahtjevno samo po sebi, a povećanje dimenzije sustava rješavanje čini još kompleksnijim i sporijim.

Postoje brojni pokušaji da se računanje  $H_\infty$  norme učini numerički manje zahtjevnim i vremenski efikasnijim. Neki od recentnijih algoritama dani su u [3] i [1].



# Poglavlje 2

## Uvod u teoriju grafova

### 2.1 Općenito o grafovima

**Definicija 2.1.1.** *Usmjeren težinski graf* dan je kao trojka  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{w_{j,k}\}_{j,k=1}^n)$ , gdje je  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$  neprazan skup vrhova,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  skup bridova i  $w_{j,k} \geq 0$  su težine bridova. Tražimo da vrijedi  $w_{j,k} > 0$  ako i samo ako  $(v_j, v_k) \in \mathcal{E}$ .

Kažemo da su brid  $e \in \mathcal{E}$  i vrh  $v \in \mathcal{V}$  **incidentni** ako brid  $e$  izlazi iz vrha  $v$ , to jest ako postoji vrh  $\hat{v} \in \mathcal{V}$  takav da je luk  $e = (v, \hat{v}) \in \mathcal{E}$ .

**Definicija 2.1.2.** Neka je dan skup **susjeda** vrha  $i \in \mathcal{V}$  kao  $N_i = \{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . Za usmjereni graf  $G$  definiramo **Laplaceovu matricu**  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kao:

$$L = [l_{ij}], \quad l_{ij} = \begin{cases} -w_{ij}, & j \in N_i, \\ \sum_{k \in N_i} w_{ik}, & j = i, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

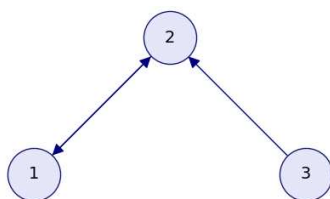
**Napomena 2.1.3.** Ova definicija može se primijeniti i za neusmjereni graf. U tom slučaju zahtijevamo  $w_{j,k} = w_{k,j}$ . Tada je Laplaceova matrica neusmjerenog grafa simetrična i pozitivno definitna. Za usmjeren graf je općenito:  $w_{j,k} \neq w_{k,j}$ .

**Napomena 2.1.4.** Ekvivalentno, za graf  $G$  mogu se uvesti **matrica susjedstva**  $A$  i **in-degree matrica**  $D$ . Matrica  $A$  definira se kao  $n \times n$  matrica čiji su stupci i retci indeksirani po vrhovima te je na poziciji  $a_{ij} = w_{ij}$  ako je  $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , a nula inače. Matrica  $D$  definira se kao  $n \times n$  dijagonalna matrica koja na poziciji  $d_{ii}$  ima sumu  $i$ -tog retka matrice  $A$ . Tada se Laplaceova matrica grafa  $G$  može definirati kao  $L := D - A$ .

Laplaceova matrica na dijagonali prikazuje stupanj pojedinog vrha, a na vandijagonalnim elementima prikazane su težine pojedinog brida.

**Primjer 2.1.5.** *Ilustrirajmo Laplaceovu matricu na jednostavnom primjeru grafa  $G_1 = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , gdje su  $\mathcal{V} = \{1, 2, 3\}$  i  $\mathcal{E} = \{(1, 2), (3, 2), (2, 1)\}$  prikazanog na slici 2.1. Tada je*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 2.1: Primjer grafa  $G_1$ .

Kao što vidimo, za usmjereni graf Laplaceova matrica  $L$  ne mora biti simetrična.

Općenito za grafove uvodimo pojam *povezanosti* i *komponenti povezanosti*. Za definiciju povezanosti nužno je uvesti pojmove *šetnje* i *puta*, slično kao u [13] i [8].

**Definicija 2.1.6.**

- i.) **Šetnja** je niz vrhova i njima incidentnih lukova  $v_{i_1} e_{j_1} v_{i_2} \dots v_{i_{N-1}} e_{j_{N-1}} v_{i_N}$ .
- ii.) Luk  $e_{j_k}$  nazivamo **direktnim** lukom šetnje ako je  $(v_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in \mathcal{E}$ , a ako je  $(v_{i_{k+1}}, v_{i_k}) \in \mathcal{E}$  onda ga nazivamo **obrnutim**.
- iii.) **Put** je šetnja u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti, osim eventualno prvog i zadnjeg. Direktni put između vrhova  $v_i$  i  $v_j$  označavat ćemo sa  $v_i \rightsquigarrow v_j$ .
- iv.) **Ciklus** je put u kojem su prvi i zadnji vrh jednaki.
- v.) Kažemo da je graf **povezan** ako za svaka dva vrha postoji put među njima.

**Definicija 2.1.7.** Podgraf  $(\mathcal{V}', \mathcal{E}')$  grafa  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  je graf u kojemu su  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$  i  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  te vrijedi da su za svaki brid  $e \in \mathcal{E}'$  njegovi vrhovi  $v_{e_1}, v_{e_2} \in \mathcal{V}'$ .

Za neusmjereni graf postoji veza između broja komponenti povezanosti i jezgre Laplaceove matrice (vidi [22]):

**Teorem 2.1.8.** *Neka je dan neusmjereni graf  $G$  te neka je  $L$  njegova Laplaceova matrica. Tada je algebarska kratnost svojstvene vrijednosti nula jednaka broju komponenti povezanosti neusmjerenog grafa  $G$ .*

Drugim riječima, za povezan graf  $G$  nula je u spektru od  $L$  i ima algebarsku kratnost 1.

## 2.2 Poblže o usmjerenim grafovima

Općenito se Laplaceova matrica  $L$  usmjerenog grafa  $G$  može zapisati u formi  $M = D - DS$  gdje je  $D$  prikladno odabrana nenegativna dijagonalna matrica, a  $S$  je stohastička matrica. Također, za bilo koju takvu matricu oblika  $M = D - DS$ , vrijedi da su algebarska i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti nula jednake [4].

Štoviše, postoji veza između jezgre Laplaceove matrice  $L$  i strukture grafa iskazana u teoremu 2.2.4.

Uvedimo nekoliko pojmova kako bismo mogli iskazati taj teorem.

**Definicija 2.2.1.** *Neka je  $G$  usmjeren težinski graf.*

- i.)  $G$  je **jako povezan** ako za svaki uređeni par vrhova  $(v_i, v_j)$  postoji direktan put  $v_i \rightsquigarrow v_j$ .
- ii.)  $G$  je **jednostrano (eng. unilaterally) povezan** ako za svaki uređeni par vrhova  $(v_i, v_j)$  postoji direktan put  $v_i \rightsquigarrow v_j$  ili  $v_j \rightsquigarrow v_i$ .
- iii.)  $G$  je **slabo povezan** ako je pripadni neusmjereni graf povezan.
- iv.)  $G$  **nije povezan** ako nije slabo povezan.
- v.) Podgraf koji je jako povezan nazivamo **jako povezana komponenta**.

Proučavanje nepovezanog grafa svodi se na proučavanje svake komponente zasebno. Stoga su slabo povezani usmjereni grafovi najopćenitija struktura za proučavanje.

Uvedimo dodatne pojmove kako bi se opisalo pojedine podgrafove.

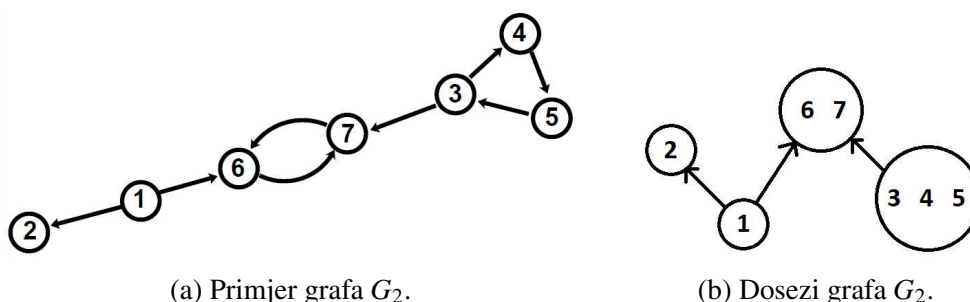
**Definicija 2.2.2.**

- i.) Za vrh  $i \in \mathcal{V}$  definiramo **dostižni skup (eng. reachable set)**  $R(i) = \{j \in \mathcal{V} : i \rightsquigarrow j\}$ .
- ii.) **Doseg**  $R$  je najveći dostižni skup ili najveći jednostrano dostižni skup.
- iii.) **Kabala (eng. cabal)**  $B \subseteq R$  je skup vrhova iz kojih se dostiže cijeli doseg  $R$ , to jest  $B = \{j \in R : \text{za svaki vrh } k \in R \text{ postoji } j \rightsquigarrow k\}$ . Ako  $R$  sadrži samo jedan vrh, taj vrh nazivamo **korijen**.

Neka su sa  $R_1, \dots, R_k$  označeni dosezi grafa  $G$ .

- iv.) Za svaki doseg  $R_i$  definiramo **ekskluzivni dio** dosega  $R_i$  kao skup  $H_i = R_i \setminus \bigcup_{j \neq i} R_j$ .
- v.) Slično, definiramo **zajednički dio** dosega  $R_i$  kao skup  $C_i = R_i \setminus H_i$ .

**Primjer 2.2.3.** Pogledajmo primjer grafa  $G_2$  sa slike 2.2a preuzetoga iz [24]: Ovdje svaki doseg ima jednu nepraznu kabalu. Graf  $G_2$  ima dva dosega  $R_1 = \{1, 2, 6, 7\}$  i  $R_2 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  (vidi sliku 2.2b). Ekskluzivni dijelovi su  $H_1 = \{1, 2\}$ ,  $H_2 = \{3, 4, 5\}$ . Kabale su  $B_1 = \{1\}$ ,  $B_2 = \{3, 4, 5\}$ . Zajednički dijelovi su  $C_1 = C_2 = \{6, 7\}$ .

(a) Primjer grafa  $G_2$ .(b) Dosezi grafa  $G_2$ .Slika 2.2: Prikaz grafa  $G_2$  i njegovih dosega.

Postoji veza između jezgre Laplaceove matrice usmjerenog grafa  $L$  i broja dosega u usmjerenom grafu [4]:

**Teorem 2.2.4.** *Neka je dan usmjereni graf  $G$ . Tada su algebarska i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti nula jednake broju dosega.*

## 2.3 Nekoliko tipova grafova korištenih za testiranje

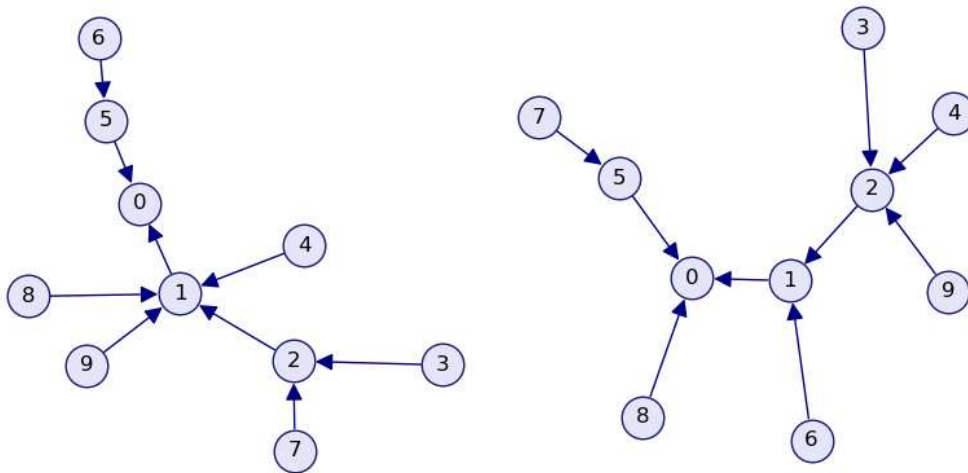
U našem radu koristili smo ugrađene generatore koje nudi *Python* biblioteka *NetworkX* [7] za generiranje nekoliko vrsta usmjerenih grafova:

- `gn_graph`
- `gnr_graph`
- `gnc_graph`
- `random_k_out_graph`
- `scale_free_directed_graph`.

### **gn\_graph**

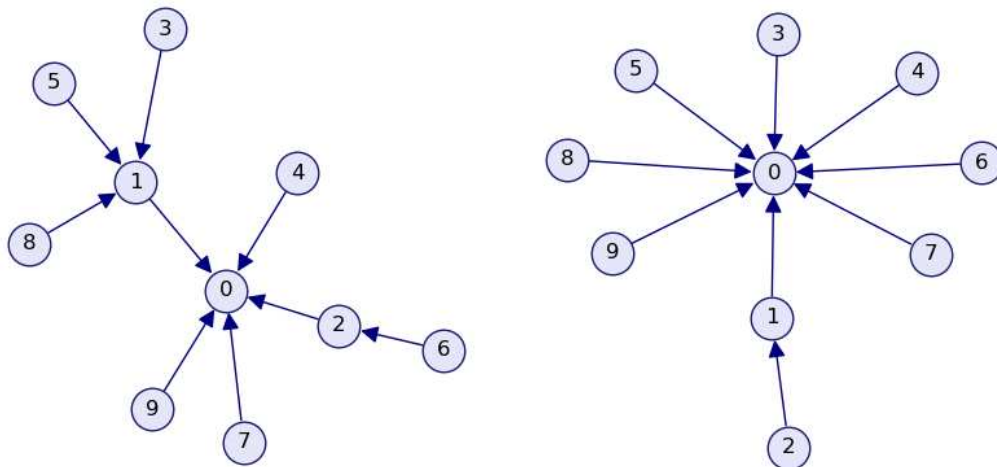
Generator `gn_graph` vraća usmjereni graf rastuće mreže (eng. *growing network GN*) s  $n$  vrhova. GN graf nastaje tako da dodajemo jedan po jedan vrh tako da ga povežemo sa nekim već kreiranim vrhom. Već prisutnim vrhovima pridružene su vjerojatnosti ovisne o stupnju vrha. Dobiveni graf uvijek je usmjereni stablo. Detaljniji opis dan je u članku [10]. Na slici 2.3 nalaze se dva *gn\_grafa*.



Slika 2.3: Prikaz dva različita *gn\_grafa*.

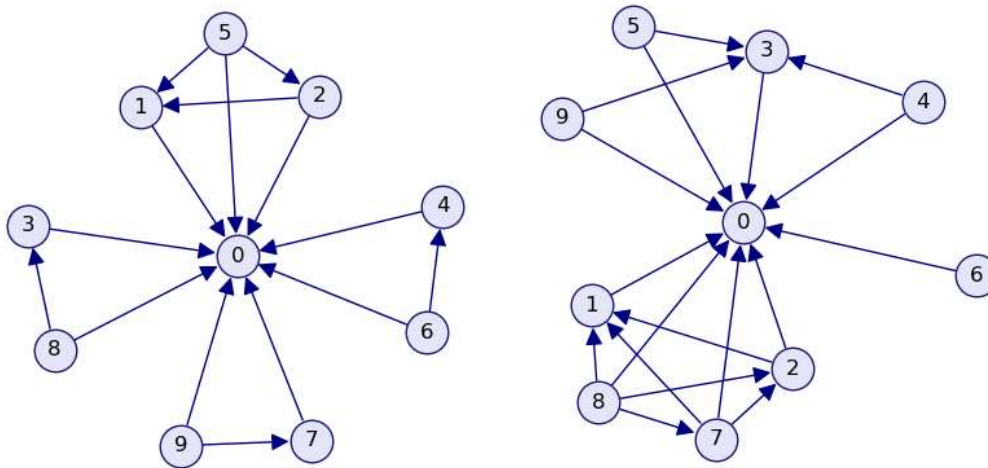
### **gnr\_graph**

Generator `gnr_graph` vraća usmjereni graf rastuće mreže s preusmjeravanjem (eng. *growing network with redirection* GNR) sa  $n$  vrhova i vjerojatnosti preusmjerenja  $p$ . GNR graf nastaje tako da dodajemo jedan po jedan vrh tako da ga povežemo sa nekim već kreiranim vrhom. Vrh koji se gađa se bira uniformno slučajno. S vjerojatnosti  $p$  brid se preusmjeri sa gađanog vrha na nekog njegovog sljedbenika. Dobiveni graf uvijek je usmjereni stablo. Detaljniji opis dan je u članku [10]. Na slici 2.4 nalaze se dva *gnr\_grafa*.

Slika 2.4: Prikaz dva različita *gnr\_grafa*.

### **gnc\_graph**

Generator `gnc_graph` vraća usmjereni graf rastuće mreže s kopiranjem (eng. *growing network with copying* GNC) sa  $n$  vrhova. GNC graf nastaje tako da dodajemo jedan po jedan vrh tako da ga povežemo sa nekim već kreiranim vrhom  $m$  i povežemo novi vrh sa sljedbenicima od  $m$  (vrh  $v$  je sljedbenik od  $m$  ako  $m \rightsquigarrow v$ ). Vrh koji se gađa se bira uniformno slučajno. Detaljniji opis dan je u članku [11]. Na slici 2.5 nalaze se dva *gnc\_grafa*.

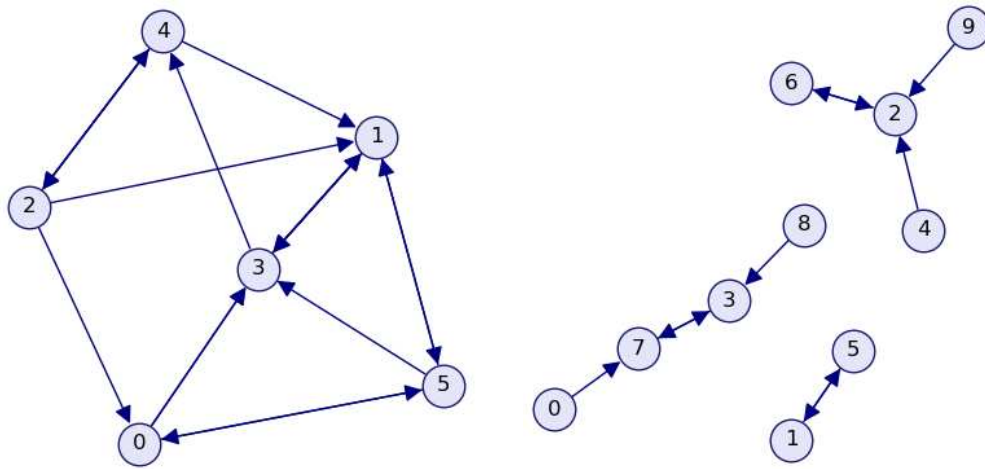


Slika 2.5: Prikaz dva različita *gnc\_grafa*.

### **random\_k\_out\_graph**

Generator `random_k_out_graph` vraća slučajni  $k$ -out graf sa preferencijalnim vezanjem. Nastali graf ne mora biti povezan (vidi sliku 2.6b. Detaljniji opis dan je u članku [18]. Na slici 2.6 nalaze se dva *random\_k\_out\_grafa*.  $k$ -out graf nastaje ovim algoritmom:

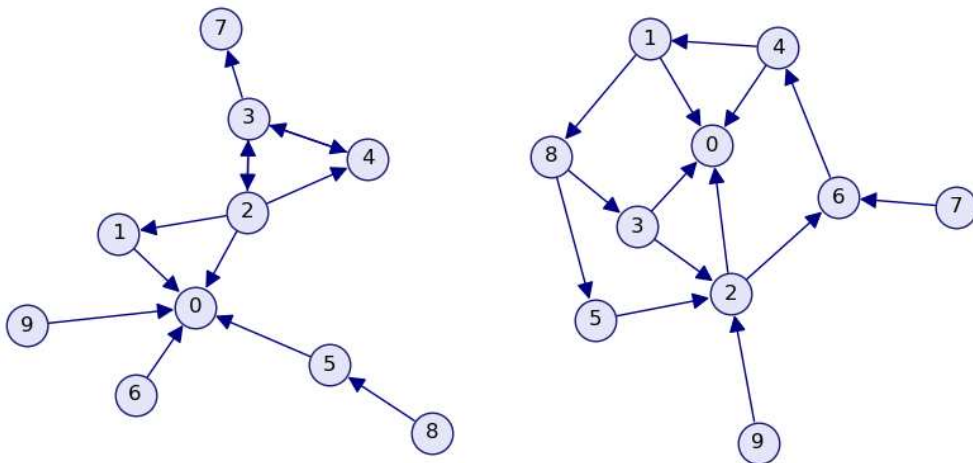
1. Započne se s praznim usmjerenim grafom i postavi da svaki vrh ima težinu  $\alpha$ .
2. Odabere se vrh  $u$  i pridruži mu se izlazni stupanj manji od  $k$ . Izlazni stupanj se bira uniformno slučajno.
3. Odabere se vrh  $v$  sa slučajnosti proporcionalnoj njegovoj težini.
4. Dodaje se usmjereni brid  $(u, v)$  i poveća se težinu vrha  $v$  za jedan.
5. Ako svi vrhovi imaju izlazni stupanj stane se, inače se vraća na korak 2.

(a) *random\_3\_out\_graf*.(b) *random\_1\_out\_graf*.

Slika 2.6: Prikaz dva različita *random\_k\_out\_grafa*,  $k \in \{1, 3\}$ .

### scale\_free\_directed\_graph

Na slici 2.7 nalaze se dva *scale\_free\_directed\_grafa*. Ovi grafovi modeliraju stvarne mreže u kojima nekoliko vrhova ima značajno veći broj bridova, dok većina vrhova ima svega nekoliko bridova. Iz konstrukcije proizlazi da kako mreža raste, novi vrhovi preferiraju povezivanje s postojećim vrhovima visokog ulaznog stupnja, što rezultira pojavom malog broja vrhova s visokim stupnjem, koji se nazivaju *hubovi*.



Slika 2.7: Prikaz dva različita *scale\_free\_directed\_grafa*.

Generator za `scale_free_directed_graph` koji se nalazi biblioteci *NetworkX* kreira multigraf, to jest graf koji može imati petlje i višestruke bridove između vrhova. Kako bi se kreirao usmjereni graf, a ne multigraf, izvorni kod iz *NetworkX* prepravljen je uz pomoć alata *ChatGPT* [17] kako bi generator vratio usmjereni graf bez petlji.

Generator za `scale_free_directed_graph` izgleda ovako:

```
import random
def scale_free_directed_graph(n, alpha=0.41, beta=0.54, gamma=0.05,
                             delta_in=0.2, delta_out=0, seed=None):
    G = nx.DiGraph()
    G.add_node(0)
    nodes = list(G.nodes())
    cursor = 0
    random.seed(seed)
    while len(G) < n:
        r = random.random()
        if r < alpha:
            v = cursor
            cursor += 1
            w = random.choice(nodes)
        elif r < alpha + beta:
            v = random.choice(nodes)
            w = random.choice(nodes)
        else:
            v = random.choice(nodes)
            w = cursor
            cursor += 1
        if v != w and not G.has_edge(v, w):
            G.add_edge(v, w)
        nodes = list(G.nodes())
    return G
```

# Poglavlje 3

## Uvod u teoriju multiagentnih sustava

### 3.1 Općenito o multiagentnim sustavima

U ovom poglavlju dat ćemo kratki opisni pregled teorije multiagentnih sustava (MAS) kao u [12]. U drugom dijelu poglavlja ukratko će se predstaviti matematički zapis za sporazumni (eng. consensus) protokol koji se primijenio u ovom radu, a opisan je u [16].

Znanost o mrežama ima široku primjenu u inženjerstvu i raznim znanstvenim disciplinama. Njeni koncepti poput slučajnih i međusobno povezanih mreža pojavljuju se u istraživanjima socijalnih mreža, statističkoj fizici, mrežama senzora, ekonomiji te multiagentnoj koordinaciji i upravljanju. Interes za znanost o mrežama ima dvojak uzrok.

S jedne strane u brojnim disciplinama - poput biologije i znanosti o materijalima - postalo je ključno steći dublje razumijevanje kako djelovanje na nižoj razini, to jest među elementima, utječe na funkcionalnost cjelokupnog višeslojnog sustava.

S druge strane, tehnološki napredak olakšao je sposobnost sinkroniziranja umreženih sustava - poput sustava s više vozila i mreže senzora. Osnovna pretpostavka u znanosti o mrežama je da struktura i svojstva mreže utječu na dinamička svojstva nižih razina.

Projektirane distribuirane multiagentne mreže, poput distribucijskih robota i mobilnih mreža senzora, postavile su nekoliko izazova za sistemsko-teoretsku analizu i sintezu. Agenti u takvim mrežama moraju usklađeno obavljati zadatke kako bi se postigao globalni cilj. Pritom imaju ograničen pristup računanju, međusobnoj komunikaciji i sposobnosti opažanja.

#### Primjeri MAS-a

Neki primjeri MAS-a su model boids, senzorna, socijalna i energetska mreža.

**Primjer 3.1.1.** *Model boids opisivanju i oponašanju leta jata ptica. Nastao je u kontekstu računarske grafike i animacije. Model boids ilustrira osnovno svojstvo brojnih MAS-a:*

*pokretnih agenata zajednički rješava globalni zadatak koristeći pravila lokalne interakcije (eng. using local interaction rules).*

*Model pokušava opisati kako životinje i ptice usklađuju svoje kretanje unutar krda, jata, stada i rojeva. U ovom računalnom modelu, svaki agent dizajniran je tako da reagira na susjednog člana jata koristeći protokol od tri pravila.*

*Pravila su **razmicanje** (izbjegavanje sudara sa susjedom), **usklađivanje** (uskладiti vlastitu brzinu sa brzinom susjeda) i **povezanost** (izbjeći odvajanje od susjeda). Specijalan slučaj je kada se agenti kreću konstantnom brzinom i usklađuju svoj smjer ovisno o najbližem susjedu.*

**Primjer 3.1.2. Bežična mreža senzora** sastoji se od autonomnih uređaja raspoređenih u prostoru koji međusobno nadgledaju fizička stanja ili stanje okoline, poput temperature, zvukova, vibracija i tlaka. Svaki senzor u mreži opremljen je uređajem za bežičnu komunikaciju i nekim izvorom napajanja - na primjer baterijom.

*Svaki senzor razmjenjuje informacije svojih lokalnih mjerenja s ostalim senzorima u mreži kako bi se dostigla točna procjena varijable koju se prati.*

**Primjer 3.1.3. Socijalne mreže** sastoje se od pojedinaca i organizacija među kojima postoje određene međuovisnosti. Veze se uspostavljaju na različitim područjima. Na primjer jezične, kulturalne, financijske, prijateljske i poslovne veze. U ovom području oduvijek se poseban značaj davao samoj strukturi mreže, jer se smatra da struktura društvene mreže ima temeljni značaj za razumijevanje dinamika društvenih mreža.

**Primjer 3.1.4. Energetske mreže** su složeni sustavi velikih razmjera koji se koriste za dovođenje električne i mehaničke energije od izvora putem distribucijske mreže do korisnika. Energetske mreže predstavljaju jedan od najkorisnijih umreženih dinamičkih sustava. Potreba da se poveća efikasnost proizvodnje i iskoristivost energije dovela je do posebnih rješenja kao što su "smart grid" sustavi.

## Značajke MAS-a

Navedeni primjeri iz različitih disciplina dijele nekoliko važnih značajki sa ostalim umreženim MAS-ima. Ukratko, ti se sustavi sastoje od:

- (1) dinamičkih jedinica, koje ponekad imaju mogućnost odlučivanja te mogućnost primanja i odašiljanja informacija među sobom.
- (2) mreže za razmjenu signala, koja može biti ostvarena žičanim ili bežičnim protokolima u inženjerstvu, kemijskim reakcijama u biološkim sustavima i psihološkim i sociološkim interakcijama u društvenim mrežama.

Temeljno svojstvo umreženih sustava, koje ih razlikuje od sustava koji se tradicionalno proučavaju u teoriji upravljanja jest prisutnost mreže i utjecaj mreže na cjelokupni sustav.

## Statičke, dinamičke i slučajne mreže

Geometrija interakcija igra važnu ulogu u analizi i sintezi umreženog MAS-a neovisno o tome razmjenjuju li se informacije preko mreže ili aktivnim opažanjem te neovisno o tome je li razmjena bežična, kemijska, fizička ili sociološka. Određivanje interakcijske geometrije i interakcijskog protokola je složen proces.

Ako se bridovi u grafu shvaćaju kao medij za razmjenu informacija među vrhovima na pripadnim bridovima, ta razmjena može biti usmjerena ili neusmjerena. Drugim riječima, moguće je da razmjena teče samo u jednom smjeru. Osim smjera kojim putuje razmjena informacija, promatraju se različiti oblici mreža koji se mogu podijeliti u tri grupe:

- **Statične mreže:** Bridovi su u ovim mrežama konstantni, to jest ne mijenjaju se u vremenu. Primjer takve mreže je elektroenergetska mreža.
- **Dinamičke mreže:** U ovim mrežama postoji mogućnost da neki bridovi nastaju i nestaju s protokom vremena. Drugim riječima, skup bridova je ovisan o vremenu. Bridovi se često prikazuju kao funkcije ovisne o stanju agenata u mreži. Primjer takvog sustava su pokretni roboti koji imaju senzore kratkog dometa. Bridovi nastaju kada se jedan robot nađe u dometu drugoga te nestaju kada jedan od njih izađe iz dometa drugoga.
- **Slučajne mreže:** Ove mreže predstavljaju specijalan slučaj dinamičkih mreža u kojem je postojanje nekog brida dano vjerojatnosnom distribucijom, a ne deterministički ili na temelju geometrijskih uvjeta opažanja.

Može se uočiti da analiza svakog od ovih tipova mreža zahtijeva različite alate. Za statične mreže analiza se oslanja na teoriju LTI sustava. Analiza dinamičkih mreža vodi na korištenje Ljapunovljeve teorije stabilnosti. Slučajne mreže proučavaju se uz pomoć vjerojatnosnih metoda.

## Protokoli razmjene informacija

U matematičkoj analizi MAS-a često se pretpostavlja idealizirani model razmjene informacija kao što je odašiljanje. Dinamika agenata pojednostavljena je te se opisuje pomoću jednostrukog i dvostrukog integratora ili pomoću LTI sustava. U stvarnom svijetu, umreženi sustavi često se sastoje od agenata s netrivialnim dinamikama koji razmjenjuju informacije pomoću složenih interakcijskih protokola.

Primjeri protokola razmjene informacija koji se često koriste su:

- **Konsenzus/sporazum/usklađivanje:** agenti dolaze do globalnog dogovora (eng. agreement) na temelju vrijednosti stanja

- **Formacija:** agente se dovodi u željeni geometrijski oblik
- **Zadatak:** raspoređivanje zadataka među nekoliko agenata
- **Pokrivenost:** maksimalno širenje mreže bez da dođe do razdvajanja među agentima, a da pritom cijelo područje ostane pokriveno
- **Rojenje (eng. flocking/swarming):** agenti oponašaju pojave iz prirode poput leta ptica u jatima ili leta roja pčela
- **Društvene mreže i igre:** analiza utjecaja međudjelovanja na ishode igara i društvene interakcije
- **Rasprostranjena procjena (eng. distributed estimation):** uspostavljanje grupe senzora za skupnu procjenu određenog fenomena od posebnog interesa

## 3.2 Problem sporazuma na grafu

Ovaj odjeljak bazira se na radu [16] i knjizi [21].

Neka je dan težinski usmjeren graf  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{w_{j,k}\}_{j,k=1}^n)$  kao u definiciji 2.1.1. Dodatno, bilo koji podskup vrhova  $J \subseteq \mathcal{V}$  nazivat ćemo **klaster**.

**Definicija 3.2.1.** Neka je sa  $x_i \in \mathbb{R}$  označena vrijednost u vrhu  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Izraz  $G_x = (G, x)$  gdje je  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  nazivat ćemo **mreža (algebarski graf)** sa vrijednosti  $x \in \mathbb{R}^n$  i **topologijom (tokom informacija)**  $G$ .

Kažemo da se vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  **slažu** ako  $x_i = x_j$ .

Kažemo da su vrhovi postigli **konsenzus/sporazum** ako vrijedi

$$x_i = x_j, \text{ za svaki } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Kadgod vrhovi postignu sporazum, zajednička vrijednost za sve vrhove  $x_i$  naziva se **vrijednost grupne odluke (eng. group decision value)**.

**Napomena 3.2.2.** Vrijednost  $x_i$  za vrh  $v_i$  može označavati neku fizikalnu veličinu poput položaja, temperature, napona itd.

**Definicija 3.2.3.** Neka je svaki vrh grafa **dinamički agent** određen dinamikom

$$\dot{x}_i = f(x_i, u_i), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

**Dinamički graf/dinamička mreža** je dinamički sustav sa stanjem  $(G, x)$  u kojem se vrijednosti  $x$  postupno razvijaju u skladu sa **mrežnom dinamikom**  $\dot{x} = F(x, u)$ , gdje je s  $F$  označena matrica  $F = [f(x_1, u_1), \dots, f(x_n, u_n)]^T$ .



**Definicija 3.2.4.** Neka je  $\chi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  funkcija u varijablama  $x_1, \dots, x_n$  i neka je  $s a = x(0)$  označen početni položaj sustava.

$\chi$  - **konsenzusni problem** u dinamičkom grafu je distribuirani način računanja  $\chi(a)$  primjenjujući ulaze  $u_i$  koji ovise samo o položaju vrha  $v_i$  i njegovih susjeda.

Kažemo da je povratna sprega

$$u_i = k_i(x_{j_1}, \dots, x_{j_{m_i}}) \quad (3.1)$$

**protokol** sa topologijom  $G$  ako klaster vrhova  $J_i = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_{m_i}}\}$  zadovoljava svojstvo  $J_i \subseteq \{v_i\} \cup \mathcal{N}_i$ , gdje je  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}\}$  skup susjeda vrha  $i$ . Dodatno, ako je  $\text{card}(J_i) < n$  za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$ , kažemo da je protokol (3.1) **distribuirani protokol**.

Navedimo nekoliko primjera protokola  $u_i$ . Prva dva su predstavljena u [16], a treći u [21] i [20].

**Primjer 3.2.5.** Konsenzusni protokol  $u_i$  može biti linearan i zadan sa

$$u_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(x_i - x_j), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ovaj protokol uključuje  $n$  dinamičkih agenata koji su međusobno povezani vezama za razmjenu informacija. Brzina promjene svakog agenta određena je sumom relativnih položaja u odnosu na susjedne agente.

**Primjer 3.2.6.** Može se uzeti da u sustavu postoji kašnjenje  $\tau_{ij} > 0$  koje pripada bridu  $e_{ij}$ . U tom slučaju, sporazumni protokol dan je sa

$$u_i(t) = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} [x_i(t - \tau_{ij}) - x_j(t - \tau_{ij})].$$

**Primjer 3.2.7.** Primjer sporazumnog protokola drugog reda dan je sa:

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} [(x_i - x_j) - \gamma(\dot{x}_i - \dot{x}_j)].$$

Parametar  $\gamma$  opisuje čvrstoću spoja među različitim varijablama sustava poput položaja i brzine.



## Poglavlje 4

# Upravljanje multiagentnim sustavima

Struktura MAS-a na usmjerenom grafu algebarski je vrlo slična strukturi MAS-a na neusmjerenom grafu. U ovom odjeljku donosi se glavni rezultat iz [14] koji je bio motivacija za ovaj rad te je iskazan u teoremu 4.1.1. U odjeljku 4.2 prezentirat će se formalni izvod za usmjerene grafove. Želimo istražiti računanje maksimalnog utjecaja induciranog poremećaja na cjelokupni MAS. Poremećajem djelujemo na jednog ili više agenata. Utjecaji poremećaja na agente kvantificirati će se u smislu  $H_\infty$  norme. Vrijednost  $H_\infty$  norme predstavlja mjeru osjetljivosti MAS-a na poremećaj  $\omega$ . Preciznije, gledamo  $H_\infty$  normu preslikavanja  $\omega \mapsto \chi$ , što se svodi na računanje  $H_\infty$  norme funkcije prijenosa LTI sustava (4.5).

### 4.1 MAS na neusmjerenom grafu

U člancima [14] i [15], MAS modeliran je kao neusmjereni težinski graf gdje je svaki vrh/agent linearna ODJ drugog reda.

Neka je  $G$  neusmjereni težinski graf koji opisuje komunikacijsku strukturu MAS-a i  $L$  pripadna Laplaceova matrica. Dinamike agenata opisane su sa (4.2). Stabilizacija mreže izvršava se pomoću konsenzusnog protokola (4.3). Poremećaji kojima djelujemo na MAS modelirani su matricom  $E$ . Matrica  $E$  i parametri  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  opisani su u izvodu formule (4.4).

Može se pokazati da tada je funkcija prijenosa LTI sustava (4.4) pridružena MAS-u na neusmjerenom težinskom grafu dana s:

$$F_E(s) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} L^+ E, & s = 0, \\ \frac{1}{\gamma + is\alpha} VV^T (L - \mu(s) I_n)^{-1} E, & s \neq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

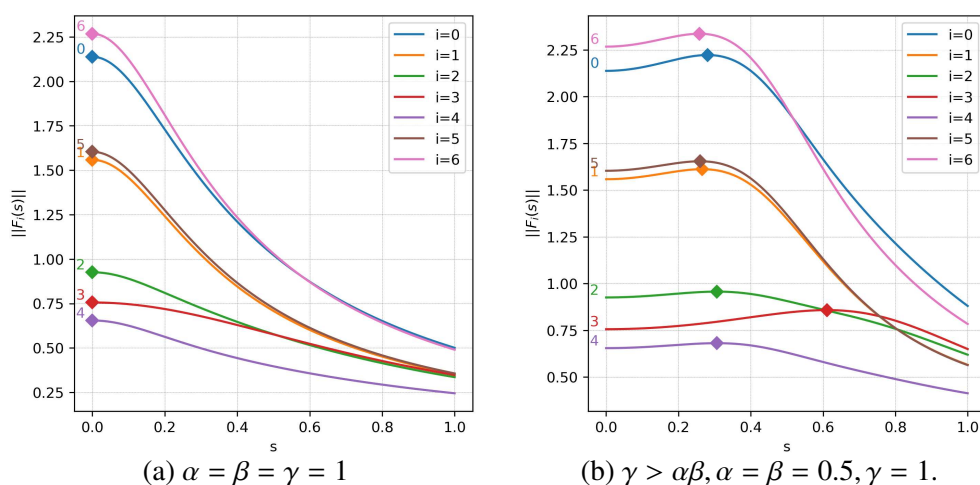
Ovdje je  $L^+$  Moore-Penroseov pseudoinverz od  $L$ , a funkcija  $\mu$  je dana s (4.13).

### Ključan rezultat

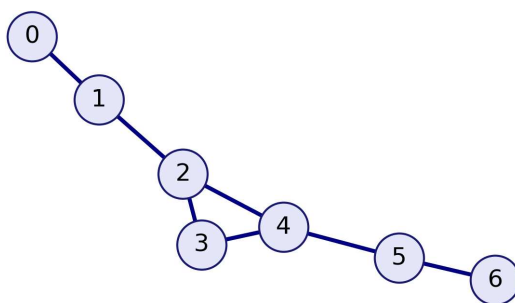
Glavni rezultat za MAS-e na neusmjerenom grafu uzima u obzir strukturu funkcije prijenosa (4.1) pridruženog LTI sustava. Može se pokazati da se  $H_\infty$  norma za veliku klasu MAS-a na neusmjerenim grafovima postiže u nuli, što bitno pojednostavljuje računanje  $H_\infty$  norme čak i za sustave puno većih dimenzija. Formalni iskaz dan je u sljedećem teoremu:

**Teorem 4.1.1.** *Neka je  $\gamma \leq \alpha\beta$  ili ( $\gamma > \alpha\beta$  i  $\|L\| \leq \frac{\beta^2}{2(\gamma-\alpha\beta)}$ ). Tada je za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$*

$$\|F_i\|_\infty = \bar{\sigma}(F_i(0)) = \|F_i(0)\|_2.$$



Slika 4.1: Preslikavanje  $s \mapsto \|F(s)\|_2$  za neusmjereni graf  $G_3$  sa slike 4.2.



Slika 4.2: Neusmjereni graf  $G_3$ .

Funkcija  $F_i$  je funkcija prijenosa sustava (4.5) kada na vrh  $i$  djelujemo smetnjom  $\omega_i$ . Drugim riječima, svakom vrhu  $i \in \mathcal{V}$  grafa  $G$  pridružimo sustav oblika (4.5) te računamo  $H_\infty$  normu pripadne funkcije prijenosa  $F_i$ . Dobivena vrijednost  $\|F_i\|_\infty$  predstavlja mjeru osjetljivosti MAS-a na smetnju  $\omega_i$ .

Teorem 4.1.1 pokazuje da je dovoljno izračunati normu funkcije prijenosa u nuli. Ovime se računanje  $H_\infty$  norme svelo na računanje Moore-Penroseovog pseudoinverza. Pseudoinverz Laplaciana za usmjerene grafove je važan objekt u mnogim disciplinama pa postoji obilje literature koje obrađuje načine za njegovo efikasno računanje, npr. [19], [9] i [2].

Na slici 4.1a vidimo oblik preslikavanja  $s \mapsto \|F_i(s)\|_2$  za neusmjereni graf sa slike 4.2 kada su zadovoljene pretpostavke teorema 4.1.1, a na slici 4.1b slučaj kada pretpostavke teorema 4.1.1 nisu zadovoljene.

## 4.2 MAS na usmjerenom grafu

U ovom odjeljku prikazat će se rigorozan pristup za računanje  $H_\infty$  norme za neusmjerene grafove. S obzirom da nije poznato gdje se postiže maksimum funkcije  $s \mapsto \|F_i(s)\|_2$ , cilj je razviti numerički efikasan pristup za računanje  $H_\infty$  norme funkcije  $F_i$ .

Iako se MAS s poremećajem  $\omega$  može prikazati kao LTI blok-sustav dimenzija  $2n \times 2n$  pokazuje se mogućim sve račune svesti na dimenziju Laplaceove matrice  $L$  grafa  $G$ . U ovom pristupu računanje  $H_\infty$  norme vodi na rješavanje niza sustava oblika  $Ax = b$ . Uz pomoć Schurove dekompozicije matrice  $A$ , sustav  $Ax = b$  svodimo na trokutasti sustav. Dodatno, ovisno o dimenziji jezgre Laplaceove matrice  $L$  grafa  $G$ , dimenzija samog trokutastog sustava smanjuje se na rješavanje trokutastog sustava veličine  $(n - k) \times (n - k)$ .

### Zapis reduciranog sustava

Neka je dan usmjeren graf  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \{w_{j,k}\}_{j,k=1}^n)$  kao u definiciji 2.1.1 te pripadna matrica  $L$  kao u definiciji 2.1.2. Neka  $k$  označava broj dosegâ u usmjerenom grafu  $G$ . Neka usmjereni graf  $G$  ima  $n$  vrhova, to jest  $n$  linearnih agenata s dinamikama:

$$\ddot{\chi} = -T_s \dot{\chi} + K_s u_i + \eta_i \omega_i, \quad T_s, K_s > 0, \quad (4.2)$$

gdje su  $\chi_i$ ,  $u_i$  i  $\omega_i$  skalarne funkcije, a  $\eta_i$  je faktor smetnje.

Funkcija  $\chi_i$  predstavlja stanje MAS-a,  $u_i$  predstavlja ulaz, a  $\omega_i$  predstavlja izvanjsku smetnju  $i$ -tog agenta,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Dinamika agenata (4.2) predstavlja realni dvostruki integrator.

Sinkronizacija mreže postiže se primjenom decentralizirane izlazne povratne sprege (eng. output-feedback), koja je spomenuta u primjeru 3.2.7, dane s:

$$u_i = -K \hat{C} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} \left( \begin{bmatrix} \chi_i \\ \dot{\chi}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \chi_j \\ \dot{\chi}_j \end{bmatrix} \right), \quad (4.3)$$

gdje su  $K > 0$  i  $\hat{C} = [c_1 \ c_2]$  sa  $c_1, c_2 > 0$ . Sa  $\mathcal{N}_i$  označili smo skup svih susjeda vrha  $i$ , to jest  $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : (j, i) \in \mathcal{E}\}$ .

Prirodna pretpostavka je da je pripadni neusmjereni graf povezan. Ako nije povezan, može se rastaviti na  $k$  samostalnih MAS-a, gdje  $k$  označava broj komponenti povezanosti.

Autori u [14] pretpostavljaju da smetnje  $\omega_i$  ne moraju biti međusobno nezavisne, stoga u skupu svih smetnji  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  pretpostavljaju da ih je  $k \in \{1, \dots, n\}$  različitih  $\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$ . Tada je  $[\omega_1, \dots, \omega_n]^T = H [\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}]^T$  gdje je  $H \in M_{nk}$  dana s

$$H_{jr} = \begin{cases} 1, & \omega_j = \omega_{i_r}, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, k. \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

Sa  $E = \text{diag}(\eta_1, \dots, \eta_n) H \in M_{nk}$  označena je matrica smetnji. Pretpostavlja se da je  $\eta_i \neq 0$  ako  $H_{ii} \neq 0$ , to jest ako se izvrši smetnja  $i$ -tog agenta, onda pripadna težina nije nula. Iz toga slijedi da je matrica  $E$  punog ranga.

Ako se iskoristi da je  $L$  Laplaceova matrica usmjerenog grafa koji pripada MAS-u dinamika zatvorene petlje (4.2) i (4.3) postaje

$$\ddot{\chi} + \underbrace{\left( T_s I_n + L K_s K c_2 \right)}_{:=\beta} \dot{\chi} + \underbrace{L K_s K c_1}_{:=\gamma} \chi = E \omega, \quad (4.4)$$

gdje su su  $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)^T$  i  $\omega = (\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n})^T$ .

Razlika u jednadžbama MAS-a na usmjerenom i neusmjerenom grafu sastoji se samo u Laplaceovoj matrici grafa  $L$ . U slučaju neusmjerenog grafa, matrica  $L$  je simetrična pozitivno definitna matrica, dok za usmjereni graf matrica  $L$  nije simetrična.

## Funkcija prijenosa MAS-a

U prvom koraku cilj je pomoću redukcije dinamike zatvorene petlje doći do formule za funkciju prijenosa  $F(s) = \tilde{C} (is - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}$ .

Gledamo slučaj kada su svi  $\omega_k, k = 1, \dots, n$  jednaki nula osim  $i$ -tog, pa matrica  $E$  ima oblik  $E = \omega_i$ . Tada se sustav 4.4 pomoću supstitucije  $x := (\chi, \dot{\chi})$  svodi na sljedeći LTI sustav:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_i \omega_i, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdje su matrice  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$  dane sa:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -\gamma L & -\beta I_n - \alpha L \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \\ B &= \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ e_i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Matrica  $L$  je pripadna Laplaceova matrica grafa  $G$ . Iz konstrukcije matrice  $A$  i teorema 2.2.4 slijedi da je  $0 \in \sigma(A)$  i da je algebarska kratnost od  $0$  jednaka  $k$ . Stoga pripadna funkcija prijenosa  $F_i(s) = C(is - A)^{-1}B_i$  nije u prostoru  $\mathcal{H}_\infty$ . Problem predstavlja činjenica da funkcija prijenosa  $F_i$  nije definirana u nuli s obzirom da se nula nalazi u spektru.

Napomenimo da se ovdje ne radi o specijalnom slučaju već se ova situacija često javlja u MAS-ima koji rade na principu usklađivanja. Naime, takvi sustavi teže k relativnom, a ne apsolutnom usklađivanju te dovode do usklađujuće mnogostrukosti (eng. consensus manifold), a ne do jedne točke ravnoteže.

Kako bismo uklonili nulu iz spektra, definirajmo matricu

$$W = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n-k) \times 2n}, \quad (4.7)$$

gdje matrica  $V \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$  razapinje ortogonalni komplement jezgre  $\text{Ker } L$  tako da vrijedi  $V^T V = I_k$ . Odabrat ćemo matricu  $V$  posebne strukture, preciznije odabrat ćemo je pomoću Schurove dekompozicije matrice  $L$ .

**Teorem 4.2.1. (Schurova dekompozicija)** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  i neka su  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  svojstvene vrijednosti od  $A$  u proizvoljnom poretku. Tada postoji unitarna matrica  $Z$  i gornje trokutasta matrica  $T$  tako da je  $A = ZTZ^*$  i  $T_{ii} = \lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ako je  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i ako su sve svojstvene vrijednosti od  $A$  realne, onda je  $T$  također realna i  $Z$  se može odabrati realna ortogonalna.*

*Zapis  $A = ZTZ^*$  zovemo Schurova dekompozicija od  $A$ , a matrica  $T$  se zove Schurova forma matrice  $A$ .*

Neka je sa

$$L = ZTZ^T \quad (4.8)$$

dana Schurova dekompozicija za Laplaceovu matricu usmjerenog grafa  $L$ . Gorenjetrokutastu matricu  $T$  biramo tako da se na prvih  $k$  dijagonalnih mjesta nalaze nule, pa uvodimo zapis  $Z = [V_0 \ V]$ ,  $V_0 \in M_{n,k}$ ,  $V \in M_{n,n-k}$ . Drugim riječima, u matrica  $V$  sastoji se od  $n - k$  stupaca matrice  $Z$  koji pripadaju nenul svojstvenim vrijednostima matrice  $L$ .

Uvođenjem supstitucije  $x = W\tilde{x}$ , reducirani LTI sustav dan je s:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}_i\omega_i, \\ y &= \tilde{C}\tilde{x}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdje je  $\tilde{A} = W^T A W$ ,  $\tilde{B}_i = W^T B_i$  i  $\tilde{C} = C W$ . Primjenom definicije matrice  $W$  (4.7), sustav (4.6) zapisujemo kao:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0_{(n-k) \times (n-k)} & V^T \\ -\gamma L V & -\beta I_n - \alpha L \end{bmatrix}, & \alpha, \beta, \gamma > 0, \\ \tilde{B}_i &= \begin{bmatrix} 0_{(n-k) \times 1} \\ e_i \end{bmatrix}, & \tilde{C} &= [V \ 0_{n \times n}]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Matrica  $\tilde{A}$  je Hurwitzova, a to je jako važno svojstvo trenutnog sustava jer garantira postojanje rješenja LTI sustava. Također, matrica  $\tilde{A}$  modelira dinamiku MAS-a u odnosu na relativne udaljenosti među agentima. Uočimo da je u ovom pristupu vektor stanja dimenzije  $2n - k$ .

### Izvod funkcije prijenosa reduciranog sustava

Cilj je doći do eksplicitne formule za funkciju prijenosa reduciranog LTI sustava

$F_i(s) = \tilde{C} (is - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_i$ . Najprije, za  $s \neq 0$  dobivamo da je

$$(is - \tilde{A})^{-1} = \begin{bmatrix} V^T \Phi(s)^{-1} (isI + \beta I + \alpha L) V & V^T \Phi(s)^{-1} \\ -\gamma \Phi(s)^{-1} LV & is \Phi(s)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

gdje je funkcija  $\Phi$  dana s

$$\Phi(s) = -s^2 I + is\beta I + is\alpha L + \gamma LVV^T.$$

Zbog (4.8), vrijedi  $L = LVV^T$ . Stoga funkciju  $\Phi$  možemo zapisati u obliku

$$\Phi(s) = (is\alpha + \gamma)(L - \mu(s)I), \quad (4.12)$$

gdje je funkcija  $\mu$  dana s

$$\mu(s) = \frac{s^2 - is\beta}{is\alpha + \gamma}. \quad (4.13)$$

Stoga je funkcija prijenosa reduciranog LTI sustava za  $s \neq 0$  dana s

$$\begin{aligned} F_i(s) &= \tilde{C} (is - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}_i \\ &= VV^T \Phi(s)^{-1} e_i, \quad s \neq 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

S obzirom da  $0 \in \sigma(L)$ , matrica  $\Phi(0)$  nije invertibilna.

Kako bismo dobili formulu za  $F_i(0) = \tilde{C} (-\tilde{A})^{-1} \tilde{B}_i$  prvo računamo inverz matrice  $-\tilde{A}$ .

Račun je isti kao u [15]. Izračunat ćemo blokove  $(-\tilde{A})^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{(n-k) \times (n-k)} & -V^T \\ \gamma LV & \beta I_n + \alpha L \end{bmatrix} &= I, \\ \begin{bmatrix} 0_{(n-k) \times (n-k)} & -V^T \\ \gamma LV & \beta I_n + \alpha L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= I. \end{aligned}$$



Raspisujemo po komponentama i dobivamo uvjete za matrice  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  i  $A_{22}$ :

$$\gamma A_{12} L V = I, \quad (4.15)$$

$$-A_{11} V^T + A_{12} (\beta I + \alpha L) = 0, \quad (4.16)$$

$$\gamma A_{22} L V = 0, \quad (4.17)$$

$$-A_{21} V^T + A_{22} (\beta I + \alpha L) = I, \quad (4.18)$$

$$-V^T A_{21} = I, \quad (4.19)$$

$$-V^T A_{22} = 0, \quad (4.20)$$

$$\gamma L V A_{11} + (\beta I + \alpha L) A_{21} = 0, \quad (4.21)$$

$$\gamma L V A_{12} + (\beta I + \alpha L) A_{22} = I. \quad (4.22)$$

Relacije (4.17) i (4.20) su zadovoljene ako  $A_{22} = 0$ . Iz (4.18) korištenjem da je  $V^T V = I$  dobivamo da je  $A_{21} = -V$ . Zbog toga odmah vrijedi (4.19). Iz (4.15) i (4.22) preostaju uvjeti za  $A_{12}$ :

$$\gamma A_{12} L V = I,$$

$$\gamma L V A_{12} = I.$$

Iz posljednje jednadžbe imamo da je

$$\gamma V^T L V A_{12} = V^T \implies A_{12} = \frac{1}{\gamma} (V^T L V)^{-1} V^T.$$

Konačno, iz formule za  $A_{12}$  i (4.16) slijedi:

$$A_{11} = \frac{1}{\gamma} (V^T L V)^{-1} V^T (\beta I + \alpha L) V.$$

Zbog  $L = L V V^T$  vrijedi (4.21). Na kraju, zaključujemo da je vrijednost funkcije prijenosa za  $s = 0$  jednaka

$$\begin{aligned} F_i(0) &= \begin{bmatrix} V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} (V^T L V)^{-1} V^T (\beta I + \alpha L) V & \frac{1}{\gamma} (V^T L V)^{-1} V^T \\ -V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\gamma} (V^T L V)^{-1} V^T e_i. \end{aligned} \quad (4.23)$$

### 4.3 Numerička implementacija

Iz izraza (4.14) i (4.24), slijedi formula za funkciju prijenosa  $F_i$ :

$$F_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} (V^T L V)^{-1} V^T e_i, & s = 0, \\ V V^T \Phi(s)^{-1} e_i, & s \neq 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

Preostaje iskoristiti strukturu Schurove dekompozicije matrice  $L = ZTZ^T$  iz (4.8) da se pojednostavi računanje inverza funkcije  $\Phi$ . Računamo:

$$\begin{aligned} F_i(s) &= \frac{1}{is\alpha + \gamma} VV^T (L - \mu(s)I)^{-1} e_i \\ &= \frac{1}{is\alpha + \gamma} VV^T Z(T - \mu(s)I)^{-1} Z^T e_i. \end{aligned}$$

Potom se iskoristi zapis  $Z = [V_0 \ V]$ ,  $V^T V = I$  te da su  $V^T$  i  $V_0$  ortogonalne, pa je  $VV^T Z = V [0_{n \times k} \ I]$ . Iz toga dobivamo

$$F_i(s) = \frac{1}{is\alpha + \gamma} [0_{n \times k} \ V] (T - \mu(s)I)^{-1} Z^T e_i.$$

Uvedimo blok zapis vektora  $(Z^T e_i)^T = [Z_0^T \ Z_1^T]$ ,  $Z_0 \in M_{k,1}$ ,  $Z_1 \in M_{n-k,1}$ . Time dolazimo do formule:

$$F_i(s) = \frac{1}{is\alpha + \gamma} V (T_{22} - \mu(s)I)^{-1} Z_1. \quad (4.25)$$

Zapišimo matricu  $T$  iz Schurove dekompozicije  $L = ZTZ^T$  kao blok matricu

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

gdje blok matrica  $T_{11} \in M_{k,k}$  na dijagonali ima 0, a  $T_{22} \in M_{n-k,n-k}$  ima ne-nul svojstvene vrijednosti. Raspis funkcije prijenosa u nuli pomoću blok matrica je oblika:

$$F_i(0) = \frac{1}{\gamma} V \left( V^T \begin{bmatrix} V_0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^T \\ V^T \end{bmatrix} V \right)^{-1} V^T e_i. \quad (4.26)$$

Koristeći svojstva od  $V_0$  i  $V$  kao maloprije, za vrijednost funkcije prijenosa u nuli dobivamo:

$$F_i(0) = \frac{1}{\gamma} VT_{22}^{-1}V^T e_i. \quad (4.27)$$

Uočimo da su u formulama (4.27) i (4.25) matrice  $T_{22}$  i  $(T_{22} - \mu(s)I)$  gornje trokutaste matrice pa se računanje inverza svodi na rješavanje trokutastog sustava povratnom supstitucijom što je numerički jako povoljno.

Također, ovim postupnim raspisom smo početni sustav  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$  koji je bio dimenzije  $2n \times 2n$ , reducirali na rješavanje trokutastog sustava dimenzije  $n - k$ . Time se omogućuje efikasnije računanje vrijednosti funkcije prijenosa za različite  $s \in \mathbb{R}$ .

### Računanje $H_\infty$ norme MAS-a

Ispitujemo gdje preslikavanje  $s \mapsto \|F_i(s)\|_2$  postiže maksimum jer je

$$\|F_i\|_\infty = \max_{s \in \mathbb{R}^+} \|F_i(s)\|_2. \quad (4.28)$$

Zbog (4.27) i (4.25), funkcija  $F_i$  dana je formulom:

$$F_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} V T_{22}^{-1} V^T e_i, & s = 0, \\ \frac{1}{is\alpha + \gamma} V (T_{22} - \mu(s) I)^{-1} Z_1, & s \neq 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Kroz funkciju  $\mu$  iz (4.13), funkcija prijenosa  $F_i$  ovisi i o parametrima  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ .

Za svaki vrh  $i \in \{1, \dots, n\}$  računamo funkciju prijenosa  $F_i$  pripadnog LTI sustava (4.5) te se pomoću Nelder-Meadovog optimizacijskog algoritma (vidi [6]) ispituje gdje preslikavanje  $s \mapsto \|F_i(s)\|_2$  postiže maksimum. Priroda funkcija  $F_i$  nije unaprijed poznata pa se za dodatnu provjeru koristi vrlo jednostavna metoda istočkavanja vrijednosti funkcije  $\|F_i\|_\infty$  na unaprijed zadanoj domeni  $[0, r(L))$ , gdje desna granica domene ovisi o normi Laplaceove matrice  $\|L\|$ , npr. u ovom radu korištena je:  $r(L) = 5\|L\|$ . Na taj se način provjerava je li Nelder-Meadov algoritam slučajno *zapeo* u nekom lokalnom ekstremu.

U slučaju pronalaska funkcije prijenosa  $F_i$  takve da se maksimum preslikavanja  $s \mapsto \|F_i(s)\|_2$  ne postiže u nuli, to jest  $\|F_i\|_\infty \neq \|F_i(0)\|_2$ , testirani graf smatra se kontraprimjerom te ga se sprema za daljnje proučavanje njegove strukture i ostalih značajki.



# Poglavlje 5

## Rezultati testiranja

U ovom poglavlju prezentirat će se rezultati testiranja. Za neusmjerene grafove vrijedi rezultat teorema 4.1.1 prema kojem se  $H_\infty$  norma funkcije prijenosa  $F_i$  za svaki  $i \in \{1, \dots, n\}$  dostiže u nuli:  $\|F_i\|_\infty = \|F_i(0)\|_2$  uz određene uvjete na parametre  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ .

Testiranje se sastojalo u traženju usmjerenih grafova kod kojih postoji vrh  $i \in \mathcal{V}$  takav da se vrijednost  $\|F_i\|_\infty$  ne dostiže u nuli<sup>1</sup>. Drugim riječima, kako bismo izmjerili osjetljivost MAS-a na poremećaj izazvan na vrhu  $i$ , nije dovoljno izračunati vrijednost  $\|F_i(0)\|_2$ . Funkcija prijenosa  $F_i$  ovisi i o parametrima  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ . U ovom testiranju pretpostavljamo  $\alpha, \beta = 1$  te da parametar  $\gamma$  poprima vrijednosti u skupu  $\{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ .

Vrijednost  $H_\infty$  norme funkcije prijenosa  $\|F_i\|_\infty$  označava mjeru osjetljivosti MAS-a kada nekom smetnjom djelujemo na vrh  $i$ . Vrh  $i$  za koji izraz  $\|F_i\|_\infty$  ima najveću vrijednost smatramo najosjetljivijim, jer poremećaj na vrhu  $i$  dovodi do najvećeg poremećaja na cjelokupni MAS.

Vrh  $i$  za koji je mjera osjetljivosti MAS-a  $\|F_i\|_\infty$  najveća, zvat ćemo **najosjetljivijim vrhom** s oznakom  $v_{H_\infty}$ . Vrh  $i$  čija funkcija prijenosa  $F_i$  ne dostiže maksimum u nuli, zvat ćemo **istaknutim vrhom** s oznakom  $v_{opt}$ . Istaknutih vrhova može biti više.

Opišimo kratko postupak koji smo proveli za testiranje jednog grafa. Neka je dan usmjereni graf  $G$  sa skupom vrhova  $\mathcal{V}$ . Svakom vrhu  $i \in \mathcal{V}$  pridružujemo funkciju prijenosa  $F_i$  danu sa (4.29).

Funkcija  $F_i$  je funkcija prijenosa LTI sustava (4.5) kada vrh  $i$  ometamo smetnjom  $\omega_i$ <sup>2</sup>.

Drugim riječima, svakom vrhu  $i \in \mathcal{V}$  grafa  $G$  pridružimo LTI sustav oblika (4.5) te promatramo gdje preslikavanje  $s \mapsto \|F_i(s)\|_2$  postiže maksimum.

---

<sup>1</sup>Strogo formalno ne možemo reći da *funkcija prijenosa ne postiže maksimum u nuli*, jer je funkcija prijenosa  $F_i(s)$  vektorska funkcija. No, ponekad ćemo reći da funkcija prijenosa  $F_i$  ne dostiže maksimum u nuli te pritom podrazumijevati da se maksimalna vrijednost norme  $\|F_i(0)\|_2$  ne dostiže u nuli. Vidi (4.28).

<sup>2</sup>Skraćeno ćemo reći *funkcija prijenosa vrha i*.

## Analiza kontraprimjera

U ovom testiranju, kontraprimjerom se smatra usmjereni graf s barem jednim istaknutim vrhom. Kontraprimjere se tražilo među ovim klasama grafova opisanim u odjeljku 2.3:

- *gn\_graph*
- *gnr\_graph*
- *gnc\_graph*
- *random\_k\_out\_graph*
- *scale\_free\_directed\_graph*.

U testiranju je generirano oko 500 usmjerenih grafova iz svih pet klasa. Pronađeno je tridesetak različitih kontraprimjera. Svi pronađeni kontraprimjeri pripadaju jednoj od tri klase: *scale\_free\_directed\_graph*, *gn\_graph* i *random\_k\_out\_graph*. Predstaviti će se jedan kontraprimjer iz svake od tih klasa.

Razlozi zbog kojih se predstavljaju upravo ovi kontraprimjeri su sljedeći:

- Graf  $D$  kao primjer iz klase *scale\_free\_directed\_graph* koji ima jedan istaknuti vrh te više od jednog dosega. Na njemu će se svaki doseg promatrati kao zaseban MAS.
- Graf  $N$  kao primjer iz klase *gn\_graph*. Na ovom grafu testirat će se utjecaj zatvaranja ciklusa na cjelokupni MAS.
- Grafovi  $J_6, J_7, J_{15}$  pripadaju klasi *random\_k\_out\_graph* za  $k = 1$ . Kod ovih se grafova povećanjem broja vrhova povećava broj istaknutih vrhova.

Uočili smo da kod svih grafova kontraprimjera, postojanje istaknutog vrha  $i$  ovisi o parametru  $\gamma$ . Za sve pronađene kontraprimjere postoji **kritična vrijednost**  $\gamma_i$  nakon koje graf postaje kontraprimjerom. Drugim riječima, za  $\gamma \in \langle 0, \gamma_i \rangle$  graf nije kontraprimjer jer ne postoji istaknuti vrh. No, za  $\gamma \in [\gamma_i, 1]$  istaknuti vrh postoji.

Za svaki kontraprimjer predstaviti će se:

- struktura grafa: dosezi, kabale, zajednički i ekskluzivni dijelovi;
- gdje se nalaze najosjetljiviji vrh i istaknuti vrhovi s obzirom na strukturu grafa te vidjeti njihov ulazni i izlazni stupanj;
- graf svih funkcija prijenosa  $F_i$  te zasebno onih za istaknute vrhove;
- ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  o parametru  $\gamma$ .

Sa  $s_{opt} \neq 0$  označili smo maksimizacijsku točku u kojoj se dostiže vrijednost  $\|F_i\|_{\infty}$ .

## 5.1 Graf $D$ - scale\_free\_directed\_graph

Graf  $D$  je primjer grafa sa 10 vrhova i 13 bridova iz klase *scale\_free\_directed\_graph* (vidi sekciju 2.3). Graf ima dva ciklusa. Na grafu  $D$  svaki doseg promatrati ćemo kao zaseban MAS te jesu li najosjetljiviji i istaknuti vrh ostali isti. Graf  $D$  prikazan je na slici 5.1a.

### Struktura grafa - doseg, kabala, zajednički i ekskluzivni dio

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
$R_1 = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 8\}$	{8}	{0, 2, 3, 5, 6}	{8, 1}
$R_2 = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$	{4}	{0, 2, 3, 5, 6}	{4}
$R_3 = \{9, 6, 7\}$	{9}	{6}	{9, 7}

Graf  $D$  je slabo povezan i ima tri dosega. Svaki doseg ima samo jedan vrh u kabali. Vrh 6 nalazi se u zajedničkom dijelu svih dosega.

### Izdvojeni vrhovi

$\ L\ $	3.0	Broj dosega		3		
vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $	
$v_{H_\infty}$	8	0	1	2.3664		
$v_{s_{opt}}$	1	1	2	0.81	0.7902	

Kod grafa  $D$ , vrh 8 je najosjetljiviji, a vrh 1 je istaknuti vrh. Oba vrha pripadaju istom dosegu te pripadaju ekskluzivnom dijelu tog dosega.

Vrh 1 istaknut je jer u njemu funkcija prijenosa  $F_1$  ne poprima maksimum u nuli. Vrh 1 ima jedan ulazni brid te dva izlazna brida. Za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_0 \rangle$ ,  $\gamma_0 = 0.81$  funkcija  $F_1$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.81$  maksimum ne dostiže u nuli.

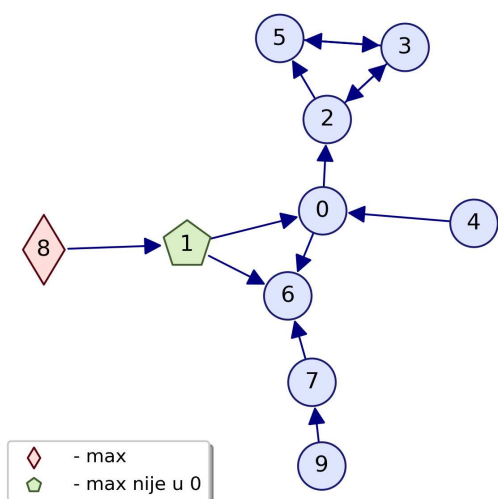
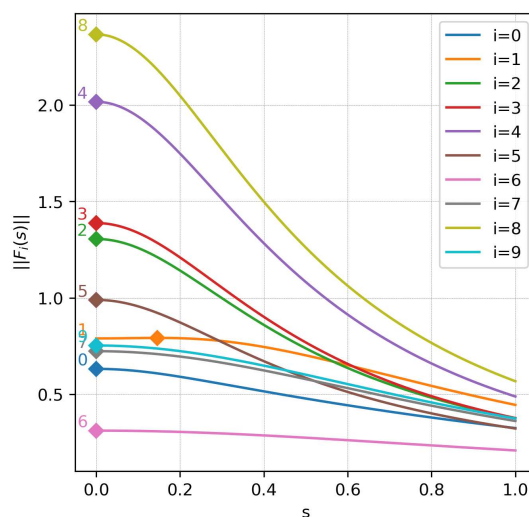
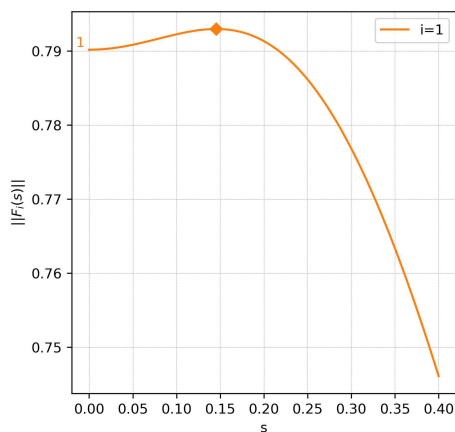
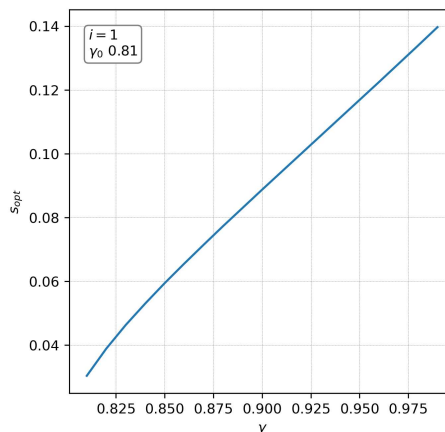
### Funkcija prijenosa

Iz slike 5.1b možemo iščitati da su vrhovi 8 i 4 najosjetljiviji. Oba vrha pripadaju kabalama grafa  $D$  te su im pripadni dosezi  $R_1$  i  $R_2$  relativno veliki. Također, dosezi  $R_1$  i  $R_2$  imaju relativno velik broj vrhova u presjeku. Vrh 8 nema ulaznih bridova, kao ni vrh 4.

Ističe se funkcija prijenosa  $F_1$  koja pripada vrhu 1. Funkcija prijenosa  $F_1$  nije monotona nego ima lokalni ekstrem izvan nule te opet trne u nula za  $s \rightarrow \infty$  (vidi sliku 5.2a). Funkcije prijenosa za sve ostale vrhove su monotono padajuće i trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$ .

### Ovisnost maksimizacijske točke $s_{opt}$ i parametra $\gamma$

Na slici 5.2b, može se uočiti monotona ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  funkcije  $F_1$  o parametru  $\gamma$ . Ovisnost nije linearna, ali nije daleko od linearne.

(a) Graf  $D$ .(b) Funkcije prijenosa grafa  $D$ .Slika 5.1: Graf  $D$  i funkcije prijenosa  $F_i$ .(a) Istaknuta funkcija  $F_1$  grafa  $D$ .(b)  $s_{opt}$ - $\gamma$  graf za graf  $D$ .Slika 5.2: Funkcija prijenosa  $F_1$  koja ne postiže maksimum u nuli grafa  $D$  i ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za graf  $D$ .



### Podgrafovi $D_1, D_2$ i $D_3$

Svakom od dosega  $R_1, R_2, R_3$  pridruženi su pripadni podgrafovi  $D_1, D_2$  i  $D_3$ . U ovom odjeljku će se pojam podgrafa i dosega često poistovjetiti. Kada se u ovom odjeljku referira na doseg podrazumijeva se podgraf grafa  $D_i$  generiran vrhovima koji pripadaju dosegu  $R_i, i \in \{1, 2, 3\}$  i bridovima unutar tog dosega. Svaki od podgrafova po konstrukciji je graf sa jednim dosegom. Grafovi  $D_1$  i  $D_2$  prikazani su na slici 5.3, a graf  $D_3$  na slici 5.7a. Grafovi  $D_1$  i  $D_2$  su slabo povezani, a graf  $D_3$  je jednostrano povezan.

### Grafovi $D_1$ i $D_2$

#### Izdvojeni vrhovi podgrafa $D_1$

$\ L\ $	3.0	Broj dosega		1			
	vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $	
$v_{H_\infty}$	8	0	1		4.8403		
$v_{s_{opt}}$	1	1	2	0.15	1.056	0.9258	

Doseg  $R_1$  sadrži 7 vrhova i 10 bridova. I u ovom slučaju, vrh 8 je najosjetljiviji vrh (vidi sliku 5.4a). Sama vrijednost maksimuma je sada veća nego za cijeli graf  $D$ :  $4.8403 > 2.3664$ , što ovaj sustav čini još osjetljivijim od početnog. Vrh 1 i u ovom je slučaju istaknuti vrh, no iznos norme  $\|F_1\|_\infty$  se također povećao ( $1.056 > 0.793$ ). Kritični  $\gamma_1$  za vrh 1 više nije 0.81 nego je sada 0.15.

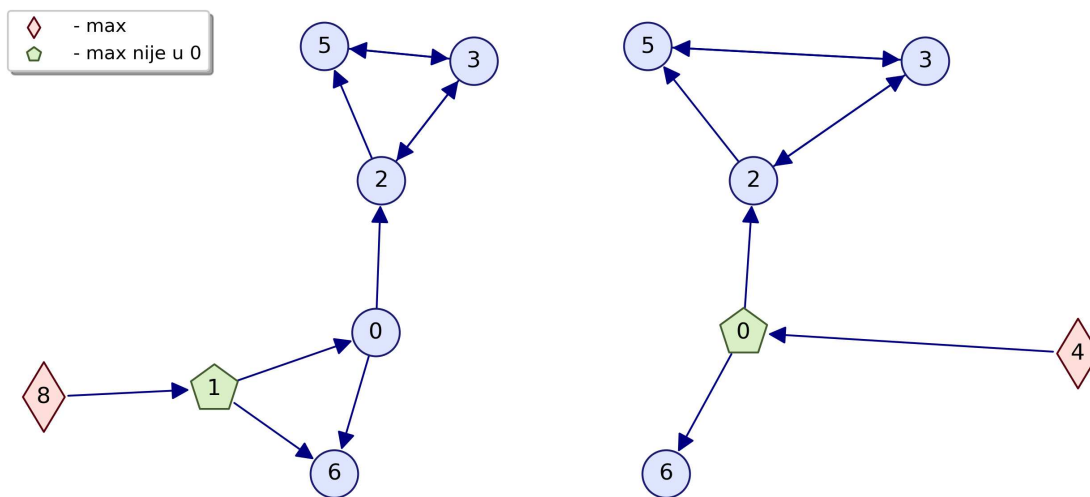
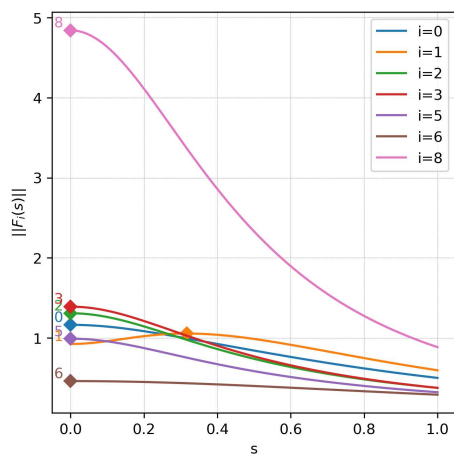
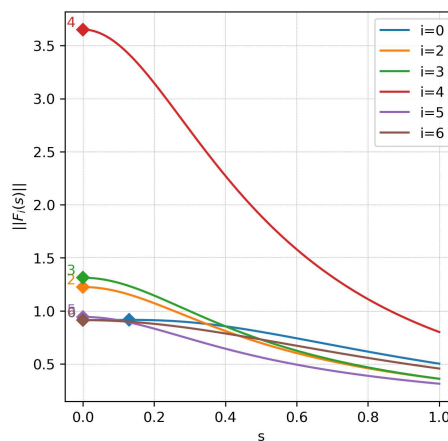
#### Izdvojeni vrhovi podgrafa $D_2$

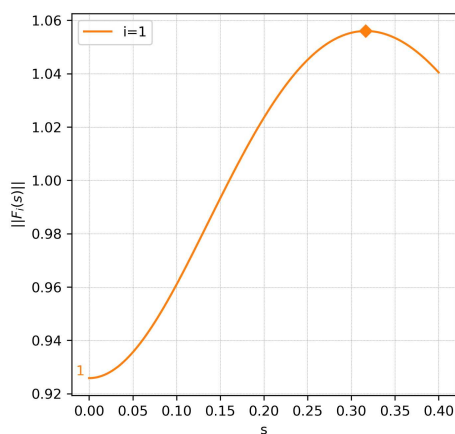
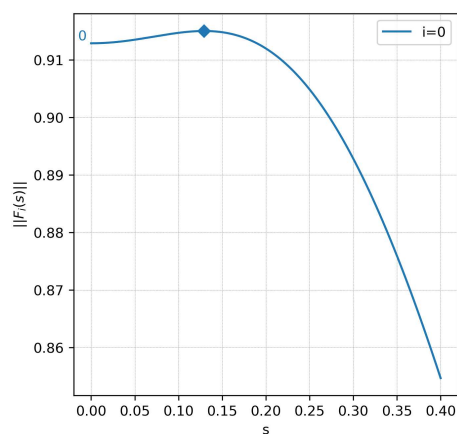
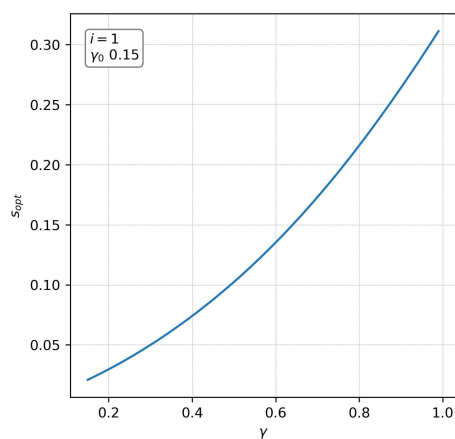
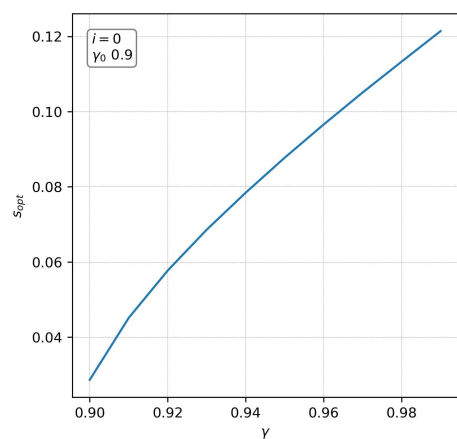
$\ L\ $	3.0	Broj dosega		1			
	vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $	
$v_{H_\infty}$	4	0	1		3.6515		
$v_{s_{opt}}$	0	1	2	0.9	0.915	0.9129	

Doseg  $R_2$  sadrži 6 vrhova i 8 bridova. U dosegu  $R_2$  nisu ni vrh 1 ni vrh 8. Sa slike 5.4b možemo iščitati da je vrh 4 najosjetljiviji. Osjetljivost ovog podstustava je veća nego osjetljivost početnog sustava ( $3.6515 > 2.3664$ ). Istaknuti vrh u kojem funkcija prijenosa ne dostiže maksimum u nuli je vrh 0. Kritični  $\gamma_0$  za vrh 0 je sada 0.9.

### Ovisnost maksimizacijske točke $s_{opt}$ i parametra $\gamma$ u grafovima $D_1$ i $D_2$

Na slikama 5.6a i 5.6b, može se uočiti da postoji monotona ovisnost između maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za vrh 1 u dosegu  $R_1$  i za vrh 0 u u dosegu  $R_2$ . U ovom slučaju ovisnost nije linearna, no nije daleko od linearne ovisnosti.

(a) Podgraf za doseg  $R_1$ .(b) Podgraf za doseg  $R_2$ .Slika 5.3: Podgrafovi  $D_1$ , i  $D_2$  pridruženi dosezima  $R_1$  i  $R_2$ .(a) Funkcije prijenosa  $F_i$  grafa  $D_1$ .(b) Funkcije prijenosa  $F_i$  grafa  $D_2$ .Slika 5.4: Funkcije prijenosa  $F_i$  podgrafova  $D_1$ , i  $D_2$ .

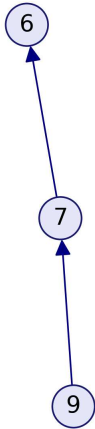
(a) Istaknuta funkcija  $F_1$  u doseg  $R_1$ .(b) Istaknuta funkcija  $F_0$  u doseg  $R_2$ .Slika 5.5: Funkcije prijenosa koje ne dostižu maksimum u nuli podgrafova  $D_1$  i  $D_2$ .(a)  $s_{opt}$ - $\gamma$  graf za funkciju  $F_1$  doseg  $R_1$ .(b)  $s_{opt}$ - $\gamma$  graf za funkciju  $F_0$  u doseg  $R_2$ .Slika 5.6: Ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za grafove  $D_1$  i  $D_2$ .

## Graf $D_3$

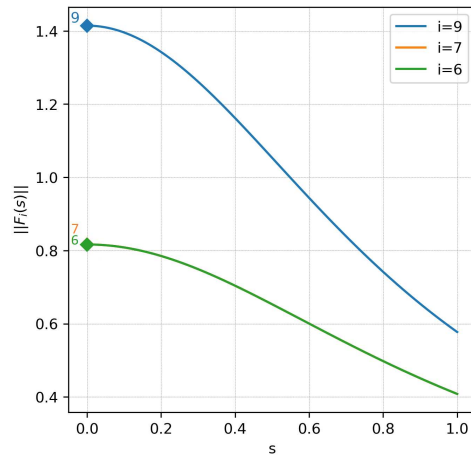
### Izdvojeni vrhovi podgrafa $D_3$

$\ L\ $	1.0	Broj dosega		1		
vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $	
$v_{H_\infty}$	9	0	1		1.4142	

Doseg  $R_3$  sadrži 3 vrha i 2 brida. U podgrafu  $D_3$  sve funkcije prijenosa  $F_i$  dostižu maksimum u nuli. Vrh 9 je najosjetljiviji vrh, a osjetljivost ovog MAS-a manja je od osjetljivosti početnog MAS-a ( $1.4142 < 2.3664$ ). Na slici 5.7b se vidi da su vrhovi 6 i 7 jednako osjetljivi.



(a) Graf  $D_3$ .



(b) Funkcije prijenosa  $F_i$  grafa  $D_3$ .

Slika 5.7: Graf  $D_3$  i funkcije prijenosa  $F_i$ .

## 5.2 Graf $N$ - gn\_graph

Graf  $N$  (vidi sliku 5.8a) je primjer iz klase gn\_graph opisane u sekciji 2.3. Graf  $N$  sadrži 9 vrhova i 8 bridova. Na ovom grafu testiralo se kako dodavanje novih bridova koji zatvaraju ciklus utječe na osjetljivost pojedinih vrhova.

### Struktura grafa - doseg, kabala, zajednički i ekskluzivni dio

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
$R_1 = \{0, 2, 4, 5, 6, 7\}$	$\{7\}$	$\{0\}$	$\{2, 4, 5, 6, 7\}$
$R_2 = \{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$
$R_3 = \{8, 0, 3\}$	$\{8\}$	$\{0\}$	$\{8, 3\}$

Graf  $N$  je slabo povezan i ima tri dosega. Svaki doseg ima samo jedan vrh u kabali. Vrh 0 nalazi se u zajedničkom dijelu sva tri dosega.

### Izdvojeni vrhovi

$\ L\ $	3.0	Broj dosega		3		
	vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $
$v_{H_\infty}$	7	0	1		3.2417	
$v_{s_{opt}}$	6	1	1	0.66	0.9263	0.8965

Vrh 7 je najosjetljiviji vrh, a istaknuti vrh je vrh 6 (vidi sliku 5.8b). Oba vrha pripadaju istom dosegu te pripadaju ekskluzivnom dijelu tog dosega. Vrh 7 pripada kabali dosega  $R_1$ . Doseg  $R_1$  kojem pripada vrh 7 je relativno velik. Vrh 7 nema ulaznih bridova.

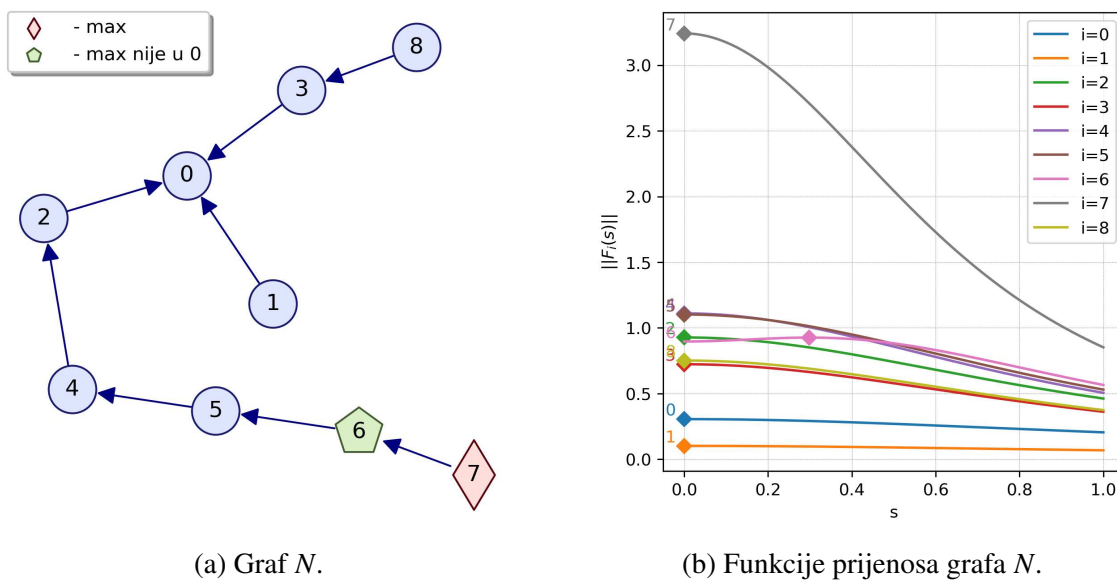
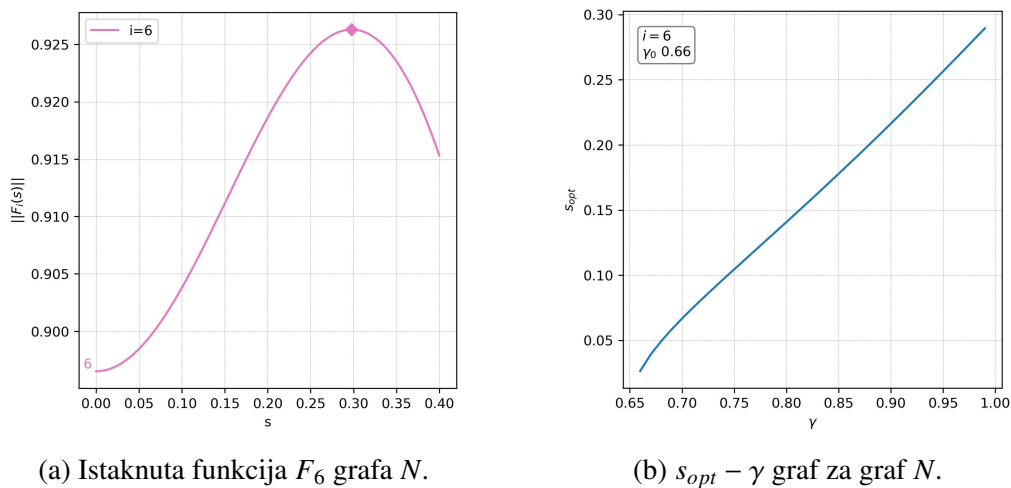
Vrh 6 istaknut je jer pripadna funkcija prijenosa  $F_6$  ne poprima maksimum u nuli. Vrh 6 ima jedan ulazni i jedan izlazni brid. Za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_0 \rangle$ ,  $\gamma_0 = 0.66$  funkcija prijenosa  $F_6$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.66$  funkcija prijenosa  $F_6$  maksimum ne dostiže u nuli.

### Funkcija prijenosa

Ističe se funkcija prijenosa  $F_6$  koja pripada vrhu 6 (vidi sliku 5.9b). Funkcija prijenosa  $F_6$  nije monotona nego ima lokalni ekstrem izvan nule te opet trne u nula za  $s \rightarrow \infty$ . Funkcije prijenosa za sve ostale vrhove su monotono padajuće i trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$  (vidi sliku 5.8b).

### Ovisnost maksimizacijske točke $s_{opt}$ i parametra $\gamma$

Na slici 5.9b može se uočiti da postoji monotona ovisnost između maksimizacijske točke  $s_{opt}$  funkcije  $F_6$  i parametra  $\gamma$ . U ovom slučaju ovisnost nije linearna, ali nije ni daleko od linearne.

Slika 5.8: Graf  $N$  i funkcije prijenosa  $F_i$ .Slika 5.9: Funkcija prijenosa  $F_6$  koja ne postiže maksimum u nuli grafa  $N$  i ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za graf  $N$ .

### Grafovi $N_{84}$ , $N_{87}$ i $N_{51}$

U ovom primjeru proučava se na koji način mala promjena topologije grafa, točnije dodavanja brida koji zatvara ciklus utječe na osjetljivost MAS-a određenog grafom  $N$ . Sva tri grafa  $N_{84}$ ,  $N_{87}$  i  $N_{51}$  imaju 9 vrhova i 9 bridova. Graf  $N_{84}$  (na slici 5.10a) dobiven je dodavanjem brida (8, 4). Graf  $N_{87}$  (na slici 5.11a) dobiven je dodavanjem brida (8, 7). Graf  $N_{51}$  (na slici 5.11b) dobiven je dodavanjem brida (5, 1).

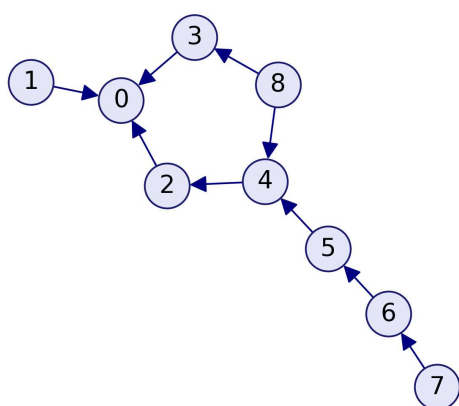
#### Struktura grafa $N_{84}$

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
$R_1 = \{0, 2, 4, 5, 6, 7\}$	$\{7\}$	$\{0, 2, 4\}$	$\{5, 6, 7\}$
$R_2 = \{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$
$R_3 = \{0, 2, 3, 4, 8\}$	$\{8\}$	$\{0, 2, 4\}$	$\{8, 3\}$

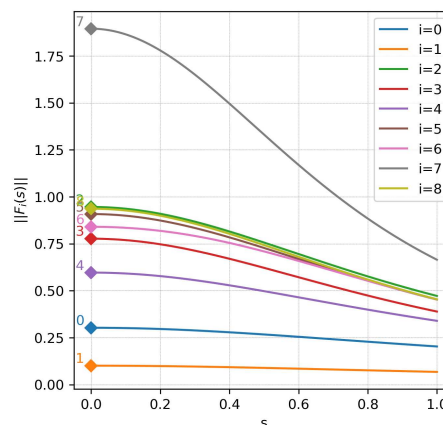
#### Izdvojeni vrhovi podgraфа $N_{84}$

$\ L\ $	3.0	Broj dosega	3			
vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $	
$v_{H_\infty}$	7	0	1		1.895	

Graf  $N_{84}$  ima 9 vrhova i 9 bridova. U grafu  $N_{84}$  broj dosega jednak je kao u grafu  $N$ . Sve funkcije prijenosa  $F_i$  dostižu maksimum u nuli (vidi sliku 5.10b). Funkcije prijenosa za sve vrhove su monotono padajuće. Osjetljivost sustava  $N_{84}$  je manja od osjetljivosti početnog sustava  $N$  ( $1.895 < 3.2417$ ). Najosjetljiviji je vrh 7 kao i u početnom sustavu  $N$ . Vrh 7 u oba slučaja pripada kabali dosega  $R_1$ .



(a) Graf  $N_{84}$  zatvaranjem ciklusa (8,4).



(b) Funkcije prijenosa  $F_i$  graфа  $N_{84}$ .

Slika 5.10: Graf  $N_{84}$  i funkcije prijenosa  $F_i$ .

**Grafovi  $N_{87}$  i  $N_{51}$** **Struktura grafa  $N_{87}$** 

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
$R_1 = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$\{8\}$	$\{0\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$R_2 = \{0, 1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$

Za razliku od grafa  $N$  koji ima tri dosega, graf  $N_{87}$  ima samo dva dosega  $R_1, R_2$ . To je posljedica dodavanja brida  $(8, 7)$ . Najosjetljiviji vrh je vrh 8. Istaknuti vrh je vrh 7. Oba vrha pripadaju istom dosegu te pripadaju ekskluzivnom dijelu dosega  $R_1$ . Vrh 8 pripada kabali dosega  $R_1$ . Za razliku od  $N$ , gdje vrh 8 ima izlazni stupanj 1, sada vrh 8 ima izlazni stupanj 2. Promjena u najosjetljivijem vrhu je očekivana jer se dostižni skup vrha 8 sastoji od 8 vrhova, to jest poremećaj na vrhu 8 utječe na 7 vrhova. Dostižni skup vrha 7 sadrži 6 vrhova kao i u grafu  $N$ .

**Izdvojeni vrhovi podgraфа  $N_{87}$** 

$\ L\ $	3.0	Broj dosega	2			
	vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $
$v_{H_\infty}$	8	0	2		4.4546	
$v_{s_{opt}}$	7	1	1	0.77	1.2231	1.2025

Vrh 7 istaknut je jer u njemu funkcija prijenosa  $F_7$  ne poprima maksimum u nuli (vidi sliku 5.13a). Vrh 7 ima jedan ulazni i jedan izlazni brid.

Za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_0 \rangle, \gamma_0 = 0.77$  funkcija  $F_7$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.77$   $F_7$  ne dostiže maksimum u nuli. Osjetljivost sustava  $N_{87}$  veća nego osjetljivost početnog sustava  $N$  ( $4.4546 > 3.2417$ ).

**Struktura grafa  $N_{51}$** 

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
$R_1 = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$	$\{7\}$	$\{0\}$	$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$
$R_2 = \{8, 0, 3\}$	$\{8\}$	$\{0\}$	$\{8, 3\}$

**Izdvojeni vrhovi podgraфа  $N_{51}$** 

$\ L\ $	3.0	Broj dosega	2			
	vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $
$v_{H_\infty}$	7	0	1		3.4534	
$v_{s_{opt}}$	6	1	1	0.62	0.9591	0.9188

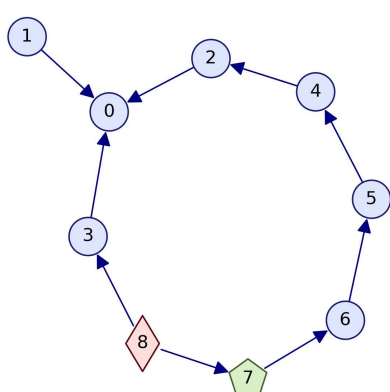
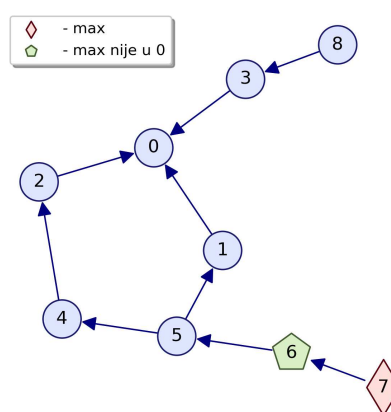
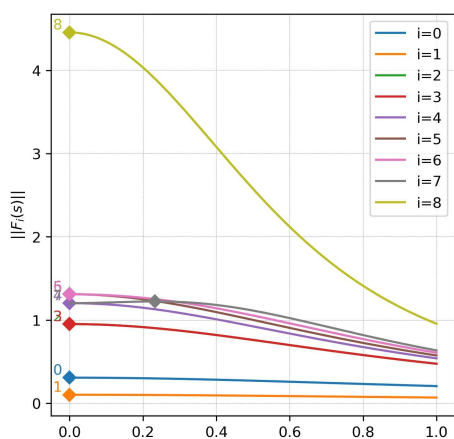
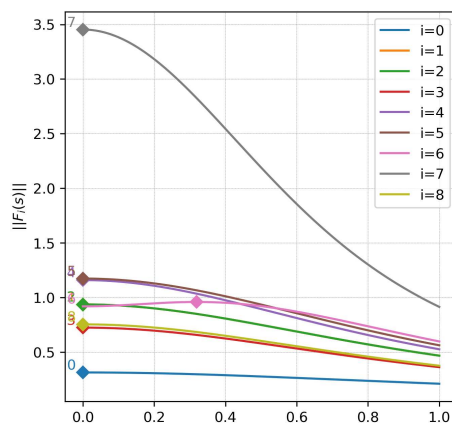
U ovom grafu dodavanje brida  $(5, 1)$  dovelo je do zatvaranja ciklusa te kao i za  $N_{87}$ , graf  $N_{51}$  ima samo dva dosega  $R_1, R_2$ .

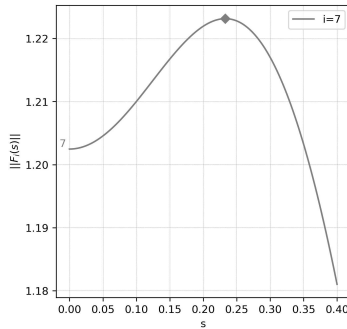
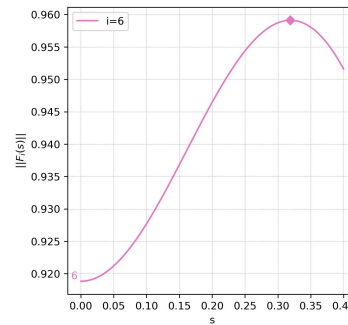
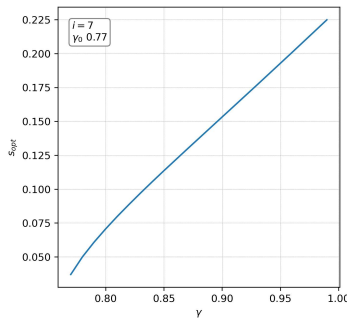
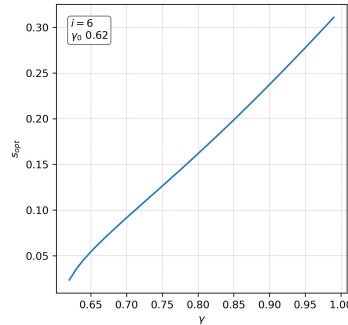


Najosjetljiviji vrh je vrh 7, a istaknuti vrh je vrh 6, kao i u početnom grafu  $N$ . Oba vrha pripadaju istom dosegu te pripadaju ekskluzivnom dijelu dosega  $R_1$ . Vrh 7 pripada kabali dosega  $R_1$ . Vrh 7 ima jedan izlazni brid te nema ulaznih bridova.

Vrh 6 istaknut je jer u njemu funkcija prijenosa  $F_6$  ne poprima maksimum u nuli. Vrh 6 ima jedan ulazni i jedan izlazni brid.

Za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_0 \rangle$ ,  $\gamma_0 = 0.62$  funkcija  $F_6$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.62$   $F_6$  ne dostiže maksimum u nuli. Osjetljivost sustava  $N_{51}$  neznatno je veća je nego za početni MAS  $N$  ( $3.4534 > 3.2417$ ).

(a) Graf  $N_{87}$ .(b) Graf  $N_{87}$ .Slika 5.11: Grafovi  $N_{87}$  i  $N_{51}$  dobiveni zatvaranjem ciklusa (8,7) i (5,1)(a) Funkcije prijenosa  $F_i$  grafa  $N_{87}$ .(b) Funkcije prijenosa  $F_i$  grafa  $N_{51}$ .Slika 5.12: Funkcije prijenosa  $F_i$  grafova  $N_{87}$  i  $N_{51}$ .

(a) Istaknuta funkcija  $F_7$  u grafu  $N_{87}$ .(b) Istaknuta funkcija  $F_6$  u grafu  $N_{51}$ .Slika 5.13: Funkcije prijenosa koje ne dostižu maksimum u nuli grafova  $N_{87}$  i  $N_{51}$ .(a)  $s_{opt}$ - $\gamma$  graf za  $N_{87}$ .(b)  $s_{opt}$ - $\gamma$  graf za  $N_{51}$ .Slika 5.14: Ovisnost točke maksimuma  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za grafove  $N_{87}$  i  $N_{51}$ .

### Funkcija prijenosa grafova $N_{87}$ i $N_{51}$

U grafu  $N_{87}$  ističe se funkcija prijenosa  $F_7$  koja pripada vrhu 7 te se u grafu  $N_{51}$  ističe funkcija prijenosa  $F_6$  koja pripada vrhu 6 (vidi sliku 5.13). U oba slučaja funkcije nisu monotone nego imaju lokalni ekstrem izvan nule te trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$ . Funkcije prijenosa  $F_i$  za sve ostale vrhove grafu  $N_{87}$  i grafu  $N_{51}$  su monotono padajuće i trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$  (vidi sliku 5.12).

### Ovisnost maksimizacijske točke $s_{opt}$ i parametra $\gamma$ grafova $N_{87}$ i $N_{51}$

Na slici 5.14, može se uočiti da postoji monotona ovisnost između maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za vrh 7 u grafu  $N_{87}$  i za vrh 6 u grafu  $N_{51}$ . Ovisnost je skoro pa linearna.

### 5.3 Tri slična grafa: $J_6, J_7, J_{15}$

Grafovi  $J_6, J_7, J_{15}$  pripadaju klasi *random\_k\_out\_graph* za  $k = 1$  opisanoj u odjeljku 2.3. Sva tri grafa su jednostrano povezani, a možemo opisati kao graf koji sadrži jednosmjernan ciklus sa direktnim putem od kabala do ciklusa. Razlikuju su u ukupnom broju vrhova. Graf  $J_6$  ima 6, graf  $J_7$  ima 7, a graf  $J_{15}$  ima 15 vrhova.

#### Graf $J_6$ - random\_k\_out\_graph(6, 1)

**Struktura grafa - doseg, kabala, zajednički i ekskluzivni dio**

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
{0, 1, 2, 3, 4, 5}	{5}	$\emptyset$	{0, 1, 2, 3, 4, 5}

Graf  $J_6$  ima 6 vrhova i 6 bridova. Prikazan je na slici 5.15a. Graf  $J_6$  ima jedan doseg  $R_1$  te kabala sadrži samo vrh 5.

#### Izdvojeni vrhovi

$\ L\ $	2.0198	Broj dosega		1			
vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_0$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $		
$v_{H_\infty}$	5	0	1		6.442		
$v_{s_{opt}}$	3	1	1	0.13	1.043	0.9129	

Najosjetljiviji vrh je vrh 5 (vidi sliku 5.15b). Vrh 5 ima jedan izlazni brid te nema ulaznih bridova. Vrh 3 istaknut je jer u njemu funkcija prijenosa  $F_3$  ne poprima maksimum u nuli. Vrh ima jedan ulazni i jedan izlazni brid.

Za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_0 \rangle$ ,  $\gamma_0 = 0.13$ , funkcija  $F_3$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.13$  funkcija prijenosa  $F_3$  maksimum ne dostiže u nuli.

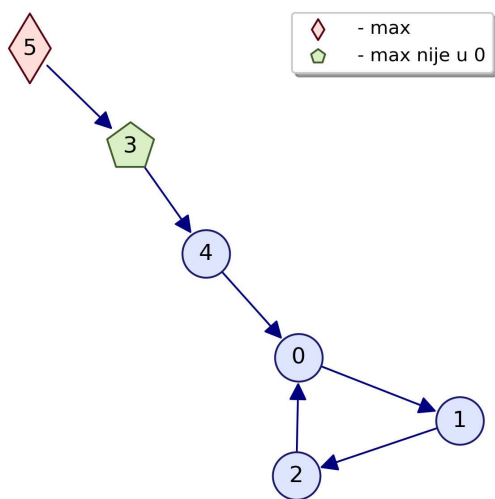
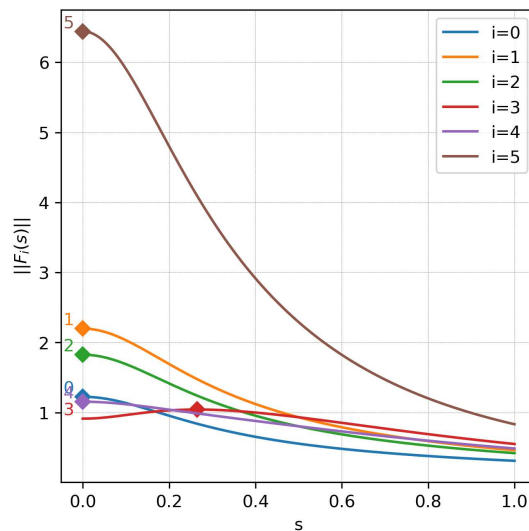
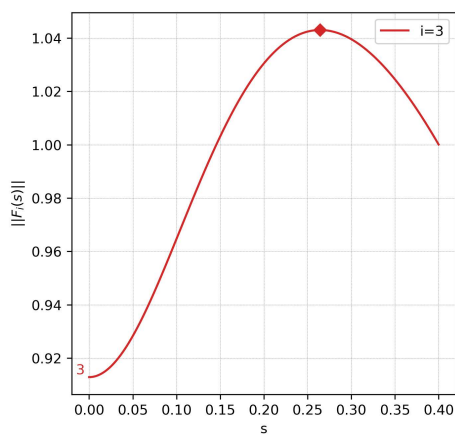
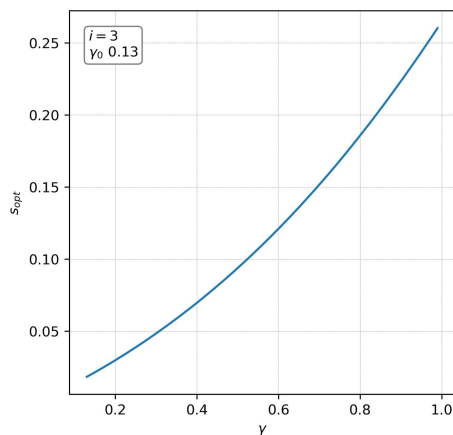
#### Funkcija prijenosa

Ističe se funkcija prijenosa  $F_3$  koja pripada vrhu 3 (vidi sliku 5.16a). Funkcija prijenosa  $F_3$  nije monotona nego ima lokalni ekstrem izvan nule te opet trne u nula za  $s \rightarrow \infty$ . Funkcije prijenosa za sve ostale vrhove su monotono padajuće i trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$ .

Osjetljivost sustava iznosi 6.442, vrijednost osjetljivosti ostalih vrhova manja je od 2.5 (vidi sliku 5.15b).

#### Ovisnost maksimizacijske točke $s_{opt}$ i parametra $\gamma$

Na slici 5.16b, može se uočiti da postoji monotona ovisnost između maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za vrh 3 u grafu  $J_6$ . Ovisnost nije linearna, ali nije ni daleko od toga da bude linearna.

(a) Graf  $J_6$ .(b) Funkcije prijenosa  $F_i$  grafa  $J_6$ .Slika 5.15: Graf  $J_6$  i funkcije prijenosa  $F_i$ .(a) Istaknuta funkcija  $F_3$  grafa  $J_6$ .(b)  $s_{opt}-\gamma$  graf za graf  $J_6$ .Slika 5.16: Funkcija prijenosa  $F_3$  koja ne postiže maksimum u nuli grafa  $J_6$  i ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za graf  $J_6$ .

### Graf $J_7$ - random\_k\_out\_graph(7, 1)

Graf  $J_7$  nastao je ubacivanjem jednog dodatnog vrha u graf  $J_6$  te je tada uočeno da graf  $J_7$  ima dva istaknuta vrha. Prikazan je na slici 5.17a.

#### Struktura grafa - reach, cabal, exclusive, common

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}	{2}	$\emptyset$	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Graf  $J_7$  ima jedan dosega  $R_1$  te kabala sadrži samo vrh 2.

#### Izdvojeni vrhovi

$\ L\ $	2.0198	Broj dosega	1			
	vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $
$v_{H_\infty}$	2	0	1		7.6718	
	3	1	1	0.09	1.2063	0.9258
$v_{s_{opt}}$	5	1	1	0.89	1.198	1.1952

Najosjetljiviji vrh je vrh 2. (Vidi sliku 5.17b). Vrh 2 ima jedan izlazni brid te nema ulaznih bridova. Vrhovi 3 i 5 su istaknuti jer u njima funkcije prijenosa  $F_3$  i  $F_5$  ne poprimaju maksimum u nuli (vidi 5.18a). Oba vrha 3 i 5 imaju jedan ulazni i jedan izlazni brid.

Za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_3 \rangle$ ,  $\gamma_3 = 0.09$ , funkcija  $F_3$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.09$  funkcija  $F_3$  maksimum ne dostiže u nuli. U grafu  $J_7$ , vrh 3 ima ulazni brid iz kabale te je za njega kritični  $\gamma_0 = 0.13$ . Kritični  $\gamma$  se smanjio u odnosu na graf  $J_6$ .

Također, za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_5 \rangle$ ,  $\gamma_5 = 0.89$ , funkcija  $F_5$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.89$  funkcija prijenosa  $F_5$  maksimum ne dostiže u nuli.

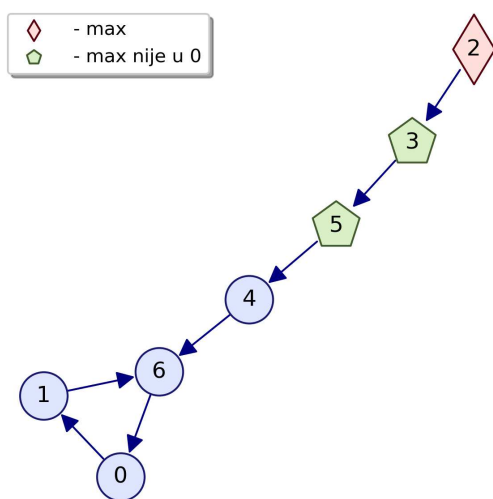
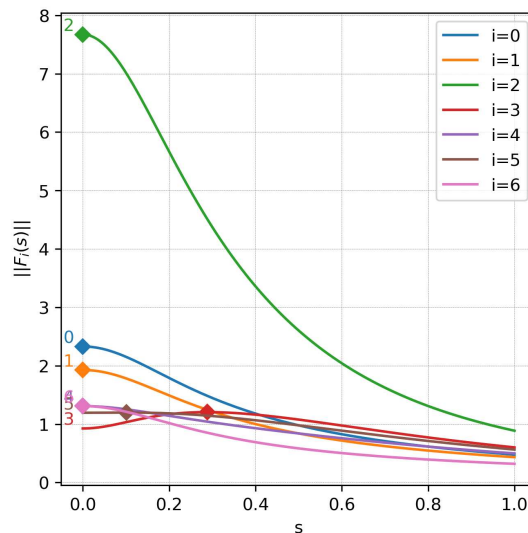
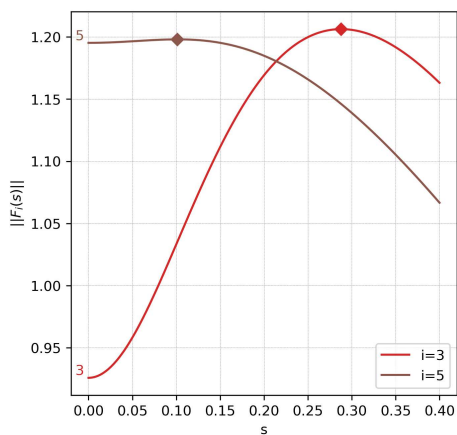
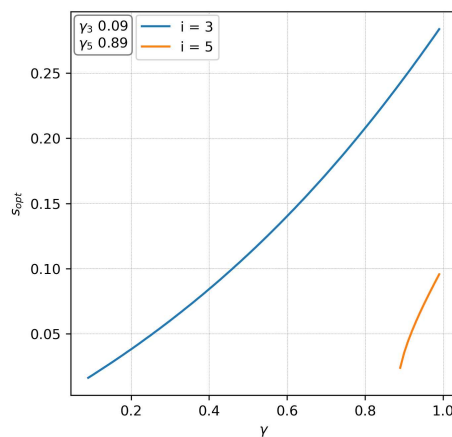
#### Funkcija prijenosa

Ističu se funkcije prijenosa  $F_3$  i  $F_5$  koje pripadaju vrhu 3 i vrhu 5 (vidi sliku 5.18a). Funkcije prijenosa  $F_3$  i  $F_5$  nisu monotone nego imaju lokalni ekstrem izvan nule te nakon maksimalne vrijednosti trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$ . Funkcije prijenosa za sve ostale vrhove su monotono padajuće i trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$  (vidi sliku 5.17b).

#### Ovisnost maksimizacijske točke $s_{opt}$ i parametra $\gamma$

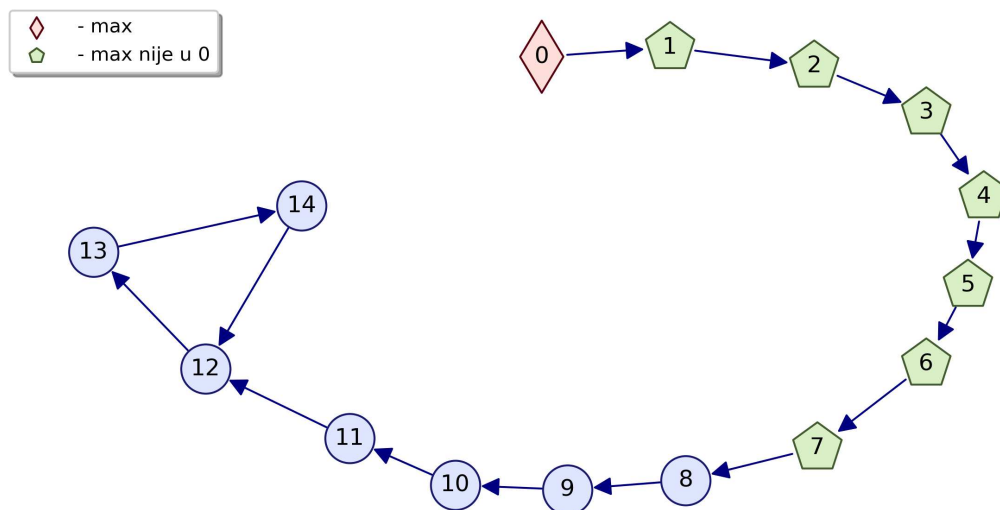
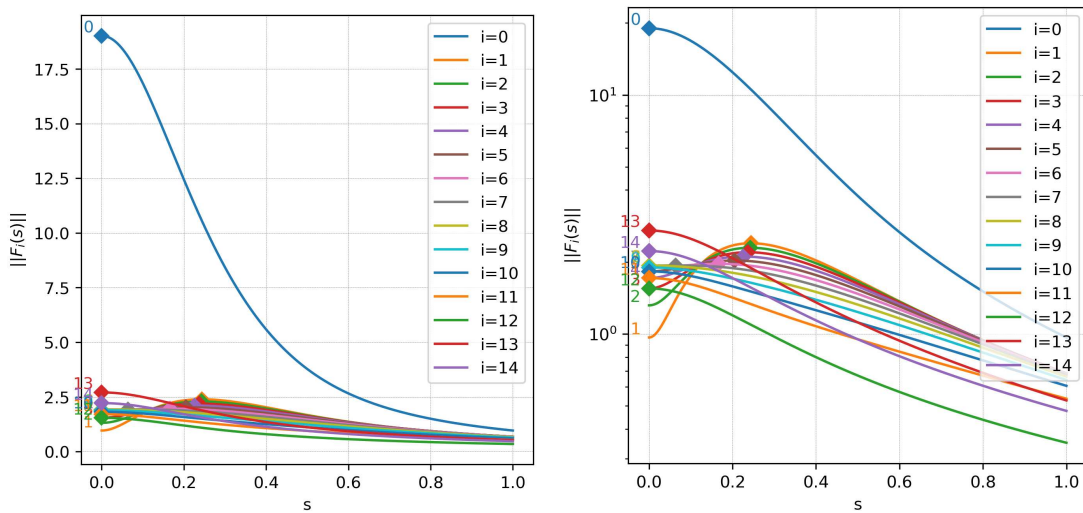
Može se uočiti da postoji monotona ovisnost između maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za vrhove 3 i 5 u grafu  $J_7$  (vidi sliku 5.18b).

Vrh 3 je bliži kabali nego vrh 5 te je kritični  $\gamma_3 < \gamma_5$ .

(a) Graf  $J_7$ .(b) Funkcije prijenosa  $F_i$  grafa  $J_7$ .Slika 5.17: Graf  $J_7$  i funkcije prijenosa  $F_i$ .(a) Istaknute funkcije  $F_3, F_5$  grafa  $J_7$ .(b)  $s_{opt} - \gamma$  graf za  $J_7$ .Slika 5.18: Funkcije prijenosa  $F_3$  i  $F_5$  koje ne postižu maksimum u nuli grafa  $J_7$  i ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za graf  $J_7$ .

### Graf $J_{15}$ - random\_k\_out\_graph(15, 1)

Graf  $J_{15}$  nastao je ubacivanjem osam dodatnih vrhova u graf  $J_7$ . Graf  $J_{15}$  ima 7 istaknutih vrhova (vidi sliku 5.19).

Slika 5.19: Graf  $J_{15}$ .(a) Funkcije  $F_i$  grafa  $J_{15}$ .(b) Funkcije  $F_i$  grafa  $J_{15}$  u log skali.Slika 5.20: Funkcije  $F_i$  grafa  $J_{15}$

**Struktura grafa - doseg, kabala, zajednički i ekskluzivni dio**

Doseg	Kabala	Zajednički dio	Ekskluzivni dio
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}	{0}	$\emptyset$	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

Graf  $J_{15}$  ima jedan doseg  $R_1$  te kabala sadrži samo vrh 0. Vrh 0 je ujedno najosjetljiviji vrh. Također, vrh 0 ima jedan izlazni brid te nema ulaznih bridova. Svi ostali istaknuti vrhovi imaju jedan ulazni i jedan izlazni brid.

**Izdvojeni vrhovi**

$\ L\ $	2.0198	Broj dosega	1			
	vrh	in-degree	out-degree	$\gamma_i$	$\ F_i\ $	$ F_i(0) $
$v_{H_\infty}$	0	0	1		19.0158	
$v_{s_{opt}}$	1	1	1	0.06	2.3948	0.9661
	2	1	1	0.08	2.2931	1.3166
	3	1	1	0.11	2.1965	1.5492
	4	1	1	0.14	2.1071	1.7127
	5	1	1	0.21	2.028	1.8257
	6	1	1	0.48	1.9648	1.8974
	7	1	1	0.95	1.9333	1.9322

Graf  $J_{15}$  ima sedam istaknutih vrhova. Istaknuti vrhovi su 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Za vrijednosti parametra  $\gamma \in \langle 0, \gamma_1 \rangle$ ,  $\gamma_1 = 0.06$ , funkcija prijenosa  $F_1$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.06$  funkcija prijenosa  $F_1$  maksimum ne dostiže u nuli. Vrh 1 je vrh najbliži korijenu grafa te se može uočiti da je kritični  $\gamma$  za vrh najbliži korijenu ovdje manji nego u grafovima  $J_7$  i  $J_{15}$ .

Za  $\gamma \in \langle 0, \gamma_2 \rangle$ ,  $\gamma_2 = 0.08$ , funkcija  $F_2$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.08$  funkcija  $F_2$  maksimum ne dostiže u nuli. Za  $\gamma \in \langle 0, \gamma_3 \rangle$ ,  $\gamma_3 = 0.11$ , funkcija  $F_3$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.11$  funkcija  $F_3$  maksimum ne dostiže u nuli.

Za  $\gamma \in \langle 0, \gamma_4 \rangle$ ,  $\gamma_4 = 0.14$ , funkcija  $F_4$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.14$  funkcija  $F_4$  maksimum ne dostiže u nuli. Za  $\gamma \in \langle 0, \gamma_5 \rangle$ ,  $\gamma_5 = 0.21$ , funkcija  $F_5$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.21$  funkcija  $F_5$  maksimum ne dostiže u nuli.

Za  $\gamma \in \langle 0, \gamma_6 \rangle$ ,  $\gamma_6 = 0.48$ , funkcija  $F_6$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.48$  funkcija  $F_6$  maksimum ne dostiže u nuli. Za  $\gamma \in \langle 0, \gamma_7 \rangle$ ,  $\gamma_7 = 0.95$ , funkcija  $F_7$  poprima maksimum u nuli, dok za  $\gamma \geq 0.95$  funkcija  $F_7$  maksimum ne dostiže u nuli.

Može se uočiti da se vrijednost kritičnog parametra  $\gamma_i$  povećava s povećanjem duljine puta od kabale do vrha  $i$ .

Osjetljivosti sustava  $J_6$ ,  $J_7$  i  $J_{15}$  su redom  $6.442 < 7.6718 < 19.0158$ . Sustav  $J_{15}$  je najosjetljiviji, a od ova tri sustav  $J_6$  je najmanje osjetljiv.



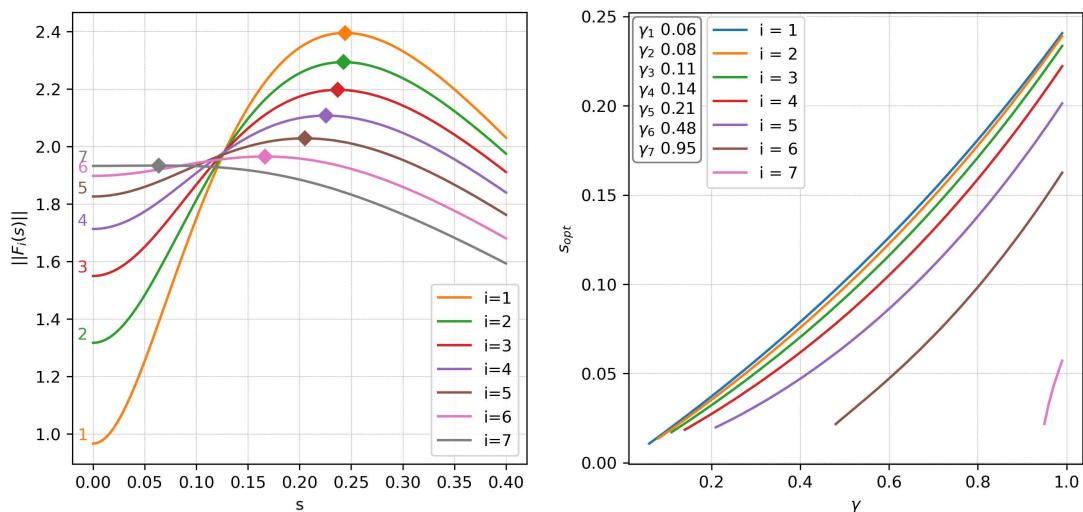
### Funkcija prijenosa

Ističu se funkcije prijenosa  $F_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$  jer one ne postižu maksimum u nuli (vidi sliku 5.21a). Funkcije prijenosa  $F_i$  za  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$  nisu monotone nego imaju lokalni ekstrem izvan nule te trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$ . Također može se uočiti da je vrijednost funkcije prijenosa vrha u nuli manja što je vrh bliži korijenu grafa (vidi tablicu s izdvojenim vrhovima grafa  $J_{15}$  i sliku 5.21a).

S druge pak strane, ako je vrh bliže korijenu tada je vrh osjetljiviji. Za ostale vrhove  $i$  funkcije prijenosa su monotono padajuće i trnu u nula za  $s \rightarrow \infty$  (vidi sliku 5.20a).

### Ovisnost maksimizacijske točke $s_{opt}$ i parametra $\gamma$

Na slici 5.21b, može se uočiti da postoji monotona ovisnost između maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za vrhove 1,2,3,4,5,6 i 7 u grafu  $J_{15}$ . Ovisnost nije linearna, ali nije daleko od linearne. Također, možemo uočiti da postoji neka vrsta monotonosti. Ako je put od korijena do vrha  $i$ , dulji nego put od korijena do vrha  $j$ , onda je vrijednost  $\gamma_i > \gamma_j$ .



(a) Istaknute funkcije grafa  $J_{15}$ .

(b)  $s_{opt} - \gamma$  graf za  $J_{15}$ .

Slika 5.21: Funkcije prijenosa  $F_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$  koje ne postižu maksimum u nuli grafa  $J_{15}$  i ovisnost maksimizacijske točke  $s_{opt}$  i parametra  $\gamma$  za graf  $J_{15}$ .



# Bibliografija

- [1] N. Aliyev, P. Benner, E. Mengi i M. Voigt, *A Subspace Framework for  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm Minimization*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **41** (2020), br. 2, 928–956.
- [2] E. Angriman, M. Predari, A. van der Grinten i H. Meyerhenke, *Approximation of the diagonal of a Laplacian's pseudoinverse for complex network analysis*, 28th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2020), Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020.
- [3] P. Benner i T. Mitchell, *Faster and more accurate computation of the  $H_\infty$  norm via optimization*, SIAM Journal on Scientific Computing **40** (2018), br. 5, A3609–A3635.
- [4] J. S. Caughman i J.J.P. Veerman, *Kernels of directed graph Laplacians*, the electronic journal of combinatorics **13** (2006), br. 1, R39.
- [5] G. E. Dullerud i F. Paganini, *A course in robust control theory: a convex approach*, sv. 36, Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] F. Gao i L. Han, *Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters*, Computational Optimization and Applications **51** (2012), br. 1, 259–277.
- [7] A. A. Hagberg, D. A. Schult i P. J. Swart, *Exploring Network Structure, Dynamics, and Function using NetworkX*, Proceedings of the 7th Python in Science Conference (Pasadena, CA USA) (Gaël Varoquaux, Travis Vaught i Jarrod Millman, ur.), 2008, str. 11 – 15.
- [8] S. Horvat i M. Vrdoljak, *Operacijska istraživanja, 2022.-23.*, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2022.
- [9] A. Jambulapati i A. Sidford, *Efficient  $\tilde{O}(n/\epsilon)$  Spectral Sketches for the Laplacian and its Pseudoinverse*, Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SIAM, 2018, str. 2487–2503.

- [10] P. L. Krapivsky i S. Redner, *Organization of growing random networks*, Physical Review E **63** (2001), br. 6, 066123.
- [11] ———, *Network growth by copying*, Physical Review E **71** (2005), br. 3, 036118.
- [12] M. Mesbahi i M. Egerstedt, *Graph theoretic methods in multiagent networks*, Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks, Princeton University Press, 2010.
- [13] I. Nakić, *Diskretna matematika, ak. god. 2011.-12.*, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2011.
- [14] I. Nakić, D. Tolić, I. Palunko i Z. Tomljanović, *Numerically Efficient Agents-to-Group  $H_\infty$  Analysis*, IFAC-PapersOnLine **55** (2022), br. 20, 199–204.
- [15] I. Nakić, D. Tolić, Z. Tomljanović i I. Palunko, *Numerically efficient  $H_\infty$  analysis of cooperative multi-agent systems*, Journal of the Franklin Institute **359** (2022), br. 16, 9110–9128.
- [16] R. Olfati-Saber i R. M. Murray, *Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays*, IEEE Transactions on automatic control **49** (2004), br. 9, 1520–1533.
- [17] OpenAI, *ChatGPT*, <https://openai.com>, 2021.
- [18] N. R. Peterson i B. Pittel, *Distance between two random  $k$ -out digraphs, with and without preferential attachment*, Advances in Applied Probability **47** (2015), br. 3, 858–879.
- [19] G. Ranjan, Z. L. Zhang i D. Boley, *Incremental computation of pseudo-inverse of Laplacian*, International Conference on Combinatorial Optimization and Applications, Springer, 2014, str. 729–749.
- [20] W. Ren i E. Atkins, *Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange*, International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal **17** (2007), br. 10-11, 1002–1033.
- [21] W. Ren i R. W. Beard, *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*, sv. 27, Springer, 2008.
- [22] A. J. Smola i R. Kondor, *Kernels and regularization on graphs*, Learning Theory and Kernel Machines: 16th Annual Conference on Learning Theory and 7th Kernel Workshop, COLT/Kernel 2003, Washington, DC, USA, August 24-27, 2003. Proceedings, Springer, 2003, str. 144–158.

- [23] Z. Tutek i M. Vrdoljak, *Obične diferencijalne jednađbe, ak. god. 2019.-20.*, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2019.
- [24] J. J. P. Veerman i R. Lyons, *A Primer on Laplacian Dynamics in Directed Graphs*, *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* **23** (2020), br. 2, 196–206.
- [25] K. Zhou i J. C. Doyle, *Essentials of robust control*, sv. 104, Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998.



# Sažetak

Jedan od ciljeva ovog rada bio je razviti numerički efikasan pristup ispitivanja osjetljivosti multiagentnog sustava na poremećaje izazvane na svakom vrhu zasebno. U ovom radu, kao mjeru osjetljivosti multiagentnog sustava uzeli smo  $H_\infty$  normu preslikavanja  $\omega \mapsto \chi$ , gdje je sa  $\omega$  označen inducirani poremećaj pojedinih vrhova, a sa  $\chi$  stanje multiagentnog sustava. Uz to, cilj je bio traženje usmjerenih grafova za koje se  $H_\infty$  norma ne dostiže u nuli te izdvojiti i dodatno proučiti takve grafove. U radu su predstavljena tri različita usmjerena grafa s tim svojstvom.





# Summary

This thesis has had two aims. One goal was to efficiently calculate the sensitivity of a multiagent system when its nodes are disturbed. As a sensitivity measure of a multiagent system we took the  $H_\infty$  norm of the mapping  $\omega \mapsto \chi$ , where  $\omega$  stands for an induced disturbance of some nodes, and  $\chi$  is state of the multiagent system. The second purpose of this thesis was to search for directed graphs for which the  $H_\infty$  norm is not attained at zero and additionally study those graphs. Three different directed graphs with that property are presented in this thesis.



# Životopis

Filip Čačković rođen je 23. lipnja 1993. godine u Zagrebu. Nakon završene XV. gimnazije u Zagrebu, 2012. godine upisuje studij teologije na Katoličko-bogoslovnom fakultetu u Zagrebu, a potom ga od 2014. godine nastavlja na Papinskom sveučilištu Gregoriana u Rimu. Studij teologije završava 2017. godine.

Studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisuje akademske godine 2018./2019. te 2021. godine postaje sveučilišni prvostupnik matematike. Iste godine nastavlja obrazovanje na diplomskom studiju Primijenjena matematika.

Tijekom studija obnašao je funkciju studentskog predstavnika, a dobitnik je i nagrade studentima koji su postigli izvanredne rezultate u izvannastavnim aktivnostima. Od početka studija radi kao dirigent i pijanist u župi sv. Blaža u Zagrebu. Na početku diplomskog studija radio je u firmi AVL d.o.o. kao pisac tehničke dokumentacije, a trenutno je zaposlen u firmi AI Technologies gdje ima priliku baviti se modeliranjem graf-baze podataka za operatora elektroenergetskog sustava.