SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Margareta Gradečki

MNOGOKUTI U VEZI SA ZLATNIM REZOM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Dijana Ilišević

Zagreb, srpanj 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

O zlatnom rezu, ili zlatnom omjeru, govorimo kada je neka cjelina podijeljena na dva dijela tako da je omjer cjeline prema većem dijelu jednak omjeru većeg dijela prema manjem dijelu. U ovom diplomskom radu proučava se veza zlatnog reza s mnogokutima.

Prvo poglavlje je uvodno. U njemu se definira zlatni rez, određuje numerička vrijednost konstante zlatnog reza i opisuju dvije osnovne konstrukcije zlatnog reza (prva u kojoj se za zadanu dužinu konstruira druga dužina tako da se te dvije dužine odnose u zlatnom omjeru i druga u kojoj se zadana dužina dijeli u zlatnom omjeru).

U drugom poglavlju proučava se pravokutnik čije se stranice odnose u zlatnom omjeru, tzv. zlatni pravokutnik. Opisuje se proces podjele zlatnog pravokutnika na kvadrat i zlatni pravokutnik koji se može beskonačno nastaviti tako da se dobiveni zlatni pravokutnici skupe u točku koja se naziva točka skupljanja zlatnog pravokutnika te se izvode koordinate te točke. Opisuje se konstrukcija zlatnog pravokutnika sa zadanom duljom stranicom i konstrukcija zlatnog pravokutnika sa zadanom kraćom stranicom.

U trećem poglavlju definiraju se zlatni trokut i zlatni gnomon, jednakokračni trokuti u kojima se krak i osnovica, odnosno osnovica i krak, odnose u zlatnom omjeru. Izvode se različita svojstva ovih trokuta i opisuju njihove konstrukcije. Definiraju se, proučavaju i konstruiraju i drugi trokuti u kojima se pojavljuje zlatni omjer: pravokutni trokut čije se katete odnose u zlatnom omjeru i Keplerov trokut.

U četvrtom poglavlju definira se zlatni romb i dokazuju neka njegova svojstva. Kako je zlatni romb jednoznačno određen zadavanjem duljine stranice ili duljine jedne od njegovih dijagonala, u skladu s tim opisane su tri konstrukcije zlatnog romba.

Zlatni omjer u pravilnom n-terokutu za $n = 3, 5$ i 10 proučava se u petom poglavlju. Posebno, pravilni peterokut i pravilni deseterokut povezuju se sa zlatnim rezom preko zlatnog trokuta.

Poglavlje 1

Zlatni rez

1.1 Definicija

Definicija 1.1.1. *Kažemo da je dužina podijeljena u zlatnom rezu ako je omjer većeg dijela dužine prema manjem dijelu jednak omjeru cijele dužine prema većem dijelu dužine.*

Slika 1.1: Dužina $\overline{AC}$ podijeljena u zlatnom rezu

Dužina $\overline{AC}$ podijeljena je u zlatnom rezu točkom B, takvom da je $|AB| > |BC|$, ako vrijedi

$$|AB| : |BC| = |AC| : |AB|.$$

Zapišimo omjer u obliku razlomka:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Označimo $|AB|$ i $|BC|$ sa u i v, redom. Tada je $|AC| = u + v$ te slijedi

$$\frac{u}{v} = \frac{u+v}{u},$$

pri čemu je $u > v > 0$. Ako stavimo $\varphi = \frac{u}{v}$, tada prethodna jednakost postaje

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Nakon sređivanja ove jednakosti dobijemo kvadratnu jednadžbu

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

čija su rješenja

$$\varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

S obzirom na to da je φ pozitivan, traženo rješenje je

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\ldots$$

Slijedi da je omjer manjeg dijela dužine prema većem jednak

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.61803\ldots$$

U ovom će radu φ uvijek označavati broj $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tzv. konstantu zlatnog reza. Dakle, φ je pozitivno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$, a $\frac{1}{\varphi}$ pozitivno rješenje jednadžbe $x^2 + x - 1 = 0$.

Lema 1.1.2. *Vrijedi*

$$\varphi = \frac{1}{2\sin 18^\circ} = 2\sin 18^\circ + 1 = 2\cos 36^\circ.$$

Dokaz. Neka je $\alpha = 18^\circ$. Tada je $\alpha \in \langle 0, 90^\circ \rangle$, pa je $0 < \sin\alpha < 1$ i $0 < \cos\alpha < 1$. Uočimo da $\alpha = 18^\circ$ povlači

$$3\alpha = 90^\circ - 2\alpha$$

odakle slijedi

$$\cos 3\alpha = \sin 2\alpha.$$

Primijenimo sljedeće identitete na gornju jednadžbu:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha. \end{aligned}$$

Slijedi

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Kako je $\cos\alpha > 0$, to jednadžbu možemo podijeliti sa $\cos\alpha$. Dobijemo

$$4\cos^2\alpha - 3 = 2\sin\alpha.$$

Primjenom identiteta $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, prethodna jednadžba svodi se na

$$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0.$$

Riješimo ovu kvadratnu jednadžbu supstitucijom $t = \sin\alpha$:

$$4t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su

$$t_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad t_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}.$$

Slijedi

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ ili } \sin\alpha = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}.$$

S obzirom na to da mora biti $\sin\alpha > 0$, traženo rješenje jednadžbe je

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Kako je $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, to je $\sin\alpha = \frac{1}{2\varphi}$, odnosno

$$\varphi = \frac{1}{2\sin 18^\circ}.$$

Uzmemo li u obzir da je $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$, dobivamo i

$$\varphi = 2\sin 18^\circ + 1.$$

Nadalje,

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\varphi}{2},$$

pa je

$$\varphi = 2\cos 36^\circ.$$

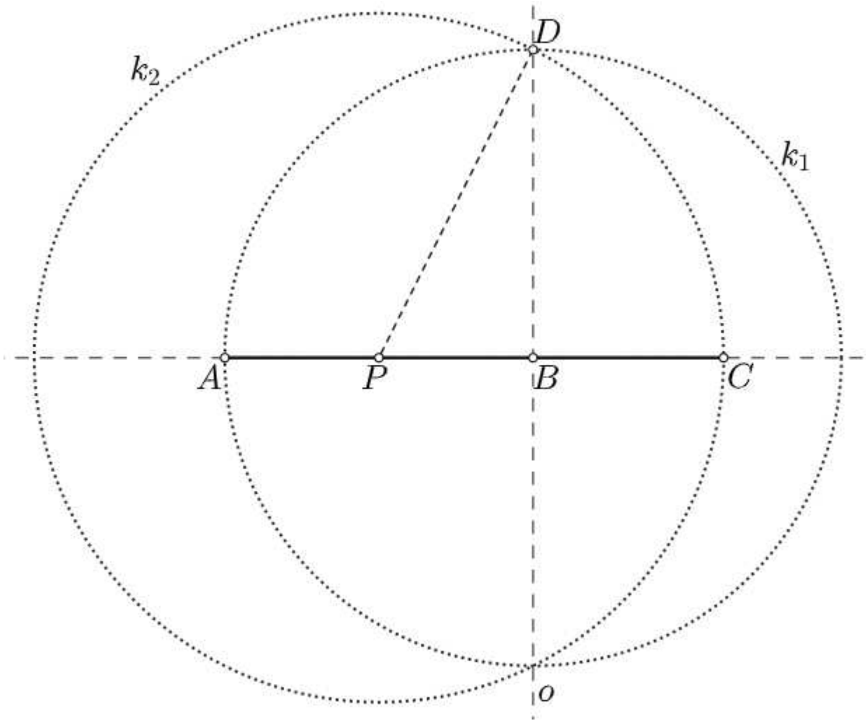
□

1.2 Konstrukcije zlatnog reza

Konstrukcija zlatnog reza može se provesti pomoću ravnala i šestara. U ovome radu izvest ćemo dvije takve konstrukcije: jednu u kojoj ćemo na temelju zadane dužine konstruirati drugu dužinu, takvu da je omjer duljina tih dviju dužina jednak zlatnom omjeru, i jednu u kojoj ćemo zadanu dužinu podijeliti u zlatnom omjeru.

Konstrukcija 1

Neka je zadana dužina $\overline{AB}$ duljine a (slika 1.2). Konstruirat ćemo dužinu duljine b tako da je $\frac{a}{b} = \varphi$. Kroz točku B povucimo okomicu na pravac AB. Neka je k_1 kružnica sa središtem u B radijusa a. Ta kružnica siječe okomicu u dvije točke. Označimo bilo koju od te dvije točke sa D. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$ te k_2 kružnica sa središtem u P radijusa $|DP|$. Kružnica k_2 i pravac AB sijeku se u dvije točke. Bez smanjenja općenitosti, neka je željena točka C na produžetku dužine $\overline{AB}$ preko točke B. Tada je $\overline{BC}$ tražena dužina.



Slika 1.2: Konstrukcija dužine $\overline{BC}$ kada je zadana dužina $\overline{AB}$

Dokaz. Uočimo da je $|PB| = \frac{1}{2}a$ te da je, prema Pitagorinom poučku primijenjenom na $\triangle PBD$,

$$|PC| = |PD| = \sqrt{|PB|^2 + |BD|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Duljinu dužine $\overline{BC}$ odredit ćemo kao razliku duljina dužina $\overline{PC}$ i $\overline{PB}$:

$$|BC| = |PC| - |PB| = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

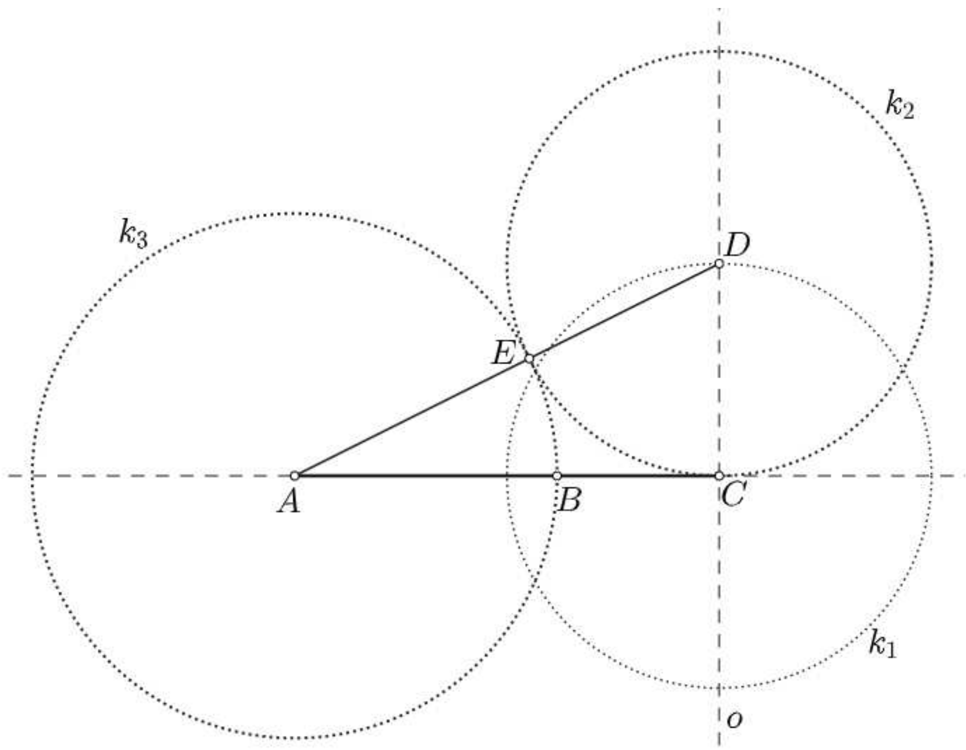
Slijedi da je omjer duljina $|AB|$ i $|BC|$:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

jednak zlatnom omjeru, odnosno za $b = |BC|$ vrijedi $\frac{a}{b} = \varphi$. □

Konstrukcija 2

Neka je zadana dužina $\overline{AC}$ duljine a (slika 1.3). Podijelimo tu dužinu u zlatnom rezu. Konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u C radijusa $\frac{a}{2}$. Kroz točku C povucimo okomicu na AC. Kružnica k_1 siječe tu okomicu u dvije točke. Označimo bilo koju od te dvije točke sa D. Zatim konstruirajmo kružnicu k_2 sa središtem u D radijusa $\frac{a}{2}$. Neka je E točka u kojoj kružnica k_2 siječe dužinu $\overline{AD}$. Konstruirajmo sada kružnicu k_3 sa središtem u A radijusa $|AE|$. Presjek te kružnice i dužine $\overline{AC}$ je tražena točka B.



Slika 1.3: Konstrukcija točke B na zadanoj dužini $\overline{AC}$

Dokaz. Prema konstrukciji vrijedi $|AC| = a$ i $|CD| = |ED| = \frac{a}{2}$. Na pravokutan trokut $\triangle ACD$ primijenimo Pitagorin poučak i dobijemo

$$|AD| = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Odredimo duljine dužina $\overline{AE}$ i $\overline{BC}$:

$$|AE| = |AD| - |ED| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

$$|BC| = |AC| - |AB| = |AC| - |AE| = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a.$$

Slijedi

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|BC|} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Dobili smo da je omjer duljina dužina $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ jednak zlatnom rezu, što je i trebalo dokazati. □

1.3 Povijesne crtice

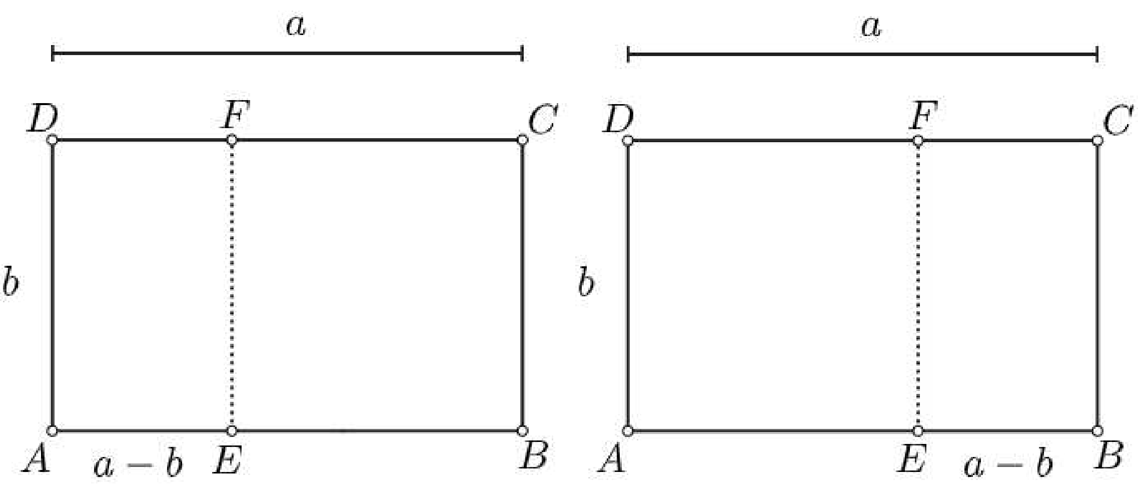
Iako se naziv *zlatni rez* koristi tek od 19. stoljeća, omjer zlatnog reza već je bio poznat u doba antičke Grčke. Smatra se da je grčki kipar Fidije u 5. st. pr. Kr. primijenio zlatni rez u gradnji antičkog hrama Partenona. Platon je u 5./4. st. pr. Kr. opisao pet pravilnih geometrijskih tijela kao temelj harmonične strukture svijeta, gdje se zlatni rez pojavljuje pri oblikovanju nekih od ovih tijela. No, prvi koji je uočio ovaj broj i matematički ga izrazio je grčki matematičar Euklid. U 3. st. pr. Kr. napisao je knjigu „Elementi“ u kojoj je naveo prvu zabilježenu definiciju zlatnog reza, dao konstrukciju tog omjera i nazvao ga podjelom dužine u „krajnjem i srednjem” omjeru. Teorija zlatnog reza doživjela je procvat u renesansi kada su ga mnogi umjetnici svjesno počeli koristiti u planiranju svojih djela. Zlatni rez dobiva i naziv „božanstveni omjer” zbog knjige „De divina proportione” talijanskog matematičara Luce Paciolija koji se u toj knjizi bavio raznim omjerima, među kojima je bio i zlatni omjer. Godine 1597. zlatni rez je prvi put zapisan kao decimalan broj, a Kepler je 1609. bio prvi koji je eksplicitno povezao zlatni rez s Fibonaccijevim nizom. Zlatni rez može se uočiti na Keopsovoj piramidi u Gizi, Kineskom zidu, rimskom Panteonu, Konstantinovom slavoluku te na brojnim crkvama i katedralama, kao što je npr. najpoznatija gotička katedrala Notre Dame, a poznato je i da se nalazi na Bašćanskoj ploči.

Poglavlje 2

Zlatni pravokutnik

2.1 Definicija zlatnog pravokutnika

Definicija 2.1.1. *Zlatnim pravokutnikom nazivamo pravokutnik kojemu je omjer duljine dulje stranice naprama kraće jednak zlatnom omjeru φ.*



Slika 2.1: Zlatni pravokutnik

Na slici je dan zlatni pravokutnik $ABCD$ kojemu dulja stranica ima duljinu a, a kraća duljinu b. Dakle, vrijedi $\frac{a}{b} = \varphi$.

Uočimo da je omjer površina zlatnog pravokutnika i kvadrata nad kraćom stranicom jednak

$$\frac{ab}{b^2} = \frac{a}{b} = \varphi.$$

Ako od zlatnog pravokutnika odsiječemo kvadrat duljine stranice b, što se može učiniti na dva načina (vidite sliku 2.1), ostane pravokutnik čije su stranice duljina b i $a-b$, odnosno $\frac{1}{\varphi}a$ i

$$a - \frac{1}{\varphi}a = \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)a = \frac{\varphi - 1}{\varphi}a = \frac{\frac{1}{\varphi}}{\varphi}a = \frac{1}{\varphi^2}a.$$

S obzirom na to da vrijedi

$$\frac{\frac{1}{\varphi}a}{\frac{1}{\varphi^2}a} = \varphi,$$

dobiveni pravokutnik također je zlatni pravokutnik. Taj proces može se ponavljati beskonačno mnogo puta. U n-tom koraku dobiva se zlatni pravokutnik čije stranice imaju duljine

$$\frac{1}{\varphi^n}a \quad \text{i} \quad \frac{1}{\varphi^{n+1}}a.$$

Ako su $ABCD$ i $A'B'C'D'$ zlatni pravokutnici sa stranicama duljina a, b i a', b' redom (pri čemu je $a > b$ i $a' > b'$), tada je

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{a'}{b'},$$

odakle slijedi

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Sada prema S-K-S teoremu o sličnosti zaključujemo da su pravokutni trokuti ABC i $A'B'C'$ slični. Posebno, ako su $d = |AC|$ i $d' = |A'C'|$ duljine dijagonala danih pravokutnika, tada je

$$\frac{d}{d'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}.$$

Dakle, $\frac{d}{a}$ i $\frac{d}{b}$ su konstante u zlatnom pravokutniku. U sljedećoj propoziciji ćemo izračunati vrijednosti tih konstanti. Uočimo da je

$$\frac{\frac{d}{b}}{\frac{d}{a}} = \frac{a}{b} = \varphi.$$

Propozicija 2.1.2. *Neka je dan zlatni pravokutnik kojemu dulja stranica ima duljinu a, a kraća b. Tada je duljina d njegove dijagonale jednaka*

$$d = \frac{a\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} = \frac{b\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Dokaz. Primjenom Pitagorinog poučka na $\triangle ABC$ (vidite sliku 2.2) dobije se da je

$$d = \sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = a\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = a\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}$$

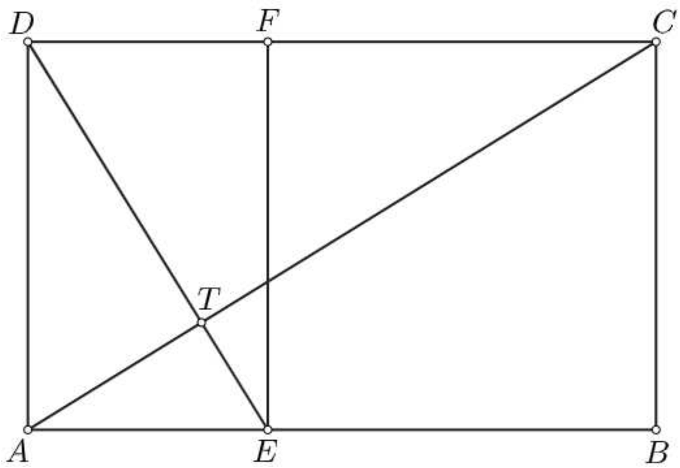
te

$$d = \sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+1} = b\sqrt{\varphi^2+1}.$$

Sada preostaje uzeti u obzir da je

$$\sqrt{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{10\pm2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{2}.$$

□



Slika 2.2: Dijagonale zlatnih pravokutnika

Propozicija 2.1.3. *Dijagonala zlatnog pravokutnika okomita je na dijagonalu zlatnog pravokutnika dobivenog odsijecanjem kvadrata nad kraćom stranicom.*

Dokaz. Budući da je pravokutnik simetričan s obzirom na simetrale svojih stranica, postoje četiri para dijagonala opisana ovom propozicijom. Dokazat ćemo propoziciju samo za jedan par dijagonala. Za preostala tri slučaja dokaz slijedi analogno.

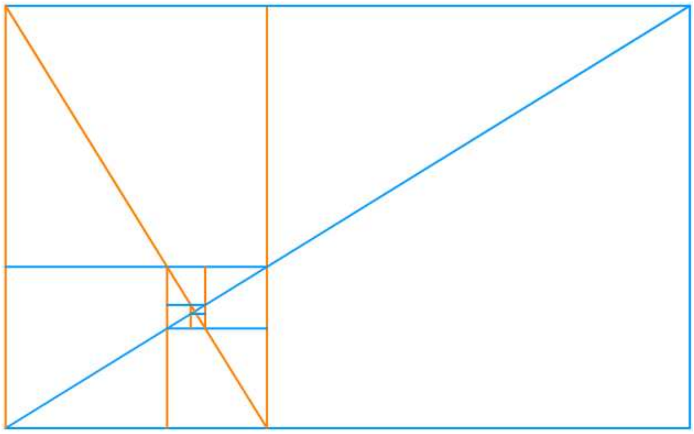
Neka je zadan zlatni pravokutnik $ABCD$ te neka su E i F točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, redom, takve da je $EBCF$ kvadrat, kao na slici 2.2. Tada je $AEFD$ zlatni pravokutnik te vrijedi

$$\varphi = \frac{|DC|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AE|}.$$

Sjecište dijagonale $\overline{AC}$ pravokutnika $ABCD$ i dijagonale $\overline{DE}$ pravokutnika $AEFD$ označimo sa T. S obzirom na to da stranice pravokutnika zatvaraju pravi kut, pa su kutovi $\angle ADC$ i $\angle EAD$ sukladni, i da su katete trokuta $\triangle ADC$ i $\triangle EAD$ proporcionalne, prema S-K-S poučku o sličnosti trokuta slijedi da su trokuti $\triangle ADC$ i $\triangle EAD$ slični. Zato su kutovi $\angle CAD$ i $\angle DEA$ sukladni. Nadalje, $\angle CAD$ je komplementaran $\angle EAC$ pa je i $\angle DEA$ komplementaran $\angle EAC$ iz čega zaključujemo da je $\angle ATE$ pravi kut, tj. pravci AC i DE su okomiti. $\square$

2.2 Točka skupljanja zlatnog pravokutnika

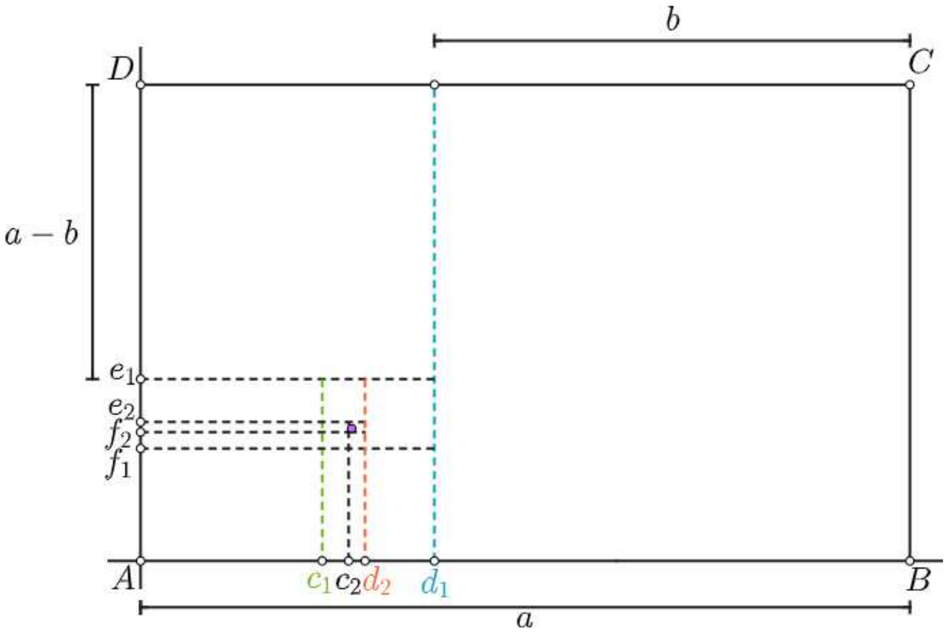
Dijagonale pravokutnika $ABCD$ i pravokutnika $AEFD$, dobivenog odsijecanjem kvadrata $BCFE$ nad kraćom stranicom pravokutnika $ABCD$, ujedno su i dijagonale alternirajućih pravokutnika, s obzirom na orijentaciju pravokutnika (slika 2.3). Kada bismo postupak odsijecanja kvadrata nad kraćom stranicom pravokutnika ponovili beskonačno mnogo puta, nastali pravokutnici težili bi jednoj točki (x_s, y_s), tzv. točki skupljanja zlatnog pravokutnika, koja je ujedno i sjecište navedenih dijagonala.



Slika 2.3: Sjecište dijagonala

Smjestimo pravokutnik $ABCD$ u koordinatni sustav tako da je točka A ishodište, a pravci AB i AD koordinatne osi, kao na slici 2.4. Točke B i D imaju koordinate a i b na osima AB i AD, redom. Isprekidane crte predstavljaju crte po kojima se odsijecaju kvadrati (u suprotnom smjeru od kazaljke na satu). Te crte sijeku os AB redom u točkama $d_1, c_1, d_2, c_2, \ldots$, a os AD u točkama $e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots$. Primijetimo kako se točke c_i približavaju točki skupljanja slijeva, dok se točke d_i približavaju zdesna. Također, točke e_i približavaju se točki skupljanja odozgo, dok se točke f_i približavaju odozdo.

Odredimo duljine stranica zlatnih pravokutnika dobivenih odsijecanjem kvadrata. Već smo zaključili da n-ti zlatni pravokutnik u procesu odsijecanja kvadrata ima stranice duljina



Slika 2.4: Točka skupljanja zlatnog pravokutnika

$\frac{1}{\varphi^n}a$ i $\frac{1}{\varphi^{n+1}}a$. Duljine stranica početnog (nultog) pravokutnika $ABCD$ su a i $b = \frac{1}{\varphi}a$, a sljedeća tri dobivena pravokutnika imaju duljine stranica $\frac{1}{\varphi}a$ i d_1, d_1 i e_1 te e_1 i $d_1 - c_1$, redom. Stoga je

$$d_1 = \frac{1}{\varphi^2}a, \qquad e_1 = \frac{1}{\varphi^3}a, \qquad d_1 - c_1 = \frac{1}{\varphi^4}a.$$

Uočimo kako su onda duljine stranica četvrtog, petog, šestog i sedmog pravokutnika jednake

$$\begin{aligned}
d_1 - c_1 &= \frac{1}{\varphi^4}a \quad \text{i} \quad e_1 - f_1 = \frac{1}{\varphi^5}a,\\
e_1 - f_1 &= \frac{1}{\varphi^5}a \quad \text{i} \quad d_2 - c_1 = \frac{1}{\varphi^6}a,\\
d_2 - c_1 &= \frac{1}{\varphi^6}a \quad \text{i} \quad e_2 - f_1 = \frac{1}{\varphi^7}a,\\
e_2 - f_1 &= \frac{1}{\varphi^7}a \quad \text{i} \quad d_2 - c_2 = \frac{1}{\varphi^8}a.
\end{aligned}$$

Općenito:

$$\begin{aligned} d_n - c_n &= \frac{1}{\varphi^{4n}}a \quad &\text{i} \quad e_n - f_n &= \frac{1}{\varphi^{4n+1}}a, \\ e_n - f_n &= \frac{1}{\varphi^{4n+1}}a \quad &\text{i} \quad d_{n+1} - c_n &= \frac{1}{\varphi^{4n+2}}a, \\ d_{n+1} - c_n &= \frac{1}{\varphi^{4n+2}}a \quad &\text{i} \quad e_{n+1} - f_n &= \frac{1}{\varphi^{4n+3}}a, \\ e_{n+1} - f_n &= \frac{1}{\varphi^{4n+3}}a \quad &\text{i} \quad d_{n+1} - c_{n+1} &= \frac{1}{\varphi^{4n+4}}a. \end{aligned}$$

Odatle dobivamo rekurzivnu formulu za niz (c_n):

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= (d_{n+1} - c_n) + (c_{n+1} - d_{n+1}) \\ &= \frac{1}{\varphi^{4n+2}}a - \frac{1}{\varphi^{4n+4}}a = \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^{4n+4}}a \\ &= \frac{\varphi}{\varphi^{4n+4}}a = \frac{1}{\varphi^{4n+3}}a, \end{aligned}$$

kao i rekurzivnu formulu za niz (e_n):

$$\begin{aligned} e_n - e_{n+1} &= (e_n - f_n) - (e_{n+1} - f_n) \\ &= \frac{1}{\varphi^{4n+1}}a - \frac{1}{\varphi^{4n+3}}a = \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^{4n+3}}a \\ &= \frac{\varphi}{\varphi^{4n+3}}a = \frac{1}{\varphi^{4n+2}}a. \end{aligned}$$

Kako te jednakosti vrijede za svaki $n \in \mathbf{N}$, posebno dobivamo:

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + \frac{1}{\varphi^{4n-1}}a, \\ &\vdots \\ c_2 &= c_1 + \frac{1}{\varphi^7}a, \\ c_1 &= \frac{1}{\varphi^3}a. \end{aligned}$$

Zbrajanje ovih n jednakosti nakon kraćenja daje

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\varphi^3}a + \frac{1}{\varphi^7}a + \ldots + \frac{1}{\varphi^{4n-1}}a \\
&= \frac{1}{\varphi^3}a\left(1 + \frac{1}{\varphi^4} + \cdots + \frac{1}{\varphi^{4(n-1)}}\right) \\
&= \frac{1}{\varphi^3}a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\varphi^4}\right)^n}{1 - \frac{1}{\varphi^4}} = \frac{1}{\varphi^3}a \cdot \frac{1 - \frac{1}{\varphi^{4n}}}{\frac{\varphi^4 - 1}{\varphi^4}} \\
&= \frac{\varphi}{\varphi^4 - 1}a\left(1 - \frac{1}{\varphi^{4n}}\right).
\end{aligned}$$

Uvrstimo u gornju jednakost $\varphi^4 - 1 = (\varphi^2 - 1)(\varphi^2 + 1) = \varphi(\varphi + 2)$. Tada imamo

$$c_n = \frac{a}{\varphi + 2}\left(1 - \frac{1}{\varphi^{4n}}\right) \longrightarrow \frac{a}{\varphi + 2},$$

a također i

$$d_n = c_n + \frac{1}{\varphi^{4n}}a \longrightarrow \frac{a}{\varphi + 2}.$$

Prema tome, koordinata x_s točke skupljanja jednaka je

$$x_s = \frac{a}{\varphi + 2}. \tag{2.1}$$

Uvrštavanjem $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ u gornji izraz slijedi:

$$x_s = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}a \approx 0.276a.$$

Analogno imamo

$$\begin{aligned}
e_{n-1} &= e_n + \frac{1}{\varphi^{4n-2}}a, \\
&\vdots \\
e_2 &= e_3 + \frac{1}{\varphi^{10}}a, \\
e_1 &= e_2 + \frac{1}{\varphi^6}a,
\end{aligned}$$

pa zbrajanjem dobivamo

$$e_1 = e_n + \frac{1}{\varphi^6}a + \frac{1}{\varphi^{10}}a + \cdots + \frac{1}{\varphi^{4n-2}}a,$$

odnosno, kada uzmemo u obzir $e_1 = \frac{1}{\varphi^3}a$,

$$\begin{aligned}
e_n =& \frac{1}{\varphi^3}a - \frac{1}{\varphi^6}a\left(1 + \frac{1}{\varphi^4} + \cdots + \frac{1}{\varphi^{4(n-2)}}\right) \\
=& \frac{1}{\varphi^3}a - \frac{1}{\varphi^6}a \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\varphi^4}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{\varphi^4}} = \frac{1}{\varphi^3}a - \frac{1}{\varphi^6}a \cdot \frac{1 - \frac{1}{\varphi^{4(n-1)}}}{\frac{\varphi^4 - 1}{\varphi^4}} \\
\longrightarrow& \frac{1}{\varphi^3}a - \frac{1}{\varphi^6}a \cdot \frac{1}{\frac{\varphi^4-1}{\varphi^4}} = \frac{1}{\varphi^3}a - \frac{1}{\varphi^2(\varphi^4 - 1)}a = \frac{1}{\varphi^3}a - \frac{1}{\varphi^3(\varphi + 2)}a \\
=& \frac{\varphi + 1}{\varphi^3(\varphi + 2)}a = \frac{\varphi^2}{\varphi^3(\varphi + 2)}a = \frac{1}{\varphi(\varphi + 2)}a = \frac{b}{\varphi + 2}.
\end{aligned}$$

Dakle, koordinata y_s točke skupljanja jednaka je

$$y_s = \frac{b}{\varphi + 2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}b \approx 0.276b. \tag{2.2}$$

Propozicija 2.2.1. *Sjecište dijagonala zlatnog pravokutnika i zlatnog pravokutnika dobivenog odsijecanjem kvadrata nad kraćom stranicom je točka skupljanja.*

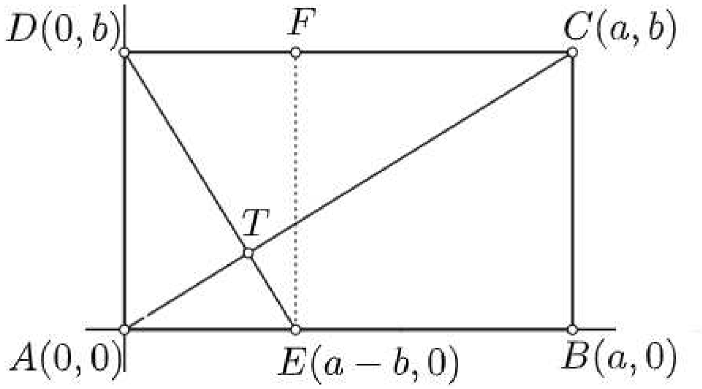
Dokaz. Neka je $ABCD$ pravokutnik u koordinatnom sustavu kao na slici 2.5. Neka je točka T točka presjeka dijagonala. Iz oznaka na slici i primjenom $b = \frac{1}{\varphi}a$ slijedi da su jednadžbe pravaca AC i DE jednake

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\varphi}x, \\
y &= -\varphi x + b.
\end{aligned}$$

Rješavanjem dobivenog sustava jednadžbi za x i y dobije se

$$\begin{aligned}
x &= \frac{b}{\varphi + \frac{1}{\varphi}} = \frac{\frac{1}{\varphi}a}{\varphi + \frac{1}{\varphi}} = \frac{a}{\varphi^2 + 1} = \frac{a}{(\varphi + 1) + 1} = \frac{a}{\varphi + 2}, \\
y &= \frac{1}{\varphi}x = \frac{\frac{1}{\varphi}a}{\varphi + 2} = \frac{b}{\varphi + 2}.
\end{aligned}$$

Sada iz (2.1) i (2.2) slijedi tvrdnja. $\square$



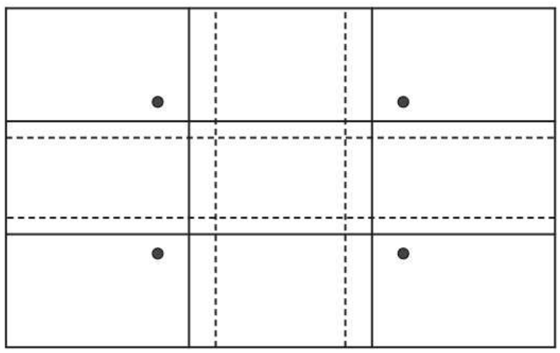
Slika 2.5: Točka skupljanja

Napomena. Primijetimo kako se pomoću jednadžbi pravaca AC i DE iz dokaza propozicije 2.2.1 može jednostavno analitički dokazati propozicija 2.1.3.

S obzirom na simetričnost pravokutnika, postoje četiri točke skupljanja zlatnog pravokutnika (vidite sliku 2.6), čije su koordinate

$$\left(\frac{a}{\varphi+2}, \frac{b}{\varphi+2}\right), \left(\frac{a}{\varphi+2}, \frac{\varphi+1}{\varphi+2}b\right), \left(\frac{\varphi+1}{\varphi+2}a, \frac{\varphi+1}{\varphi+2}b\right) \text{ i } \left(\frac{\varphi+1}{\varphi+2}a, \frac{b}{\varphi+2}\right).$$

Za usporedbu, na slici su označene i crte koje dijele pravokutnik u zlatnom omjeru po dužini i širini te crte koje dijele pravokutnik na tri jednaka dijela.



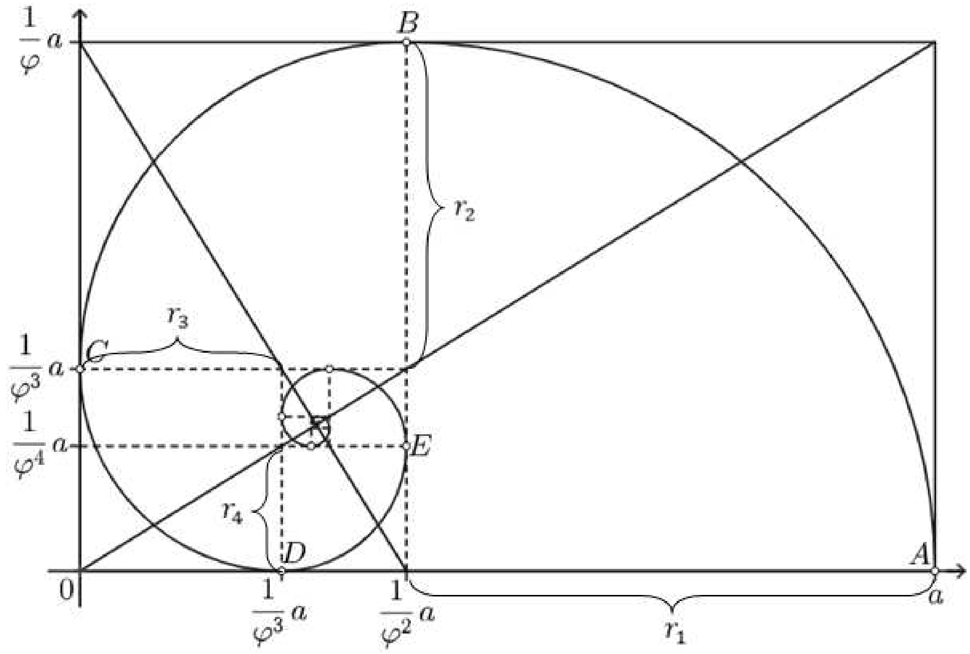
Slika 2.6: Četiri točke skupljanja

Spajanjem vrhova zlatnih pravokutnika crtanjem četvrtina kružnica, kao na slici 2.7, nastaje spirala koja konvergira točki skupljanja zlatnog pravokutnika okrećući se oko nje. Ova spirala naziva se zlatnom spiralom. Kako znamo duljine stranica zlatnih pravokutnika, možemo odrediti radijuse tih kružnica:

$$r_1 = \frac{1}{\varphi}a, \quad r_2 = \frac{1}{\varphi^2}a, \quad r_3 = \frac{1}{\varphi^3}a, \quad r_4 = \frac{1}{\varphi^4}a, \ \dots$$

Primijetimo da je kut rotacije θ između svaka dva odgovarajuća vrha zlatnih pravokutnika (na slici 2.7 to su vrhovi $A, B, C, D, E, \dots$) jednak $\frac{\pi}{2}$. Dakle, svakim okretajem za $\frac{\pi}{2}$, radijus se množi sa φ^{-1}, a onda svakim okretajem za 2π, sa φ^{-4}. Prema tome, jednadžba spirale na kojoj leže vrhovi zlatnih pravokutnika je

$$r(\theta) = a\varphi^{-\frac{2}{\pi}\theta}.$$



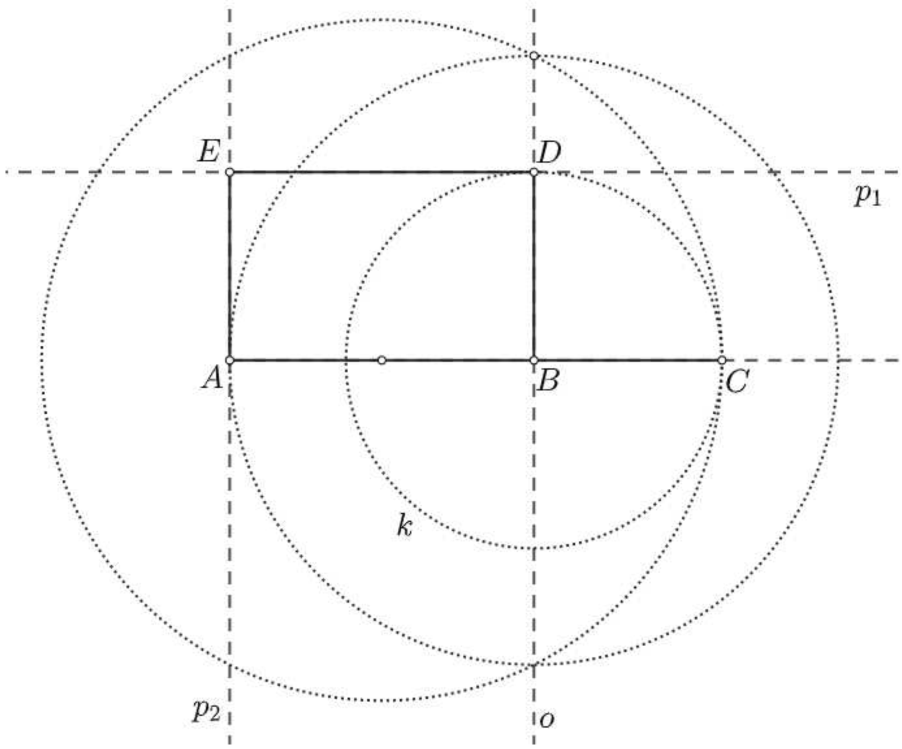
Slika 2.7: Zlatna spirala

2.3 Konstrukcije zlatnog pravokutnika

Provest ćemo dvije konstrukcije: prvu sa zadanom duljom stranicom i drugu sa zadanom kraćom stranicom.

Konstrukcija 1

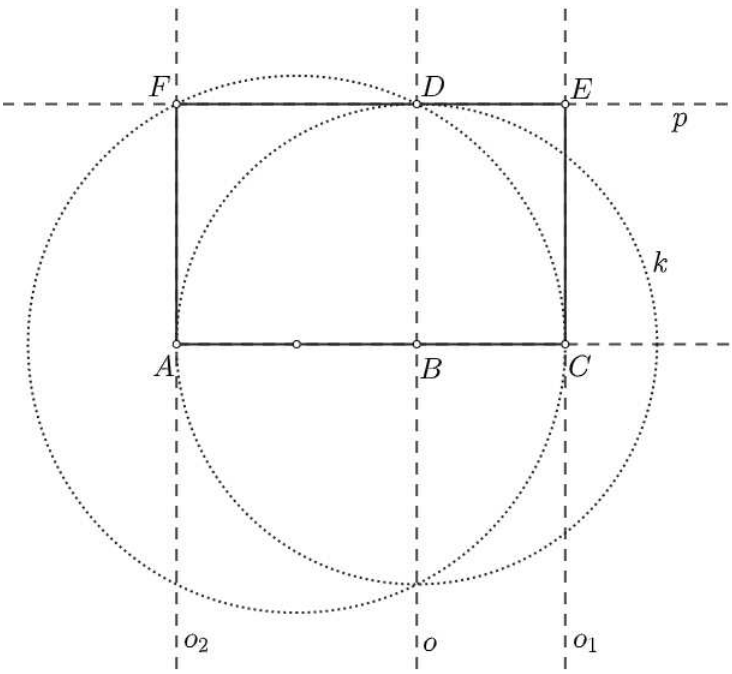
Neka je zadana dulja stranica pravokutnika, dužina $\overline{AB}$ duljine a (slika 2.8). Najprije, prateći jednu od konstrukcija zlatnog reza, konstruirajmo dužinu $\overline{BC}$ tako da točka B dijeli dužinu $\overline{AC}$ u zlatnom rezu. Kroz točku B povucimo okomicu o na AB. Zatim konstruirajmo kružnicu k sa središtem u B radijusa $|BC|$. Označimo sa D jednu od točaka presjeka te kružnice i okomice o. Povucimo paralelu s AB kroz D te paralelu s BD kroz A. Presjek tih paralela je točka E. Dobivenom pravokutniku $ABDE$ stranice se odnose u omjeru zlatnog reza.



Slika 2.8: Konstrukcija zlatnog pravokutnika sa zadanom duljinom dulje stranice

Konstrukcija 2

Neka je zadana kraća stranica pravokutnika, dužina $\overline{AB}$ duljine b (slika 2.9). Prateći jednu od konstrukcija zlatnog reza, konstruirajmo dužinu $\overline{BC}$ tako da točka B dijeli dužinu $\overline{AC}$ u zlatnom rezu. Zatim konstruirajmo kružnicu k sa središtem u B radijusa b. Povucimo okomicu o na $\overline{AB}$ kroz točku B. Označimo bilo koju točku presjeka kružnice k i okomice o sa D. Konstruirajmo sada paralelu p sa $\overline{AB}$ kroz D te okomice na $\overline{AC}$ kroz A i C. Presjeci tih okomica i paralele p su točke E i F. Dobiveni pravokutnik $ACEF$ traženi je pravokutnik.



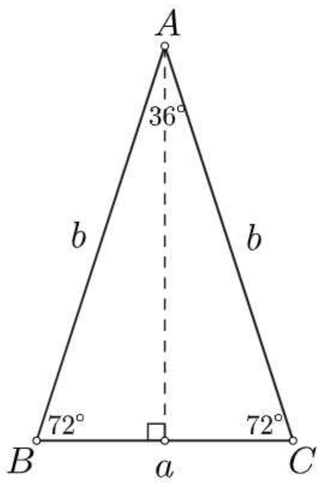
Slika 2.9: Konstrukcija zlatnog pravokutnika sa zadanom duljinom kraće stranice

Poglavlje 3

Zlatni trokut i drugi trokuti u vezi sa zlatnim rezom

3.1 Zlatni trokut i zlatni gnomon

Definicija 3.1.1. *Zlatnim trokutom nazivamo jednakokračan trokut kojemu je omjer duljine kraka i duljine osnovice jednak zlatnom omjeru* φ.



Slika 3.1: Zlatni trokut

Svi zlatni trokuti su slični što se može zaključiti iz sljedeće propozicije i K-K-K poučka o sličnosti trokuta.

Propozicija 3.1.2. *Mjere kutova zlatnog trokuta su* 72°, 72° *i* 36°.

Dokaz. Ako je a duljina osnovice, a b duljina kraka jednakokračnog trokuta, tada je

$$\frac{b}{a} = \varphi.$$

Odredimo sinus kuta $\frac{\alpha}{2}$, gdje je α kut nasuprot osnovici. Prema definiciji sinusa slijedi

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b} = \frac{1}{2\varphi}.$$

Prema lemi 1.1.2 vrijedi

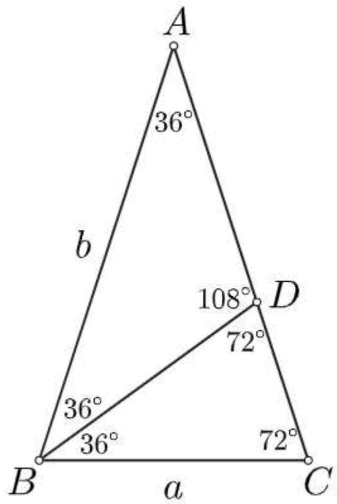
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin 18^\circ,$$

pa je

$$\alpha = 36^\circ.$$

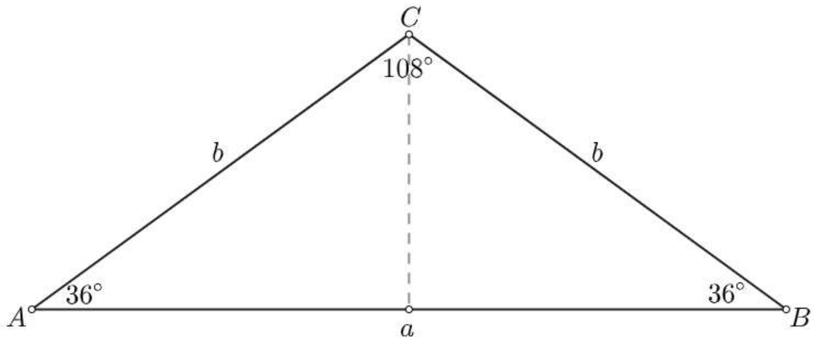
Iz teorema o zbroju unutarnjih kutova u trokutu slijedi da su mjere kutova uz osnovicu jednake 72°. □

Neka je $\triangle ABC$ zlatni trokut s osnovicom $\overline{BC}$. Konstruirajmo simetralu bilo kojeg kuta uz osnovicu trokuta, npr. kuta $\angle ABC$. Neka je sjecište te simetrale i tom kutu nasuprotne stranice točka D. Time smo podijelili $\triangle ABC$ na dva jednakokračna trokuta mjera kutova kao na slici 3.2. Trokut $\triangle BCD$ sličan je trokutu $\triangle ABC$ pa je i $\triangle BCD$ zlatni trokut. Primijetimo kako je omjer duljine osnovice i duljine kraka dobivenog tupokutnog jednakokračnog trokuta $\triangle BDA$ jednak φ.



Slika 3.2: Zlatni trokut i zlatni gnomon

Definicija 3.1.3. *Jednakokračan trokut kojemu je omjer duljine osnovice i duljine kraka jednak φ naziva se zlatni gnomon.*



Slika 3.3: Zlatni gnomon

Propozicija 3.1.4. *Mjere kutova zlatnog gnomona su* $36°$, $36°$ *i* $108°$.

Dokaz. Ako je a duljina osnovice, a b duljina kraka jednakokračnog trokuta, tada je

$$\frac{a}{b} = \varphi.$$

Odredimo kosinus kuta β, gdje je β kut uz osnovicu:

$$\cos\beta = \frac{a}{2b} = \frac{\varphi}{2}.$$

Iz leme 1.1.2 slijedi

$$\cos\beta = \cos 36°,$$

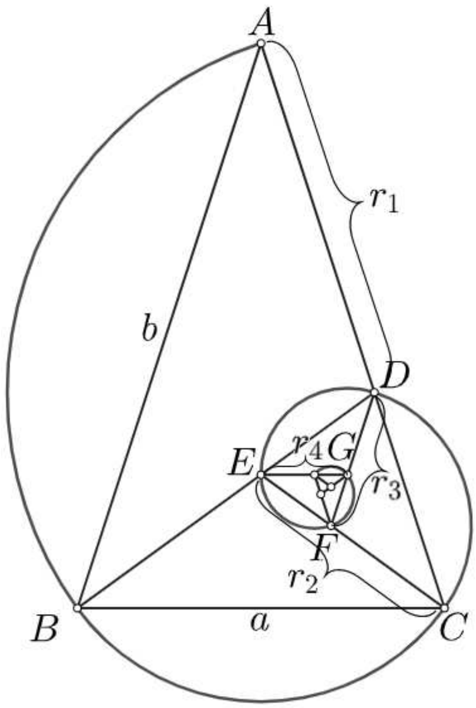
iz čega dobivamo

$$\beta = 36°.$$

Iz teorema o zbroju unutarnjih kutova trokuta slijedi da je mjera kuta nasuprot osnovici jednaka $108°$. □

Iz ove propozicije zaključujemo da su svi zlatni gnomoni slični. Iako su i zlatni trokut i zlatni gnomon jednakokračni trokuti definirani pomoću zlatnog reza, vidimo da je zlatni trokut šiljastokutan, a zlatni gnomon tupokutan trokut. Kutovi zlatnog trokuta su u omjeru 2 : 2 : 1, a zlatnog gnomona 1 : 1 : 3.

Postupak podjele zlatnog trokuta na novi zlatni trokut i gnomon možemo ponoviti beskonačno mnogo puta. Spajanjem vrhova dobivenih zlatnih trokuta kružnim lukovima, počevši od vrha A, kao na slici 3.4, dobivamo zlatnu spiralu trokuta.



Slika 3.4: Zlatna spirala zlatnog trokuta

Odredimo duljine osnovica tako dobivenih zlatnih trokuta. Trokut $\triangle ABC$ ima osnovicu $\overline{BC}$ duljine a. Kako je $\frac{|BC|}{|CD|} = \varphi$, slijedi da je $|CD| = \frac{1}{\varphi}|BC| = \frac{1}{\varphi}a$. Analogno, $\frac{|CD|}{|DE|} = \varphi$, pa je $|DE| = \frac{1}{\varphi}|CD| = \frac{1}{\varphi^2}a$. Primijetimo kako je duljina osnovice svakog sljedećeg zlatnog trokuta $\frac{1}{\varphi}$ duljine osnovice prethodnog zlatnog trokuta, odnosno duljina osnovice n-tog zlatnog trokuta je

$$\frac{1}{\varphi^n}a.$$

Izračunajmo duljine radijusa kružnih lukova:

$$\begin{aligned}
r_1 &= |AD| = |BC| = a,\\
r_2 &= |EC| = |CD| = \frac{1}{\varphi}a,\\
r_3 &= |FD| = |DE| = \frac{1}{\varphi^2}a,\\
r_4 &= |GE| = |EF| = \frac{1}{\varphi^3}a.
\end{aligned}$$

Primijetimo kako je kut rotacije $\theta = 108^\circ = \frac{3\pi}{5}$. Dakle, svakim okretajem za $\frac{3\pi}{5}$, radijus se množi sa φ^{-1}, a sa svakim okretajem za 2π, sa $\varphi^{-\frac{10}{3}}$. Prema tome, spirala na kojoj leže vrhovi zlatnih trokuta ima jednadžbu

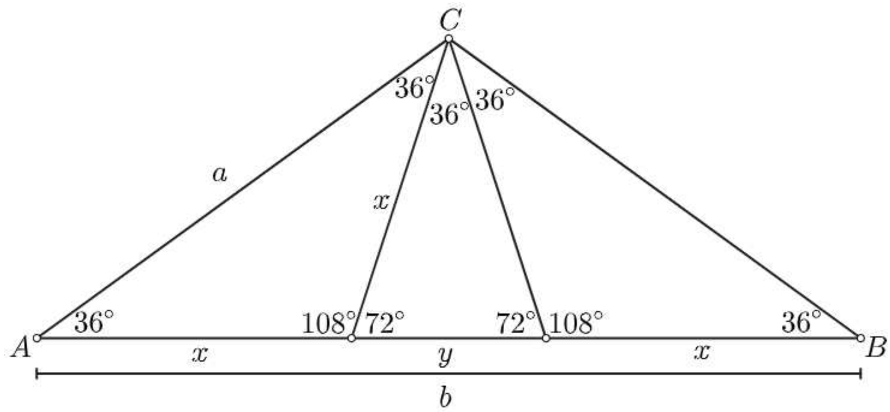
$$r(\theta) = a\varphi^{-\frac{5}{3\pi}\theta}.$$

Promotrimo zlatni gnomon $\triangle ABC$ s tupim kutom u C. Ako napravimo trisekciju tupog kuta tog trokuta, podijelit ćemo zlatni gnomon na tri trokuta kao na slici 3.5. Na temelju mjera kutova tih trokuta možemo zaključiti da smo zlatni gnomon podijelili na dva manja zlatna gnomona i jedan zlatni trokut. Označimo duljine stranica dobivenih zlatnih gnomona sa a i x, a zlatnog trokuta sa x i y, gdje su a i y duljine osnovica, a x duljine krakova. Kako prema definiciji zlatnog gnomona vrijedi $\frac{a}{x} = \varphi$, imamo

$$x = \frac{1}{\varphi}a.$$

Iz $|AB| = b = \varphi a$ i $|AB| = 2x + y = \frac{2}{\varphi}a + y$ slijedi

$$y = \varphi a - \frac{2}{\varphi}a = \frac{(\varphi^2 - 1) - 1}{\varphi} \cdot a = \frac{\varphi - 1}{\varphi} \cdot a = \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)a = \frac{1}{\varphi^2}a.$$



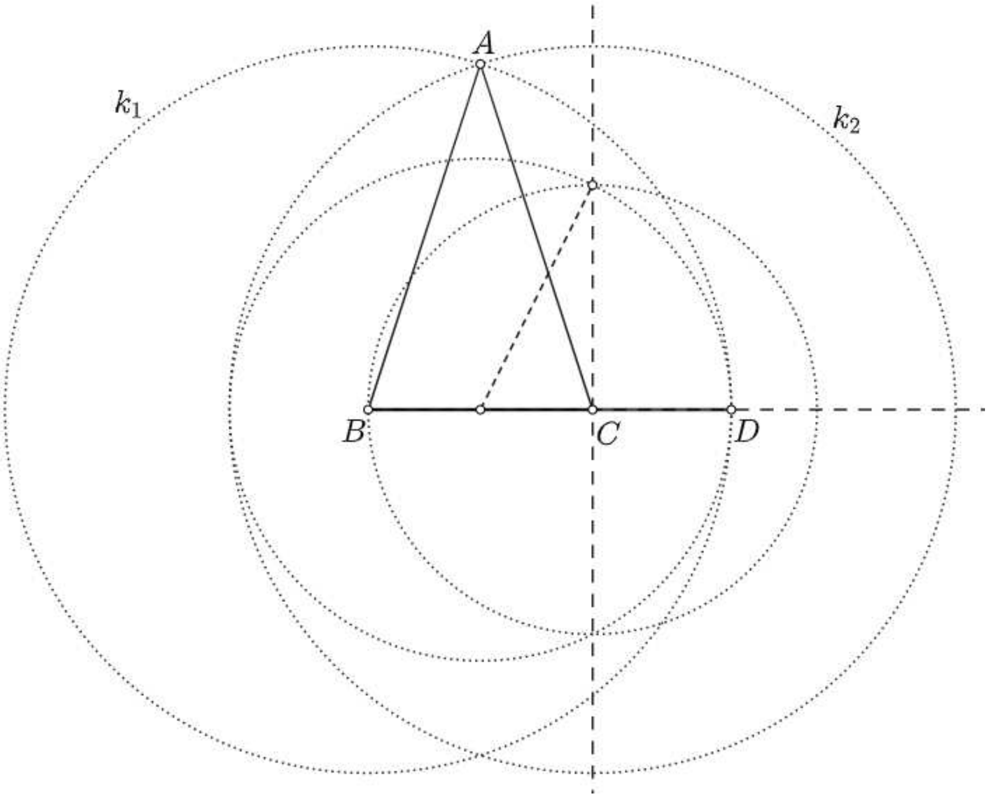
Slika 3.5: Zlatni gnomon

3.2 Konstrukcije zlatnog trokuta i zlatnog gnomona

Provest ćemo dvije konstrukcije zlatnog trokuta: prvu sa zadanom duljinom osnovice, a drugu sa zadanom duljinom kraka.

Konstrukcija 1

Neka je zadana osnovica trokuta, dužina $\overline{BC}$ duljine a (slika 3.6). Prateći jednu od konstrukcija zlatnog reza, konstruirajmo dužinu $\overline{CD}$ tako da točka C dijeli dužinu $\overline{BD}$ u zlatnom rezu. Zatim konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u točki B radijusa $|BD|$ te kružnicu k_2 sa središtem u C radijusa $|BD|$. Bilo koju točku presjeka tih kružnica označimo sa A. Traženi zlatni trokut je $\triangle ABC$.

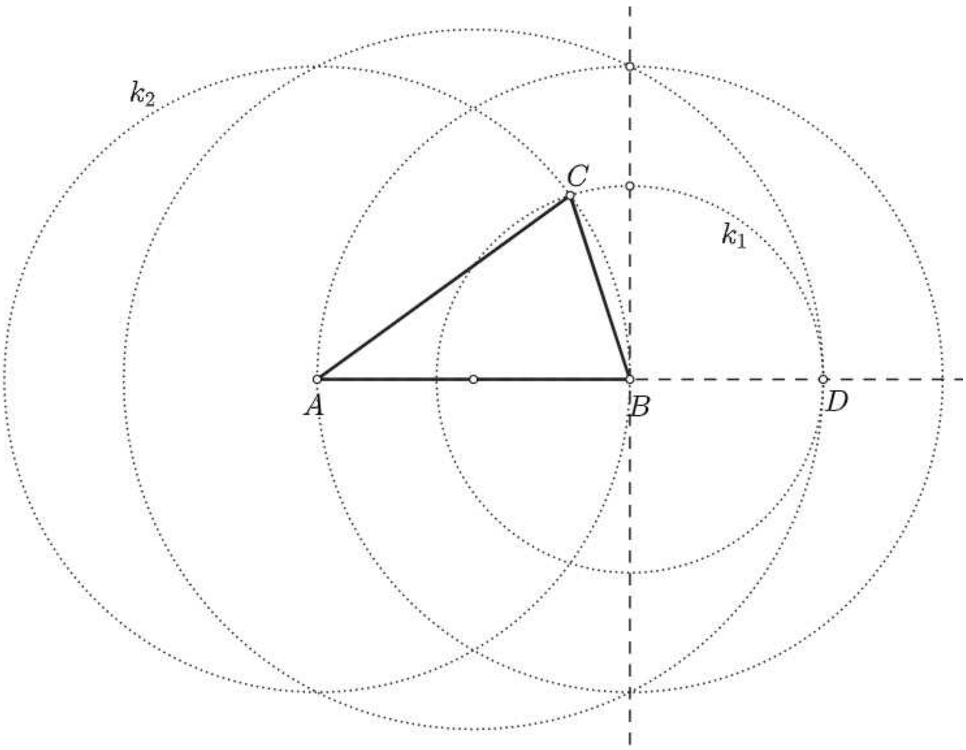


Slika 3.6: Konstrukcija zlatnog trokuta sa zadanom duljinom osnovice

Dokaz. Dokažimo da je $\triangle ABC$ jednakokračan te da je omjer krakova i osnovice jednak φ, odnosno da je $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \varphi$. S obzirom na to da je točka A na kružnici sa središtem u B radijusa $|BD|$ te na kružnici sa središtem u C radijusa $|BD|$, zaključujemo da je $|AB| = |BD| = |AC|$, pa je $\triangle ABC$ jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$. Kako je, prema konstrukciji, $\frac{|BD|}{|BC|} = \varphi$, to je $\triangle ABC$ zlatni trokut. □

Konstrukcija 2

Neka je zadan krak zlatnog trokuta, dužina $\overline{AB}$ duljine b (slika 3.7). Najprije, prateći jednu od konstrukcija zlatnog reza, konstruirajmo dužinu $\overline{BD}$ tako da točka B dijeli dužinu $\overline{AD}$ u zlatnom rezu. Zatim konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u točki B radijusa $|BD|$ te kružnicu k_2 sa središtem u točki A radijusa b. Bilo koju točku presjeka tih kružnica označimo sa C. Traženi zlatni trokut je $\triangle ABC$.



Slika 3.7: Konstrukcija zlatnog trokuta sa zadanom duljinom kraka

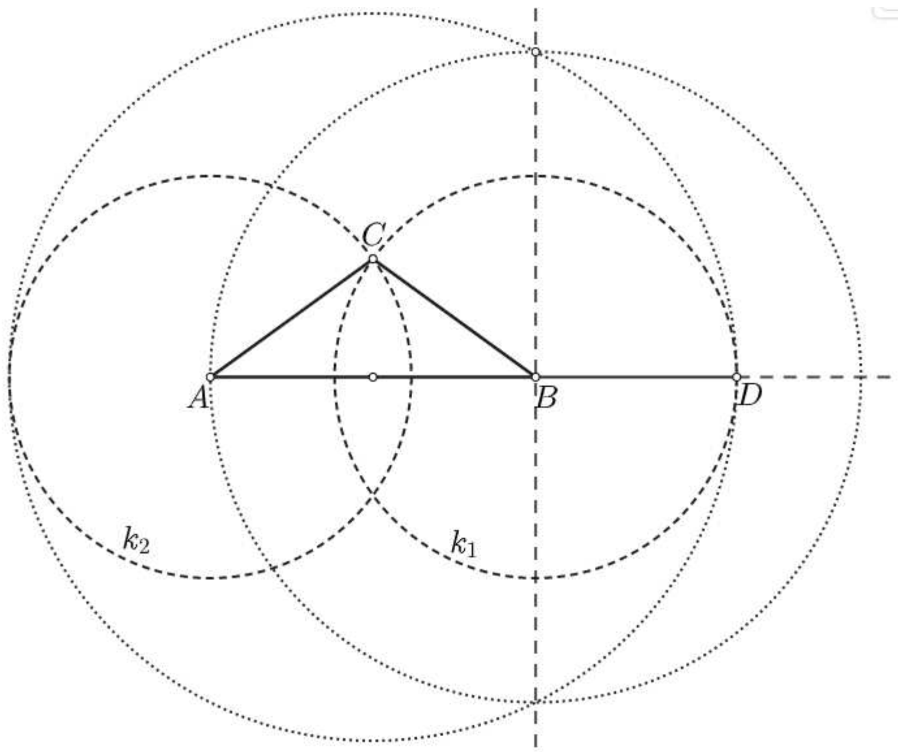
Dokaz. Dokažimo da za trokut $\triangle ABC$ vrijedi $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \varphi$. Budući da se točka C nalazi na kružnicama $k_1(B, |BD|)$ i $k_2(A, |AB|)$, zaključujemo da je $|BC| = |BD|$ i $|AC| = |AB|$. Kako prema konstrukciji vrijedi $\frac{|AB|}{|BD|} = \varphi$, to je

$$\varphi = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

□

Konstrukcija zlatnog gnomona

Neka je zadana dužina $\overline{AB}$ duljine a (slika 3.8). Prateći jednu od konstrukcija zlatnog reza, konstruirajmo dužinu $\overline{BD}$ tako da B dijeli dužinu $\overline{AD}$ u zlatnom rezu. Zatim konstruirajmo kružnice k_1 i k_2 sa središtima u točkama A i B radijusa $|BD|$. Označimo jedno od sjecišta tih kružnica sa C. Trokut $\triangle ABC$ je zlatni gnomon.



Slika 3.8: Konstrukcija zlatnog gnomona

Dokaz. Prema konstrukciji je $|BD| = |BC| = |AC|$ i $\frac{|AB|}{|BD|} = \varphi$. Slijedi

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi,$$

iz čega možemo zaključiti da je $\triangle ABC$ zlatni gnomon. □

3.3 Pravokutni trokut čije se katete odnose u zlatnom omjeru

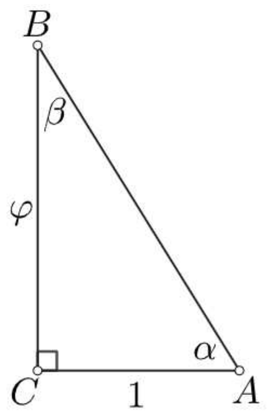
Promotrimo pravokutan trokut $\triangle ABC$ s omjerom kateta φ. Možemo zaključiti da su svi takvi trokuti slični prema S-K-S poučku o sličnosti trokuta. Odredimo mjere šiljastih kutova tog trokuta.

Propozicija 3.3.1. *Ako je omjer kateta pravokutnog trokuta jednak φ, tada su mjere šiljastih kutova tog trokuta* $\operatorname{arctg}\varphi \approx 58°16'57''$ *i* $\operatorname{arctg}\frac{1}{\varphi} \approx 31°43'3''$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti promotrimo pravokutan trokut ABC kateta duljina $|AC| = 1$ i $|BC| = \varphi$. Sa slike 3.9 zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha = \varphi \quad &\Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\varphi,\\
\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\varphi} \quad &\Rightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{\varphi}.
\end{aligned}$$

□



Slika 3.9: Pravokutan trokut omjera kateta φ

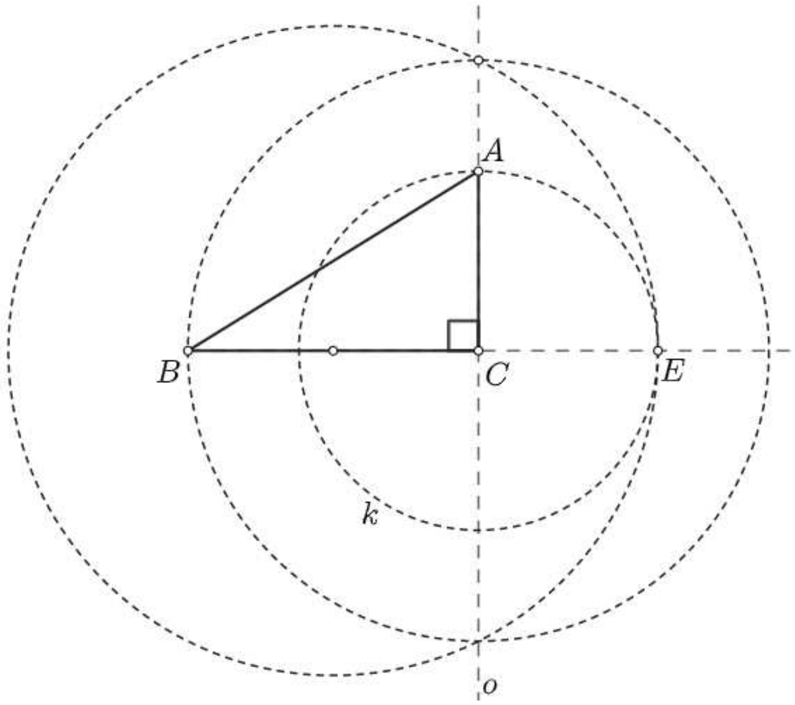
Primijetimo da se katete pravokutnog trokuta s omjerom kateta φ odnose prema hipotenuzi kao $a : b : c = \varphi : 1 : \sqrt{\varphi + 2}$. Neka je zadana duljina hipotenuze. Iz trigonometrije pravokutnog trokuta i svojstva $\varphi^2 = \varphi + 1$ dobije se

$$\begin{aligned}
a = c\sin\alpha = c\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = c\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} = c\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi+2}},\\
b = c\cos\alpha = c\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = c\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} = c\frac{1}{\sqrt{\varphi+2}},
\end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja.

Konstrukcija 1

Neka je zadana dulja kateta trokuta, dužina $\overline{BC}$ duljine a (slika 3.10). Prateći jednu od konstrukcija zlatnog reza, konstruirajmo dužinu $\overline{CE}$ tako da točka C dijeli dužinu $\overline{BE}$ u zlatnom rezu. Kroz točku C povucimo okomicu o na pravac BC. Konstruirajmo sada kružnicu k sa središtem u C radijusa $|CE|$. Neka je A bilo koja točka presjeka te kružnice i okomice o. Traženi trokut je $\triangle ABC$.



Slika 3.10: Konstrukcija pravokutnog trokuta omjera kateta φ sa zadanom duljom katetom

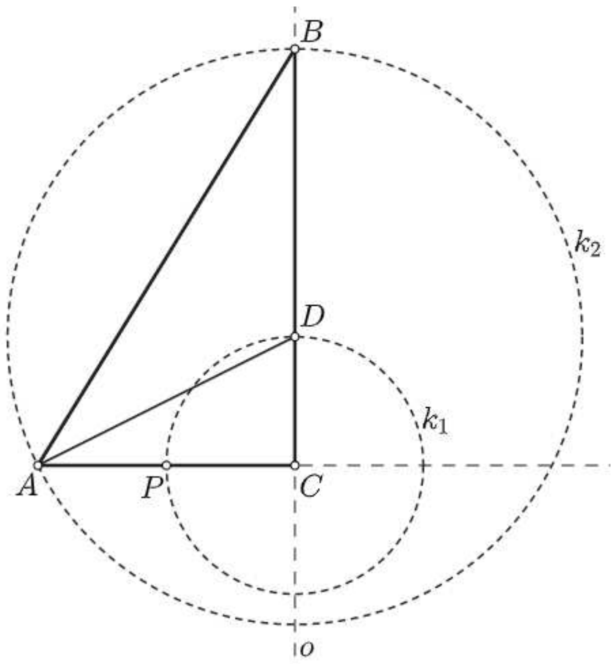
Dokaz. Očito je $\triangle ABC$ pravokutan s jednom katetom $\overline{BC}$ duljine a. Dokažimo da je $\frac{|BC|}{|AC|} = \varphi$. Prema konstrukciji vrijedi da je $\frac{|BC|}{|CE|} = \varphi$. S obzirom na to da je točka A na kružnici sa središtem u C radijusa $|CE|$, to je $|AC| = |CE|$ pa vrijedi

$$\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|BC|}{|AC|} = \varphi.$$

□

Konstrukcija 2

Neka je zadana kraća kateta trokuta, dužina $\overline{AC}$ duljine b, i neka je P polovište od $\overline{AC}$ (slika 3.11). Povucimo okomicu o na dužinu $\overline{AC}$ kroz točku C. Zatim konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u C radijusa $\frac{b}{2}$. Bilo koju točku presjeka te kružnice i okomice o označimo sa D. Konstruirajmo sada kružnicu k_2 sa središtem u D radijusa $|AD|$. Ta kružnica siječe okomicu o u dvije točke. Neka je točka B točka presjeka kružnice k_2 i okomice o na produžetku dužine $\overline{CD}$ preko točke D. Tada je traženi trokut $\triangle ABC$.



Slika 3.11: Konstrukcija pravokutnog trokuta omjera kateta φ sa zadanom kraćom katetom

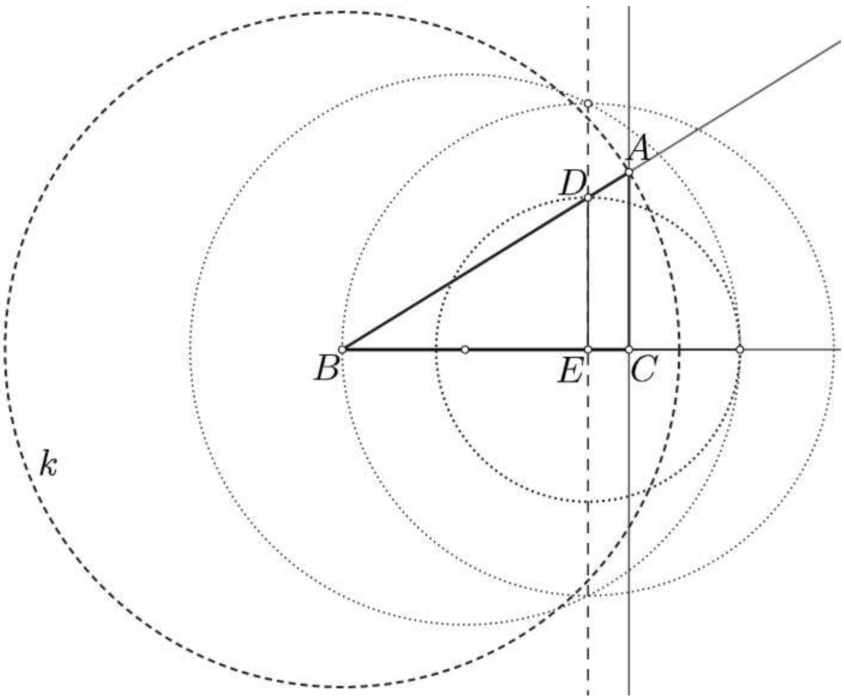
Dokaz. Očito je $\triangle ABC$ pravokutan s jednom katetom $\overline{AC}$ duljine b. Dokažimo da je $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b} = \varphi$, odnosno da je $|BC| = a$. S obzirom na to da je točka B na kružnici sa središtem u D radijusa $|AD|$, vrijedi $|BD| = |AD|$, a s obzirom na to da je točka D na kružnici sa središtem u C radijusa $\frac{b}{2}$, vrijedi $|CD| = \frac{b}{2}$. Kako su B, C i D kolinearne točke i $\triangle ACD$ je pravokutan, slijedi

$$|BC| = |BD| + |CD| = |AD| + |CD| = \sqrt{|AC|^2 + |CD|^2} + |CD|$$
$$= \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2} = \frac{b\sqrt{5}}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} b = \varphi b = a.$$

□

Konstrukcija 3

Neka je zadana duljina hipotenuze, dužina $\overline{AB}$ duljine c (slika 3.12). Konstruirajmo pravokutan trokut $\triangle DBE$ s katetama $\overline{BE}$ i $\overline{DE}$ duljina φ i 1 prateći, na primjer, konstrukciju 1 prikazanu na slici 3.10. Konstruirajmo kružnicu k sa središtem u B radijusa c. Neka je presjek te kružnice i pravca BD točka s iste strane točke B kao i točka D. Označimo ju sa A. Povucimo okomicu kroz A na pravac BE. Presjek te okomice i pravca BE je točka C. Trokut $\triangle ABC$ je traženi trokut.



Slika 3.12: Konstrukcija pravokutnog trokuta sa zadanom duljinom hipotenuze

Dokaz. Budući da su pravci DE i AC, prema konstrukciji, okomiti na pravac BE, zaključujemo da su DE i AC paralelni. Kako ti pravci sijeku krakove kuta $\angle CBA$, prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti vrijedi

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|DE|} = \varphi.$$

Dakle, $\triangle ABC$ je pravokutan s omjerom kateta φ i duljinom hipotenuze c. $\square$

3.4 Keplerov trokut

Propozicija 3.4.1. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *Stranice trokuta ABC odnose se u omjeru* $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$.

(ii) *Trokut ABC je pravokutan i u njemu se kraća kateta prema duljoj odnosi kao dulja kateta prema hipotenuzi.*

(iii) *Trokut ABC je pravokutan i u njemu visina iz vrha pravog kuta dijeli hipotenuzu u zlatnom omjeru.*

(iv) *Trokut ABC je pravokutan s katetama duljina a i b i hipotenuzom duljine c i vrijedi* $(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2$.

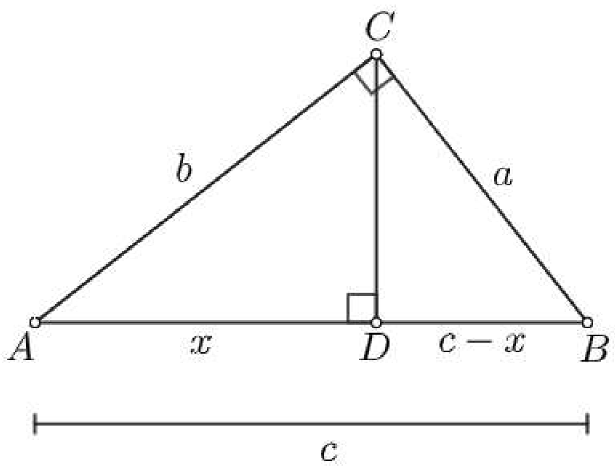
(v) *U trokutu ABC sa stranicama duljina* a, b *i* c *vrijedi* $(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2$ *i* $a : b = b : c$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$: Neka je ABC trokut i neka je $a : b : c = 1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo $a = 1,\ b = \sqrt{\varphi}$ i $c = \varphi$. Kako je

$$a^2 + b^2 = 1 + \varphi = \varphi^2 = c^2,$$

prema Pitagorinom poučku vrijedi da je ABC pravokutan trokut. Kako su a i b katete, a c hipotenuza, očito je

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} = \frac{b}{c}.$$



Slika 3.13: Pravokutan trokut

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Neka je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu C i neka je $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Označimo sa D nožište visine iz C. Ta visina dijeli hipotenuzu na dužine duljina $|AD| = x$ i $|BD| = c - x$, kao na slici 3.13. Iz sličnosti trokuta $\triangle ABC$ s trokutima $\triangle ACD$ i $\triangle CBD$, koja slijedi prema K-K-K poučku, imamo

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{b} \quad \text{i} \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{c-x}.$$

Množenjem tih dviju jednakosti dobijemo

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{c-x}.$$

Sada iz pretpostavke propozicije slijedi

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{c} \cdot \frac{x}{c-x},$$

a onda iz sličnosti trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ACD$ imamo

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{b} \cdot \frac{x}{c-x}$$

odnosno

$$\frac{c}{x} = \frac{x}{c-x}.$$

Sređivanjem ove jednakosti dobijemo jednadžbu

$$c^2 - xc - x^2 = 0,$$

čija su rješenja

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x.$$

Kako je $c > 0$, to je duljina hipotenuze jednaka

$$c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x = \varphi x,$$

a onda je

$$c - x = \varphi x - x = (\varphi - 1)x = \frac{1}{\varphi}x.$$

Dakle,

$$\frac{x}{c-x} = \varphi,$$

tj. visina iz vrha pravog kuta dijeli hipotenuzu u zlatnom omjeru.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Neka je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu C i nožištem D visine na hipotenuzu. Ako je $|AD| = x$ i $|BD| = c - x$, kao na slici 3.13, tada je $\frac{x}{c-x} = \varphi$. Slijedi

$$x = c \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi} = c \cdot \frac{1}{\varphi}.$$

Kako je $\triangle ABC$ sličan trokutima $\triangle ACD$ i $\triangle CBD$, to je

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{b} \quad \text{i} \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{c-x},$$

pa uvrštavanjem $c \cdot \frac{1}{\varphi}$ umjesto x dobivamo

$$\frac{b}{c} = \frac{c}{b} \cdot \frac{1}{\varphi} \quad \text{i} \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\varphi}{\varphi - 1}.$$

Stoga je

$$b^2 = c^2 \cdot \frac{1}{\varphi} \quad \text{i} \quad a^2 = c^2 \cdot \frac{\varphi - 1}{\varphi},$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}(bc)^2 - (ac)^2 &= c^2(b^2 - a^2) = (a^2 + b^2)(b^2 - a^2)\\ &= b^4 - a^4 = \left(c^2 \cdot \frac{1}{\varphi}\right)^2 - \left(c^2 \cdot \frac{\varphi - 1}{\varphi}\right)^2\\ &= c^4 \cdot \frac{-\varphi^2 + 2\varphi}{\varphi^2} = c^4 \cdot \frac{-(\varphi + 1) + 2\varphi}{\varphi^2}\\ &= c^4 \cdot \frac{\varphi - 1}{\varphi^2} = \left(c^2 \cdot \frac{1}{\varphi}\right) \cdot \left(c^2 \cdot \frac{\varphi - 1}{\varphi}\right)\\ &= b^2 \cdot a^2 = (ab)^2.\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (v): U trokutu $\triangle ABC$ vrijedi Pitagorin poučak, pa iz $(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2$ dobivamo

$$(ac)^2 = (bc)^2 - (ab)^2 = b^2(c^2 - a^2) = b^4.$$

Odatle slijedi $ac = b^2$ odnosno $a : b = b : c$.

(v) $\Rightarrow$ (i): Uvrštavanjem $b^2 = ac$ u $(bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2$ dobivamo

$$ac^3 = a^3c + a^2c^2$$

odnosno, nakon dijeljenja sa a^3c,

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 + \frac{c}{a}.$$

Supstitucijom $t = \frac{c}{a}$ ova jednadžba prelazi u kvadratnu jednadžbu

$$t^2 - t - 1 = 0,$$

čije je pozitivno rješenje φ. Slijedi $c = a\varphi$, pa je $b = \sqrt{ac} = a\sqrt{\varphi}$. Dakle, stranice trokuta ABC odnose se u omjeru $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$. □

Trokut koji zadovoljava bilo koju od tvrdnji iz propozicije 3.4.1, a onda i sve ostale, nazivamo **Keplerovim trokutom**.

Uočimo da visina Keplerovog trokuta $\triangle ABC$ iz vrha pravog kuta dijeli taj trokut na trokute $\triangle ACD$ i $\triangle CBD$. Kako su ta tri trokuta međusobno slična (prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta), prema propoziciji 3.4.1 znamo da se i stranice trokuta $\triangle ACD$ i $\triangle CBD$ odnose u omjeru $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$, tj. možemo zaključiti da su trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle CBD$ također Keplerovi trokuti.

Neka je $\triangle ABC$ Keplerov trokut s pravim kutom pri vrhu C. Neka njegove stranice $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom imaju duljine $k, k\sqrt{\varphi}$ i $k\varphi$. Neka točke E, F, D dijele te stranice tako da je, vidite sliku 3.14(a),

$$\frac{|FA|}{|CF|} = \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{|EB|}{|CE|} = \varphi.$$

Promotrimo trokute $\triangle BED, \triangle ECF, \triangle FDA$ te $\triangle DFE$. Dokažimo da su ti trokuti također Keplerovi trokuti.

Označimo $|EC| = x$, $|BE| = \varphi x$, $|CF| = y$, $|FA| = \varphi y$, $|AD| = z$, $|DB| = \varphi z$. Tada je

$$k = |BC| = \varphi x + x = (\varphi + 1)x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k}{\varphi + 1}, \tag{3.1}$$

$$k\sqrt{\varphi} = |CA| = \varphi y + y = (\varphi + 1)y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k\sqrt{\varphi}}{\varphi + 1}, \tag{3.2}$$

$$k\varphi = |AB| = \varphi z + z = (\varphi + 1)z \quad \Rightarrow \quad z = \frac{k\varphi}{\varphi + 1}. \tag{3.3}$$

Primijetimo da vrijedi

$$x : y : z = 1 : \sqrt{\varphi} : \varphi. \tag{3.4}$$

Budući da je $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|DA|} = \varphi$, tj. pravci ED i CA na krakovima kuta $\angle ABC$ odsijecaju proporcionalne dužine, prema obratu Talesovog teorema o proporcionalnosti vrijedi da su pravci ED i CA paralelni. Analogno možemo zaključiti da su i EF i AB paralelni. Sada prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta vrijedi da su trokuti $\triangle BED$ i $\triangle ECF$ slični trokutu $\triangle BCA$, tj. da su ti trokuti Keplerovi trokuti.

Kako bismo dokazali da su trokuti $\triangle ADF$ i $\triangle ACB$ sa zajedničkim kutom pri vrhu A slični, dokažimo da su stranice uz taj kut proporcionalne:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|AB|},$$

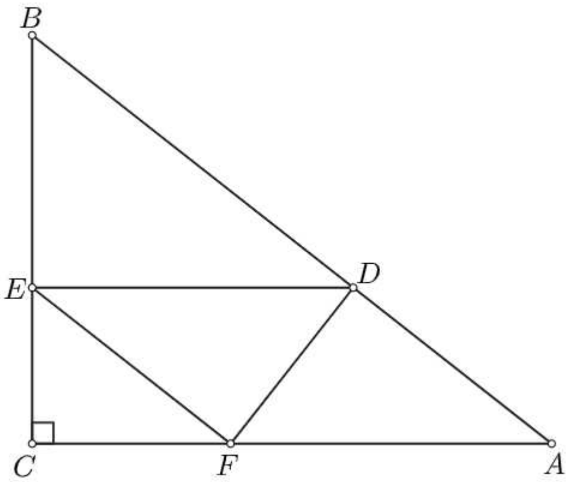
tj. da je $|AB||AD| = |AC||AF|$. Iz (3.2) i (3.3) slijedi

$$|AB||AD| = (\varphi + 1)z \cdot z = z^2(\varphi + 1),$$
$$|AC||AF| = (\varphi + 1)y \cdot \varphi y = y^2\varphi(\varphi + 1).$$

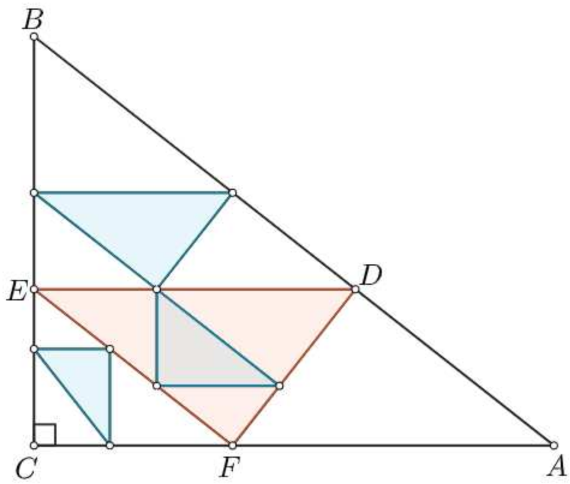
Kako iz (3.4) dobijemo $z = y\sqrt{\varphi}$, a onda i $z^2 = y^2\varphi$, možemo zaključiti da su $\triangle ADF$ i $\triangle ACB$ slični, odnosno da je $\triangle ADF$ također Keplerov trokut.

Dokažimo još tvrdnju i za $\triangle DFE$. Primijetimo da je $ADEF$ paralelogram pa su $\triangle ADF$ i $\triangle DFE$ sukladni. Dakle, i $\triangle DEF$ je Keplerov trokut.

Ucrtavanjem trokuta u Keplerov trokut na gore navedeni način uvijek ćemo dobiti Keplerov trokut. Taj postupak može se beskonačno ponavljati čime dobivamo ugniježđene Keplerove trokute kao na slici 3.14(b).



(a) Keplerovi trokuti



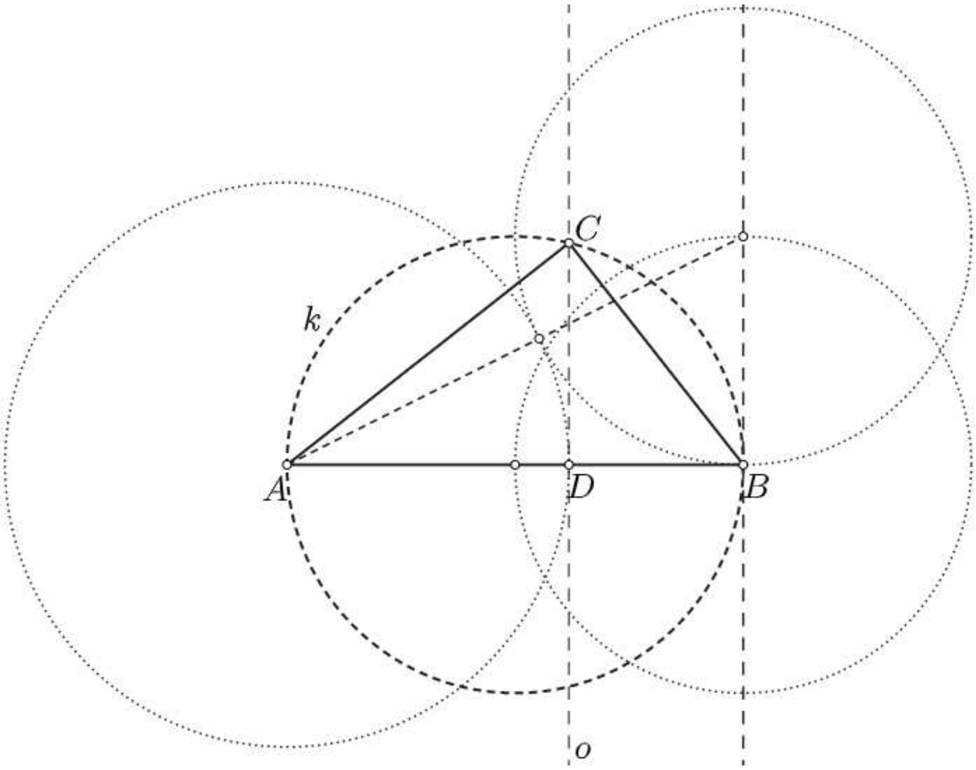
(b) Ugniježđeni Keplerovi trokuti

Slika 3.14

Konstrukcija Keplerovog trokuta

Neka je zadana dužina $\overline{AB}$ duljine c (slika 3.15). Prateći jednu od konstrukcija zlatnog reza, podijelimo tu dužinu točkom D tako da ta točka dijeli dužinu u zlatnom omjeru. Povucimo okomicu o kroz D na $\overline{AB}$. Konstruirajmo kružnicu k tako da je dužina $\overline{AB}$ promjer te kružnice. Označimo bilo koje od dva sjecišta okomice o i kružnice k sa C. Dobiveni trokut $\triangle ABC$ je Keplerov trokut.

Dokaz. Prema propoziciji 3.4.1 dovoljno je dokazati da je $\triangle ABC$ pravokutan te da visina iz vrha pravog kuta trokuta dijeli hipotenuzu u zlatnom omjeru.



Slika 3.15: Konstrukcija Keplerovog trokuta

Kako je prema konstrukciji $\angle ACB$ obodni kut nad promjerom kružnice, to je prema Talesovom teoremu o obodnom kutu $\angle ACB$ pravi kut. Dakle, $\triangle ABC$ je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C i hipotenuzom $\overline{AB}$.

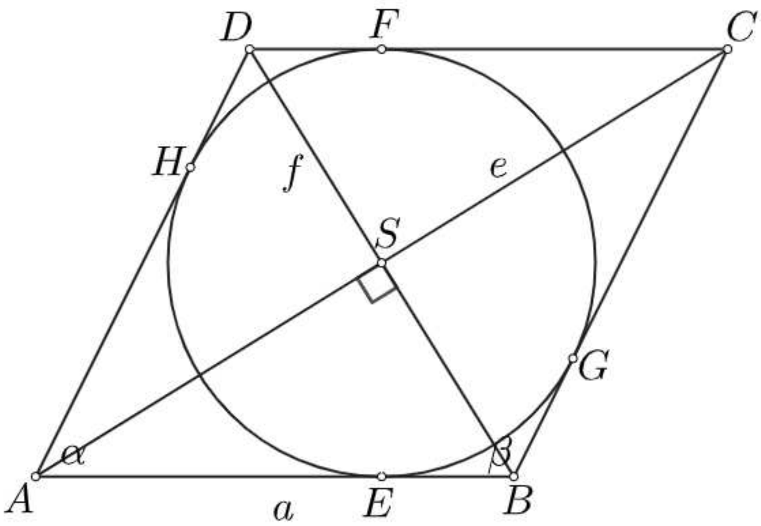
Budući da visina iz vrha C leži na okomici kroz točku D koja dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru, konstrukcija je dokazana. □

Poglavlje 4

Zlatni romb

4.1 Definicija i svojstva zlatnog romba

Definicija 4.1.1. *Romb kojemu je omjer duljina dulje i kraće dijagonale jednak φ naziva se zlatni romb.*



Slika 4.1: Zlatni romb

Poznato je da su dijagonale romba okomite i da raspolavljaju njegove unutarnje kutove pa možemo zaključiti da je romb dijagonalama podijeljen na četiri pravokutna trokuta mjera kutova $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$, kao na slici 4.1. Promotrimo jedan od tih trokuta. S obzirom na to da se dijagonale romba raspolavljaju, duljine kateta tog trokuta su $\frac{e}{2}$ i $\frac{f}{2}$ i njihov je omjer jednak

$$\frac{\frac{e}{2}}{\frac{f}{2}} = \frac{e}{f} = \varphi.$$

Zaključujemo da je romb podijeljen na četiri pravokutna trokuta omjera kateta φ, pa možemo primijeniti rezultate iz 3.3.

Dokažimo da svi zlatni rombovi imaju iste mjere kutova.

Propozicija 4.1.2. *Mjere unutarnjih kutova zlatnog romba su*

$$\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\varphi} = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 63°26'6",$$
$$\beta = 2\operatorname{arctg}\varphi = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 116°33'54".$$

Dokaz. Prema propoziciji 3.3.1 vrijedi

$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\varphi},$$
$$\frac{\beta}{2} = \operatorname{arctg}\varphi \quad \Rightarrow \quad \beta = 2\operatorname{arctg}\varphi.$$

□

Propozicija 4.1.3. *Neka je zadan zlatni romb stranice duljine a. Tada su duljine njegovih dijagonala jednake*

$$\frac{a\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5} \quad i \quad \frac{a\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}.$$

Dokaz. Primjenom Pitagorinog poučka na rombov trokut sa slike 4.1 dobivamo

$$e^2 + f^2 = 4a^2.$$

Iz $\frac{e}{f} = \varphi$ slijedi $e = \varphi f$. Uvrštavanjem u prethodnu jednadžbu imamo:

$$(\varphi^2 + 1)f^2 = 4a^2.$$

Kako je $\varphi^2 = \varphi + 1$, to je

$$(\varphi + 2)f^2 = 4a^2,$$

iz čega slijedi

$$f = \frac{2}{\sqrt{\varphi + 2}}a,$$

pa je

$$e = \varphi f = \frac{2\varphi}{\sqrt{\varphi + 2}} a.$$

Uvrstimo sada $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$f = \frac{2}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} a = \frac{2}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}} \cdot a = \frac{a\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{5},$$

$$e = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5} = \frac{a\sqrt{(1+\sqrt{5})^2(50-10\sqrt{5})}}{10} = \frac{a\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5}.$$

□

Propozicija 4.1.4. *Površina zlatnog romba kojemu je stranica duljine a, duljina dulje dijagonale e, a kraće f, dana je formulama:*

$$P = \frac{\sqrt{5}-1}{4} e^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} f^2 = \frac{2}{5} a^2 \sqrt{5}.$$

Dokaz. Površina romba dana je formulom

$$P = \frac{ef}{2}.$$

Kako je $e = \varphi f$, dobije se

$$P = \frac{\varphi}{2} f^2 = \frac{1}{2\varphi} e^2 = \frac{\varphi - 1}{2} e^2,$$

odnosno

$$P = \frac{\sqrt{5}-1}{4} e^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4} f^2.$$

Uvrštavanjem izraza iz propozicije 4.1.3 u $P = \frac{ef}{2}$ slijedi treća formula za površinu zlatnog romba:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5} = \frac{1}{50} a^2 \sqrt{50^2 - \left(10\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{50} a^2 \cdot 20\sqrt{5} = \frac{2}{5} a^2 \sqrt{5}.$$

□

Svakom rombu može se upisati kružnica pa tako i zlatnom rombu. Njezino središte je u sjecištu dijagonala, a polumjer je jednak polovini visine romba. Sljedećom propozicijom dane su formule za računanje polumjera zlatnom rombu upisane kružnice.

Propozicija 4.1.5. *Polumjer zlatnom rombu upisane kružnice dan je formulama:*

$$r = \frac{e\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{20} = \frac{f\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{20} = \frac{a\sqrt{5}}{5},$$

gdje je a duljina stranice romba, e duljine dulje dijagonale i f duljina kraće dijagonale.

Dokaz. Površina romba može se izračunati formulom $P = av$, gdje je v visina romba. Uvrštavanjem $v = 2r$ u formulu za površinu i sređivanjem jednakosti dobije se

$$r = \frac{P}{2a}.$$

Prema propoziciji 4.1.3 vrijedi

$$a = \frac{5e}{\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}} = \frac{5f}{\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}.$$

Uvrštavanjem tih izraza i izraza za površinu romba iz propozicije 4.1.4 u formulu za polumjer dobije se

$$r = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}e^2}{2 \cdot \frac{5e}{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{40}e = \frac{e\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{20},$$

$$r = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}f^2}{2 \cdot \frac{5f}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}} = \frac{(1 + \sqrt{5})\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}}{40}f = \frac{f\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}}{20},$$

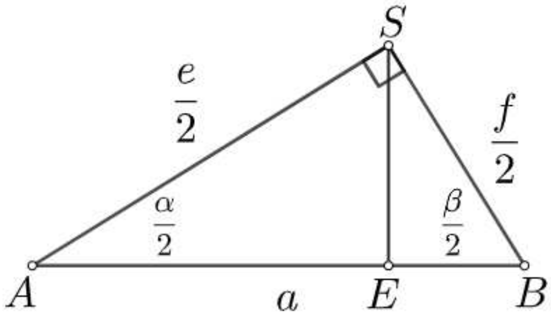
te

$$r = \frac{\frac{2}{5}a^2\sqrt{5}}{2a} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

□

Propozicija 4.1.6. *Dirališta zlatnom rombu upisane kružnice dijele stranice romba u omjeru* $\varphi : \frac{1}{\varphi}$.

Dokaz. S obzirom na to da je romb središtem upisane kružnice, odnosno sjecištem dijagonala, podijeljen na četiri sukladna pravokutna trokuta, bez smanjenja općenitosti, promatrat ćemo trokut $\triangle ABS$. Diralište zlatnom rombu upisane kružnice je nožište visine tog pravokutnog trokuta; označili smo ga sa E.



Slika 4.2: Trokut ABS

Znamo da je $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\varphi}$ i $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \varphi$. Odredimo sada $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ iz trokuta $\triangle AES$ i $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ iz $\triangle SEB$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{|SE|}{|AE|}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{|SE|}{|EB|}.$$

Tada je

$$\varphi : \frac{1}{\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{|SE|}{|EB|}}{\frac{|SE|}{|AE|}} = \frac{|AE|}{|EB|} = |AE| : |EB|.$$

□

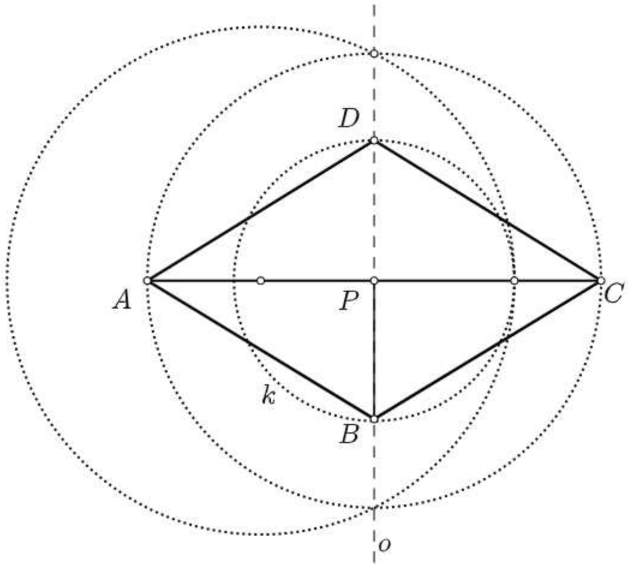
4.2 Konstrukcije zlatnog romba

Zlatni romb jednoznačno je određen zadavanjem duljine stranice ili duljine jedne od njegovih dijagonala (vidite propoziciju 4.1.3). Shodno tome, pokazat ćemo tri konstrukcije zlatnog romba:

1. konstrukciju sa zadanom duljinom dulje dijagonale,
2. konstrukciju sa zadanom duljinom kraće dijagonale,
3. konstrukciju sa zadanom duljinom stranice.

Konstrukcija 1

Neka je zadana dulja dijagonala romba, dužina $\overline{AC}$ duljine e (slika 4.3). Neka je P polovište te dužine. Povucimo okomicu na $\overline{AC}$ u točki P. Konstruirajmo sada pravokutan trokut $\triangle APB$ s pravim kutom u P tako da je $\frac{|AP|}{|BP|} = \varphi$, prateći konstrukciju 1 prikazanu na slici 3.10. Neka je k kružnica sa središtem u P radijusa $|BP|$. Označimo sjecište te kružnice i okomice o, koje je različito od B, sa D. Tada je četverokut $ABCD$ traženi zlatni romb.



Slika 4.3: Konstrukcija zlatnog romba sa zadanom duljinom dulje dijagonale

Dokaz. Kako bismo dokazali ispravnost konstrukcije, trebamo dokazati da je konstruirani četverokut romb te da je omjer njegovih dijagonala jednak $\frac{e}{f} = \varphi$.

S obzirom na to da su točke B i D sjecišta kružnice sa središtem u P i pravca koji prolazi kroz središte te kružnice, P je polovište dužine $\overline{BD}$. Budući da je, prema konstrukciji, P polovište i od $\overline{AC}$, možemo zaključiti da se dijagonale četverokuta $ABCD$ raspolavljaju, tj. da je $ABCD$ paralelogram. Kako je $\triangle APB$ pravokutan s pravim kutom u P, zaključujemo da su dijagonale paralelograma $ABCD$ okomite. Dakle, $ABCD$ je romb.

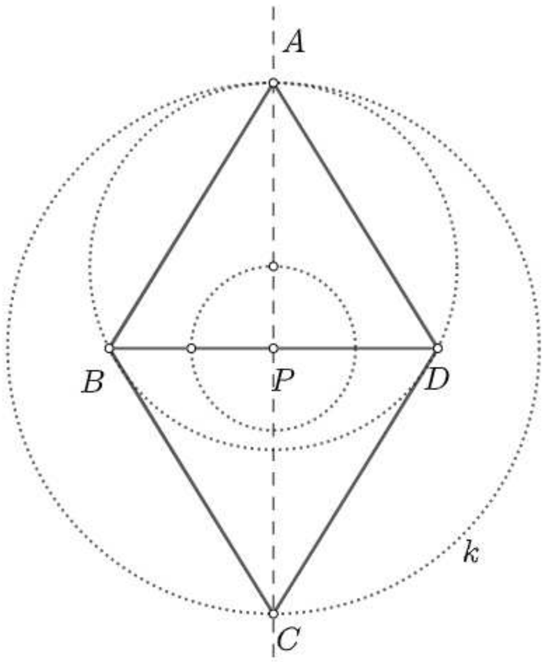
Iz konstrukcije trokuta $\triangle APB$ i činjenice da je P polovište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ slijedi

$$\varphi = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{2|AP|}{2|BP|} = \frac{|AC|}{|BD|}.$$

Dakle, konstruirani četverokut $ABCD$ je zlatni romb. $\square$

Konstrukcija 2

Neka je zadana kraća dijagonala romba, dužina $\overline{BD}$ duljine f, i neka je P polovište od $\overline{BD}$ (slika 4.4). Povucimo okomicu o na $\overline{BD}$ u točki P. Konstruirajmo sada pravokutan trokut $\triangle ABP$ s pravim kutom u P tako da je $\frac{|AP|}{|BP|} = \varphi$. Neka je k kružnica sa središtem u P radijusa $|AP|$. Označimo sjecište te kružnice i okomice o, koje je različito od A, sa C. Tada je četverokut $ABCD$ traženi zlatni romb.



Slika 4.4: Konstrukcija zlatnog romba sa zadanom duljinom kraće dijagonale

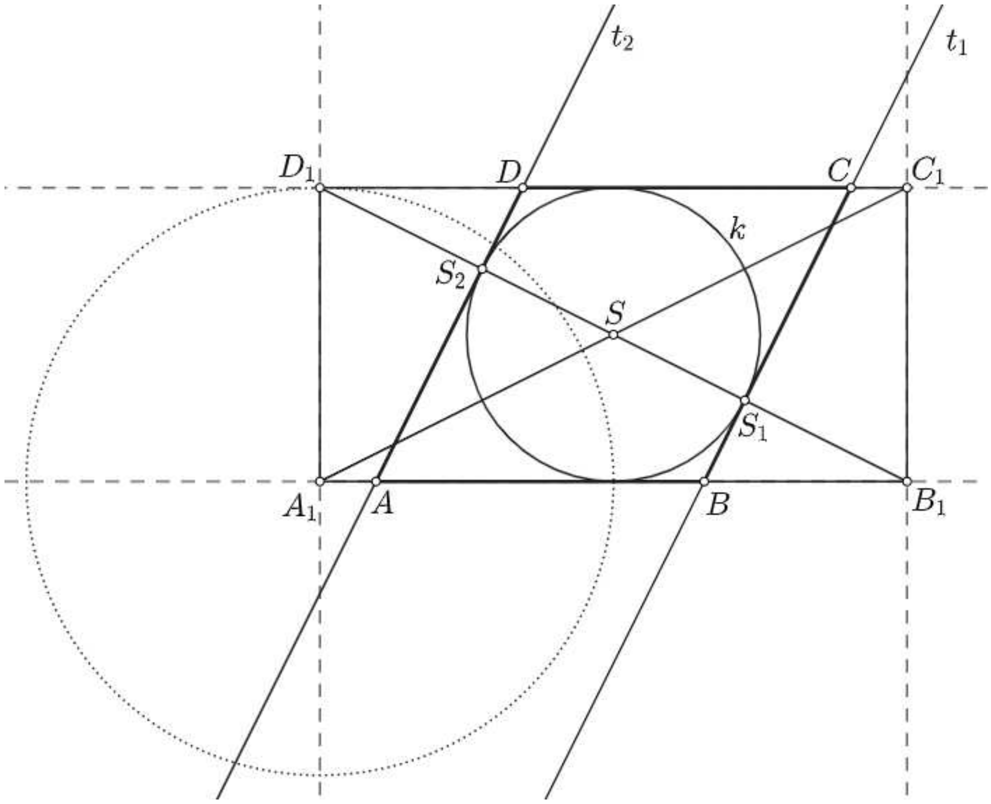
Dokaz. Dokaz konstrukcije je analogan dokazu konstrukcije zlatnog romba sa zadanom duljinom dulje dijagonale.

Konstrukcija 3

Da bismo konstruirali zlatni romb sa zadanom duljinom stranice, najprije ćemo provesti konstrukciju zlatnog romba sa stranicom duljine $\sqrt{5}$ (slika 4.5).

Konstruirajmo najprije pravokutnik $A_1B_1C_1D_1$ stranica duljina 4 i 2. Označimo sa S sjecište dijagonala tog pravokutnika. Konstruirajmo kružnicu k sa središtem u S radijusa duljine 1. Sjecišta te kružnice s dijagonalom $\overline{B_1D_1}$ su točke S_1 i S_2. Konstruirajmo sada tangente t_1 i t_2 kroz S_1 i S_2, redom. Sjecišta tangenti t_2 i t_1 s dužinom $\overline{A_1B_1}$ su točke A i B, a sjecišta tangenti t_1 i t_2 s dužinom $\overline{C_1D_1}$ su točke C i D. Četverokut $ABCD$ je zlatni romb stranice duljine $\sqrt{5}$.

Dokaz. Budući da tetiva $\overline{S_1S_2}$ prolazi kroz središte kružnice k, to je $\overline{S_1S_2}$ promjer te kružnice. Tangente t_1 i t_2 dodiruju kružnicu u točkama S_1 i S_2 pa su obje okomite na promjer $\overline{S_1S_2}$. Iz toga možemo zaključiti da su t_1 i t_2 paralelni pravci. Shodno tome, stranica $\overline{AD} \subseteq t_2$ paralelna je sa stranicom $\overline{BC} \subseteq t_1$. Paralelnost stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ slijedi iz paralelnosti stranica pravokutnika. Dakle, $ABCD$ je paralelogram.



Slika 4.5: Konstrukcija zlatnog romba stranice duljine $\sqrt{5}$

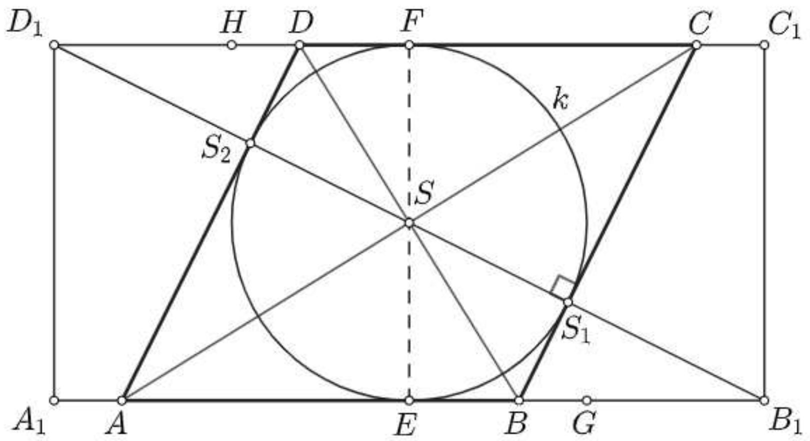
Da bismo dokazali da je paralelogram $ABCD$ romb, dokazat ćemo da je $|AB| = |AD|$. Površinu paralelograma možemo izračunati kao umnožak duljine stranice i visine na tu stranicu iz čega slijedi

$$P_{ABCD} = |AB|v_1 = |AD|v_2.$$

Neka su E i F dirališta dužina $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{C_1D_1}$ i kružnice k, kao na slici 4.6. Uočimo da je $\overline{EF}$ okomita na AB pa je ujedno i visina paralelograma na stranicu $\overline{AB}$. Analogno, $\overline{S_1S_2}$ je visina na stranicu $\overline{AD}$. S obzirom na to da su $\overline{EF}$ i $\overline{S_1S_2}$ promjeri iste kružnice, vrijedi da je $|EF| = |S_1S_2|$, tj. $v_1 = v_2$. Uvrštavanje u $|AB|v_1 = |AD|v_2$ daje $|AB| = |AD|$.

Promotrimo pravokutne trokute $\triangle SS_1B$ i $\triangle SS_2D$. Kutovi $\angle SS_1B$ i $\angle SS_2D$ su pravi pa samim time sukladni. Kutovi $\angle BSS_1$ i $\angle DSS_2$ su vršni pa su također sukladni. Sada znamo da su i preostali kutovi u trokutima sukladni. Budući da su $\overline{SS_1}$ i $\overline{SS_2}$ polumjeri rombu upisane kružnice, vrijedi $|SS_1| = |SS_2|$. Prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da je $\triangle SS_1B \cong \triangle SS_2D$. Odatle slijedi

$$|S_2D| = |BS_1|. \tag{4.1}$$



Slika 4.6: Zlatni romb stranice duljine $\sqrt{5}$

Promotrimo sada trokute $\triangle SEB_1$ i $\triangle BS_1B_1$. Oba trokuta su pravokutna i imaju zajednički vrh B pa je prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta $\triangle SEB_1 \sim \triangle BS_1B_1$. Prema tome slijedi

$$\frac{|SE|}{|EB_1|} = \frac{|BS_1|}{|S_1B_1|}. \tag{4.2}$$

Primijetimo da je $|SE| = |SS_1| = 1$ i $|EB_1| = 2$. Točke B_1, S_1 i S su kolinearne i $\triangle SEB_1$ je pravokutan pa možemo odrediti

$$|S_1B_1| = |SB_1| - |SS_1| = \sqrt{|SE|^2 + |EB_1|^2} - |SS_1| = \sqrt{1+4} - 1 = \sqrt{5} - 1. \tag{4.3}$$

Iz (4.2) i (4.3) slijedi

$$|BS_1| = \frac{|SE| \cdot |S_1B_1|}{|EB_1|} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \tag{4.4}$$

Uočimo da je i $\triangle SEB_1 \sim \triangle AS_2B_1$ prema K-K-K poučku o sličnosti pa vrijedi

$$\frac{|SE|}{|EB_1|} = \frac{|AS_2|}{|S_2B_1|}. \tag{4.5}$$

S obzirom na to da su B_1, S_1 i S_2 kolinearne i $|S_1S_2| = 2$, iz (4.3) slijedi

$$|S_2B_1| = |S_1S_2| + |S_1B_1| = 2 + (\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} + 1.$$

Iz (4.5) dobije se:

$$|AS_2| = \frac{|SE| \cdot |S_2B_1|}{|EB_1|} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} + 1)}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}. \tag{4.6}$$

Izračunajmo sada duljinu stranice romba primjenom (4.1), (4.4) i (4.6):

$$a = |AD| = |AS_2| + |S_2D| = |AS_2| + |BS_1| = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}.$$

Dokažimo još da je $ABCD$ zlatni romb, tj. da je $\frac{|AC|}{|BD|} = \varphi$. Promotrimo trokute $\triangle ASD$ i $\triangle AS_2S$. Budući da su dijagonale romba okomite, $\angle ASD = \angle AS_2S = 90°$. Također, trokuti imaju zajednički kut u vrhu A pa je prema K-K-K poučku o sličnosti $\triangle ASD \sim \triangle AS_2S$. Iz navedenog slijedi

$$\frac{|AS|}{|SD|} = \frac{|AS_2|}{|S_2S|}.$$

Budući da je $|SS_2| = 1$ i da se dijagonale romba raspolavljaju, možemo dokazati da vrijedi tvrdnja:

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{2|AS|}{2|SD|} = \frac{|AS_2|}{|S_2S|} = |AS_2| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

□

Primijetimo da se kod konstrukcije zlatnog romba sa stranicom duljine $\sqrt{5}$ na nepredviđenim mjestima pojavljuje zlatni omjer. Tako smo konstruirali dužinu $\overline{AS_2}$ duljine φ te dužinu $\overline{DS_2}$ duljine $\frac{1}{\varphi}$. Osim navedenih dužina, moguće je konstruirati i dužine duljina φ^2 i $\frac{1}{\varphi^2}$.

Propozicija 4.2.1. *Neka su $G \in \overline{EB_1}$ i $H \in \overline{FD_1}$ takve da je $|EG| = |FH| = 1$. Tada je $|BG| = \frac{1}{\varphi^2}$ i $|CH| = \varphi^2$.*

Dokaz. Uočimo pravokutne trokute $\triangle ASE$ i $\triangle ASS_2$ na slici 4.6. Budući da su $\overline{SE}$ i $\overline{SS_2}$ polumjeri kružnice, vrijedi $|SE| = |SS_2|$. Stranica $\overline{AS}$ im je zajednička pa prema S-S-K$^>$ poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su ti trokuti sukladni odakle slijedi $|AE| = |AS_2|$.

Promotrimo sada pravokutne trokute $\triangle SEB$ i $\triangle SS_2D$. Zbog $|SE| = |SS_2|$ i činjenice da se dijagonale romba raspolavljaju, ponovno prema S-S-K$^>$ poučku o sukladnosti zaključujemo da je $\triangle SEB \cong \triangle SS_2D$. Iz prethodno dokazanog i jednakosti (4.6) i (4.4) dobije se:

$$|AE| = |AS_2| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,$$
$$|EB| = |S_2D| = |BS_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}.$$

Dokažimo sada da je $|BG| = \frac{1}{\varphi^2}$. Prema pretpostavci je $|EG| = 1$, pa je

$$|BG| = |EG| - |EB| = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

Preostaje dokazati da je $|CH| = \varphi^2$. Prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta slijedi da je $\triangle SFD \cong \triangle SEB$ pa vrijedi $|FD| = |EB| = \frac{1}{\varphi}$. Primijenimo li još i pretpostavku $|FH| = 1$, imamo:

$$|DH| = |FH| - |FD| = |FH| - |EB| = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}|CH| &= |CD| + |DH| = |AD| + |FH| - |FD| = |AS_2| + |S_2D| + |FH| - |EB| \\ &= |AS_2| + \cancel{|S_2D|} + |FH| \cancel{- |S_2D|} = \varphi + 1 = \varphi^2.\end{aligned}$$

□

Konstrukcija 4

Neka je zadana duljina stranice romba, a (slika 4.7). Najprije konstruirajmo zlatni romb $ABCD$ stranice duljine $\sqrt{5}$. Zatim konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u A radijusa a. Kružnica k_1 siječe pravce AB i AD u dvije točke. Neka je točka P sjecište te kružnice i pravca AB s iste strane točke A kao i točka B te neka je T sjecište kružnice k_1 i pravca AD s iste strane točke A kao i točka D. Konstruirajmo sada kružnice k_2 i k_3 radijusa a sa središtima u P i T. Kružnice k_2 i k_3 sijeku se u točkama A i R. Nastali četverokut $APRT$ je zlatni romb.

Dokaz. Dužine $\overline{AP}, \overline{AT}, \overline{TR}$ i $\overline{PR}$ su, prema konstrukciji, radijusi kružnica duljine a pa je jasno je da je $APRT$ romb. Kako bismo dokazali da je $APRT$ zlatni romb, dovoljno je dokazati da su dijagonale rombova $ABCD$ i $APRT$ proporcionalne jer su im tada omjeri duljina dulje i kraće dijagonale jednaki.

Kut pri vrhu A zajednički je rombu $ABCD$ i $APRT$. Kako su nasuprotni kutovi romba sukladni, a kutovi uz istu stranicu suplementarni, to su odgovarajući kutovi oba romba sukladni.

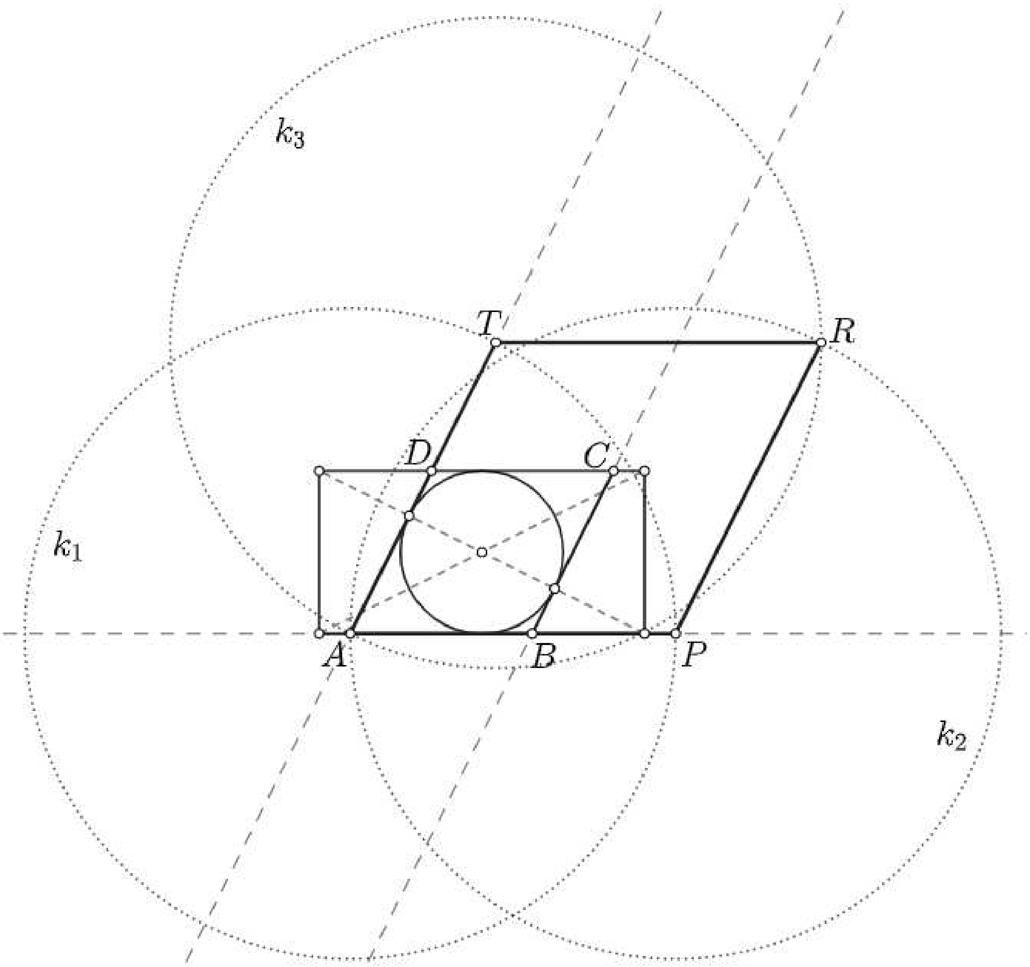
Kako dijagonale romba raspolavljaju sve unutarnje kutove, to su trokuti $\triangle ACD$ i $\triangle ART$ te $\triangle BCD$ i $\triangle PRT$ slični (prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta), pa zaključujemo da je

$$\frac{|AR|}{|AC|} = \frac{|AT|}{|AD|} = \frac{|RT|}{|CD|} = \frac{|PT|}{|BD|},$$

odakle slijedi

$$\frac{|AR|}{|PT|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \varphi,$$

tj. $APRT$ je zlatni romb. □



Slika 4.7: Konstrukcija zlatnog romba stranice duljine a

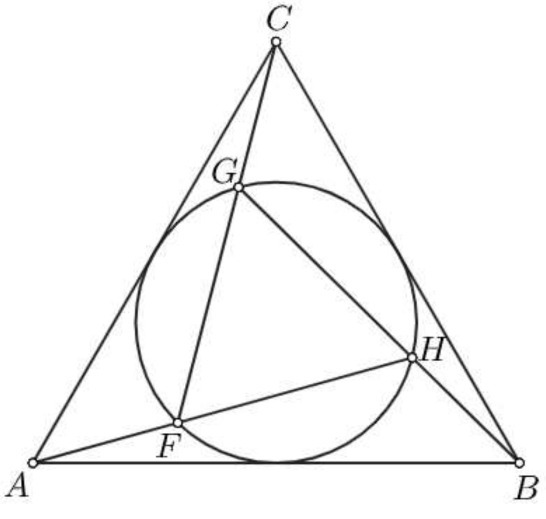
Poglavlje 5

Zlatni omjer u pravilnim mnogokutima

5.1 Zlatni omjer u jednakostraničnom trokutu

Propozicija 5.1.1. *Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle FGH$ jednakostranični trokuti takvi da je trokutu $\triangle FGH$ opisana kružnica ujedno i trokutu $\triangle ABC$ upisana kružnica. Neka točka F leži na AH, točka G na CF i točka H na BG kao na slici 5.1. Tada je*

$$\frac{|FH|}{|AF|} = \frac{|GH|}{|BH|} = \frac{|FG|}{|CG|} = \varphi.$$



Slika 5.1: Zlatni rez u jednakostraničnom trokutu

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka je duljina stranice $\triangle ABC$ jednaka 2. Odredimo duljinu stranice trokuta $\triangle FGH$. Označimo ju sa x. Primijetimo kako je radijus trokutu $\triangle ABC$ upisane kružnice ujedno i radijus trokutu $\triangle FGH$ opisane kružnice. Radijus trokutu upisane kružnice možemo izračunati pomoću formule $r = \frac{P}{s}$, gdje je P površina trokuta, a s njegov poluopseg. Uvrstimo u tu formulu formule za površinu i poluopseg jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine a. Tada je

$$r = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Formula za radijus trokutu opisane kružnice je $R = \frac{abc}{4P}$. Kako je $\triangle FGH$ jednakostraničan, slijedi

$$R = \frac{x^3}{4 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Budući da je $R = r$ i $a = 2$, dobije se

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{6},$$

iz čega slijedi da je $x = 1$.

Neka je točka E polovište dužine $\overline{AB}$. Primijetimo kako je

$$|AF| \cdot |AH| = |AE|^2$$

potencija točke A s obzirom na kružnicu k. Označimo $|AF| = y$. Sada imamo jednadžbu

$$y \cdot (y + 1) = 1,$$

čije je pozitivno rješenje

$$y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi}.$$

Slijedi da je

$$\frac{|FH|}{|AF|} = \frac{1}{y} = \varphi.$$

Ostali omjeri izračunaju se analogno. □

5.2 Zlatni trokut u pravilnom peterokutu i pravilnom deseterokutu

Zlatni trokut pojavljuje se u pravilnom peterokutu i deseterokutu. U pravilnom peterokutu, to je trokut kojeg čine dvije dijagonale iz istog vrha peterokuta i stranica nasuprot tog vrha. Neka je $ABCDE$ pravilni peterokut i neka su kutovi α, β, γ i δ označeni kao na slici 5.2(a). Budući da je zbroj unutarnjih kutova peterokuta jednak $(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$, slijedi da je $\delta = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Kako je $\triangle ABC$ jednakokračan, to je $\gamma = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \delta) = 36^\circ$. S obzirom na to da je $\beta + \gamma = 108^\circ$, dobije se da je $\beta = 72^\circ$, iz čega slijedi $\alpha = 36^\circ$. Dakle, $\triangle ACD$ je zaista zlatni trokut. Primijetimo da su preostala dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ zlatni gnomoni. Također, ukoliko u pravilnom peterokutu povučemo dijagonale iz svakog vrha, peterokut ćemo podijeliti na pet zlatnih trokuta, pet zlatnih gnomona i jedan peterokut, kao na slici 5.3(a). Znamo da su općenito svi zlatni trokuti, kao i svi zlatni gnomoni, slični pa, kako su i duljine krakova tih trokuta jednake, ti su trokuti sukladni. Promotrimo sada peterokut $XUZVY$. S obzirom na to da su njegove stranice ujedno i osnovice sukladnih zlatnih trokuta, možemo zaključiti da su sve stranice tog peterokuta sukladne. Nadalje, kako je $\angle AXU$ ispruženi kut, slijedi da je $\angle YXU = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Ako odredimo i preostale unutarnje kutove tog peterokuta, vidjet ćemo da su sukladni. Dakle, $XUZVY$ je pravilni peterokut.

Da je $\triangle ACD$ zlatni trokut, tj. da je omjer dijagonale i stranice pravilnog peterokuta jednak zlatnom rezu, možemo dokazati i pomoću Ptolomejeva teorema (slika 5.3(b)). Označimo duljinu stranice peterokuta sa a, a duljinu dijagonale sa d. Ako pravilnom peterokutu opišemo kružnicu, možemo uočiti da je četverokut $ACDE$ tetivni četverokut. Tada, prema Ptolomejevom teoremu, vrijedi da je umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta:

$$|AD| \cdot |CE| = |AE| \cdot |CD| + |AC| \cdot |DE|.$$

Odatle slijedi

$$d^2 = a^2 + ad,$$

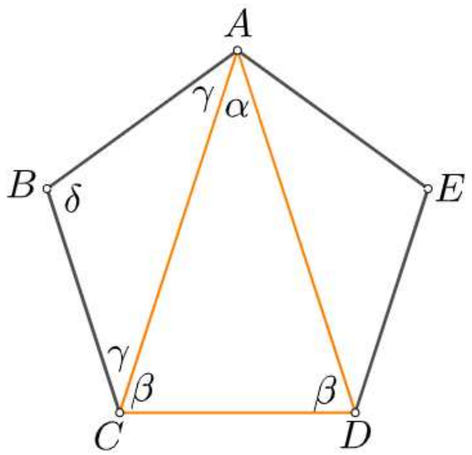
odnosno

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{d}{a} + 1 = 0,$$

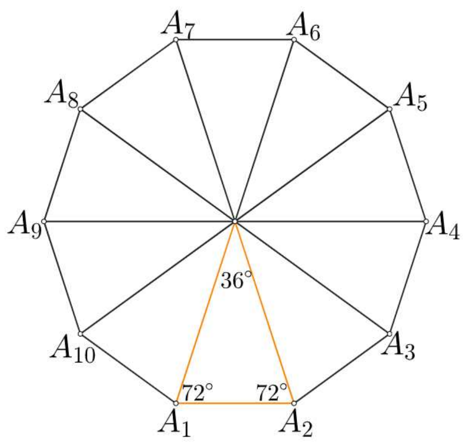
pa je

$$\frac{d}{a} = \varphi.$$

Zlatni trokut pojavljuje se i kao karakteristični trokut pravilnog deseterokuta (slika 5.2(b)), jer je središnji kut pravilnog deseterokuta jednak $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, pa su onda ostala dva kuta jednaka $\frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$.

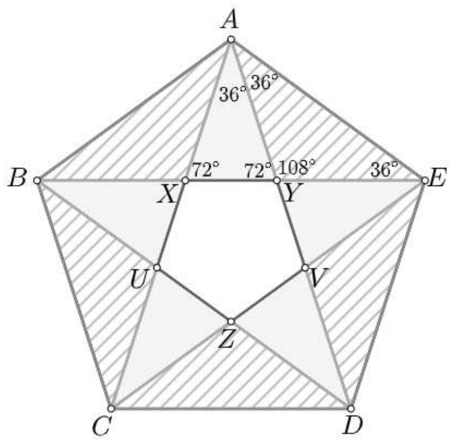


(a) Zlatni trokut u pravilnom peterokutu

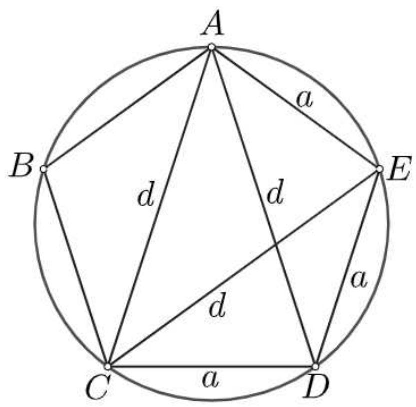


(b) Zlatni trokut u pravilnom deseterokutu

Slika 5.2



(a) Podjela pravilnog peterokuta na zlatne trokute, zlatne gnomone i pravilni peterokut



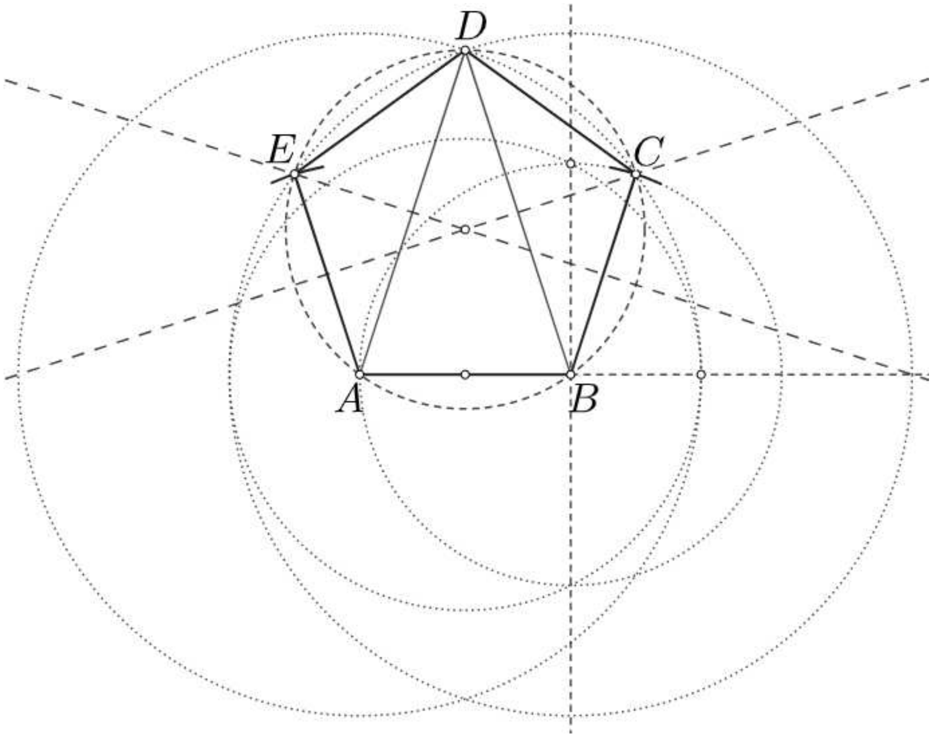
(b) Primjena Ptolomejeva teorema na $ACDE$

Slika 5.3

Pokažimo kako se mogu konstruirati pravilni peterokut i pravilni deseterokut polazeći od konstrukcije zlatnog trokuta.

Konstrukcija pravilnog peterokuta

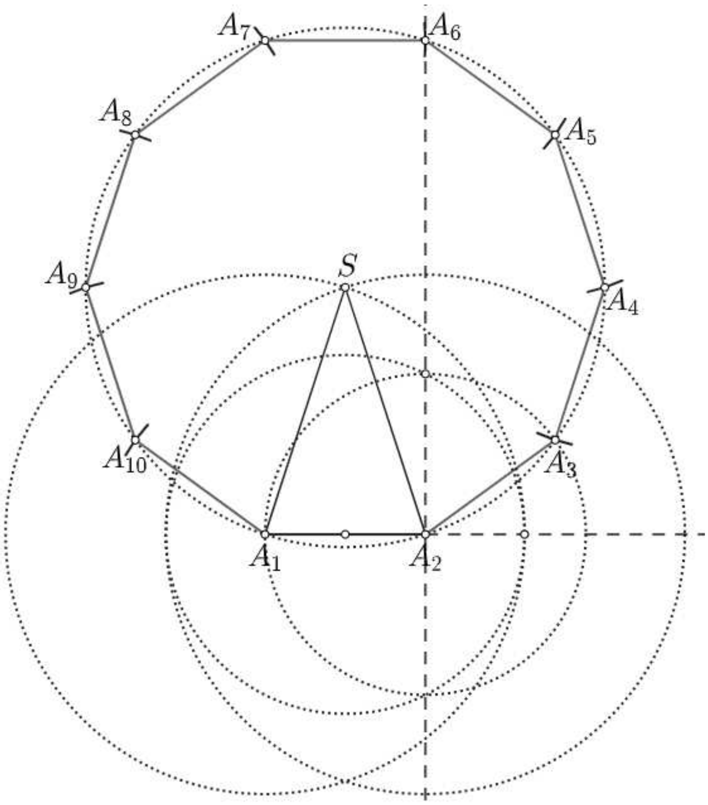
Neka je zadana duljina stranice pravilnog peterokuta, dužina $\overline{AB}$ duljine a (slika 5.4). Konstruirajmo zlatni trokut $\triangle ABD$ s osnovicom $\overline{AB}$. Zatim opišimo kružnicu tom trokutu. Sjecišta te kružnice s kružnicama $k(A, |AB|)$ i $k(B, |AB|)$ su redom točke E i C, preostala dva vrha pravilnog peterokuta $ABCDE$.



Slika 5.4: Konstrukcija pravilnog peterokuta

Konstrukcija pravilnog deseterokuta

Neka je zadana duljina stranice pravilnog deseterokuta, dužina $\overline{A_1A_2}$ duljine a (slika 5.5). Konstruirajmo zlatni trokut s osnovicom $\overline{A_1A_2}$. Označimo treći vrh trokuta sa S. Zatim konstruirajmo kružnicu sa središtem u S radijusa $|A_1S|$. Dužinu $\overline{A_1A_2}$ prenesimo po kružnici. Točke A_1, A_2 i dobivene točke na kružnici su vrhovi pravilnog deseterokuta.



Slika 5.5: Konstrukcija pravilnog deseterokuta

5.3 Zlatni omjeri u pravilnom peterokutu

Propozicija 5.3.1. *Neka je ABCDE pravilan peterokut i* X, Y, U, V, Z *točke presjeka dijagonala kao na slici 5.6. Tada je*

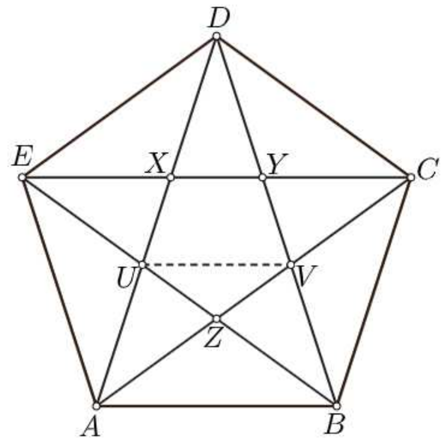
$$\frac{|DE|}{|EX|} = \frac{|EX|}{|XY|} = \frac{|UV|}{|XY|} = \frac{|EY|}{|EX|} = \frac{|EC|}{|ED|}.$$

Dokaz. Neka je stranica peterokuta duljine a. Primijetimo kako je $\triangle DEC$ zlatni gnomon te da je podijeljen na dva zlatna gnomona i jedan zlatni trokut (slika 3.5). Zato je

$$\frac{|EC|}{|ED|} = \varphi, \quad \frac{|DE|}{|EX|} = \varphi \quad \text{i} \quad \frac{|DX|}{|XY|} = \varphi,$$

odnosno, zbog $|DX| = |EX|$,

$$\frac{|EC|}{|ED|} = \frac{|DE|}{|EX|} = \frac{|EX|}{|XY|} = \varphi.$$



Slika 5.6: Zlatni rez u pravilnom peterokutu

Dalje je

$$\frac{|EY|}{|EX|} = \frac{|EX| + |XY|}{|EX|} = 1 + \frac{|XY|}{|EX|} = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + (\varphi - 1) = \varphi.$$

Preostaje dokazati da je $\frac{|UV|}{|XY|} = \varphi$. Znamo da je $XYVZU$ također pravilni peterokut te da je $\triangle UVZ$ zlatni gnomon za koji vrijedi $\frac{|UV|}{|UZ|} = \varphi$. Budući da je $|UZ| = |XY|$, slijedi

$$\frac{|UV|}{|XY|} = \frac{|UV|}{|UZ|} = \varphi.$$

□

Propozicija 5.3.2. *Neka je $ABCDE$ pravilni peterokut. Neka je F točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je $\angle FED$ pravi kut, a točka F' sjecište pravaca AB i ED. Tada je*

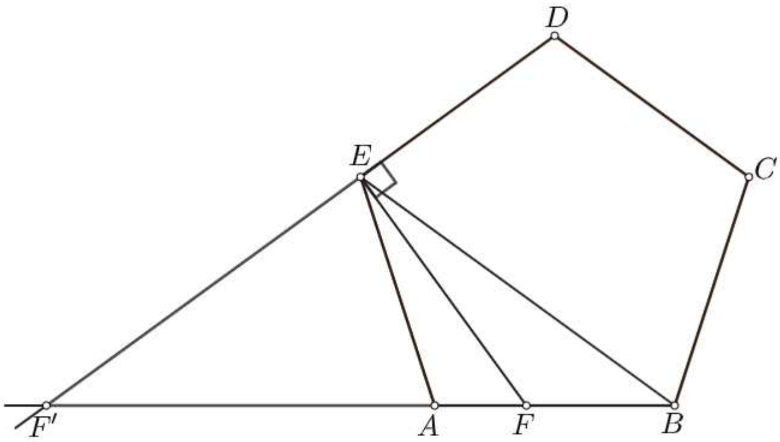
$$\frac{|FB|}{|AF|} = \frac{|F'B|}{|F'A|} = \varphi.$$

Dokaz. Povucimo dijagonalu $\overline{EB}$ (slika 5.7). Tada je

$$\angle AEF = \angle AED - \angle FED = 108^\circ - 90^\circ = 18^\circ.$$

Kako je $\angle AEB = 36^\circ$, slijedi da je i $\angle FEB = 18^\circ$. Dakle, EF je simetrala kuta $\angle AEB$ pa prema teoremu o simetrali kuta u trokutu dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica:

$$\frac{|FB|}{|AF|} = \frac{|EB|}{|EA|} = \varphi.$$



Slika 5.7: Zlatni rez u pravilnom peterokutu

Kako su mjere unutarnjih kutova pravilnog peterokuta jednake 108°, to je $\angle AEF' = \angle EAF' = 72°$ odnosno $\triangle AEF'$ je zlatni trokut. Slijedi

$$\frac{|F'B|}{|F'A|} = \frac{|F'A| + |AB|}{|F'A|} = 1 + \frac{|AB|}{|F'A|} = 1 + \frac{|EA|}{|F'A|} = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + (\varphi - 1) = \varphi.$$

□

Propozicija 5.3.3. *Neka je $ABCDE$ pravilni peterokut i točka F na kružnom luku $\overset{\frown}{AB}$. Tada je*

$$\frac{|EF| + |CF|}{|DF|} = \frac{|DF| + |AF|}{|EF|} = \frac{|FC| - |FA|}{|FB|} = \frac{|DF|}{|AF| + |BF|} = \varphi.$$

Dokaz. Promotrimo četverokute $FCDE, FDEA, FBCA$ i $FBDA$ (slika 5.8). Primjenom Ptolomejeva teorema na četverokut $FCDE$ dobijemo

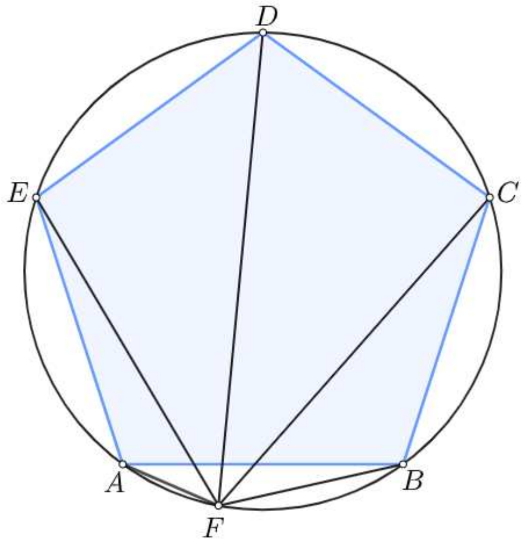
$$|DF| \cdot |CE| = |EF| \cdot |CD| + |ED| \cdot |CF|.$$

Kako je $|ED| = |CD|$, vrijedi

$$|DF| \cdot |CE| = |ED|(|EF| + |CF|),$$

a kako je $\triangle DEC$ zlatni gnomon,

$$\frac{|EF| + |CF|}{|DF|} = \frac{|CE|}{|ED|} = \varphi.$$



Slika 5.8: Zlatni rez u pravilnom peterokutu

Primjenom Ptolomejeva teorema na četverokute $FDEA, FBCA$ i $FBDA$, analogno kao i gore, dobije se

$$\frac{|DF| + |AF|}{|EF|} = \frac{|AD|}{|ED|} = \varphi,$$

$$\frac{|FC| - |FA|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \varphi,$$

te

$$\frac{|DF|}{|AF| + |BF|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \varphi.$$

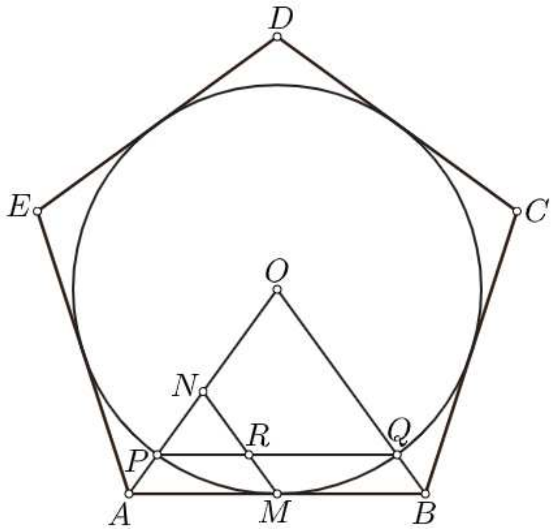
□

Propozicija 5.3.4. *Neka je $ABCDE$ pravilan peterokut i O središte tom peterokutu upisane kružnice. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$, N polovište od $\overline{OA}$, točke P i Q sjecišta upisane kružnice sa $\overline{OB}$ i $\overline{OA}$, redom, te R sjecište dužina $\overline{MN}$ i $\overline{PQ}$. Tada je*

$$\frac{|ON|}{|PN|} = \frac{|QR|}{|PR|} = \varphi.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je upisana kružnica peterokutu $ABCDE$ jedinična. Središnji kut pravilnog peterokuta je 72° pa $\angle MOB$ u pravokutnom trokutu $\triangle OMB$ iznosi 36°. Iz trigonometrije pravokutnog trokuta slijedi

$$\frac{|OM|}{|OB|} = \cos 36^\circ.$$



Slika 5.9: Zlatni rez u pravilnom peterokutu

Prema propoziciji 1.1.2 je $\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$, pa je

$$\frac{1}{|OB|} = \frac{\varphi}{2}$$

odnosno

$$|OB| = \frac{2}{\varphi}.$$

Budući da je $|OB| = |OA|$ i N je polovište od $\overline{OA}$, slijedi da je

$$|ON| = \frac{1}{\varphi}.$$

Tada je

$$|PN| = |OP| - |ON| = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

Kako je $\overline{MN}$ srednjica trokuta $\triangle OAB$, možemo zaključiti da je MN paralelan sa OB. Sada, primjenom Talesovog teorema o proporcionalnosti na kut $\angle OPQ$ dobivamo

$$\frac{|QR|}{|PR|} = \frac{|ON|}{|PN|} = \frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{1}{\varphi^2}} = \varphi.$$

$\square$

Bibliografija

[1] F. M. Brückler, *Tko je prvi... definirao zlatni rez*, Matematika i škola **20** (2019.), br. 100, 224–225.

[2] J. S. Duan, *Shrinkage Points of Golden Rectangle, Fibonacci Spirals, and Golden Spirals*, Discrete Dyn. Nat. Soc. (2019.), 6. p, Article ID 3149602.

[3] M. Katić Žlepalo i B. Kovačić, *O zlatnom trokutu*, math.e **30**, `http://e.math.hr/Vol30/KaticZlepalo`.

[4] K. Katušić, *Geometrija zlatnog reza*, diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera – Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2017.

[5] B. Kovačić i M. Katić Žlepalo, *O zlatnom rombu*, math.e **35**, `http://e.math.hr/Vol35/kovacic`.

[6] N. Skočić, A. Dika i D. Tich, *Radionica Zlatni rez*, Matematika i škola **7** (2006.), br. 35, 205–210.

[7] P. Verma, *Infinite Kepler triangles*, At Right Angles **10** (2021.), 70–72.

[8] S. Zlatić, *Zlatni rez*, Tehnički glasnik **7** (2013.), 84–90.

[9] *Golden Ratio in Equilateral Triangles*, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, `https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/Buratino2.shtml`, svibanj 2023.

[10] *Golden ratio in regular pentagon*, `https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatioInRegularPentagon.shtml`, lipanj 2023.

[11] *Golden spiral, Fibonacci spiral and natural spirals*, `https://mathcurve.com/courbes2d.gb/logarithmic/spiraledor.shtml`, lipanj 2023.

[12] *Kepler triangle*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_triangle`, lipanj 2023.

Sažetak

Ako je veličina podijeljena na dva dijela tako da je omjer te veličine prema većem dijelu jednak omjeru većeg dijela prema manjem, kaže se da je ta veličina podijeljena u zlatnom rezu. Taj omjer tada iznosi $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. U ovom diplomskom radu proučavani su različiti mnogokuti u vezi s ovom konstantom: zlatni pravokutnik kojemu je omjer stranica jednak φ, jednakokračni trokuti zlatni trokut i zlatni gnomon kojima je omjer kraka i osnovice, odnosno osnovice i kraka jednak φ, zatim zlatni romb čiji je omjer dijagonala jednak φ te drugi mnogokuti u kojima se pojavljuje konstanta φ. Dokazana su različita svojstva ovih mnogokuta i opisane njihove konstrukcije.

Summary

If a quantity is divided into two parts in such way that the ratio of the whole quantity to the larger part is equal to the ratio of the larger part to the smaller part, it is said to be divided in the golden ratio. The value of this ratio is $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. In this thesis, various polygons related to this constant are studied. These include the golden rectangle, where the ratio of its sides is φ, and isosceles triangles known as the golden triangle and the golden gnomon, where the ratio of the legs to the base, or the base to the legs, is φ. The golden rhombus, which has the ratio of its diagonals equal to φ, is also studied along with other polygons in which the constant φ appears. Different properties of these polygons have been proven, and their constructions have been described.

Životopis

Rođena sam 23. ožujka 1998. godine u Zagrebu. Školovanje započinjem u Osnovnoj školi Antuna Augustinčića u Zaprešiću. Nakon završetka osnovne škole, upisujem opći smjer u Gimnaziji Lucijana Vranjanina u Zagrebu. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2016. godine upisujem studij na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje najprije studiram na Preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika, a 2017. se prebacujem na Preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički. Godine 2020. stječem titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike te iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer nastavnički.