SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karla Juranović

MATEMATIČKA INDUKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Boris Širola

Zagreb, srpanj 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu detaljnije se objašnjava princip matematičke indukcije koji je vrlo zanimljiv jer je jedna od najzastupljenijih metoda dokazivanja matematičkih tvrdnji. Indukcija proizlazi iz Peanovih aksioma na kojima se temelji skup prirodnih brojeva. Većina učenika susreće se s matematičkom indukcijom u školi na kraju svojeg srednjoškolskog obrazovanja.

Dokaz matematičkom indukcijom sastoji se od tri dijela. Prvi dio naziva se baza indukcije i u njemu se provjerava vrijedi li matematička tvrdnja za početni broj n_0. U drugom dijelu pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n gdje je $n \geq n_0$. Iz tog razloga drugi korak nazivamo pretpostavka indukcije. U trećem dijelu, kojeg nazivamo korak indukcije, uz pomoć pretpostavke dokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Bitno je napomenuti da su drugi i treći korak izrazito povezani.

Opisana metoda samo je jedna od metoda matematičke indukcije. No postoje i druge, specijalne varijante indukcije, od kojih ćemo neke od njih spomenuti u ovom radu. Preciznije rečeno, objasnit ćemo jaku matematičku indukciju, dvostruku matematičku indukciju, Fermatovu metodu beskonačnog spusta i metodu transfinitne indukcije. Primjenu svake od njih pokazat ćemo na raznim primjerima. Pritom treba reći kako se metoda dokazivanja indukcijom koristi faktički u svim matematičkim disciplinama, poput kombinatorike, teorije brojeva, matematičke analize i linearne algebre. U svakoj od navedenih disciplina na nekoliko primjera ilustrirat će se dokazivanje nekih tvrdnji pomoću principa matematičke indukcije.

Sada ćemo detaljno objasniti sam sadržaj ovog rada. U Poglavlju 1 najprije govorimo o Peanovim aksiomima, od kojih je peti aksiom ono što podrazumijevamo kao *"ideju matematičke indukcije"*. U odjeljku 1.2 dokazujemo dva teorema: Teorem 1.2.1 o *"Principu matematičke indukcije"* i Teorem 1.2.2 o *"Općem obliku matematičke indukcije"*. Tu posebno navodimo i neke konkretne primjere koji naglašavaju važnost provjere baze matematičke indukcije. U odjeljku 1.3 govorimo o vrstama matematičke indukcije; posebno o jakoj matematičkoj indukciji i o dvostrukoj matematičkoj indukciji. Do kraja prvog poglavlja bavimo se Fermatovom metodom beskonačnog spusta, koja je posebno korisna u nekim problemima teorije brojeva.

U Poglavlju 2 bavimo se primjenom matematičke indukcije u raznim matematičkim područjima. U odjeljku 2.1 pokazujemo korisnost indukcije u kombinatorici. Dokazujemo dva teorema: poznatu *"Formulu uključivanja-isključivanja"* te *Dirichletov princip*. U odjeljku 2.2 dokazujemo tri bitna identiteta s binomnim koeficijentima: *Pascalov identitet, Eulerov identitet* i *Lagrangeov identitet*. Na kraju dokazujemo *"De Moivreovu formulu"*. U odjeljku 2.3 bavimo se indukcijom u teoriji brojeva. Prvo dokazujemo da se svaki pozitivan racionalan broj može zapisati u egipatskom zapisu. Zatim dokazujemo da postoji beskonačno mnogo rješenja Pellove jednadžbe u skupu prirodnih brojeva te kako ih izračunati ukoliko znamo njezino najmanje rješenje. U odjeljku 2.4 dokazujemo neke važne rezultate u linearnoj algebri. Preciznije dokazujemo da svaki vektorski prostor ima bazu. Zatim dokazujemo da se pomoću *Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije* svaki linearno nezavisni skup u unitarnom prostoru može ortonormirati. Na kraju dokazujemo tri poznate nejednakosti: *Cauchy-Schwarz nejednakost, Hölderova nejednakost* i *nejednakost Minkowskog*.

Poglavlje 1

Matematička indukcija

1.1 Peanovi aksiomi

Giuseppe Peano jedan je od najpoznatijih talijanskih matematičara. Rođen je 1858. u selu pokraj grada Cuneo. Većinu svojeg života radio je na Sveučilištu u Torinu, gdje je i doktorirao. Najpoznatiji je po svojem djelu *Aritmetička načela: izlaganje novom metodom (Arithmetices principia: nova methodo exposita)*, izdanom 1889., u kojem je definirao skup prirodnih brojeva.

Iako je Peano aksiome pomoću kojih je definirao skup prirodnih brojeva dobio od njemačkog matematičara Dedekinda[1], aksiomi se u čast Peanu nazivaju Peanovi aksiomi. Funkcija s koja se spominje u aksiomima, naziva se funkcija sljedbenika. Standardno se sljedbenik $s(n)$ broja n piše kao $n + 1$.

Definicija 1.1.1 (Peanovi aksiomi)**.** *Neka je $\mathbb{N}$ neprazan skup i $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija. Neprazan skup $\mathbb{N}$ nazivamo skupom prirodnih brojeva, njegove elemente prirodnim brojevima, ukoliko vrijede sljedeći aksiomi:*

1. *Postoji prvi element u skupu $\mathbb{N}$ koji se označava s 1, to jest*
   $1 \in \mathbb{N}$.
2. *Svaki element skupa ima svojeg sljedbenika u tom skupu, to jest*
   $(\forall n \in \mathbb{N})\,(s(n) \in \mathbb{N})$.
3. *Ako dva broja imaju istog sljedbenika, onda su ti brojevi jednaki, to jest*
   $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(m = n \iff s(m) = s(n))$.
4. *Prvi element skupa nije sljedbenik niti jednog broja u skupu, to jest*
   $(\forall n \in \mathbb{N})(s(n) \neq 1)$.

[1]Richard Dedekind, (1831. Braunschweig - 1916. Braunschweig), njemački matematičar

5. *Ako je* $M \subset \mathbb{N}$ *za koji vrijedi:*

   a) $1 \in M$,

   b) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in M \Rightarrow s(n) \in M)$,

   onda vrijedi $M = \mathbb{N}$.

Danas je konvencija kao najmanji prirodan broj uzeti jedinicu, no zanimljivo je napomenuti da je Peano u svojem radu kao najmanji prirodan broj uzeo nulu.

1.2 Princip matematičke indukcije

Peti Peanov aksiom još se naziva i aksiom matematičke indukcije. On govori da je svaki podskup skupa prirodnih brojeva koji sadrži prvi prirodan broj te koji ima svojstvo da ako sadrži neki broj, onda sadrži i njegovog sljedbenika, jednak skupu prirodnih brojeva. Iz aksioma slijedi način dokazivanja tvrdnji koje ovise o prirodnim brojevima zvan princip matematičke indukcije. Često se radi jednostavnosti izostavlja riječ princip, te se govori da tvrdnja vrijedi zbog matematičke indukcije. Teoremi i dokazi u ovom poglavlju pisani su po uzoru na [2].

Teorem 1.2.1 (Princip matematičke indukcije)**.** *Svaka tvrdnja* T_n *koja ovisi o* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi za svaki prirodan broj n ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *Tvrdnja vrijedi za* $n = 1$ ***(Baza indukcije)****.*

2. *Ako tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj k* ***(Pretpostavka indukcije)****,*
   tada tvrdnja vrijedi i za prirodan broj $k + 1$ ***(Korak indukcije)****.*

Dokaz. Neka je T neka tvrdnja za koju vrijede gornja svojstva i neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ definiran kao $S = \{n \in \mathbb{N} \mid T_n \text{ je istina}\}$, to jest S je skup svih prirodnih brojeva za koje vrijedi tvrdnja T.

Kako tvrdnja T zadovoljava bazu indukcije, to jest vrijedi T_1, tada prema definiciji skupa S vrijedi $1 \in S$.

Iz pretpostavke i koraka indukcije slijedi da ukoliko vrijedi tvrdnja T_k, tada vrijedi i tvrdnja T_{k+1}, pa prema definiciji skupa S vrijedi $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$. Prema aksiomu matematičke indukcije skup S jednak skupu prirodnih brojeva. Dakle, tvrdnja T vrijedi za svaki prirodan broj n.

$\square$

Matematičku indukciju u kojoj se pri provjeri baze indukcije provjerava vrijedi li tvrdnja za $n = 1$ nazivamo slaba matematička indukcija. Matematičku indukciju u kojoj se pri provjeri baze indukcije provjerava vrijedi li tvrdnja za neki $n_0 \in \mathbb{N}$ nazivamo opći oblik matematičke indukcije.

Teorem 1.2.2 (Opći oblik matematičke indukcije)**.** *Svaka tvrdnja T_n koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za svaki prirodan broj $n, n \geq n_0$ ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *Tvrdnja T_{n_0} je istinita.*
2. *Za svaki prirodan broj k, $k \geq n_0$ iz tvrdnje T_k slijedi tvrdnja T_{k+1}.*

Dokaz. Neka je P tvrdnja takva da vrijedi $P_n = T_{n+n_0-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada za bazu indukcije P_1 vrijedi $P_1 = T_{1+n_0-1} = T_{n_0}$. Prema prvom uvjetu teorema tvrdnja T_{n_0} je istinita, pa slijedi da vrijedi i tvrdnja P_1.
Pretpostavimo da vrijedi P_k za neki $k \in \mathbb{N}$. Želimo pokazati da vrijedi

$$P_k \Rightarrow P_{k+1}.$$

Primijetimo da je izjava koju želimo pokazati ekvivalentna izjavi

$$T_{k+n_0-1} \Rightarrow T_{k+n_0}.$$

Iz druge stavke pretpostavke teorema vrijedi $T_n \Rightarrow T_{n+1}$, za $n \geq n_0$. Očito vrijedi $k+n_0-1 \geq n_0$. Iz čega slijedi da je izraz $T_{k+n_0-1} \Rightarrow T_{k+n_0}$ istinit. Pa je zbog ekvivalencije izraza istinit i izraz $P_k \Rightarrow P_{k+1}$.

Prema metodi slabe matematičke indukcije, tvrdnja P istinita je za svaki prirodni broj n, pa zaključujemo da je i tvrdnja T istinita za svaki $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$.

□

Napomenimo još jednom kako je uvijek nužno pri dokazivanju matematičkom indukcijom provjeriti bazu indukcije. Učenici u školama i studenti na fakultetu često "zaborave" provjeriti bazu indukcije misleći kako ona "očigledno vrijedi". Navodimo jedan primjer pogrešnog zaključivanja.

Primjer 1.2.3. *Iako za nju vrijedi korak indukcije ne stoji tvrdnja*

$$T_n : \textit{Broj } X_n := n^3 - 4n + 1 \textit{ je djeljiv s 3, za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Lako se može provjeriti kako vrijedi implikacija $T_n \Rightarrow T_{n+1}$. Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi T_n, to jest da je broj X_n djeljiv s 3. Onda iz jednakosti

$$X_{n+1} = n^3 + 3(n^2 + n) + 1 - 4n - 4 + 1 = X_n + 3(n^2 + n - 1),$$

zaključujemo da vrijedi i T_{n+1}. Međutim, u ovom primjeru baza indukcije ne vrijedi, to jest broj $X_1 = -2$ nije djeljiv s 3. Zapravo, tvrdnja T_n ne vrijedi za niti jedan prirodni broj n. Dokažimo novo dobivenu tvrdnju T_n^* : Broj $X_n := n^3 - 4n + 1$ nije djeljiv s 3, $\forall n \in \mathbb{N}$ pomoću matematičke indukcije.

Kao što je već napomenuto, broj $X_1 = -2$ nije djeljiv s 3, dakle baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo da broj X_n nije djeljiv s 3 za neki $n \in \mathbb{N}$. Broj X_{n+1} možemo zapisati u obliku $X_{n+1} = X_n + 3(n^2 + n - 1)$. Dakle, broj X_{n+1} je zbroj dvaju brojeva, od kojih je jedan djeljiv s 3, a drugi nije. Tada ni broj X_{n+1} ne može biti djeljiv s brojem 3. Prema principu matematičke indukcije broj X_n nije djeljiv s 3 za niti jedan prirodan broj n.

Primijetimo kako se za svaki prirodan broj n_0 može pronaći primjer matematičke tvrdnje T_n koja vrijedi za svaki prirodan broj $n \geq n_0$, ali ne vrijedi ni za koji prirodan broj $n < n_0$. Slijedi jedan primjer u kojemu se naglašava važnost postojanja teorema matematičke indukcije u općem obliku.

Primjer 1.2.4. T_n : *Za svaki prirodan broj* $n \geq 9$ *vrijedi nejednakost* $2^n > (n + 10)^2$.

Lako je provjeriti da tvrdnje $T_1, ..., T_8$ ne vrijede. Kako je $2^9 = 512$ i $(9 + 10)^2 = 361$, tvrdnja T_9 je istinita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 9$. Tada kako bi početna tvrdnja bila istinita mora vrijediti

$$((n + 1) + 10)^2 = (n + 10)^2 + 2(n + 10) + 1 < 2^{n+1} = 2^n + 2^n.$$

Primijetimo kako je dovoljno dokazati da vrijedi $2(n + 10) + 1 < 2^n$ jer po pretpostavci indukcije imamo $(n+10)^2 < 2^n$. Dodatno, iz pretpostavke indukcije proizlazi da je potrebno dokazati da vrijedi $2(n+10)+1 \leq (n+10)^2$. Preostaje primijetiti kako imamo ekvivalenciju

$$2(n + 10) + 1 \leq (n + 10)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \leq (n + 10)(n + 8),$$

te da je desna strana gornje ekvivalencije očito istinita.
Pokažimo još jedan poznati primjer koji govori o monotonosti određenog niza brojeva.

Primjer 1.2.5. *Niz realnih brojeva* $(\sqrt[n]{n})$ *jest strogo padajući za* $n \geq 3$, *to jest*

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > ...$$

Ponekad je lakše dokazati tvrdnje u drugačijem obliku. Početna tvrdnja može se zapisati kao $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Primjenom algebarskih operacija nejednakost možemo zapisati kao

$$n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Prvo provjeravamo bazu tvrdnje, to jest vrijedi li nejednakost za $n = 3$. Vrijedi

$$3 > \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \approx 2,37.$$

Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki $n \geq 3$, to jest da je

$$n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Kako bi tvrdnja bila istinita za sve prirodne brojeve veće ili jednake 3 još je potrebno dokazati da vrijedi korak indukcije, to jest da vrijedi

$$n + 1 > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Primijetimo da je

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Koristeći pretpostavku indukcije dobivamo

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1,$$

što je upravo ono što smo htjeli dobiti.

1.3 Vrste matematičke indukcije

Jaka matematička indukcija

Ponekad za dokaz matematičkom indukcijom nije dovoljno pretpostaviti da tvrdnja vrijedi samo za neki $n \in \mathbb{N}$, već da vrijedi i za sve prirodne brojeve prije njega koji su veći ili jednaki od nekog početnog n_0.

Teorem 1.3.1. *Svaka tvrdnja T_n koja ovisi o $n \in \mathbb{N}$ vrijedi za svaki prirodan broj $n, n \geq n_0$, ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete:*

(1) Tvrdnja vrijedi za $n = n_0$.

(2) Za svaki $n \in \mathbb{N}$, ako tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n_0, n_0 + 1, ..., n$, tada tvrdnja vrijedi i za $n + 1$.

Dokaz. Neka je $T(n)$ tvrdnja za koju vrijedi $T(n_0)$ i neka za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$T(n_0) \wedge T(n_0 + 1) \wedge \cdots \wedge T(n) \Rightarrow T(n + 1).$$

Definirajmo tvrdnju $Q(n)$ kao

$$Q(n) : \text{za svaki } k,\ n_0 \leq k \leq n,\ T(k) \text{ je istinita tvrdnja.}$$

Principom opće matematičke indukcije dokazat ćemo da tvrdnja $Q(n)$ vrijedi za svaki $n \geq n_0$. Iz pretpostavke teorema tvrdnja $T(n_0)$ je istinita, a kako je tvrdnja $Q(n_0)$ definirana pomoću $T(n_0)$, ona sama također mora biti istinita. Time je dokazana baza indukcije. Pretpostavimo da je za neki $k \in \mathbb{N}, k \geq n_0$ istinita tvrdnja $Q(k)$. Tada su, prema definiciji tvrdnje Q, istinite i tvrdnje $T(n_0), T(n_0+1), \ldots, T(k)$. Iz svojstva (2) teorema tada je istinita i tvrdnja $T(k + 1)$, a time i tvrdnja $Q(k + 1)$.

Prema principu opće matematičke indukcije tvrdnja $Q(n)$ istinita je za svaki $n \geq n_0$, a kako istinitost $Q(n)$ implicira istinitost tvrdnje $T(n)$, tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n \geq n_0$.

□

Dokazali smo da princip jake matematičke indukcije slijedi iz principa opće matematičke indukcije. Slijedi dokaz da princip opće matematičke indukcije slijedi iz principa jake matematičke indukcije. Zaključujemo da je princip jake matematičke indukcije ekvivalentan principu matematičke indukcije. Slijedi lema koja je potrebna u dokazu.

Lema 1.3.2. *Za $(m + 1)$ tvrdnji T_i vrijedi*

$$[(T_1 \Rightarrow T_2) \wedge (T_2 \Rightarrow T_3) \wedge \cdots \wedge (T_m \Rightarrow T_{m+1})] \Rightarrow [(T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_m) \Rightarrow T_{m+1}].$$

Pokažimo sada da iz jake matematičke indukcije slijedi slaba. Neka je $T(n)$ tvrdnja za koji vrijedi jaka matematička indukcija, to jest neka vrijedi tvrdnja $T(n_0)$ i neka za svaki $k \geq n_0$ vrijedi $T(n_0) \wedge T(n_0 + 1) \wedge \cdots \wedge T(k) \Rightarrow T(k + 1)$.

Također, neka za svaki $k \geq n_0$ vrijedi $T(k) \Rightarrow T(k + 1)$. Uzastopnom primjenom ove pretpostavke na svaki prirodni broj manji ili jednak k dobivamo

$$T(n_0) \Rightarrow T(n_0 + 1),\ T(n_0 + 1) \Rightarrow T(n_0 + 2), \ldots,\ T(k) \Rightarrow T(k + 1).$$

Korištenjem leme 1.3.2 slijedi

$$[T(n_0) \wedge T(n_0 + 1) \wedge \cdots \wedge T(k)] \Rightarrow T(k + 1),$$

što je upravo što smo htjeli dobiti. Iz prinicipa jake matematičke indukcije slijedi da je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki $n \geq n_0$.

Na primjeru ćemo pokazati zašto je potreban princip matematičke indukcije i u ovom obliku.

Teorem 1.3.3 (Osnovni teorem aritmetike)**.** *Svaki prirodni broj strogo veći od 1 može se zapisati kao umnožak prostih brojeva.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati korištenjem metode jake matematičke indukcije.

Prvi prirodni broj veći od 1 je 2. On je već prikazan kao umnožak prostih brojeva jer je i sam prost broj. Time je baza indukcije zadovoljena.

Neka je k neki prirodni broj veći od 1. Pretpostavimo da se svaki prirodan broj $m, m \leq k$ može prikazati kao umnožak prostih brojeva. Potrebno je dokazati da se broj $k + 1$ može prikazati kao umnožak prostih brojeva.

Razlikujemo dva slučaja:

1° Broj $k + 1$ je prost. U tom slučaju broj je već prikazan kao umnožak prostih brojeva i dokaz je gotov.

2° Broj $k + 1$ je složen. U tom slučaju $k + 1$ se može zapisati kao umnožak brojeva p i $q, 1 < p, q < k + 1$. To jest, vrijedi $k + 1 = p \cdot q$. Kako su p, q brojevi manji od $k + 1$, prema pretpostavci indukcije mogu se prikazati kao umnožak prostih brojeva. Slijedi da se i broj $k + 1$ može prikazati kao umnožak prostih brojeva.

Dakle, principom jake indukcije zaključujemo da se svaki prirodni broj strogo veći od jedan može zapisati kao umnožak prostih brojeva.

□

Kada bi prethodni teorem pokušali dokazati principom opće matematičke indukcije ne bismo mogli iskoristiti pretpostavku indukcije. Naime, broj n ne može biti niti jedan od prostih faktora na koje se rastavlja broj $n + 1$ jer je njegov neposredni prethodnik. Stoga je potrebno koristiti metodu jake indukcije.

Ponekad za bazu indukcije nije dovoljno provjeriti samo jedan broj, već njih više. Slijedi jedan primjer u kojemu se u bazi indukcije provjerava vrijedi li tvrdnja za dva prirodna broja.

Primjer 1.3.4. *Neka je a_n niz za koji vrijedi $a_1 = 3, a_2 = 5$ i $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ za $n \geq 3$. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$a_n = 2n + 1.$$

Rješenje. Kako je rekurzivni niz zadan pomoću prethodna dva člana, u bazi indukcije moramo provjeriti vrijedi li formula za $n = 1$ te $n = 2$. Imamo da je $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, pa zaključujemo da formula zadovoljava bazu indukcije. Pretpostavimo da za $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ i $1 \leq n \leq k$ vrijedi $a_n = 2n + 1$. Još dokazujemo korak indukcije, to jest $a_{k+1} = 2(k + 1) + 1 = 2k + 3$. Vrijedi

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_k - a_{k-1}.$$

Koristimo pretpostavku da formula vrijedi za sve $n \leq k$, slijedi

$$a_{k+1} = 2 \cdot (2k + 1) - (2(k - 1) + 1) = 4k + 2 - 2k + 2 - 1 = 2k + 3,$$

što je upravo ono što smo htjeli dobiti.

□

Dvostruka matematička indukcija

Teorem 1.3.5. *Svaka tvrdnja $T(m, n)$ koja ovisi o prirodnim brojevima m, n gdje je $m \geq a$ i $n \geq b$, vrijedi za sve prirodne brojeve m, n gdje je $m \geq a$ i $n \geq b$ ukoliko zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *Tvrdnja $T(a, b)$ je istinita.*
2. *Za sve $m \geq a$, ako je istinita tvrdnja $T(m, b)$, onda je istinita tvrdnja $T(m + 1, b)$.*
3. *Za sve $n \geq b$, ako je istinita tvrdnja $T(m, n)$ za sve $m \geq a$, tada je istinita i tvrdnja $T(m, n + 1)$.*

Dokaz. Dokaz teorema slijedi direktno primjenom općeg oblika matematičke indukcije.

□

U nastavku slijede primjeri dokazivanja pomoću dvostruke matematičke indukcije.

Primjer 1.3.6. *Dokažimo da za sve prirodne brojeve m, n vrijedi nejednakost*

$$(m + 1)^n > mn.$$

Prvo provjeravamo bazu indukcije. Za $m = 1$ i $n = 1$, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da je za neki $m \geq 1$ tvrdnja istinita. Tada vrijedi

$$((m + 1) + 1)^1 = m + 2 > m + 1 = (m + 1) \cdot 1.$$

Dakle, tvrdnja $T(m + 1, 1)$ je istinita. Pretpostavimo da je za neki $n \geq 1$ istinita tvrdnja $T(m, n)$ za sve $m \geq 1$. To jest neka vrijedi $(m + 1)^n > mn$. Tada imamo

$$(m + 1)^{n+1} = (m + 1)(m + 1)^n > (m + 1)mn = m^2 n + mn.$$

Kako su m, n prirodni brojevi vrijedi nejednakost

$$m^2 n + mn \geq mn + m.$$

Slijedi,

$$(m+1)^{n+1} > mn + m = m(n+1).$$

Dakle tvrdnja $T(m, n+1)$ je istinita, pa je prema metodi dvostruke matematičke indukcije početna tvrdnja istinita za sve prirodne brojeve m, n.

Sljedeći primjer riješiti ćemo na dva načina, jednom pomoću dvostruke matematičke indukcije, a zatim pomoću logaritama.

Primjer 1.3.7. *Dokažimo da za sve prirodne brojeve $m, n \geq 2$ vrijedi nejednakost*

$$\left(\sqrt{2}\right)^m n^{\sqrt{2}} \geq 2^{\sqrt{m}} \left(\sqrt{n}\right)^2.$$

Prvi način
Baza tvrdnje vrijedi jer za $m = n = 2$ imamo $\left(\sqrt{2}\right)^2 2^{\sqrt{2}} \geq 2^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^2$, što je očito istina. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki $m \geq 2$ i $n = 2$, to jest da vrijedi nejednakost

$$\left(\sqrt{2}\right)^m 2^{\sqrt{2}} \geq 2^{\sqrt{m}} 2.$$

Želimo pokazati da vrijedi

$$\left(\sqrt{2}\right)^{m+1} 2^{\sqrt{2}} \geq 2^{\sqrt{m+1}} 2.$$

Korištenjem svojstava potencija dobivamo nejednakost

$$2^{\frac{m+1}{2} + \sqrt{2}} \geq 2^{1 + \sqrt{m+1}}.$$

Baza eksponencijalne funkcije veća je od 1, pa je funkcija rastuća, te je gornja nejednakost ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{m+1}{2} + \sqrt{2} \geq 1 + \sqrt{m+1} \Leftrightarrow (m-1)(m + 4\sqrt{2} - 5) \geq 0.$$

Za svaki $m \geq 2$ nejednakost $(m-1)(m + 4\sqrt{2} - 5) \geq 0$ je zadovoljena.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \geq 2$ i sve $m \geq 2$. Želimo da vrijedi nejednakost

$$\left(\sqrt{2}\right)^m (n+1)^{\sqrt{2}} \geq 2^{\sqrt{m}} (n+1).$$

Nejednakost možemo podijeliti s $(n+1)\left(\sqrt{2}\right)^m$ jer je svaki od faktora veći od 0, slijedi

$$(n+1)^{\sqrt{2}-1} \geq 2^{\sqrt{m} - m/2}.$$

Znamo da vrijedi

$$(n+1)^{\sqrt{2}-1} \geq n^{\sqrt{2}-1}.$$

Korištenjem pretpostavke i navedenog, slijedi

$$(n+1)^{\sqrt{2}-1} \geq n^{\sqrt{2}-1} \geq 2^{\sqrt{m}-m/2}.$$

Time je, prema metodi dvostruke matematičke indukcije, dokazana dana nejednakost za sve prirodne brojeve $m, n \geq 2$.

Drugi način
Kako su svi faktori s lijeve i desne strane nejednakosti veći od 0, danu nejednakost možemo logaritmirati s logaritmom čija je baza 2,

$$\log_2(\sqrt{2}^m n^{\sqrt{2}}) \geq \log_2(2^{\sqrt{m}} \sqrt{n}^2).$$

Iz čega slijedi

$$\frac{m\sqrt{2}}{2}\log_2 n \geq \sqrt{m}\log_2 n.$$

Kako je $n \geq 2$ vrijedi $\log_2 n > 0$, slijedi

$$m(m-2) \geq 0.$$

Kako je $m \geq 2$ gornja nejednakost je zadovoljena za svaki takav m. Time smo dokazali da dana nejednakost vrijedi za sve prirodne brojeve $m, n \geq 2$.

Fermatova metoda beskonačnog spusta

Fermatova metoda beskonačnog spusta još je jedna metoda dokazivanja ekvivalentna matematičkoj indukciji. Metoda koristi činjenicu da je skup prirodnih brojeva uređen, točnije koristi činjenicu da svaki neprazan podskup prirodnih brojeva ima najmanji element. Metoda se koristi pri dokazivanju da ne postoji prirodan broj koji zadovoljava neko svojstvo. Proces dokazivanja sastoji se od pretpostavke da postoji neko rješenje te konstruiranja manjeg rješenja pomoću te pretpostavke. Postupak bi trebali moći primjenjivati beskonačno mnogo puta, no kako skup prirodnih brojeva ima najmanji element to nije moguće. Dakle, pretpostavka da postoji rješenje je kriva. Više se detalja o ovoj materiji može naći u [3].

Prije primjera, slijedi nekoliko teorema koji će se koristiti u daljnjem rješavanju.

Teorem 1.3.8. *Sve primitivne Pitagorine trojke (x, y, z) u kojima je y paran, dane su formulama:*

$$\begin{aligned} x &= m^2 - n^2 \\ y &= 2mn \\ z &= m^2 + n^2, \end{aligned}$$

gdje vrijedi $m > n$ i m, n su relativno prosti brojevi različite parnosti.

Teorem nećemo dokazivati, no dokaz teorema može se pronaći na [3, Teorem 10.4].

Teorem 1.3.9. *Neka su x, y relativno prosti prirodni brojevi, te neka je xy potpun kvadrat. Tada su i brojevi x, y potpuni kvadrati.*

Dokaz. U dokazu ovog teorema koristit ćemo Fermatovu metodu beskonačnog spusta. Pretpostavimo da postoje brojevi $x, y \neq 1$ takvi da je xy potpun kvadrat, te neka x nije potpuni kvadrat. Dakle, x je djeljiv s barem jednim prostim brojem p i neka je $x = p \cdot k$. Tada p dijeli i potpuni kvadrat xy. Neka je $xy = z^2$. Kako p dijeli lijevu stranu jednakosti, tada dijeli i z^2, a time dijeli i z. Tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $z = pm$. Početna jednakost $xy = z^2$ sada postaje $pky = p^2m^2$, dijeljenjem s p dobivamo $ky = pm^2$. Kako p dijeli desnu stranu jednakosti, mora dijeliti i lijevu stranu, dakle dijeli ili k ili y. Ne može dijeliti y jer u suprotnom x i y ne bi bili relativno prosti. Dakle, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $k = pn$. Tada jednakost $ky = pm^2$ postaje $pny = pm^2$, to jest $ny = m^2$. Brojevi n i y su relativno prosti jer x i y nemaju zajedničkog djelitelja, a bilo koji djelitelj od n mora dijeliti i x. Također n nije potpuni kvadrat jer bi tada i $x = p^2n$ bio potpuni kvadrat što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. Dakle, pronašli smo manji par brojeva n, y za koje vrijedi da je njihov umnožak potpuni kvadrat. Uzastopnim ponavljanjem ovog postupka, pronašli bismo beskonačno mnogo manjih brojeva koji zadovoljavaju uvjet, no kako je to nemoguće, pretpostavka da postoje relativno prosti x, y koji nisu potpuni kvadrati, a njihov umnožak jest, je kriva. □

U nastavku slijedi još primjera dokazivanja pomoću Fermatove metode beskonačnog spusta.

Teorem 1.3.10. *Jednadžba*

$$x^4 + y^4 = z^2$$

nema cjelobrojnih rješenja različitih od nule.

Dokaz. Primjetimo kako je dovoljno dokazati da jednadžba nema pozitivnih cjelobrojnih rješenja jer ako postoje cjelobrojni brojevi x, y, z koji zadovoljavaju jednadžbu, tada jednadžbu zadovoljavaju i brojevi $\pm x, \pm y, \pm z$.

Pretpostavimo da su prirodni brojevi x, y, z rješenje dane jednadžbe. Ideja dokaza je pomoću brojeva x, y, z konstruirati nova, manja rješenja x', y', z'.

Primjetimo da, ako postoje prirodni brojevi p, k, l takvi da vrijedi $x = p \cdot k, y = p \cdot l$, tada p^4 dijeli z^2, pa slijedi da p^2 dijeli i z. Tada postoji prirodan broj m takav da je $z = p^2m$. Uvrštavanjem u danu jednadžbu dobivamo

$$p^4k^4 + p^4l^4 = p^4m^2.$$

Jednadžbu možemo podijeliti s p^4,

$$k^4 + l^4 = m^2.$$

Dobili smo nova rješenja k, l, m koja su manja od početnog rješenja. Zaključujemo brojevi x, y su relativno prosti. Posebno, zaključujemo da brojevi x i y nisu istodobno parni.

Pretpostavimo da su brojevi x, y oba neparni. Neparni broj na kvadrat daje ostatak 1 pri dijeljenju s brojem 4 jer vrijedi

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod 4.$$

Tada je broj z paran, to jest $z = 2n$ te vrijedi $z^2 = 4n^2 \equiv 0 \pmod 4$. S druge strane kao zbroj kvadrata dvaju neparnih brojeva $z^2 \equiv 2 \pmod 4$, a ne postoji prirodan broj koji zadovoljava tu kongruenciju. Zaključujemo brojevi x, y nisu iste parnosti. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je x paran, a y neparan. Tada je i broj z neparan.
Brojevi x^2, y^2 i z čine jednu Pitagorinu trojku jer zadovoljavaju jednadžbu

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2.$$

Primjenom teorema 1.3.8 na Pitagorinu trojku (x^2, y^2, z) dobivamo da za m, n kao u tom teoremu imamo:

$$x^2 = m^2 - n^2, \tag{1}$$
$$y^2 = 2mn, \tag{2}$$
$$z = m^2 + n^2.$$

Iz jednakosti $x^2 + n^2 = m^2$, koja vrijedi zbog (1), dobivamo novu Pitagorinu trojku (x, n, m) na koju ponovno primjenjujemo teorem o Pitagorinim trojkama,

$$x = a^2 - b^2,$$
$$n = 2ab, \tag{3}$$
$$m = a^2 + b^2. \tag{4}$$

Iz (2), (3), (4) slijedi

$$y^2 = 2mn = 4(a^2 + b^2)ab.$$

Kako je y cijeli broj, y^2 je potpuni kvadrat. Zbog teorema 1.3.9 mora vrijediti i da su brojevi $a^2 + b^2, a, b$ potpuni kvadrati. Slijedi

$$a = (x')^2$$
$$b = (y')^2$$
$$a^2 + b^2 = (z')^2$$

Dobili smo nova, manja rješenja koja zadovoljavaju jednadžbu $(x')^4 + (y')^4 = (z')^2$. Tako je metodom beskonačnog spusta teorem dokazan.

□

Fermatov posljedni teorem, poznat i kao Fermatov veliki teorem, jedan od najpoznatijih matematičkih problema. Vrlo je jednostavnog iskaza, no nije bio dokazan sve do 1995. kada je Andrew Wiles[2] dokazao navedeni teorema. Povijesni pregled pronalaska dokaza može se pronaći na [7]. Slijedi iskaz slavnog teorema.

Teorem 1.3.11 (Fermatov veliki teorem)**.** *Jednadžba*

$$x^n + y^n = z^n$$

nema cjelobrojnih rješenja različitih od nule za $n \geq 3$.

U sljedećem korolaru dokazuje se poseban slučaj Fermatovog posljednjeg teorema za $n = 4$.

Korolar 1.3.12. *Jednadžba*

$$x^4 + y^4 = z^4$$

nema cjelobrojnih rješenja različitih od nule.

Dokaz. Teorem 1.3.10 pokazao je kako suma četvrtih potencija dvaju brojeva ne može biti kvadrat nekog broja, pa slijedi da ni četvrta potencija nekog broja ne može biti suma četvrtih potencija dvaju brojeva. □

Sljedeća propozicija, koja se također dokazuje Fermatovom metodom beskonačnog spusta, govori o nerješivosti još jedne diofantske jednadžbe u prirodnim brojevima.

Propozicija 1.3.13. *Jednadžba*

$$x^4 - y^4 = z^2$$

nema cjelobrojnih rješenja različitih od nule.

Dokaz. Kao i u teoremu 1.3.10, dovoljno je dokazati da jednadžba nema pozitivnih cjelobrojnih rješenja. Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi x, y, z koji zadovoljavaju danu jednadžbu. Slijedeći iste argumente kao u teoremu 1.3.10, x, y, z su u parovima relativno prosti. Kako je $x^4 - y^4 = z^2 > 0$, vrijedi $x > y$. Promatrajmo dva slučaja, kada je z paran i kada je z neparan.

Prvi slučaj

Neka je z neparan. Tada broj y mora biti paran. U suprotnom bi, zbog kongruencije $z^2+y^4 \equiv$

[2]Andrew Wiles, (rođen 1953., Cambridge), engleski matematičar

$1 + 1 \pmod 4$, x^4 pri dijeljenu s 4 davao ostatak 2 što je nemoguće. Primjetimo, (z, y^2, x^2) je Pitagorina trojka sa parnim y^2. Primjenom teorema 1.3.8 za m, n kao u tom teoremu, dobivamo

$$\begin{aligned} z &= m^2 - n^2 \\ y^2 &= 2mn \qquad (1) \\ x^2 &= m^2 + n^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Iz (2) slijedi da je trojka m, n, x Pitagorina trojka. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je n paran. Dobivamo novi sustav

$$\begin{aligned} m &= a^2 - b^2 \\ n &= 2ab \\ x &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u (1) dobivamo $y^2 = 4ab(a^2 - b^2)$. Kako je y paran jednadžbu možemo zapisati kao $\left(\frac{y}{2}\right)^2 = ab(a^2 - b^2)$. Brojevi a, b su relativno prosti, pa su i brojevi $a, b, (a^2 - b^2)$ u parovima relativno prosti. Iz teorema 1.3.9 slijedi da su brojevi $a, b, (a^2 - b^2)$ potpuni kvadrati. Možemo ih zapisati kao

$$\begin{aligned} a &= (a')^2 \\ b &= (b')^2 \\ a^2 - b^2 &= (c')^2 \end{aligned}$$

Dobivamo jednadžbu $(a')^4 - (b')^4 = (c')^2$, a time i nova manja rješenja a', b', c' koja zadovoljavaju danu jednadžbu.

Drugi slučaj

Neka je z paran. Tada iz Pitagorine trojke (z, y^2, x^2), gdje vrijedi $m > n$ i m, n su relativno prosti brojevi različite parnosti, dobivamo

$$\begin{aligned} y^2 &= m^2 - n^2 \\ z &= 2mn \\ x^2 &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

Tada je $(xy)^2 = m^4 - n^4$ novo, manje rješenje početne jednadžbe.

$\square$

Teorem 1.3.10 i propozicija 1.3.13 imaju i svoju geometrijsku interpretaciju.

Primjer 1.3.14. *Pokažimo da ne postoji pravokutan trokut kojemu su duljine stranica prirodni brojevi i čija je površina jednaka površini kvadrata čija je duljina stranice također prirodan broj.*

Neka su a, b duljine kateta pravokutnog trokuta i c duljina hipotenuze, a duljina stranice kvadrata neka je jednaka d. Tada imamo sustav

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

$$\frac{ab}{2} = d^2. \tag{2}$$

Kvadriranjem (1) dobivamo jednakost

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4.$$

Jednakosti dodamo i oduzmemo $2a^2b^2$, pa dobivamo

$$c^4 = a^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2 + b^4 \Leftrightarrow c^4 - (2ab)^2 = (a^2 - b^2)^2$$

Iz posljednje jednakosti, korištenjem (2), dobivamo

$$c^4 - 16d^4 = \left(a^2 - b^2\right)^2.$$

Sada možemo uvesti supstitucije $x = c, \quad y = 2d, \quad z = a^2 - b^2$. Time smo problem sveli na jednadžbu $x^4 - y^4 = z^2$, koja nema rješenja u prirodnim brojevima. Tako je naša tvrdnja dokazana.

Pogledajmo i sljedeći zadatak koji se rješava slično kako smo dokazali tvrdnju u prethodnom primjeru.

Zadatak 1.3.15. *Može li pravokutan trokut, kojemu su duljine stranica prirodni brojevi, imati dvostruku površinu kao kvadrat kojemu su duljine stranica prirodni brojevi?*

Rješenje. Neka su a, b duljine kateta pravokutnog trokuta i c duljina hipotenuze, a duljina stranice kvadrata neka je jednaka d. Tada imamo sustav

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1}$$

$$\frac{ab}{2} = 2d^2. \tag{2}$$

Kvadriranjem (1) dobivamo

$$a^4+2a^2b^2+b^4 = c^4 \Leftrightarrow b^4+a^2b^2 = c^4-a^2(a^2+b^2) \Leftrightarrow b^4+a^2b^2 = c^2(c^2-a^2) \Leftrightarrow b^4+a^2b^2 = b^2c^2$$

Ako u posljednjoj jednakosti stavimo ab dan preko (2), dobivamo

$$b^4 + 16d^4 = (bc)^2.$$

Zatim uvodimo supstitucije $x = b, \quad y = 2d, \quad z = bc$. Time smo problem sveli na jednadžbu $x^4 + y^4 = z^2$, koja nema pozitivnih cjelobrojnih rješenja. Dakle, ne postoji pravokutan trokut kojemu su duljine stranica prirodni brojevi čija je površina jednaka dvostrukoj površini kvadrata čija je stranica također prirodan broj.

$\square$

Poglavlje 2

Primjene matematičke indukcije

U ovom poglavlju pokazujemo primjenu matematičke indukcije u četiri značajna područja matematike: kombinatorici, linearnoj algebri, dokazivanju identiteta i teoriji brojeva. Svi primjeri u ovom poglavlju uzeti su iz [5], gdje se može pronaći još mnogo zanimljivih primjera i dokaza.

2.1 Primjene matematičke indukcije u kombinatorici

U ovom ćemo pododjeljku ilustrirati korisnost metode matematičke indukcije na dva važna rezultata iz kombinatorike. Prvo dokazujemo tzv. *Formulu uključivanja-isključivanja*, a zatim tzv. *Dirichletov princip*. Posebno su ta dva rezultata često korištena prilikom rješavanja zahtjevnijih kombinatornih zadataka koji se primjerice pojavljuju u srednjoškolskim natjecanjima iz matematike.

Formula uključivanja-isključivanja

Kardinalitet skupa A je broj elemenata tog skupa, te se označava s $|A|$. Neka je $\{A_1, ..., A_n\}$ familija konačnih skupova. Kardinalitet unije tih skupova ovisi o tome jesu li skupovi međusobno disjunktni. Ako su svi skupovi međusobno disjunktni primjenjujemo princip sume, to jest

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Ako skupovi međusobno nisu disjunktni koristimo formulu uključivanja-isključivanja, koja se skraćeno označuje kao FUI,

$$\left|A_1 \cup \cdots \cup A_n\right| = \sum_i \left|A_i\right| - \sum_{i<j} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i<j<k} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \cdots + (-1)^{n-1} \left|A_1 \cap \cdots \cap A_n\right|.$$

Kraće zapisano, teorem glasi:

Teorem 2.1.1 (Formula uključivanja-isključivanja)**.** *Neka je* $\{A_1, ..., A_n\}$ *familija konačnih skupova, te neka je* $N = \{1, ..., n\}$ *skup indeksa. Tada formula uključivanja-isključivanja glasi*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

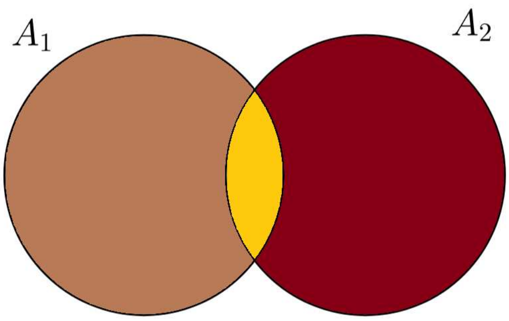
Dokaz. Dokaz je napisan po uzoru na [8]. Lako se vidi da formula vrijedi za $n = 1$,

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1\}} (-1)^{1-1} \left|A_1\right| = \left|A_1\right|.$$

U daljnjem dijelu dokaza također je bitno da formula vrijedi i za $n = 2$,

$$\left|A_1 \cup A_2\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| - \left|A_1 \cap A_2\right|.$$

Jednakost se može provjeriti prikazivanjem dvaju skupova pomoću Vennovih dijagrama. Ako prebrojimo elemente oba skupa, njihov presjek prebrojati ćemo dva puta. Stoga je konačni rezultat zbroj kardinaliteta oba skupa umanjen za kardinalitet njihova presjeka.



Slika 2.1: Presjek dvaju skupova

Pretpostavimo da teorem vrijedi za $n - 1$ skupova. Dokazujemo da teorem vrijedi i za n skupova. Imamo,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right|.$$

Sada imamo dva skupa, te možemo primjeniti formulu uključivanja-isključivanja,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + \left|A_n\right| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right|.$$

Presjek unija može se zapisati kao unija presjeka, slijedi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + \left|A_n\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right|.$$

Radi lakšeg razumijevanja, uvedimo supstituciju $B_i = A_i \cap A_n$. Slijedi,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + \left|A_n\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\right|.$$

Neka je $M = \{1, ..., n-1\}$ skup indeksa. Primijenimo pretpostavku indukcije,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq M} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + |A_n| - \sum_{\emptyset \neq J \subseteq M} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{i \in J} B_i\right|. \tag{*}$$

Primjetimo da vrijedi,

$$-\sum_{\emptyset \neq J \subseteq M} (-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{i \in J} B_i\right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq M} (-1)(-1)^{|J|-1} \left|\bigcap_{i \in J} B_i\right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq M} (-1)^{|J|} \left|\bigcap_{i \in J} B_i\right|.$$

Sada možemo vratiti supstituciju,

$$\bigcap_{i \in J} B_i = \bigcap_{i \in J} (A_i \cap A_n) = \left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \cap A_n = \bigcap_{i \in J \cup \{n\}} A_i.$$

Izraz $(*)$ možemo zapisati kao

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq M} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + |A_n| + \sum_{\emptyset \neq J \subseteq M} (-1)^{|J|} \left|\bigcap_{i \in J \cup \{n\}} B_i\right|.$$

Napravimo supstituciju $J \cup \{n\}$ sa I. Podsjetimo se $N = \{1, 2, ..., n\}$. Dakle,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq M} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + A_n + \sum_{\emptyset, \{n\} \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

U bazi indukcije smo pokazali da se formula može primijeniti i na samo jedan skup. Slijedi,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq M} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| + \sum_{\emptyset, \{n\} \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Kako se sve sume sastoje od istih članova, možemo ih spojiti u jednu sumu.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Dakle, prema principu matematičke indukcije formula uključivanja-isključivanja može se primijeniti na svaku $n-$članu uniju skupova, gdje je n prirodni broj.

□

Dirichletov princip

Dirichletov princip[1], poznatiji pod nazivima ”princip golubinjaka” ili ”princip kutija”, jedan je od najpoznatijih i veoma korisnih principa u rješavanju različitih problema u kombinatorici. Radi njegove jednostavnosti, ali velike moći, često se koristi na natjecanjima iz matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Iako se najčešće dokazuje svođenjem na kontradikciju, moguće ga je dokazati pomoću matematičke indukcije.

Teorem 2.1.2. *Neka je n prirodan broj. Ako u n kutija raspoređujemo više od n predmeta, tada barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.*

Dokaz. Za $n = 1$, dva ili više predmeta stavljamo u jednu kutiju, pa je baza indukcije zadovoljena. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. U koraku indukcije imamo više od $n + 1$ predmeta koja moramo rasporediti u $n + 1$ kutiju. Neka je N broj predmeta. Ako kutije poredamo i označimo brojevima od 1 do $n + 1$, za kutiju rednog broja $(n + 1)$ imamo 3 mogućnosti:

1° Kutija je prazna.
Kako je $N > n + 1 > n$, na preostale kutije možemo primijeniti pretpostavku indukcije. To jest u barem jednoj od prvih n kutija nalaze se 2 ili više predmeta.

2° U kutiji se nalazi točno jedan predmet.
Budući da vrijedi $N > n + 1$, tada vrijedi i $N - 1 > n$. Dakle, na prvih n kutija možemo primijeniti pretpostavku indukcije. Zaključujemo, u barem jednoj od prvih n kutija nalaze se 2 ili više predmeta.

3° U kutiji se nalaze dva ili više predmeta.
Tada je tvrdnja teorema očito valjana.

Time je dokaz teorema matematičkom indukcijom gotov.

□

[1]Peter Gustav Lejeune Dirichlet, (1805. Düren - 1859. Göttingen), njemački matematičar

U nastavku navodimo nekoliko zadataka s državnih natjecanja u osnovnoj i srednjoj školi u kojima se, prilikom rješavanja, koristi Dirichletov princip. Princip rješavanja prikazat ćemo na jednom primjeru, a rješenja ostalih zadataka mogu se pronaći na [10].

Državno natjecanje 2018., 6. razred osnovne škole

Zadatak 2.1.3. *Na županijskom natjecanju iz matematike od 4. do 8. razreda sudjelovalo je 2018 učenika. Svaki je natjecatelj rođen jedne od ovih godina: 2007., 2006., 2005., 2004. i 2003. (2004. godina je bila prijestupna.)*

a) Dokaži da postoje barem dva natjecatelja rođena iste godine, istog mjeseca u toj godini i istog dana u tom mjesecu.

b) Dokaži da postoji najmanje 6 natjecatelja koji su rođeni istog mjeseca i istog dana u tom mjesecu.

Državno natjecanje 2013., 8. razred osnovne škole

Zadatak 2.1.4. *Unutar kvadrata čija je stranica duljine 1 dm nalazi se 110 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera 1/8 dm unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane točke.*

Državno natjecanje 2020., 3. razred srednje škole

Zadatak 2.1.5. *Dana su četiri različita realna broja iz intervala $\langle 0, 1\rangle$. Dokaži da među njima postoje dva broja, x i y, takva da vrijedi*

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

Državno natjecanje 2012., 4. razred srednje škole

Zadatak 2.1.6. *Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su prijateljska ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.*

Rješenje. Danih 100 polja možemo podijeliti u 25 grupa od 4 polja. U svakoj grupi može se nalaziti najviše jedan broj djeljiv s 2 i najviše jedan broj djeljiv s 3, u suprotnom, brojevi u prijateljskim poljima ne bi bili relativno prosti. Zaključujemo da je najviše 50 brojeva djeljivo s 2 ili 3, te da nam preostaje 50 brojeva koji su jednaki 1,5 ili 7. Tada se, prema Dirichletovom principu, barem jedan od tih brojeva pojavljuje najmanje 17 puta. □

2.2 Matematička indukcija u dokazima raznih identiteta

U ovom ćemo odjeljku ilustrirati metodu dokazivanja matematičkom indukcijom na nekim zanimljivim i važnim matematičkim identitetima. Prvo dokazujemo jednu lemu o binomnim koeficijentima, a onda pomoću nje dajemo dokaz poznatog *Pascalovog identiteta* metodom matematičke indukcije. Još dokazujemo dva identiteta o binomnim koeficijentima, jedan je Eulerov i drugi Lagrangeov. Nakon toga dokazujemo poznatu *De Moivreovu formulu*. Na kraju se ukratko bavimo tzv. *Bernoullijevim brojevima* što će nam omogućiti formulirati teorem koji daje važnu *Faulhaberovu formulu*.

Identiteti s binomnim koeficijentima

Binomni koeficijenti dobili su svoje ime jer se pojavljuju kao koeficijenti u binomnom teoremu, no zbog svoje velike važnosti u kombinatorici najčešće se definiraju kao broj $k-$članih podskupova $n-$članog skupa.

Definicija 2.2.1. *Za nenegativne cijele brojeve n i k, binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je broj k-članih podskupova n-članog skupa.*

Propozicija 2.2.2. *Za cijele brojeve $0 \leq k \leq n$ vrijedi*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz. Broj načina na koji možemo izabrati k-člani podskup $n-$članog skupa i nakon toga jedan element tog podskupa je $\binom{n}{k} \cdot k$. Isto tako, prvo možemo izabrati jedan element $n-$članog skupa, a zatim $k-$člani podskup od ostatka na $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ načina.
Dakle, vrijedi

$$\binom{n}{k} \cdot k = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

to jest

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Ponavljanjem postupka dobivamo

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Lema 2.2.3. *Neka su cijeli brojevi n, k takvi da vrijedi $0 \leq k \leq n-1$, tada vrijedi*

1. $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$,

2. $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$, *za* $1 \leq k \leq n$,

3. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Dokaz. Tvrdnje dokazujemo primjenom propozicije 2.2.2.

1.
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k) \cdot (n-k-1)!k!} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$$

2.
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{n-k+1} \cdot \frac{n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}\end{aligned}$$

3.
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

□

Teorem 2.2.4 (Pascalov identitet)**.** *Neka su n i k prirodni brojevi za koje vrijedi $n \geq k$. Tada vrijedi identitet*
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Dokaz. Identitet ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n za fiksni k. Za $n = k$ vrijedi
$$\binom{k+1}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} \Leftrightarrow k+1 = 1+k,$$
pa je baza indukcije zadovoljena. Pretpostavimo da za neki $n \geq k$ vrijedi identitet. Potrebno je dokazati da tada vrijedi
$$\binom{n+2}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1}.$$
Na lijevu stranu jednakosti primijenimo prvu stavku leme 2.2.3, pa pretpostavku indukcije. Slijedi
$$\binom{n+2}{k} = \frac{n+2}{n+2-k}\binom{n+1}{k} = \frac{n+2}{n+2-k}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right].$$

Primjenom druge stavke leme 2.2.3 dobivamo

$$\binom{n+2}{k} = \frac{n+2}{n+2-k}\left[\frac{n+1-k}{n+1}\binom{n+1}{k} + \frac{n+1-(k-1)}{n+1}\binom{n+1}{k-1}\right].$$

Raspisivanjem jednakosti dobivamo

$$\binom{n+2}{k} = \frac{(n+2)(n+1-k)}{(n+2-k)(n+1)}\binom{n+1}{k} + \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k-1} + \binom{n+1}{k-1}.$$

Primjenom druge stavke leme 2.2.3 slijedi

$$\binom{n+2}{k} = \frac{(n+2)(n+1-k)}{(n+2-k)(n+1)}\binom{n+1}{k} + \frac{k}{(n+1)(n+2-k)}\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1}.$$

Imamo

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1},$$

što smo i htjeli dobiti. Time je tvrdnja dokazana pomoću principa matematičke indukcije. □

Teorem 2.2.5 (Eulerov identitet)**.** *Za sve nenegativne cijele brojeve m, n, p vrijedi*

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n}{p-i} = \binom{m+n}{p}.$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po novoj varijabli k definiranoj kao $k = m + n$. Za $k = 0$ mora vrijediti i $m = n = 0$, pa imamo

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{0}{i}\binom{0}{p-i} = \binom{0}{p}.$$

Za $p = 0$, suma se sastoji samo od jednog člana $\binom{0}{0}\binom{0}{0-0} = 1$, a i za lijevu stranu jednakosti vrijedi $\binom{0}{0} = 1$, pa je jednakost istinita. Ako je $p > 0$, svi su binomni koeficijenti oblika $\binom{0}{i}$ gdje je $i > 0$, a time i jednaki 0, pa je jednakost istinita. Time je dokazana baza indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \geq 0$, to jest da tvrdnja vrijedi za sve $m, n \geq 0$ gdje je $m + n = k$ i za svaki $p \geq 0$. Potrebno je dokazati da tada vrijedi i

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n+1}{p-i} = \binom{m+n+1}{p}.$$

Na lijevu stranu jednakosti primijenimo Pascalov identitet, slijedi

$$\binom{m+n+1}{p} = \binom{m+n}{p} + \binom{m+n}{p-1}.$$

Sada možemo primijeniti pretpostavku indukcije, imamo

$$\binom{m+n+1}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i} + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}\binom{n}{p-1-i}.$$

Slijedi

$$\binom{m+n+1}{p} = \binom{m}{p} + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}\left[\binom{n}{p-i} + \binom{n}{p-1-i}\right].$$

Ponovo možemo primijeniti Pascalov identitet, slijedi

$$\binom{m+n+1}{p} = \binom{m}{p}\binom{n+1}{0} + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{m}{i}\binom{n+1}{p-i} = \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n+1}{p-i}.$$

Time je završen dokaz identiteta pomoću principa matematičke indukcije. □

Teorem 2.2.6 (Lagrangeov identitet)**.** *Za nenagativni cijeli broj k vrijedi*

$$\binom{2k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}^2.$$

Dokaz. Prema teoremu 2.2.5 za $m = n = p = k$ vrijedi

$$\binom{2k}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{k}{k-i}.$$

Iz propozicije 2.2.2 slijedi $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$, pa je identitet dokazan. □

De Moivreova formula

Kompleksni broj $x + yi$ možemo zapisati i u trigonometrijskom obliku $r(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdje je r udaljenost točke (x, y) od ishodišta kompleksne ravnine, a ϕ kut koji dužina koja spaja točku (x, y) sa ishodištem zatvara s pozitivnim smjerom osi x. Idući teorem govori o formuli koja olakšava potenciranje kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku. Teorem je dobio naziv prema francuskom matematičaru Abrahamu de Moivreu[2].

[2] Abraham de Moivre, (1667. Vitry-le-François - 1754. London), francuski matematičar

Teorem 2.2.7. *Neka je ϕ realan broj. Za svaki prirodan broj n vrijedi*

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi).$$

Dokaz. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$, to jest da vrijedi

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^k = \cos(k\phi) + i\sin(k\phi).$$

Želimo dokazati da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$. Vrijedi

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^{k+1} = (\cos\phi + i\sin\phi)^k \cdot (\cos\phi + i\sin\phi).$$

Korištenjem pretpostavke indukcije te množenjem dobivamo

$$\cos(n\phi)\cos\phi + i\sin\phi\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\cos\phi + i^2\sin(n\phi)\sin\phi.$$

Sada možemo iskoristiti sljedeće trigonometrijske identitete:

$$\sin(x + y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

Korištenjem navedenih identiteta dobivamo

$$\cos((n + 1)\phi) + i\sin((n + 1)\phi).$$

Time je, pomoću principa matematičke indukcije, dokazana De Moivreova formula. □

Bernoullijevi brojevi i Faulhaberova formula

Definicija 2.2.8. *Bernoullijevi brojevi B_n su brojevi koji su rekurzivno zadani formulom*

$$B_n = \frac{-1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}B_j$$

gdje je $B_0 = 1$ i $n \geq 1$.

Prvih nekoliko Bernoullijevih brojeva je $B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = \frac{-1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}$. Bernoullijevi brojevi koriste se pri računanju sume potencija prirodnih brojeva te pri razvoju nekih funkcija u Taylorov red.

Definicija 2.2.9. *Funkciju $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$ nazivamo eksponencijalna funkcija izvodnica niza (c_n).*

Pogledajmo razvoj funkcije $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{30}\cdot\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{42}\cdot\frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Možemo primijetiti da se u razvoju pojavljuju Bernoullijevi brojevi. Iz tog razloga isti se u literaturi često pojavljuju definirani pomoću eksponencijalne funkcije izvodnice niza.

Definicija 2.2.10. *Bernoullijevi brojevi su koeficijenti eksponencijalne funkcije izvodnice*

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Za prirodne brojeve m i n definirajmo $s_m(n)$ kao

$$s_m(n) = \sum_{i=1}^{n} i^m = 1^m + 2^m + ... + n^m.$$

Problem eksplicitnog računanja vrijednosti $s_m(n)$ zanimljiv je sam za sebe, ali i zbog korištenja u nekim drugim zadaćama i problemima. Dokažimo ovdje jednu zanimljivu činjenicu o tim sumama.

Propozicija 2.2.11. *Za svaki $m \geq 0$, $s_m(n)$ je polinom stupnja $(m+1)$ u varijabli n, gdje je njegov slobodni član jednak 0.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju pomoću principa jake matematičke indukcije. Za $m = 0$ vrijedi

$$s_0(n) = \sum_{i=1}^{n} i^0 = n,$$

što je polinom prvog stupnja bez slobodnog člana.

Pretpostavimo da je za svaki $k = 0, 1, ...m$, $s_k(n)$ polinom stupnja $(k+1)$ sa slobodnim članom 0, gdje je m nenegativan cijeli broj. Želimo dokazati da je $s_{k+1}(n)$ polinom stupnja $k+2$ bez slobodnog člana. Primjetimo,

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^{k+2} - \sum_{i=1}^{n} i^{k+2} = (n+1)^{k+2}. \tag{*}$$

Umanjenik možemo zapisati kao

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^{k+2} = 1^{k+2} + \sum_{i=2}^{n+1} i^{k+2} = 1 + \sum_{i=1}^{n} (i+1)^{k+2}.$$

Koristimo binomni poučak

$$1 + \sum_{i=1}^{n}(i+1)^{k+2} = 1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k+2}\binom{k+2}{j}i^{k+2-j}\right).$$

Sada možemo zamijeniti redoslijed suma. Primijetimo kako binomni koeficijent $\binom{k+2}{j}$ ne ovisi o i, pa može izaći iz sume. Dakle, imamo

$$1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k+2}\binom{k+2}{j}i^{k+2-j}\right) = 1 + \sum_{j=0}^{k+2}\binom{k+2}{j}\sum_{i=1}^{n}i^{k+2-j}.$$

Lijevu stranu zapisujemo kao

$$1 + \sum_{j=0}^{k+2}\binom{k+2}{j}s_{k+2-j}(n) = 1 + \binom{k+2}{0}s_{k+2}(n) + \sum_{j=1}^{k+2}\binom{k+2}{j}s_{k+2-j}(n).$$

Vraćanjem u $(*)$ dobivamo

$$1 + s_{k+2}(n) + \sum_{j=1}^{k+2}\binom{k+2}{j}s_{k+2-j}(n) - s_{k+2}(n) = (n+1)^{k+2},$$

i zatim

$$1 + \sum_{j=1}^{k+2}\binom{k+2}{j}s_{k+2-j}(n) = (n+1)^{k+2},$$

što je ekvivalentno

$$(k+2)s_{k+1}(n) = (n+1)^{k+2} - 1 - \sum_{j=2}^{k+2}\binom{k+2}{j}s_{k+2-j}(n).$$

Desna strana jednakosti, prema pretpostavci indukcije, sadrži sumu polinoma stupnja manjeg ili jednakog $(k+2)$ kojima je slobodni član jednak nula. Prema principu jake matematičke indukcije, za svaki $m \geq 0$, $s_m(n)$ je polinom stupnja $(m+1)$ bez slobodnog člana. □

Kao ilustraciju gornje propozicije navodimo precizno vrijednosti $s_m(n)$ za prvih nekoliko m. Primjenom jednakosti iz propozicije 2.2.11 imamo

$$
\begin{aligned}
s_0(n) &= n, \\
s_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2}, \\
s_2(n) &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \\
s_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(s_1(n)\right)^2, \\
s_4(n) &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}, \\
s_5(n) &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.
\end{aligned}
$$

Na primjer, pokažimo kako dobiti $s_2(n)$ iz $s_0(n)$ i $s_1(n)$. Za $k = 1$ imamo

$$
\begin{aligned}
3s_2(n) &= (n+1)^3 - 1 - \sum_{j=2}^{3} \binom{3}{j} s_{3-j}(n), \\
3s_2(n) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - \left(\binom{3}{2} s_1(n) + \binom{3}{3} s_0(n) \right), \\
3s_2(n) &= n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n(n+1)}{2} - n, \\
3s_2(n) &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{2}, \\
s_2(n) &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.
\end{aligned}
$$

Sljedeći teorem još se naziva i Faulhaberova formula prema njemačkom matematičaru Johannu Faulhaberu[3]. U njoj se pomoću Bernoullijevih brojeva lako ekspliticitno računaju sume $s_m(n)$.

Teorem 2.2.12. *Za prirodne brojeve k i n vrijedi*

$$
s_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j (n+1)^{k+1-j}.
$$

Mi ovdje ovaj teorem nećemo dokazivati, no dokaz se može pronaći u [4, Poglavlje 6.5].

[3] Johann Faulhaber, (1580. Ulm - 1635. Ulm), njemački matematičar

2.3 Primjena matematičke indukcije u teoriji brojeva

Egipatski razlomci

Egipćani su sve razlomke, osim razlomka $\frac{2}{3}$, zapisivali kao zbroj razlomaka s brojnikom 1, to jest jediničnim brojnikom. Razlomak $\frac{2}{3}$ nisu zapisivali u tom obliku jer su koristili činjenicu da se $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{n}$ može izračunati kao

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}.$$

Zapis razlomka u egipatskom obliku nazivamo *egipatski razlomak*. Jedan od najpoznatijih matematičara srednjeg vijeka, Fibonacci[4], osmislio je algoritam za zapisivanje razlomaka u egipatskom obliku u svojoj knjizi *Liber Abaci*. Kasnije, u 19. stoljeću, algoritam je koristio i engleski matematičar Sylvester[5]. U njihovu čast, algoritam se naziva *Fibonacci-Sylvesterov algoritam*.

Algoritam koristi funkciju najmanje cijelo od broja x, poznata kao i "strop" od x, čija je definicija sljedeća:

Definicija 2.3.1. *Funkcija najmanje cijelo od x svakom realnom broju x pridružuje najmanji cijeli broj veći od ili jednak x. Funkciju označavamo kao* $\lceil x \rceil$.

Fibonacci-Sylvesterov algoritam se sastoji od toga da se uzme zadani razlomak $\frac{p}{q}$ i od njega oduzme razlomak $\frac{1}{\lceil \frac{q}{p} \rceil}$. Ta razlika preuzima ulogu početnog razlomka i postupak se ponavlja sve dok razlika nije jednaka nuli. Konačno, egipatski zapis tog broja bit će jednak zbroju svih razlomaka oblika $\frac{1}{\lceil \frac{q}{p} \rceil}$ korištenih u algoritmu. Ukoliko je zadani razlomak nepravi, to jest brojnik je veći od nazivnika, razlomak se prvo svede na zbroj cijelog broja i pravog razlomka, te se dani algoritam primjenjuje na preostali razlomak. Pokažimo kako algoritam funkcionira za broj $\frac{7}{16}$.
Izračunajmo prvu razliku,

$$\frac{7}{16} - \frac{1}{\lceil \frac{16}{7} \rceil} = \frac{7}{16} - \frac{1}{3} = \frac{5}{48}.$$

Razlika nije jednaka 0, pa nastavljamo postupak,

$$\frac{5}{48} - \frac{1}{\lceil \frac{48}{5} \rceil} = \frac{5}{48} - \frac{1}{10} = \frac{1}{240}.$$

[4] Leonardo Fibonacci, (1170. Pisa - 1250. Pisa), talijanski matematičar
[5] James Joseph Sylvester, (1814. London - 1897. London), engleski matematičar

Nakon još jednog ponavljanja postupka, dolazimo do razlike 0,

$$\frac{1}{240} - \frac{1}{\left\lceil \frac{240}{1} \right\rceil} = \frac{1}{240} - \frac{1}{240} = 0.$$

Dakle, razlomak se u egipatskom zapisu može zapisati kao $\frac{7}{16} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{240}$.

Teorem 2.3.2. *Svaki pozitivan racionalni broj $\frac{p}{q}$ može se zapisati kao konačni zbroj jediničnih razlomaka.*

Dokaz. Pretpostavimo da je racionalni broj $\frac{p}{q}$ pravi razlomak. U suprotnom, može se rastaviti na zbroj cijelog broja i pravog razlomka, te se postupak nastavlja s pravim razlomkom. Tvrdnju ćemo dokazati jakom indukcijom po broju $p \in \mathbb{N}$. Za $p = 1$, razlomak je već zapisan u željenom obliku, pa je tvrdnja istinita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Potrebno je dokazati da tvrdnja vrijedi i za $p = k + 1$. Vrijedi

$$\frac{k+1}{q} = \frac{k}{q} + \frac{1}{q}.$$

Kako se prema pretpostavci indukcije razlomak $\frac{k}{q}$ može zapisati kao konačan zbroj jediničnih razlomaka slijedi da se i razlomak $\frac{k+1}{q}$ može zapisati kao konačan zbroj jediničnih razlomaka. Time je, pomoću metode matematičke indukcije, teorem dokazan.

□

Pellova jednadžba

Sljedeća jednadžba jedna je od najpoznatijih diofantskih jednadžbi. Ime je dobila po engleskom matematičaru Pellu[6]. Pokazat ćemo da jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Definicija 2.3.3. *Diofantska jednadžba*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

gdje je $d \in \mathbb{N}$ i d nije potpun kvadrat zove se Pellova jednadžba.

Uređeni par $(x_1, y_1), x_1 = \min\{x_n, x_n \in \mathbb{N}\}, y_1 = \min\{y_n : y_n \in \mathbb{N}\}$ koji zadovoljava Pellovu jednadžbu naziva se najmanje rješenje Pellove jednadžbe. Često se najmanje rješenje naziva i fundamentalnim rješenjem jednadžbe.

[6]John Pell, (1611. Southwick - 1685. Westminster), engleski matematičar

Teorem 2.3.4. *Ako je (x_1, y_1) najmanje rješenje Pellove jednadžbe u prirodnim brojevima, onda su sva rješenja jednadžbe dana s (x_n, y_n) za $n \in \mathbb{N}$, gdje su x_n i y_n prirodni brojevi definirani s*

$$x_n + y_n \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n. \tag{2.1}$$

Dokaz. Kako bi dokazali tvrdnju moramo dokazati da tako definirani brojevi zadovoljavaju Pellovu jednadžbu te da ne postoje brojevi različitog oblika koji ju zadovoljavaju. Matematičkom indukcijom pokažimo da brojevi definirani na taj način zadovoljavaju Pellovu jednadžbu.
Baza indukcije je očito zadovoljena. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_n^2 - dy_n^2 = 1, \quad x_n + y_n \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n.$$

Želimo dokazati da brojevi (x_{n+1}, y_{n+1}) definirani kao

$$x_{n+1} + y_{n+1} \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^{n+1},$$

zadovoljavaju Pellovu jednadžbu. Iz pretpostavke indukcije slijedi

$$x_{n+1} + y_{n+1} \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^{n+1} = (x_n + y_n \sqrt{d})(x_1 + y_1 \sqrt{d}).$$

Za x_{n+1}, y_{n+1} definirane kao

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1 x_n + y_1 y_n d \\ y_{n+1} &= x_n y_1 + x_1 y_n \end{aligned}$$

vrijedi

$$x_{n+1}^2 - dy_{n+1}^2 = x_1^2(x_n^2 - y_n^2 d) - y_1^2 d(x_n^2 - y_n^2 d) = x_1^2 - y_1^2 d = 1.$$

Pomoću principa matematičke indukcije zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$, brojevi (x_n, y_n) definirani kao u navedenom jesu rješenja Pellove jednadžbe.

Još je potrebno pokazati da ne postoje druga rješenja. Pretpostavimo da je (s, t) rješenje Pellove jednadžbe koje ne zadovoljava danu jednakost. Kako mora vrijediti $x_1 + y_1 \sqrt{d} > 1$ i $s + t\sqrt{d} > 1$ tada postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$(x_1 + y_1 \sqrt{d})^m < s + t\sqrt{d} < (x_1 + y_1 \sqrt{d})^{m+1}.$$

Nejednakost pomnožimo s $(x_1 - y_1 \sqrt{d})^m$, slijedi

$$1 < (s + t\sqrt{d})(x_1 - y_1 \sqrt{d})^m < x_1 + y_1 \sqrt{d}.$$

Uvedimo $a, b \in \mathbb{Z}$ takve da je $a + b\sqrt{d} = (s + t\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^m = (s + t\sqrt{d})(x_m - y_m\sqrt{d})$. Tada je $a^2 - db^2 = (s^2 - dt^2)(x_1^2 - dy_1^2) = 1$, što znači da je (a, b) rješenje Pellove jednadžbe, ali $a + b\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ što je kontradikcija s minimalnošću rješenja (x_1, y_1). Dakle, ako je (x_1, y_1) rješenje Pellove jednadžbe sva rješenja jednadžbe definirana su s $x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$. □

U teoremu 2.3.4 pokazali smo da ako postoji fundamentalno rješenje jednadžbe, tada postoji beskonačno mnogo rješenja i kako ih izračunati. Prirodno se nameću pitanja kako odrediti fundamentalno rješenje i postoji li ono uvijek. Jedan način računanja fundamentalnog rješenja je uvrštavanjem vrijednosti $y = 1, 2, ...$ u jednadžbu i provjeravanjem je li $dy^2 + 1$ potpuni kvadat, no takav način računanja oduzima puno vremena. Sljedeći teorem, čiji se dokaz može pronaći u [3, Teorem 10.10], govori nam kako uvijek postoji rješenje Pellove jednadžbe u skupu prirodnih brojeva.

Teorem 2.3.5. *Pellova jednadžba $x^2 - dy^2 = 1$ ima barem jedno rješenje u prirodnim brojevima x i y.*

2.4 Primjena matematičke indukcije u linearnoj algebri

Do sada smo matematičku indukciju koristili samo nad skupom prirodnih brojeva, no ona se može koristiti na bilo kojem dobro uređenom skupu. Jedna vrsta matematičke indukcije koja se koristi na takvim skupovima naziva se transfinitna indukcija. Kako bi definirali transfinitnu indukciju potrebno je uvesti nekoliko drugih pojmova.

Definicija 2.4.1. *Relacija na skupu A je bilo koji podskup Kartezijevog produkta $A \times A$.*

Definicija 2.4.2. *Neka je A skup i neka je $\leq$ binarna relacija na A. Kažemo da je $\leq$ relacija parcijalnog uređaja ili jednostavnije parcijalni uređaj ako vrijedi:*

a) ***refleksivnost*** $(\forall x \in A) \quad x \leq x$,

b) ***antisimetričnost*** $(\forall x, y \in A) \quad \Big((x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow (x = y)\Big)$,

c) ***tranzitivnost*** $(\forall x, y, z \in A) \quad \Big((x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z\Big)$.

Skup A zajedno s parcijalnim uređajem $\leq$ zove se parcijalno uređeni skup.

Definicija 2.4.3. *Neka je $\leq$ relacija parcijalnog uređaja na skupu A. Ako vrijedi*

$$(\forall x, y \in A) \quad (x \leq y \vee y \leq x),$$

onda $\leq$ zovemo relacija totalnog uređaja ili totalni uređaj. Skup A zajedno s totalnim uređajem $\leq$ zovemo (totalno) uređeni skup.

Definicija 2.4.4. *Neka je A totalno uređeni skup. Kažemo da je A dobro uređen ako svaki neprazni podskup $B \subseteq A$ ima minimum.*

Ako su a i b elementi nekog parcijalno uređenog skupa $(A, \preceq)$ i ako je istovremeno $b \preceq a$ i $b \neq a$ pišemo $b \prec a$. Za uvod u transfinitnu indukciju potrebna nam je i sljedeća oznaka. Neka je $(S, \preceq)$ dobro uređen skup i $t \in S$, označimo skup svih prethodnika elementa t u skupu S kao

$$\mathrm{seg}_S(t) = \{s \in S : s \prec t\}.$$

Teorem 2.4.5 (Transfinitna indukcija)**.** *Neka je A podskup dobro uređenog skupa S. Ako za svaki $s \in S$ vrijedi*

$$\mathrm{seg}_S(s) \subseteq A \Rightarrow s \in A,$$

tada je $A = S$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da za svaki $s \in S$ vrijedi $\mathrm{seg}_S \subseteq A \Rightarrow s \in A$, ali $A \neq S$. Neka je $B = S \backslash A$. Kako je S dobro uređen i $B \subset S$, B ima najmanji element, označimo ga s b. Tada zbog pretpostavke vrijedi $b \in A$, što je kontradikcija. □

Transfinitna indukcija koristi se u mnogim područjima matematike poput teorije skupova, topologije i analize. Jedna od njezinih najpoznatijih primjena je u dokazu Zornove leme koja je ekvivalentna aksiomu izbora i ima mnoge važne posljedice od kojih ćemo jednu i dokazati, no prvo uvodimo dva nova pojma.

Definicija 2.4.6. *Neka je $(A, \preceq)$ parcijalno uređen skup i neka je $S \subseteq A$ takav da za sve $x, y \in S$ vrijedi*

$$x \preceq y \quad \vee \quad y \preceq x$$

Tada za S kažemo da je lanac u A.

Definicija 2.4.7. *Neka je S neprazan podskup parcijalno uređenog skupa $(A, \preceq)$. Kažemo da je S omeđen odozgo u A ako postoji neki element $m \in A$ takav da za svaki $x \in S$ vrijedi $x \preceq m$. Element m zove se gornja međa skupa S.*

Sada možemo iskazati Zornovu lemu. U ovom radu ju nećemo dokazivati, no njezin dokaz može se pronaći na [9].

Lema 2.4.8 (Zornova lema)**.** *Neka je $(A, \preceq)$ parcijalno uređen skup koji ima svojstvo da svaki lanac u A ima gornju među u A. Tada $(A, \preceq)$ ima barem jedan maksimalni element.*

Jedna od najpoznatijih primjena Zornove leme jest dokaz da svaki vektorski prostor ima bazu. Tek malo drugačiji dokaz teorema koji slijedi može se naći u [6, Poglavlje III, Teorem 5.1].

Teorem 2.4.9. *Neka je $V \neq \{0_V\}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Pretpostavimo da je $L \subseteq V$ skup linearno nezavisnih vektora i da je $S \subseteq V$ skup izvodnica od V koji sadrži L. Tada postoji baza $\mathcal{B}$ prostora V takva da je $L \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

Dokaz. Definirajmo Ω kao skup svih linearno nezavisnih podskupova od $X \subseteq V$ koji zadovoljavaju $L \subseteq X \subseteq S$. Primijetimo kako je $\Omega \neq \emptyset$ jer je $X = L \in \Omega$. Pretpostavimo da postoji lanac $\mathcal{L} = \{X_i | i \in I\}$ u Ω te definirajmo skup $X_{\mathcal{L}} = \bigcup_I X_i$. Očito vrijedi $L \subseteq X_{\mathcal{L}} \subseteq S$. Ako je F konačan podskup od $X_{\mathcal{L}}$, tada postoji indeks $i_0 \in I$ takav da je $F \subseteq X_{i_0}$. Onda je očito F skup koji se sastoji od linearno nezavisnih vektora. Zaključujemo da je i $X_{\mathcal{L}}$ linearno nezavisan. Tako smo pokazali da je $X_{\mathcal{L}} \in \Omega$, a očito je i $X_{\mathcal{L}}$ i gornja međa lanca $\mathcal{L}$. Prema Zornovoj lemi u Ω postoji barem jedan maksimalan element $\mathcal{B}$. Po definiciji skupa Ω, $\mathcal{B}$ je skup linearno nezavisnih vektora. Još je potrebno pokazati da je $\mathcal{B}$ i skup izvodnica prostora V. Pretpostavimo da postoji vektor $v \in S$ takav da je $v \notin \langle \mathcal{B} \rangle$. Tada je $\mathcal{B} \cup \{v\}$ linearno nezavisan skup vektora, iz čega slijedi $\mathcal{B} \cup \{v\} \in \Omega$. No, to je u kontradikciji s tvrdnjom da je $\mathcal{B}$ maksimalni element u Ω. Zaključujemo da je $\langle \mathcal{B} \rangle = V$, to jest da je $\mathcal{B}$ baza vektorskog prostora V.

□

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

U unitarnim prostorima uvijek je poželjno koristiti ortonormiranu bazu jer se ona koristi pri dokazivanju nekih teorema. Također, računanje skalarnog produkta dvaju vektora znatno je jednostavnije ukoliko su vektori prikazani u ortonormiranoj bazi. Sljedeći teorem pokazuje da se od svakog linearno nezavisnog skupa u unitarnom prostoru može konstruirati ortonormirani skup te objašnjava kako to napraviti.

Teorem 2.4.10. *Neka je $\{w_1, ..., w_n\}, n \in \mathbb{N}$ linearno nezavisan skup u unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormiran skup $\{v_1, ..., v_n\}$ u V definiran kao*

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, \quad v_n = \frac{w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle w_n, v_i \rangle v_i}{\|w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle w_n, v_i \rangle v_i\|}, n \geq 2$$

takav da je

$$[\{v_1, ..., v_j\}] = [\{w_1, ..., w_j\}], \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati korištenjem matematičke indukcije. Dokaz je napisan prema [1]. Za $n = 1$ vektor v_1 očito je normiran. Vektori v_1 i w_1 kolinearni pa razapinju isti vektorski prostor. Primijetimo da $w_1 \neq 0$ jer je element linearno nezavisnog skupa, pa v_1 uvijek postoji. Dakle, baza indukcije je zadovoljena. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $x_{n+1} = w_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle w_{n+1}, v_i \rangle v_i$. Lako se provjeri da je vektor x_{n+1} ortogonalan na skup $\{v_1, ..., v_n\}$. Definirajmo vektor v_{n+1} kao $v_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|}$. Iz definicije vektora v_{n+1} lako se vidi da $v_{n+1} \in [\{w_1, ..., w_{n+1}\}]$, a prema pretpostavci indukcije vrijedi $v_1, ..., v_n \in [\{w_1, ..., w_{n+1}\}]$. Analogno, kako vrijedi $w_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \langle w_{n+1}, v_i \rangle v_i$, očito vrijedi $w_{n+1} \in [\{v_1, ..., v_{n+1}\}]$. To jest, vektori v_i i w_i, gdje je $i = 1, ..., n + 1$, razapinju isti potprostor. Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da postoji ortonormirani skup kao u teoremu. □

Postupak opisan u dokazu teorema naziva se Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. Sada možemo pokazati da se baza unitarnog prostora uvijek može ortonormirati.

Korolar 2.4.11. *Svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.*

Dokaz. Dokaz slijedi primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije na bilokoju bazu unitarnog prostora. □

Cauchy-Schwarz nejednakost

Teorem 2.4.12. *Za realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ i $b_1, b_2, ..., b_n$ vrijedi nejednakost*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Dokaz. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$. Pokazati ćemo da vrijedi i za $n = 2$. To jest da vrijedi

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Rješavanjem nejednakosti dobivamo

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2 + b_2^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2.$$

To jest, dobivamo

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0,$$

što je istina. Time smo dokazali bazu indukcije. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k} (a_i)^2 \sum_{i=1}^{k} (b_i)^2.$$

Želimo dokazati da vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k+1} (a_i)^2 \sum_{i=1}^{k+1} (b_i)^2.$$

Krenimo od pretpostavke indukcije, primijetimo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i \leq \left|\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (b_i)^2}.$$

Nejednakosti možemo dodati $a_{k+1}b_{k+1}$.

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1}b_{k+1} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(a_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(b_i)^2} + a_{k+1}b_{k+1}.$$

Na desnoj strani nejednakosti koristimo bazu indukcije, to jest da vrijedi $a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Slijedi

$$\sum_{i=1}^{k+1} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2}.$$

To jest,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2}.$$

Kvadriranjem posljednje nejednakosti dobivamo upravo nejednakost koju smo htjeli dokazati, time je, pomoću matematičke indukcije, dokazana Cauchy-Schwarz nejednakost. $\square$

Definicija 2.4.13. *Skalarni produkt dvaju vektora $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ definiran je kao*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Definicija 2.4.14. *Neka je V unitaran prostor. Norma na V je funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definirana s $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Primijetimo da sada Cauchy-Schwarzovu nejednakost možemo zapisati u obliku

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Hölderova nejednakost

Definicija 2.4.15. *Neka je $p > 1$ realan broj. Za $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ funkciju*

$$\|a\|_p = (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

zovemo $p-$norma od a.

Lema 2.4.16. *Neka su x, y, α realni brojevi takvi da $x, y > 0$ i $0 < \alpha < 1$, tada vrijedi*

$$x^{\alpha} y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y.$$

Dokaz. Za $u > 0$ definirajmo funkciju $f(u) = u^\alpha - \alpha u - 1 + \alpha$. Tvrdimo da funkcija postiže maksimum 0 za $u = 1$. Prva derivacija funkcije f je $f'(u) = \alpha u^{\alpha-1} - \alpha$. Kako je $u = 1$ njezina nultočka, zaključujemo da je $u = 1$ stacionarna točka funkcije f. Druga derivacija funkcije f glasi $f''(u) = \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}$. Kako vrijedi $0 < \alpha < 1$ slijedi $f''(1) < 0$. Zaključujemo funkcija f postiže maksimum 0 u točki $u = 1$, pa vrijedi $f(u) \leq 0$ za svaki $u > 0$. Sada za $u = \frac{x}{y}$ imamo

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha - \alpha \cdot \frac{x}{y} - 1 + \alpha \leq 0,$$

što je ekvivalentno

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y.$$

Time je dokazano da nejednakost vrijedi za svaki $x, y > 0$ i $0 < \alpha < 1$. □

Teorem 2.4.17 (Hölderova nejednakost)**.** *Neka su p, q realni brojevi takvi da $p, q > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dokaz. Znamo da vrijedi

$$\frac{|x_1 y_1|}{||x||_p ||y||_q} \leq \frac{|x_1||y_1|}{||x||_p ||y||_q} = \left(\frac{|x_1|^p}{(||x||_p)^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|y_1|^q}{(||y||_q)^q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Na desnu stranu nejednakosti primijenjujemo lemu 2.4.16, slijedi

$$\frac{|x_1 y_1|}{||x||_p ||y||_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_1|^p}{(||x||_p)^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_1|^q}{(||y||_q)^q}.$$

Postupak primijenjujemo za svaki $i = 1, ..., n$ i sumiramo nejednakosti. Imamo

$$\frac{1}{||x||_p ||y||_q} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p(||x||_p)^p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q(||y||_q)^q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

To jest, imamo $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q$, a kako je $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i|$ dokazali smo tvrdnju. □

Primijetimo da je za $p = q = 2$, Hölderova nejednakost jednaka Cauchy-Schwarz nejednakosti.

Nejednakost Minkowskog

Teorem 2.4.18. *Neka je $p > 1$ realan broj. Tada za $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|_p \leq \|x_1\|_p + \|x_2\|_p + \cdots + \|x_n\|_p.$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati jakom indukcijom po n. Za $n = 1$ imamo $\|x_1\|_p \leq \|x_1\|_p$ pa tvrdnja vrijedi. Dokazat ćemo i da tvrdnja vrijedi za $n = 2$. Neka je $x_1 = x$ i $x_2 = y$, dokazujemo da vrijedi $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Krenimo od lijeve strane, imamo

$$\|x + y\|_p = \sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Primjenom nejednakosti trokuta na $|x_i + y_i|$ dobivamo

$$\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Primijetimo da za $p > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vrijedi $q = \frac{p-1}{p}$. Sada na obje sume primijenjujemo Hölderovu nejednakost, imamo

$$\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \|x\|_p \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Iz čega slijedi

$$\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Kako je $p = 1 - \frac{1}{q}$ imamo

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Time smo pokazali da nejednakost Minkowskog vrijedi i za $n = 2$. Neka je $k \geq 2$ neki prirodan broj. Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za svaki $n = 2, 3, ..., k$. Želimo dokazati da nejednakost vrijedi i za $n = k + 1$, to jest da vrijedi

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}\|_p \leq \|x_1\|_p + \|x_2\|_p + \cdots + \|x_k\|_p + \|x_{k+1}\|_p.$$

Krenimo od lijeve strane, kako nejednakost vrijedi za $n = 2$ imamo

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}\|_p \leq \|x_1 + x_2 + \cdots + x_k\|_p + \|x_{k+1}\|_p.$$

Zbog pretpostavke indukcije vrijedi

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}\|_p \leq \|x_1\|_p + \|x_2\|_p + \cdots \|x_k\|_p + \|x_{k+1}\|_p.$$

Prema principu jake matematičke indukcije, nejednakost vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

□

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna Algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] U. Bošnjaković, *Metoda matematičke indukcije u nastavi matematike*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2020.

[3] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[4] R.L. Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik, *Concrete Mathematics - A foundation for computer science*, Addison-Wesley, Reading, 1989.

[5] D. S. Gunderson, *Handbook of mathematical induction, Theory and applications*, CRC Press, Boca Raton, 2011.

[6] S.Lang, *Algebra (Revised third edition), Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[7] S. Slijepčević, *Veliki Fermatov problem*, Matematika i škola, broj 3, članak 8, str. 121 - 126, 2000., dostupno na `https://mis.element.hr/fajli/513/03-08.pdf` (lipanj 2023.)

[8] V. Smid, *Inclusion-Exclusion Principle: Proof by Mathematical Induction*, 2009., dostupno na `https://faculty.math.illinois.edu/~nirobles/files453/iep_proof.pdf` (veljača 2023.)

[9] M. Vuković, *Teorija skupova*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2015.

[10] Natjecanja iz matematike u Republici Hrvatskoj, dostupno na

`http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm` (siječanj 2023.)

Sažetak

U ovom radu detaljnije razmatramo princip matematičke indukcije, koji se temelji na jednom od Peanovih aksioma. Prikazujemo različite vrste matematičke indukcije i pružamo dokaze za svaku od njih, istovremeno koristeći primjere kako bismo ih ilustrirali. Nadalje, bavimo se primjenom indukcije u raznim područjima matematike uključujući kombinatoriku, teoriju brojeva i linearnu algebru. Posebno se bavimo i primjenom matematičke indukcije u dokazima raznih identiteta.

Summary

In this paper, we examine in detail the principle of mathematical induction, which is based on one of Peano's axioms. We present various types of mathematical induction and provide proofs for each of them, using examples to illustrate the concepts. Furthermore, we explore the application of induction in various areas of mathematics, including combinatorics, number theory, and linear algebra. Additionally, we show application of mathematical induction in proving various identities.

Životopis

Moje ime je Karla Juranović. Rođena sam 24.08.1997. u Zagrebu. Završila sam opći smjer srednje škole Gimnazija Velika Gorica, zatim sam upisala studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Nakon prve godine prebacila sam se na nastavnički smjer te isti završila 2020. godine. Iste godine upisala sam diplomski studij Matematika i Informatika, smjer: nastavnički.