Metode najgoreg slučaja u teoriji portfelja

Jurišić, Anđela

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anđela Jurišić

METODE NAJGOREG SLUČAJA U TEORIJI PORTFELJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Veliko hvala mojim roditeljima, cijeloj obitelji te prijateljima koji su mi pružili bezuvjetnu ljubav i uvijek vjerovali da ću ostvariti svoje ciljeve i želje,
također se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na savjetima, podršci i vremenu uloženom u mentoriranje ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Optimizacija portfelja proces je pronalaženja optimalne raspodjele bogatstva među skupom imovine. U većini situacija, optimalna raspodjela se odnosi na maksimiziranje očekivanog povrata i minimiziranje rizika kao osnove za formiranje portfelja. Općenito, u teoriji portfelja, koncept očekivanog povrata predstavlja ukupan povrat svih imovina. Međutim, koncept rizika ima različita tumačenja. Rizik u financijama je mogućnost da se stvarni ishod neke investicije ili ulaganja razlikuje od očekivanog ishoda ili povrata. Rizik uključuje vjerojatnost od gubitka dijela ili cijele početne investicije. Prisutan je u gotovo svim financijskim aktivnostima, a posebno za financijske odluke kod kojih donošenje odluka ovisi o budućim događajima.

Problem odabira portfelja zanimljiv je i iz teorijske i iz praktične perspektive. Markowitz [7] je postavio temelje istraživanja u ovom području sa svojim modelom srednje varijance (Mean-Variance). Dok je Markowitz koristio varijancu portfelja kao mjeru rizika, predložene su i druge definicije rizika. Konno i Yamazaki [8] koristili su prosječnu apsolutnu devijaciju kao svoju mjeru rizika. Prosječna apsolutna devijacija odgovara l_1 funkciji, dok varijanca odgovara l_2 funkciji rizika. Cai, Teo i Yang i Zhou (vidi [1], [10]) su predložili l_∞ funkciju rizika i alternativnu l_∞ funkciju rizika. Funkcija minimax tj. l_∞ promatra maksimalni individualni rizik među svim imovinama kao mjeru rizika. Mjera minimax u problemu odabira portfelja odnosi se na problem optimizacije koji maksimizira minimalni povrat portfelja ili minimizira maksimalni rizik portfelja.

U ovom radu predlažemo konzervativnije pravilo odabira portfelja u kojem investitor minimizira maksimalni rizik pojedinačnih imovina. Ova mjera rizika odgovara l_∞ funkciji rizika. Naš uvedeni model uspostavlja jasnu vezu između očekivanih povrata imovine i njihove važnosti u optimalnom portfelju. Prema našem pravilu odlučivanja, rješenje se sastoji od dva koraka. Prvo rangiramo pojedinačnu imovinu prema njihovim očekivanim povratima i rizicima. Zatim, izračunavamo optimalna svojstva temeljem informacija sadržanih u rangiranju. Pravilo rangiranja sastoji se od nejednakosti među očekivanim povratima. To nam omogućuje jasniji uvid u varijacije sastava portfelja. Postoje dvije važne razlike između našeg modela i konvencionalnih modela, poput modela srednje varijance. U našem modelu ne dopuštamo kratko trgovanje kako bismo dobili jednostavno eksplicitno rješenje, iako to predstavlja slabost modela. Ne uzimaju se u obzir korelacije između imovina, što je suprotno pristupu (primjerice modela srednje varijance) gdje diverzifikacija pomaže u smanjenju rizika. Međutim, pokazat ćemo da će ukupni rizik portfelja biti mali ako je i naša mjera rizika mala. U nekim aspektima naš pristup je sličan pristupu Younga [9]. U oba modela nema kratkog trgovanja i korelacije između imovinom ne ulaze eksplicitno u rješenja. Glavne razlike su:

- Naš model minimizira očekivani apsolutno odstupanje od budućih povrata u odnosu na njihovu srednju vrijednost, dok Youngov model maksimizira minimalni povrat portfelja na temelju skupa prošlih povrata.

- Youngovo rješenje uključuje linearno programiranje, dok mi možemo pružiti eksplicitno rješenje.

Optimizacijski problem upravljanja rizikom u financijama često zahtijeva da određena mjera rizika prilikom nekog ulaganja ne prelazi unaprijed određenu granicu. Na financijskom tržištu, brojne investicijske institucije, poput fondova i banaka, analiziraju imovine koje su podijeljene u različite grupe te postavljaju ograničenja na ulaganja u te grupe. Chi Ying Wong [6] formulirao je problem takve optimizacije portfelja s ograničenjima ulaganja.

U ovom radu dajemo pregled osnovnih pojmova u teoriji portfelja te promatramo optimizaciju portfelja u kontekstu metode najgoreg slučaja, konkretno mjere rizika l_∞. U prvom poglavlju uvodimo potrebnu teorijsku podlogu te predstavljamo mjere rizika l_∞ i alternativnu l_∞. Iako predstavljamo obje mjere rizika, fokus stavljamo na prvu te formuliramo njen pripadni optimizacijski problem. U drugom poglavlju formuliramo sam model, točnije problem optimizacije portfelja. Bikriterijski problem je pretvoren u ekvivalentni parametarski problem s jednim kriterijem. Pretpostavljajući da kratka prodaja nije dozvoljena, izvedeno je eksplicitno rješenje i optimalna investicijska strategija za učinkovitu granicu problema optimizacije portfelja bez rješavanja bilo kojeg optimizacijskog problema. Optimalnost ovog rješenja osigurana je preko Karush-Kuhn-Tuckerovih uvjeta, budući da se radi o problemu konveksnog programiranja. Također, provodimo analizu pronalaska učinkovite granice. U trećem poglavlju analiziramo usporedbu modela l_∞ i modela srednje varijance kojeg je uveo Markowitz.

Poglavlje 1

Mjere rizika

U ovom poglavlju dajemo pregled potrebne teorije portfelja, uvodimo mjeru rizika l_∞ i alternativnu l_∞ mjeru rizika. Pokazat ćemo pojedina svojstva koja zadovoljavaju navedene mjere rizika.

1.1 l_∞ mjera rizika

Pretpostavimo da investitor ima početno bogatstvo M_0 koje treba uložiti. Neka je R_i slučajna varijabla koja predstavlja stopu povrata imovine S_i, $i = 1, \ldots, n$, gdje je n broj imovina. Varijabla x_i predstavlja novac koji treba uložiti u imovinu S_i od ukupnog iznosa bogatstva M_0. Neka je u_i gornja granica, a 0 donja granica za x_i. Dakle, postoji ograničenje ulaganja na x_i. Točnije, kratka prodaja nije dozvoljena.

Dopustivi skup za problem optimizacije portfelja je:

$$\mathcal{F} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = M_0,\ 0 \leq x_i \leq u_i,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Definirajmo očekivanu stopu povrata imovine te očekivano apsolutno odstupanje R_i od srednje vrijednosti:

$$r_i = E(R_i) \qquad q_i = E(|R_i - r_i|)$$

Svaki $x = (x_1, ...x_n)$ predstavlja dopustiv portfelj, a njegov očekivani povrat dan je izrazom: $r(x_1, ...x_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ gdje je $r_i = E(R_i)$ matematičko očekivanje slučajne varijable R_i.

Definicija 1.1.1. *Mjera rizika l_∞ definirana je kao:*

$$H_\infty(x) = \max_{1\le i\le n} E(|R_i x_i - r_i x_i|) \tag{1.1}$$

Jasno, ako je $x \in \mathbf{F}$ tada vrijedi $H_\infty(x) = \max_{1\le i\le n} E(|R_i - r_i|)x_i = \max_{1\le i\le n} q_i x_i$, gdje je q_i apsolutno odstupanje imovine S_i.
Ovom mjerom se minimizira maksimalno standardno odstupanje za svu imovinu. Drugim riječima, investitor, koji ne želi imati visok rizik ni u jednoj imovini, može koristiti ovu mjeru za postizanje tog cilja. Prednost ove mjere je u tome što je odgovarajući problem optimizacije portfelja problem linearnog programiranja koji se čak može eksplicitno riješiti.

Ukoliko je dana distribucija svake slučajne varijable R_i mjera rizika $H_\infty(x)$ eksplicitno je poznata. Primjerice, ako je slučajna varijabla R_i normalno distribuirana s parametrom očekivanja μ i standardnom devijacijom σ, lako se provjeri da vrijedi sljedeće:

$$H_\infty(x) = \max_{1\le i\le n} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_i x_i$$

Pretpostavimo da dostupni povijesni podaci su podijeljeni u T vremenskih razdoblja. Slučajna varijabla R_{it} predstavlja slučajnu varijablu R_i tijekom razdoblja $t = 1, 2, \ldots, T$, a r_{it} njenu očekivanu vrijednost. Markowitz te Konno i Yamazaki dokazali su da se očekivana vrijednost slučajne varijable može aproksimirati prosjekom izvedenim iz podataka. Naime, ako su r_{it} i r_i procijenjene korištenjem povijesnih podataka vrijedi tvrdnja:

$$r_i = E(r_i) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{it}$$

Pretpostavimo da investitor želi maksimizirati očekivani povrat te minimizirati razinu rizika. Uz definiranu mjeru rizika l_∞, naš problem optimizacije portfelja formulira se kao bikriterijski problem.

Definicija 1.1.2. *Bikriterijski problem optimizacije portfelja definira se na sljedeći način:*

$$\begin{gathered} \min\left(\max_{1\le i\le n} q_i x_i, -\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) \\ \text{uz } x \in \mathcal{F} \end{gathered} \tag{1.2}$$

gdje je dopustiv portfelj $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$ efikasan (optimalan u Paretovom smislu) ako ne postoji $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{F}$ takav da vrijedi:

$$\max_{1\le i\le n} q_i y_i \le \max_{1\le i\le n} q_i x_i \quad i \quad \sum_{i=1}^{n} r_i y_i \ge \sum_{i=1}^{n} r_i x_i$$

uz barem jednu strogu nejednakost.

Kažemo da je vrijednost $\left(\max_{1\le i\le n} q_i x_i, -\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right)$ efikasna minimalna vrijednost funkcije cilja. Skup svih efikasnih portfelja u skupu dopustivih portfelja naziva se učinkovita granica.

Možemo zapisati i (1.2) u vidu ekvivalentnog bikriterijskog linearnog programiranja:

$$
\begin{aligned}
&\min\left(y, -\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right)\\
&q_i x_i \le y \qquad \text{za } i = 1, \ldots, n\\
&\text{uz } x \in \mathcal{F}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Nadalje, transformiramo dobiveni bikriterijski problem linearnog programiranja (1.3) u problem parametarske optimizacije s jednim kriterijem.
Za fiksni $\lambda \in (0, 1)$ problem parametarske optimizacije s jednim kriterijem je sljedeći:

$$
\begin{aligned}
&\min F_\lambda(\mathbf{x}, y) = \lambda y + (1-\lambda)\left(-\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right)\\
&q_i x_i \le y \qquad \text{za } i = 1, ..., n\\
&\text{uz } \mathbf{x} \in \mathcal{F}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Parametar λ predstavlja toleranciju investitora na rizik. Uočimo što je parametar λ veći investitor preuzima manji rizik, ali i očekuje manju dobit.

Za svaki $\lambda \in (0, 1)$ optimalno rješenje parametarske optimizacije (2.1) daje nam učinkovito rješenje za (1.2). Pretpostavimo da vrijedi:

$$
\begin{gathered}
r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n\\
q_i > 0, i = 1, \ldots, n
\end{gathered}
$$

1.2 Alternativna l_∞ mjeru rizika

Uvodimo alternativnu l_∞ mjeru rizika u optimizaciji portfelja koja se definira kao prosjek maksimalnih pojedinačnih rizika tijekom nekoliko (prošlih) vremenskih razdoblja. Drugim riječima, investitor želi minimizirati prosjek maksimalnih pojedinačnih rizika među imovinom koju će uložiti.

Definicija 1.2.1. *Alternativna l_∞ mjera rizika definirana je kao:*

$$H_\infty^T(x) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} E\left(|R_{it}x_i - E\left(R_{it}\right)x_i|\right)$$

U svakom razdoblju pojedinačno se računa apsolutno odstupanje u odnosu na očekivanu vrijednost. Mjera rizika se uzima kao prosjek maksimuma tih pojedinačnih apsolutnih odstupanja tijekom svih razdoblja, a očekivani povrat kao prosjek očekivanih povrata tijekom T razdoblja. Model određivanja cijene kapitalne imovine između tržišnog portfelja i svakog pojedinačnog povrata uspostavlja se korištenjem metode neglatke optimizacije.

Napomena 1.2.2. *Prisjetimo se l_2 mjere rizika koju je uveo Markowitz:*

$$H_2(x) = E\left(\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right)\right|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}x_i x_j$$

gdje je $\sigma_{ij} = E((R_i - r_i)(R_j - r_j))$ kovarijanca između R_i i R_j. Navedena l_2 funkcija rizika ovisi o kovarijancama među imovinom. Neka je $q_{it} = E(|R_{it} - E(R_{it})|)$. Tada mjeru H_∞^T možemo napisati u sljedećem obliku:

$$H_\infty^T(x) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} q_{it}|x_i|$$

Štoviše, ako je $x \in \mathcal{F}$ vrijedi:

$$H_\infty^T(x) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} q_{it}x_i$$

Dakle, mjera rizika H_∞^T ne ovisi o kovarijancama među imovinom.

Uvedimo vjerojatnost

$$p_\tau = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} R_i x_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\right)\right| \ge \tau\right)$$

da povrat nije unutar zadanog raspona očekivanog povrata. Jasno da p_τ ovisi o kovarijancama među imovinom. Koristeći Čebiševljevu nejednakost vrijedi sljedeće:

$$p_\tau \leq \frac{n}{T\tau} H_\infty^T(x)$$

Dakle, p_τ je ograničena konstantom i alternativnom funkcijom rizika H_∞^T.
Primijetimo, za slučaj T=1, sljedeća relacija izvedena je u [1]

$$p_\tau \leq \frac{n}{\tau} H_\infty(x)$$

za prethodno definiranu mjeru rizika H_∞.

1.3 Svojstva mjera rizika na financijskom tržištu

Kao što je već spomenuto rizik procjenjujemo različitim mjerama rizika. Prve ideje za procjenu rizika potječu od Markovitz-a koji je rizik mjerio standardnom devijacijom. Poželjna svojstva, o kojima će biti riječ u ovom dijelu, a koje bi mjera rizika trebala imati kako bi bila korisna, su: koherentnost, subaditivnost i konveksnost. Sada ćemo definirati neka svojstva, te pokazati koja svojstva zadovoljavaju uvedene mjere rizika l_∞ i alternativna l_∞.

Za početak definirajmo koherentnu mjeru rizika. Mjera rizika predstavljena je funkcijom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. S X i Y označit ćemo dvije realne slučajne varijable koje ćemo koristiti u sljedećim svojstvima mjera rizika:

1. Monotonost: $X \leq Y \iff f(X) \leq f(Y)$
2. Subaditivnost: $f(X + Y) \leq f(X) + f(Y)$
3. Pozitivna homogenost: $f(0) = 0$ i $f(\lambda X) = \lambda f(X)$, za sve pozitivne konstante $\lambda > 0$
4. Translacijska invarijantnost: $f(X + t) = f(X) - t$, za sve realne konstante t.

Napomena 1.3.1. *Pojasnimo svako svojstvo:*

1. *Monotonost osigurava ako su gubitci X uvijek manji od Y, tada je Y barem jednako rizičan kao X.*
2. *Subaditivnost se smatra najvažnijim, određuje da rizik zbroja nikada ne prelazi zbroj pojedinačnih rizika. Točnije, kombiniranjem pojedinačnih rizika ne povećava se ukupni rizik. Subaditivnost podrazumijeva postojanje koristi od diverzifikacije kombiniranjem rizika. Mjere rizika koje ne zadovoljavaju ovo svojstvo mogu dovesti do pogrešnog zaključka da diverzifikacija portfelja rezultira povećanjem rizika.*

3. *Pozitivna homogenost je zapravo pretpostavka da veličina pozicije ne utječe direktno na rizik što znači da implicitno pretpostavljamo da su tržišta likvidna. U upravljanju financijskim rizicima, pod pozitivnom homogenošću se smatra da je rizik nekog portfelja proporcionalan njegovoj vrijednosti što u praksi često ne vrijedi. Ako se poveća broj dionica koje se prodaju, njihova cijena će pasti i na kraju prodajna cijena može biti niža od početne, što rezultira gubitkom.*

4. *Svojstvo translacijske invarijantnosti nam govori da ako poziciji dodamo iznos t i uložimo ga u referentni instrument, smanjit ćemo mjeru rizika za t. Translacijska invarijantnost znači da se dodavanje ili oduzimanje gotovine portfelju X smanjuje ili povećava rizičnost za taj iznos.*

Definicija 1.3.2. *Kažemo da je f koherentna mjera rizika ako zadovoljava svojstva subaditivnost, monotonost, pozitivnu homogenost i translacijsku invarijantnost.*

Kombinacija svojstava subaditivnosti i pozitivne homogenosti implicira konveksnost:

$$f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda) f(Y) \text{ za sve } \lambda \in [0,1]$$

Ako pretpostavku pozitivne homogenosti zamijenimo s pretpostavkom konveksnosti, dobivamo klasu konveksnih mjera rizika. Drugim riječima, mjera rizika pripada klasi konveksnih mjera rizika ako zadovoljava homogenost, translacijsku invarijantnost i konveksnost.

Također, svojstvo GP (Gaivoronsky-Pflug,vidi [3]) translacijske invarijantnosti:

$$f(X+t) = f(X), \text{ za sve realne t}$$

može se interpretirati na sljedeći način: rizik portfelja se ne može smanjiti ili povećati jednostavnim dodavanjem određene količine sigurnog novca.

Analiziramo svojstva l_∞ mjere rizika:

– subaditivnost:

$$\begin{aligned}
&H_\infty(X) + H_\infty(Y) - H_\infty(X+Y) \\
&= \max_{1\leq i\leq n} E|X_i - EX_i| + \max_{1\leq i\leq n} E|Y_i - EY_i| - \max_{1\leq i\leq n} E|(X_i+Y_i) - E(X_i+Y_i)| \\
&\geq \max_{1\leq i\leq n} (E|X_i - EX_i| + E|Y_i - EY_i| - E|(X_i - EX_i) - (Y_i + EY_i)|) \geq 0
\end{aligned}$$

– pozitivna homogenost:

$$H_\infty(\lambda X) = \max_{1\leq i\leq n} E|\lambda X_i - E(\lambda X_i)| = \lambda \max_{1\leq i\leq n} E|X_i - EX_i| = \lambda H_\infty(X)$$

– GP translacijska invarijantnost:

$$H_\infty(X+t) = \max_{1\le i\le n} E|(X_i+t) - E(X_i+t)| = H_\infty(X)$$

Dakle, l_∞ mjera rizika zadovoljava svojstva subaditivnosti, pozitivne homogenosti, te također konveksnost i GP translacijsku invarijantnost kao posljedice prva dva svojstva.

Sada analiziramo svojstva alternativne l_∞ mjere rizika:

– subaditivnost:

$$\begin{aligned}
H_\infty^T(X+Y) &= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} E\,|X_{it} + Y_{it} - E\,(X_{it}+Y_{it})| \\
&= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} E\,|X_{it} - E(X_{it}) + Y_{it} - E(Y_{it})| \\
&\le \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} E\,|X_{it} - E(X_{it})| + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} E\,|Y_{it} - E(Y_{it})| \\
&= H_\infty^T(X) + H_\infty^T(Y)
\end{aligned}$$

– pozitivna homogenost:

$$H_\infty^T(\lambda X) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} E\,|\lambda X_{it} - E\,(\lambda X_{it})| = \lambda H_\infty^T(X)$$

– GP translacijska invarijantnost:

$$H_\infty^T(X+t) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} \max_{1\le i\le n} E\,|(X_{it}+t) - E\,(X_{it}+t)| = H_\infty^T(X)$$

Vidimo da alternativna l_∞ mjera rizika zadovoljava jednaka svojstva kao i l_∞ mjera rizika.
Pokažimo da obje mjere rizika nisu monotone. Pretpostavimo da je T=1, te promotrimo sljedeću tablicu:

Slučaj	**X**	**Y**
1	2	5
2	4	5
3	1	5
4	3	5
Očekivana vrijednost	2.5	5

Očito je $H_\infty(X) = 1.5 > H_\infty(Y) = 0$ te $H_\infty^T(X) = 1.5 > H_\infty^T(Y) = 0$. Dakle, alternativna l_∞ i l_∞ mjera rizika nisu monotone mjere rizika.

Poglavlje 2

Optimizacija portfelja

U ovom poglavlju promotrimo definirani model l_∞, slučajeve kada nije i kada je uključena bezrizična imovina. Točnije, promatrat ćemo parametarski problem optimizacije portfelja (u prethodnom poglavlju smo uveli i ekvivalentni linearan). Uvest ćemo pojam učinkovite granice te analizirati njen pronalazak.

2.1 Model

Analogno oznakama u prvom poglavlju, pretpostavimo da ulagač ima početno bogatstvo M_0 koje treba uložiti u n mogućih imovina S_j, $j = 1, \ldots, n$. Neka je R_j slučajna varijabla koja predstavlja stopu povrata imovinu S_j, $r_j = E(R_j)$, $q_j = E(|R_j - r_j|)$ i $x_j \geq 0$ raspodjela bogatstva M_0 na imovine S_j. Kratka prodaja nije moguća, dakle vrijedi $x_j \geq 0$.
Za fiksni $\lambda \in (0, 1)$ definirali smo problem parametarske optimizacije s jednim kriterijem:

$$\begin{aligned} \min F_\lambda(\mathbf{x}, y) = \lambda y + (1-\lambda)\left(-\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) & \\ q_i x_i \leq y \qquad \text{za } i = 1, ..., n & \\ \text{uz } \mathbf{x} \in \mathcal{F}. & \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pretpostavimo da vrijedi:

$$r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$$
$$q_i > 0, i = 1, \ldots, n$$

$$\mathcal{F} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = M_0,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Teorem 2.1.1. *Za bilo koji* $\lambda \in (0,1)$*, optimalno rješenje za* (2.1) *dano je:*

$$x_i^* = \begin{cases} \dfrac{M_0}{q_i}\left(\displaystyle\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j}\right)^{-1} & \text{ako } i \in \mathcal{J}^*(\lambda) \\ 0 & \text{ako } i \notin \mathcal{J}^*(\lambda) \end{cases}$$

$$y^* = M_0\left(\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j}\right)^{-1}$$

gdje je $\mathcal{J}^*(\lambda)$ *skup imovine koja se ulaže, određen prema sljedećim pravilima:*

a) *ako postoji cijeli broj* $k \in [0, n-2]$ *takav da:*

$$\begin{aligned} &\frac{r_n - r_{n-1}}{q_n} < \frac{\lambda}{1-\lambda} \\ &\frac{r_n - r_{n-2}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{q_{n-1}} < \frac{\lambda}{1-\lambda} \\ &\qquad\qquad \dots \\ &\frac{r_n - r_{n-k}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-k}}{q_{n-k+1}} < \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \text{te} \\ &\frac{r_n - r_{n-k-1}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-k-1}}{q_{n-1}} + \dots + \frac{r_{n-k+1} - r_{n-k-1}}{q_{n-k+1}} + \frac{r_{n-k} - r_{n-k-1}}{q_{n-k}} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} \end{aligned} \tag{2.2}$$

tada je $\mathcal{J}^*(\lambda) = \{n, n-1, \dots, n-k\}$

b) *Inače, ako gore navedeni uvjet nije zadovoljen niti za jedan* $k \in [0, n-2]$*, vrijedi*

$$\mathcal{J}^*(\lambda) = \{n, n-1, \dots, 1\}$$

Dokaz. Primjenjujemo Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete na (2.1). Za početak, uvedimo Lagrangerovu funkciju:

$$L(\mathbf{x}, y, \mu, \lambda_0, \gamma) = \lambda y + (1-\lambda)\left(-\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) + \sum_{i=1}^n \mu_i(q_i x_i - y) + \lambda_0\left(\sum_{i=1}^n x_i - M_0\right) - \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i$$

Pomoću Karush-Kuhn-Tuckerovih uvjeta, dopustiva točka $(\mathbf{x}, y)$ je rješenje ako i samo ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda - \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -(1-\lambda) r_i + \mu_i q_i + \lambda_0 - \gamma_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M_0 \tag{2.5}$$

$$\mu_i (q_i x_i - y) = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{2.6}$$

$$\gamma_i x_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{2.7}$$

$$\mu_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{2.8}$$

$$\gamma_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{2.9}$$

Definiramo $\mathcal{J}^*(\lambda) = \{i : \mu_i > 0\}$. Neka je $x_i = 0$ za svaki $i \notin \mathcal{J}^*(\lambda)$. Iz (2.6) slijedi $x_i = \dfrac{y}{q_i}$ za svaki $i \in \mathcal{J}^*(\lambda)$. Ako uvrstimo taj izraz u (2.5) dobijemo

$$y = M_0 \left(\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1} \tag{2.10}$$

tada slijedi:

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{M_0}{q_i} \left(\displaystyle\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1} & \text{ako } i \in \mathcal{J}^*(\lambda) \\ 0 & \text{ako } i \notin \mathcal{J}^*(\lambda) \end{cases} \tag{2.11}$$

Jednakost (2.7) povlači ako $x_i > 0$, tada je $\gamma_i = 0$. Dakle, $\gamma_i = 0$ za svaki $i \in \mathcal{J}^*(\lambda)$. Za $i \in \mathcal{J}^*(\lambda)$, pomoću (2.4) lako se pokaže da vrijedi sljedeće:

$$\mu_i = \frac{1}{q_i} \left[(1-\lambda) r_i - \lambda_0 + \gamma i \right] = \frac{1}{q_i} \left[(1-\lambda) r_i - \lambda_0 \right] \tag{2.12}$$

Iz ove jednakosti zajedno s (2.3) slijedi $\lambda = \displaystyle\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \Big[(1-\lambda) r_j - \lambda_0 \Big]$. Dakle,

$$\lambda_0 = \left(\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1} \left((1-\lambda) \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j}{q_j} - \lambda \right)$$

Sada to možemo uvrstiti u izraz za μ_i i dobijemo da za svaki $i \in \mathcal{J}^*(\lambda)$ vrijedi:

$$\mu_i = \frac{1}{q_i}\left[(1-\lambda)r_i - \left(\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j}\right)^{-1} \times \left((1-\lambda)\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j}{q_j} - \lambda\right)\right] \tag{2.13}$$

dok za $i \notin \mathcal{J}^*(\lambda)$ vrijedi:

$$\gamma_i = -(1-\lambda)r_i + \mu_i q_i + \lambda_0 = -(1-\lambda)r_i + \lambda_0 \tag{2.14}$$

Očito, ako se može ispravno odrediti skup $\mathcal{J}^*(\lambda)$ koji zadovoljava da su μ_i i γ_i nenegativni i definirani s (2.13) i (2.14) redom, tada će y i x_i definirani kao gore, biti rješenje koje zadovoljava sve uvjete (2.3)-(2.9)
Ako postoji cijeli broj k t.d. $k \in [0, n-2]$ za kojeg vrijedi (2.2), tada je $\mathcal{J}^*(\lambda)$ skup koji zadovoljava $\mu_i \geq 0$ i $\gamma_i \geq 0$. Iz (2.13) slijedi da za bilo koji $i \in \mathcal{J}^*(\lambda) = \left\{n, n-1, \ldots, n-k\right\}$

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \left(\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{q_i}{q_j}\right)^{-1} \left[(1-\lambda)\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_i - r_j}{q_j} + \lambda\right] \\
&= \left(\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{q_i}{q_j}\right)^{-1} (1-\lambda)\left\{\left[\sum_{j=i+1}^{n} \frac{r_i - r_j}{q_j} + \frac{\lambda}{a-\lambda}\right] + \sum_{j=n-k}^{i} \frac{r_i - r_j}{q_j}\right\} > 0
\end{aligned}$$

S druge strane, za $j = 1, 2, \ldots, n-k-1$ iz (2.14) i (2.12) slijedi

$$\begin{aligned}
\gamma_i &= -(1-\lambda)r_i + \left(\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j}\right)^{-1} \left((1-\lambda)\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j}{q_j} - \lambda\right) \\
&= \left(\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j}\right)^{-1} \left((1-\lambda)\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j - r_i}{q_j} - \lambda\right) \\
&\geq \left(\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j}\right)^{-1} \left((1-\lambda)\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j - r_{n-k-1}}{q_j} - \lambda\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Dokazali smo da su Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti (2.8) i (2.9) zadovoljeni. Također, uz tvrdnju da je dano rješenje iskazano (2.11) i (2.10) zajedno s definiranim skupom $\mathcal{J}^*(\lambda)$ vidimo da su zadovoljeni svi Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti.
U slučaju da ne postoji niti jedan cijeli broj $k \in [0, n-2]$ takav da vrijede (3.4)-(3.7), možemo pokazati da će rješenje koje je dano sa (2.2), pri čemu je $\mathcal{J}^*(\lambda) = \left\{n, n-1, ..., 2, 1\right\}$, zadovoljiti sve Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete. Kako bismo to dokazali, bez smanjenja

općenitosti, možemo uvesti fiktivnu imovinu S_0 s $r_0 = -L$ i $q_0 = L$, gdje je L dovoljno velik pozitivan broj. Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti se mogu primijeniti čak i ako su neki parametri, poput r_i, negativni. Analogno, možemo pokazati da su svi Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti zadovoljeni.
Dakle, kako je (2.1) problem konveksnog programiranja, Karush-Kuhn-Tuckerovi uvjeti su nužni i dovoljni za optimalnost, stoga je dopustiva točka koja ih zadovoljava optimalna. □

2.2 Jednostavna optimalna strategija ulaganja

Promotrimo problem (2.1) sa zadanim $\lambda \in (0, 1)$. Parametri r_j i q_j $j = 1, \ldots, n$ su konstante. Pretpostavimo da vrijedi

$$r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n \tag{2.15}$$

Također, pretpostavimo da ne postoje dvije imovine S_i i S_j, $i \neq j$ takve da $r_i = r_j$ i $q_i = q_j$. Ako takve postoje, promatrat ćemo ih kao jednu imovinu.

Sva imovina je rizična

U ovom odjeljku promatramo slučaj u kojem je sva imovina rizična. Pretpostavimo da imamo portfelj $\mathbf{x}^0$ takav da $x_i^0 > 0$ za $i \in \mathcal{J}^0$ i $x_i^0 = 0$ za $i \notin \mathcal{J}^0$. Naime, skup $\mathcal{J}^0(\lambda)$ predstavlja skup imovine koja se ulaže. Pretpostavimo da postoji imovina S_h koja nije uključena u skup $\mathcal{J}^0(\lambda)$. Analizirat ćemo portfelj u slučaju povećanja alokacije na imovinu S_h. Konstruiramo novi portfelj $\mathbf{x}'$ na sljedeći način:

$$x_i' = \begin{cases} x_i^0 - \Delta_i & \text{ako } i \in \mathcal{J}^0 \\ \Delta_h & \text{ako } i = h \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \tag{2.16}$$

Pretpostavimo da je y^0 odgovarajući rizik portfelja x^0, tj. $(\mathbf{x}^0, y^0)$ predstavlja rješenje problema (2.1). Konstruiramo novo rješenje $(\mathbf{x}', y')$ za (2.1) s prethodno definiranim $\mathbf{x}'$ i

$$y' = y^0 - \Delta_y$$

Kako bismo zadovoljili uvjete problema (2.1) mora vrijediti sljedeće:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i' &= \sum_{i=1}^{n} x_i^0 - \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} \Delta_i + \Delta_h = M_0 \\ x_i' q_i &= (x_i^0 - \Delta_i) q_i \leq y^0 - \Delta_y \quad \text{za } i \in \mathcal{J}^0(\lambda) \\ x_h' q_h &= \Delta_h q_h \leq y^0 - \Delta_y \end{aligned}$$

Dakle, možemo uzeti proizvoljne pozitivne brojeve za Δ_i, Δ_h i Δ_y koji zadovoljavaju jednakosti:

$$\begin{aligned}\Delta_h &= \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} \Delta_i \\ \Delta_i &= \frac{\Delta_y}{q_i} \qquad \text{za } i \in \mathcal{J}^0(\lambda) \\ \Delta_h &= \frac{(y^0 - \Delta_y)}{q_h}\end{aligned}$$

Tada je funkcija cilja našeg optimizacijskog problema (2.1)

$$\begin{aligned}F_\lambda(\mathbf{x}', y') &= \lambda(y^0 - \Delta_y) - (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} r_i(x_i^0 - \Delta_i) - (1-\lambda) r_h \Delta_h & (2.17)\\ &= F_\lambda(\mathbf{x^0}, y^0) - \lambda\Delta_y + (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} r_i \Delta_i - (1-\lambda) r_h \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} \Delta_y & (2.18)\\ &= F_\lambda(\mathbf{x^0}, y^0) - \Delta_F & (2.19)\end{aligned}$$

gdje je

$$\Delta_F = \lambda\Delta_y - (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} r_i \Delta_i + (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} r_h \Delta_i$$

Lako je primijetiti da u gornjoj jednadžbi $\lambda\Delta_y$ označava smanjenje rizika, $(1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} r_i \Delta_i$ označava smanjenje očekivanog povrata zbog smanjenja raspodjele imovinama $i \in \mathcal{J}^0(\lambda)$, te $(1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} r_h \Delta_i$ označava povećanje očekivanog povrata zbog dodavanja imovine S_h u skup imovine za ulaganje. Na temelju danih jednakosti možemo zapisati sljedeće:

$$\Delta_F = \left\{ \lambda - (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^0(\lambda)} \frac{r_i - rh}{q_i} \right\} \Delta_y \tag{2.20}$$

Definirajmo skupove $\mathcal{J}_a = \left\{i \in \mathcal{J}^0(\lambda) : r_i > r_h\right\}$ i $\mathcal{J}_b = \left\{i \in \mathcal{J}^0(\lambda) : r_i < r_h\right\}$ tako da jednakost (2.20) možemo zapisati u obliku $\Delta_F = \Delta_F^a + \Delta_F^b$ gdje su

$$\Delta_F^a = \left\{\lambda - (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^a(\lambda)} \frac{r_i - rh}{q_i}\right\} \Delta_y$$
$$\Delta_F^b = \left\{\lambda - (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{J}^b(\lambda)} \frac{r_i - rh}{q_i}\right\} \Delta_y$$

Promotrimo sljedeća tri slučaja:

1. Ako je $\Delta_F^a > 0$, tada prema definiciji Δ_F^a znači da je smanjenje vrijednosti rizika $\left\{\lambda \Delta_y\right\}$ veće od smanjenja očekivanog povrata. Iz ta dva uvjeta $\Delta_F^b \geq 0$ povlači da je $\Delta_F > 0$. Dakle, prema (2.17) slijedi $F_\lambda(\mathbf{x}', y') < F_\lambda(\mathbf{x^0}, y^0)$. Portfelj $\mathbf{x^0}$ se može poboljšati ako se imovina S_h uključi u skup imovine za ulaganje.

2. Ako je $\Delta_F^a \leq 0$ i skup $\mathcal{J}_b$ prazan, tada vrijedi $\Delta_F = \Delta_F^a \leq 0$. Dakle, povećanje raspodjele za imovinu S_h će rezultirati ili smanjenjem očekivanog povrata većim od smanjenja vrijednosti rizika (ako je $\Delta_F^a < 0$) ili neće donijeti nikakvu korist (ako je $\Delta_F^a = 0$). Stoga, imovina S_h ne bi trebala biti uključena u skup imovine za ulaganje.

3. Ako je $\Delta_F^a \leq 0$ i skup $\mathcal{J}_b$ neprazan, tada postoji barem jedan element $m \in \mathcal{J}_b$ takav da $r_m < r_h$. Analogno (uklanjanjem imovine S_m te povećanjem raspodjele ostale imovine) možemo pokazati da u ovom slučaju imovinu S_m također ne treba uključiti u skup imovine za ulaganje $\mathcal{J}^0(\lambda)$. Imovina S_m treba zadovoljiti uvjet Teorema (2.1.1) (jer $r_m < r_h$ i $\Delta_F^a \leq 0$).

Napomena 2.2.1. *Primijetimo da investicijska strategija dana u Teoremu* (2.1.1) *uvijek sugerira uključivanje prvo imovine s većim stopama prinosa. Drugim riječima, imovina s većom stopom prinosa uvijek bi trebala biti odabrana prije imovine s nižom stopom prinosa. Razlog za ovu naizgled kontraintuitivnu tvrdnju je taj što stvarni iznos uložen u određenu imovinu također ovisi o riziku te imovine. Stoga je moguće da stvarno ulaganje u imovinu s visokom stopom prinosa bude gotovo nula, čak i ako je bila odabrana prema* *pravilima iz Teorema* (2.1.1). *Promotrimo primjer u kojem pretpostavljamo da vrijedi:*

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{q_n} < \frac{\lambda}{1-\lambda}$$
$$\frac{r_n - r_{n-2}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{q_{n-1}} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Iz Teorema (2.1.1) *slijedi da je optimalna investicijska strategija odabrati samo imovine* S_n *i* S_{n-1}. *Nadalje, stvarni iznosi ulaganja u te imovine će biti:*

$$x_n^* = \frac{M_0}{q_n\left(\frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_n}\right)} = \frac{M_0}{\frac{q_n}{q_{n-1}} + 1}$$
$$x_{n-1}^* = \frac{M_0}{q_{n-1}\left(\frac{1}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_n}\right)} = \frac{M_0}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}$$

Očito je da ako je q_n *znatno veći od* q_{n-1}, *tada je moguće da je* x_n^* *gotovo nula dok je* x_{n-1}^* *gotovo jednak* M_0.

Optimalna strategija opisana u Teoremu (2.1.1) sastoji se od dva koraka. Prvo, odabiru se imovine na temelju njihovih stopa prinosa. Zatim, u drugom koraku, određuje se stvarna raspodjela bogatstva po odabranim imovinama na temelju njihovih rizika. Ukoliko uzmemo u obzir trošak transakcije za ulaganje u imovinu, vrlo mala raspodjela bogatstva imovini može značiti da je zapravo treba izostaviti. Stoga, prema investicijskoj strategiji iz Teorema, imovina može biti isključena iz skupa za ulaganje u bilo kojem koraku. U prvom koraku, može biti isključena ako je njena stopa prinosa preniska, dok se u drugom koraku može također isključiti ako je njen rizik previsok.

Također, optimalna investicijska strategija prema Teoremu (2.1.1) ima svojstvo da je $x_i^* q_i = y^*$ za svaki $i \in \mathcal{J}^*(\lambda)$ (i $x_i^* = 0$ za svaki $i \notin \mathcal{J}^*(\lambda)$). To znači da ćemo, za odabrane imovine za investiranje, uložiti iznose tako da imaju isti rizik y^* (po definiciji (1.1.1) primijetimo da $E(|R_i x_i - r_i x_i) = q_i x_i$ predstavlja rizik ulaganja iznosa x_i u imovinu S_i). Naš cilj je minimizirati maksimalni pojedinačni rizik, tj. $H_\infty(x) = \max_{1\leq i\leq n} E(|R_i x_i - r_i x_i|)$. Teorem (2.1.1) implicira da optimalna investicijska strategija treba uložiti imovine tako da imaju jednak rizik. Ukoliko to nije slučaj, odnosno ako postoji neka imovina čiji je rizik manji od rizika druge imovine, tada se raspodjela toj imovini može povećati. Takva promjena raspodjele neće povećati maksimalni rizik, dok će se ukupni očekivani povrat povećati (kasnije ćemo iskazati Lemu (2.3.2) koja se odnosi na neučinkovitost rješenja $(\mathbf{x}^*, y^*)$ ako su rizici odabrane imovine nejednaki).

Napomena 2.2.2. *Još jedno svojstvo optimalnog portfelja prema Teoremu* (2.1.1) *je da iznosi* x_i^* *za* $i \in \mathcal{J}^*(\lambda)$*, ne ovise o stopama prinosa* r_j*, pod uvjetom da je odabrani skup imovine za ulaganje* $\mathcal{J}^*(\lambda)$*. To ukazuje da očekivane stope prinosa određuju skup imovine koja se ulaže, ali ne utječu na veličinu raspodjele. Ovo svojstvo ne postoji u rješenju portfelja u drugim modelima kao što je klasični MV model. Zašto je ovo svojstvo opravdano?*

i) Informacije o očekivanim stopama prinosa već se koriste prilikom odabira skupa imovina prema pravilima iz Teorema (2.1.1).

ii) Nakon što su odabrane imovine za investiranje, glavni problem je kako minimizirati rizik ulaganja. Prema našem modelu, maksimalni pojedinačni rizik treba minimizirati. Kao što smo već napomenuli, za postizanje tog cilja smisleno je imati sve imovine koje se ulažu s istim rizikom. To rezultira raspodjelom koja ne ovisi o očekivanim stopama prinosa.

Uočimo iz Teorema (2.1.1) da je slučaj, u kojem ulažemo cijeli iznos bogatstva M_O u jednu imovinu kada je

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{q_n} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

rizik te imovine minimalan tj. $y^* = 0$. Ipak, treba napomenuti da postoje i drugi slučajevi u kojima se gotovo cijeli iznos bogatstva M_O treba uložiti u jednu imovinu. (Vidi Napomenu (2.2.1)). Slučaj u kojem se cijeli iznos bogatstva ulaže u jednu bezrizičnu imovinu ćemo obraditi detaljnije u radu.

Napomena 2.2.3. *Primijetimo da je slučaj kada odaberemo sve imovine* S_j*,* $j = 1, 2, \ldots, n$*,, za ulaganje, kada uvjet* (2.2) *nije zadovoljen ni za jedan* $0 \leq k \leq n-2$*. U tom slučaju su skup* $\mathcal{J}^*(\lambda) = \{n, n-1, ..., 2, 1\}$ *i udjeli imovina u efikasnom portfelju dani Teoremom* (2.1.1)*. Konkretno, ako pretpostavimo da je početno bogatstvo* $M_0 = 1$*, vrijedi:*

$$x_i^* = \frac{\frac{1}{q_i}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Postoji zanimljiv odnos između ovog portfelja i globalnog portfelja najmanje varijance prema modelu [4]. Pretpostavimo da je varijanca imovine S_i *jednaka* σ_i^2*, za* $i = 1, 2, \ldots, n$ *te da su imovine međusobno nekorelirane. U tom slučaju možemo pokazati da su udjeli* *imovina $\hat{x}_i$ u globalnom portfelju najmanje varijance dani s:*

$$\hat{x}_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k^2}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Postoji jasna sličnost s gornjim izrazom za x_i^*. Prema našem modelu, efikasni portfelj koristi $\frac{1}{q_i}$, dok u modelu srednje varijance, globalni portfelj najmanje varijence koristi $\frac{1}{\sigma_k^2}$.

U posljednjih nekoliko godina istraživanja modela srednje varijance (vidi [2]) dokazana je izuzetna osjetljivost sastava efikasnog portfelja na odstupanja u ulaznim podacima problema. Posebno je utvrđeno da pogreške u srednjim vrijednostima imovina mogu imati znatno veći utjecaj od pogrešaka u ostalim parametrima. Stoga se postavlja slično pitanje koliko je naše rješenje osjetljivo na promjene u srednjim vrijednostima imovina. Provedimo detaljniju analizu.

Pretpostavimo da $m = n - k - 1$ imovina zadovoljava uvjet Teorema (2.2). Drugim riječima, skup imovina za ulaganje je $\mathcal{J}^*(\lambda) = \{n, n-1, \ldots, m+1\}$ i imovina S_m je prva isključena iz tog skupa. Promotrimo sljedeće tri kategorije imovina, gdje δ_i označava odstupanje parametra r_i.

i) Za imovine S_j gdje je $j < m$ vrijedi da nisu odabrane za ulaganje prema Teoremu (2.1.1). Rješenje ostaje nepromijenjeno sve dok je $r_j + \delta_j \leq r_m$. To znači da se optimalni portfelj ne mijenja sve dok su odstupanja unutar sljedećih raspona:

$$-\infty \leq \delta_j \leq r_m - r_j \qquad \text{za } j < m$$

ii) Za imovinu S_m, jasno ako vrijedi $r_m + \delta_m \leq r_{m+1}$ i

$$\frac{r_n - r_m - \delta_m}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_m - \delta_m}{q_{n-1}} + \ldots + \frac{r_{m+1} - r_m - \delta_m}{q_{m+1}} \geq \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

tada je optimalni portfelj nepromijenjen. Neka je $\zeta_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{r_k - rm}{q_k} - \frac{\lambda}{1-\lambda}$, kako bismo zadovoljili oba gornja uvjeta dovoljno je da vrijedi:

$$-\infty \leq \delta_m \leq \min \left\{ \frac{\zeta_m}{\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{q_k}}, r_{m+1} - r_m \right\}$$

iii) Za imovine S_j gdje je $j > m$, neka je $\zeta_m = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} - \sum\limits_{k=j+1}^{n} \dfrac{r_k - rj}{q_k}$ za $j > m$. Želimo odrediti interval za δ kako bi uvjeti Teorema (2.1.1) bili zadovoljeni. Dovoljni su sljedeći uvjeti:

$$\max\left\{\frac{-\zeta_j}{\sum\limits_{k=j}^{n}\frac{1}{q_k}}, -\zeta_m q_j, r_{j-1} - r_j\right\} \leq \delta_j \leq \min\left\{\zeta_{m+1} q_j, r_{j+1} - r_j\right\}, \qquad \text{ako je } j > m+1$$

$$\max\left\{\frac{-\zeta_j}{\sum\limits_{k=j}^{n}\frac{1}{q_k}}, -\zeta_m q_j, r_{j-1} - r_j\right\} \leq \delta_j \leq r_{j+1} - r_j, \qquad \text{ako je } j = m+1$$

Ukratko, gore navedena analiza ukazuje da ako je odstupanje δ_i srednje vrijednosti imovine r_i unutar gornjih intervala, tada će optimalni portfelj prema našem modelu ostati nepromijenjen. Dobiveni uvjeti su dovoljni uvjeti te u mnogim slučajevima oni možda nisu ispunjeni (ali portfelj se ipak može zadržati nepromijenjen ako nisu ispunjeni). Općenito govoreći, naš model pokazuje određenu otpornost na odstupanja u ulaznim podacima problema.

Primjer 2.2.4. *Naš model može biti prilično osjetljiv u nekim slučajevima na odstupanja parametara problema, kao što su srednje vrijednosti. Kako bismo to ilustrirali, promotrimo primjer u kojem postoje tri imovine s procijenjenim srednjim vrijednostima* $r_1 < r_2 < r_3$. *Pretpostavimo da vrijedi slijedeće:*

$$\frac{r_3 - r_2}{q_3} < \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad i \quad \frac{r_3 - r_1}{q_3} + \frac{r_2 - r_1}{q_2} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

Tada, po Teoremu (2.1.1) *biramo imovinu 2 i 3, vrijedi* $x_1^* = 0$, $x_2^* = \dfrac{q_3}{q_2 + q_3}$ *i* $x_3^* = \dfrac{q_2}{q_2 + q_3}$. *Nadalje, pretpostavimo da je* q_2 *značajno veći od* q_3. *Tada slijedi* $x_2^* \approx 0$ *i* $x_3^* \approx M_0$. *Međutim, uzmimo da postoji značajno odstupanje u* r_1 *i stvarna srednja vrijednost* r_1' *imovine 1 zadovoljava* $r_2 < r_1' < r_3$,

$$\frac{r_3 - r_1'}{q_3} < \frac{\lambda}{1-\lambda} \quad i \quad \frac{r_3 - r_2}{q_3} + \frac{r_1' - r_2}{q_1} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

U ovom slučaju, trebamo izabrati imovinu 1 i 3, tada će portfelj biti $x_2^{**} = 0$, $x_1^{**} = \dfrac{q_3}{q_1 + q_3}$ *i* $x_3^{**} = \dfrac{q_1}{q_1 + q_3}$. *Dodatno, ponovno pretpostavimo da je* q_3 *značajno veći od* q_1. *Tada* *slijedi* $x_3^{**} \approx 0$ *i* $x_1^{**} \approx M_0$. *Zaključimo, u ovom primjeru, odstupanje u procjeni* r_1 *gotovo je potpuno promijenila portfelj.*

Uključenje bezrizične imovine

Promatramo slučaj kada postoji bezrizična imovina. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da ta bezrizična imovina ima najniži povrat, tj. $i = 1$ (što je u skladu s našom pretpostavkom (2.15). Sve rizične imovine mogu se isključiti iz analize ako njihovi povrati nisu veći od povrata bezrizične imovine. Pod pretpostavkom navedenom gore, vrijedi $q_1 = 0$. Kako bismo generalizirali rezultat iz Teorema (2.1.1), prvo pretpostavimo da je $q_1 = \epsilon > 0$, gdje je ϵ dovoljno mali broj. Promotrimo sljedeća dva slučaja kada pustimo $\epsilon \to 0^+$:

1. Imovina S_1 nije odabrana za ulaganje
   Zbog $q_1 = \epsilon > 0$, prema Teoremu (2.1.1) vrijedi $1 \notin \mathcal{J}^*(\lambda)$. Dakle, optimalno rješenje za (2.1) je nepromijenjeno.

2. Imovina S_1 odabrana je za ulaganje
   Po Teoremu (2.1.1), uz pretpostavku $q_1 = \epsilon > 0$ vrijedi $1 \in \mathcal{J}^*(\lambda)$. U ovom slučaju, optimalno rješenje za (2.1) je:

$$
\begin{aligned}
x_i^* &= 0 && \text{za svaki } j \notin \mathcal{J}^*(\lambda) \\
x_i^* &= \frac{M_0}{q_i}\left(\frac{1}{\epsilon} + \sum_{j=n-k, j\neq 1}^{n} \frac{1}{q_j}\right)^{-1} && \text{za } j \in \mathcal{J}^*(\lambda) \\
y^* &= M_0\left(\frac{1}{\epsilon} + \sum_{j=n-k, j\neq 1}^{n} \frac{1}{q_j}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

   Kada $\epsilon \to 0^+$, vrijedi $y^* = 0$, $x_1^* = M_0$, $x_j^* = 0$ za svaki $j > 1$. Rezultat je u skladu s Teoremom (2.1.1).

Slučaj kada je bezrizična imovina S_1 odabrana u skupu za ulaganje $\mathcal{J}^*(\lambda)$ događa se samo kada je zadovoljen sljedeći uvjet

$$
\frac{r_n - r_1}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_1}{q_{n-1}} + \ldots + \frac{r_2 - r_1}{q_2} < \frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{2.21}
$$

Teorem 2.2.5. *Neka je* $\lambda \in (0, 1)$. *Ako uvjet* (2.21) *nije zadovoljen, tada je skup odabranih imovina za ulaganje* $\mathcal{J}^*(\lambda)$ *i optimalno rješenje definirano Teoremom* (2.1.1). *S druge strane, ako je uvjet* (2.21) *zadovoljen optimalna investicijska strategija treba biti ulaganje čitavog bogatstva* M_0 *u bezrizičnu imovinu, gdje je* $y^* = 0$.

2.3 Učinkovita granica

Izveli smo optimalna rješenja za parametarski optimizacijski problem (2.1). Kao što smo već prije spomenuli, taj problem uključuje parametar λ te optimalno rješenje generiramo s tim danim parametrom. Prisjetimo se, izvornu ciljnu funkciju našeg problema optimizacije portfelja definirali smo kao minimizaciju $\left(\max_{1\leq i\leq n} q_i x_i, -\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right)$, odnosno maksimizaciju očekivanog povrata portfelja i minimizaciju rizika l_∞ funkcije. Označimo y s $\max_{1\leq i\leq n} q_i x_i$, tada se problem svodi na maksimizaciju očekivanog povrata $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$ i minimizaciju y.
Za bolje razumijevanje učinkovite granice promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.3.1. *Učinkovita granica, poznata i kao granica portfelja, skup je optimalnih portfelja za koje se očekuje da će ostvariti najveći povrat za danu razinu rizika. Ova se granica formira crtanjem očekivanog povrata na osi ordinata i standardnog odstupanja kao mjere rizika na osi apscisa. Promotrimo pronalazak učinkovite granice za model srednje varijance (l_2 model) kojeg je uveo Markowitz (vidi [7]). Pretpostavimo da postoje dvije imovine A_1 i A_2 u određenom portfelju. Tablicom 2.1 su prikazane pojedinosti za njih.*

Pojedinosti	A_1	A_2
Očekivani povrat	10%	20%
Standardna devijacija	15%	30%
Koeficijent korelacije	-0.05	-0.05

Tablica 2.1: Pojedinosti za imovine A_1 i A_2

U sljedećoj tablici (2.2) *prikažimo portfeljne mogućnosti ulaganja u imovinu. Izračunajmo*

Portfelj	A_1 **težina (u %)**	A_2 **težina (u %)**
1	100	0
2	75	25
3	50	50
4	25	75
5	0	100

Tablica 2.2: Portfelji

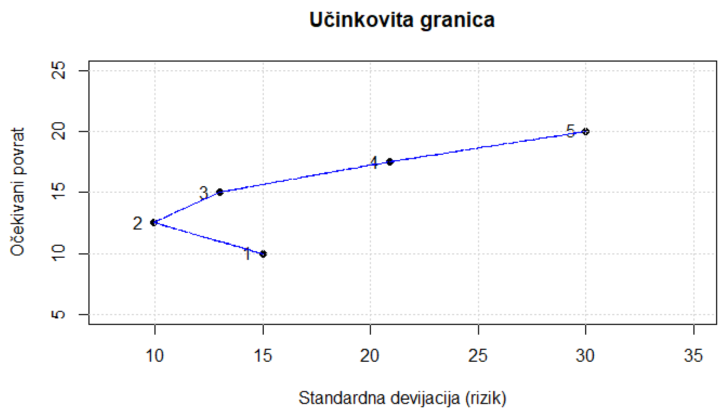
rizik i očekivani povrat portfelja prema sljedećim formulama. Dobiveni rezultati prikazani *su Tablicom* (2.3) *te promotrimo grafički prikaz učinkovite granice na Slici* (2.1).

$$E(R_{port}) = \sum_{i=1}^{2} w_i E(R_i)$$

$$\sigma_{port} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} w_i^2 \sigma_i + 2 \sum_{i<j} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_i}$$

Portfelj	**Rizik (u %)**	**Očekivani povrat (u %)**
1	15	10
2	9.92	12.5
3	12.99	15
4	20.88	17.5
5	30	20

Tablica 2.3: Dobiveni rezultati za portfelje



Slika 2.1: Učinkovita granica

Učinkovita granica predstavlja skup portfelja koji će imati najveći povrat pri svakoj razini rizika, ili alternativno, najmanji rizik pri svakoj razini povrata.

Sva imovina je rizična

Za početak definirajmo:

$$\alpha_k = \frac{1}{q_n} + \frac{1}{q_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{q_{n-k+1}} \qquad \text{za } k = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$\beta_k = \frac{r_n - r_{n-k}}{q_n} + \frac{r_{n-1} - r_{n-k}}{q_{n-1}} + \ldots + \frac{r_{n-k+1} - r_{n-k}}{q_{n-k+1}} \qquad \text{za } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Lako se pokaže da vrijedi:

$$\begin{cases} \beta_k = \beta_{k-1} + \alpha_k(r_{n-k+1} - r_{n-k}) & \text{za } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \beta_0 = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

gdje je α_k definirana sljedećom rekurzijom:

$$\begin{cases} \alpha_k = \alpha_{k-1} + \dfrac{1}{q_{n-k+1}} & \text{za } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \alpha_0 = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

Jasno je da se nejednakosti iz iskaza Teorema (2.1.1) svode na određivanje cijelog broja $k \in [0, n-2]$ tako da

$$\beta_1 < \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \ldots, \quad \beta_k < \frac{\lambda}{1-\lambda}, \tag{2.24}$$
$$\beta_{k+1} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{2.25}$$
$$\tag{2.26}$$

Kako je $q_j = E(|R_j - E(R_j)|) > 0$ za bilo koji j, tada je $\alpha_k > 0$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Primijetimo da iz $r_j \leq r_{j+1}$ za $j = 1, 2, \ldots, n-1$ slijedi $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \beta_{n-1}$. Stoga se uvjeti (2.24) svode na:

$$\beta_k < \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \ldots, \quad \beta_{k+1} \geq \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

ili ekvivalentno:

$$\frac{\beta_k}{1+\beta_k} < \lambda \leq \frac{\beta_{k+1}}{1+\beta_{k+1}}$$

Uvedimo oznake

$$\underline{\lambda}_k = \frac{\beta_k}{1+\beta_k} \qquad \text{i } \overline{\lambda}_k = \frac{\beta_{k+1}}{1+\beta_{k+1}}$$

tada su gornji uvjeti ekvivalentni s $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$.

Želimo odrediti učinkovitu granicu, odnosno sve efikasne točke koje odgovaraju svim mogućim vrijednostima $\lambda \in (0,1)$. Pomoću Teorema (2.1.1) za zadani cijeli broj $k \in [0, n-2]$, jasno je da za sve vrijednosti $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$, skup odabranih imovina za ulaganje $\mathcal{J}^*(\lambda)$ ostaje nepromijenjen, što znači da se optimalno rješenje (2.1) ne mijenja. Takvo rješenje odgovara efikasnoj točki (1.2). Pitanje je postoje li druge efikasne točke za $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$. To je ekvivalentno pitanju postoje li druga optimalna rješenja za (2.1) kada je $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$.

Osnovna ideja za analizu učinkovite granice sastoji se od:

1. Za sve $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$, rješenje dano Teoremom (2.1.1) je jedinstveno optimalno rješenje zadaće (2.1). Dakle, postoji samo jedna efikasna točka za (1.2).
2. Za $\lambda = \overline{\lambda}_k$, postoji više efikasnih točaka za (1.2), koje se mogu odrediti eksplicitno.

Iskažimo sljedeće dvije leme koje uspostavljaju ove tvrdnje. Radi jednostavnosti, u nastavku ćemo postaviti $\underline{\lambda}_{n-1} = 1$. Navedene leme dokazane su u [1].

Lema 2.3.2. *Za svaki $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ako je $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$, tada je rješenje dano Teoremom* (2.1.1) *jedinstveno optimalno rješenje za* (2.1).

Dokaz. Pretpostavimo da je $k = 0, 1, \ldots, n-2$ i $(\mathbf{x}^0, y^0)$, gdje je $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, optimalno rješenje za (2.1). Neka je $\mathcal{J}^0(\lambda)$ skup ulaganja takav da je $x_j^0 > 0$ ako $j \in \mathcal{J}^0(\lambda)$ i $x_j^0 = 0$ ako $j \in \mathcal{J}^0(\lambda)$. Prvo ćemo pokazati da ako vrijedi $\mathcal{J}^0(\lambda) \neq \mathcal{J}^{(}\lambda)$ (skup ulaganja $\mathcal{J}^{(}\lambda)$ određen je Teoremom (2.1.1)), možemo pronaći bolje rješenje od $(\mathbf{x}^0, y^0)$ što će dovesti do kontradikcije.

1. Ako vrijedi $\mathcal{J}^0(\lambda) \neq \mathcal{J}^*(\lambda)$ i postoji barem jedan h takav da je $h \in \mathcal{J}^*(\lambda)$ i $h \notin \mathcal{J}^0(\lambda)$, tada je $x_h^0 = 0$. U ovom slučaju, prilikom konstrukcije rješenja $(\mathbf{x}', y')$ za (2.1) po Teoremu (2.1.1) možemo pokazati da je:

$$F_\lambda(\mathbf{x}', y') = F_\lambda(\mathbf{x}^0, y^0) + \Delta_y(1-\lambda)\left\{\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} + \sum_{j>m} \frac{r_j - r_m}{q_j}\right) - \sum_{j\leq m} \frac{r_m - r_j}{q_j}\right\} \quad (2.27)$$

Zbog nejednakosti $\sum_{j>m} \frac{r_j - r_m}{q_j} < \frac{\lambda}{1-\lambda}$ ako je $m \in \mathcal{J}^*(\lambda)$ i $r_m \geq r_j$ za $j \leq m$, tada je $F_\lambda(\mathbf{x}^1, y^1) < F_\lambda(\mathbf{x}^0, y^0)$ što implicira da je dopustivo rješenje $(\mathbf{x}^1, y^1)$ bolje od rješenja $(\mathbf{x}^0, y^0)$. Dakle, dobili smo kontradikciju s tvrdnjom da je $(\mathbf{x}^0, y^0)$ optimalno rješenje. Mora vrijediti $\mathcal{J}^0(\lambda) \supseteq \mathcal{J}^*(\lambda)$. Promotrimo sljedeći slučaj u kojem ćemo eliminirati slučaj kada je $\mathcal{J}^0(\lambda) \supset \mathcal{J}^*(\lambda)$.

2. Ako vrijedi $\mathcal{J}^0(\lambda) \supset \mathcal{J}^*(\lambda)$, tada postoji m takav da je $x_m^0 > 0$, te vrijedi $m \in \mathcal{J}^0(\lambda)$ i $m \notin \mathcal{J}^*(\lambda)$. U ovom slučaju, možemo konstruirati rješenje $(\mathbf{x}'', y'')$ za (2.1) na sljedeći način:

$$x_j'' = \begin{cases} x_j^0 + \Delta_j & \text{ako } j \in \mathcal{J}^*(\lambda) \\ x_m^0 - \Delta_m & \text{ako } j = m, \\ x_j^0 & \text{inače} \end{cases}$$
$$y_j'' = y^0 + \Delta_y$$

gdje su $\Delta_y, \Delta_m, \Delta_j$ odabrani pozitivni brojevi takvi da

$$\Delta_j = \frac{\Delta_y}{q_j} \qquad j \in \mathcal{J}^*(\lambda)$$
$$\Delta_m = \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \Delta_y$$

Uočimo da zadnje dvije jednakosti zajedno s dopustivosti $(\mathbf{x}^0, y^0)$ osiguravaju da je $(\mathbf{x}^2, y^2)$ dopustivo rješenje. Analogno kao u prvom slučaju, vrijedi:

$$F_\lambda(\mathbf{x}^0 + \Delta_\mathbf{x}, y^0 + \Delta_y) = F_\lambda(\mathbf{x}^0, y^0) - \Delta_y(1-\lambda)\left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} + \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j - r_m}{q_j}\right)$$

Zbog $\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j - r_m}{q_j} > \frac{\lambda}{1-\lambda}$ i tvrdnje da je $\lambda \in (\underline{\lambda}_m, \overline{\lambda}_m)$ slijedi $F_\lambda(\mathbf{x}^2, y^2) < F_\lambda(\mathbf{x}^0, y^0)$. Dakle, dobili smo ponovno kontradikciju.

Kombinacijom prvog dva slučaja slijedi $\mathcal{J}^0(\lambda) = \mathcal{J}^*(\lambda)$. Naime, bilo koje optimalno rješenje $(\mathbf{x}^0, y^0)$ mora imati isti skup imovine za ulaganje kao i rješenje $(\mathbf{x}^*, y^*)$. Kada fiksiramo skup $\mathcal{J}^0(\lambda)$, sva imovina S_j, $j \in \mathcal{J}^0(\lambda)$, treba biti investirana s jednakim rizikom, dakle treba vrijediti $q_j x_j^0 = y_j^0$. Ako to ne vrijedi, postoji imovina S_m u skupu $\mathcal{J}^0(\lambda)$ takva da $\delta = y_m^0 - x_m^0 q_m > 0$, te tada povećavamo raspodjelu na imovinu S_m za pozitivan broj Δ_m kako bismo konstruirali novo rješenje $(\mathbf{x}', y')$ na sljedeći način:

$$x'_j = \begin{cases} x_j^0 - \Delta_j & \text{ako } j \in \mathcal{J}^0(\lambda), j \neq m \\ x_j^0 + \Delta_m & \text{ako } j = m, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$
$$y'_j = y^0 + \Delta_y$$

gdje je

$$\Delta_j = \frac{\Delta_y}{q_j} \qquad \forall j \in \mathcal{J}^0(\lambda) - \{m\}$$
$$\Delta_m = \sum_{j \in \mathcal{J}^0(\lambda) - \{m\}} \Delta_j$$
$$\Delta_y = \frac{\delta}{q_m} \left(\sum_{j \in \mathcal{J}^0(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1}.$$

Uočimo da je rješenje $(\mathbf{x}', y')$ dopustivo. Analogno, kao u prvom slučaju, možemo pokazati da vrijedi $F_\lambda(\mathbf{x}', y') < F_\lambda(\mathbf{x}^0, y^0)$. Očito, ako vrijedi $\mathcal{J}^0(\lambda) = \mathcal{J}^*(\lambda)$, tada vrijedi $q_j^0 x_j^0 = y^0$ za svaki $j \in \mathcal{J}^0(\lambda)$ te je rješenje $(\mathbf{x}^0, y^0)$ jednako rješenju $(\mathbf{x}^*, y^*)$. Ovim smo dokazali i jedinstvenost rješenja.
Preostaje nam slučaj za $k = n-1$. Prema Teoremu (2.1.1) skup $\mathcal{J}^*(\lambda)$ jednak je $n, n-1, \ldots, 2, 1$ kada je $\lambda \in (\underline{\lambda} n - 1, 1)$. Drugi slučaj tada je nemoguć, dok za prvi slučaj dokaz ostaje isti. Dakle, rješenje dano Teoremom (2.1.1) je jedinstveno optimalno za (2.1) ako je $\lambda \in (\underline{\lambda} k, \overline{\lambda}_k)$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Koristeći dobivene izraze za rješenje u ciljnoj funkciji (1.2), može se primijetiti da, odgovarajućem rješenju (x^*, y^*) za $\lambda \in (\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k]$, odgovara efikasna točka zadaće $P_k^* = (y^*, z^*)$, gdje je

$$z^* = -M_0 \left(\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_i}{q_i} \right) + \left(\sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{1}{q_j} \right)^{-1} \tag{2.28}$$

Lema 2.3.3. *Za svaki $k = 0, 1, \ldots, n-2$, ako je $\lambda = \overline{\lambda}_k$, tada je $(y^* - \Delta_y, z^* + \Delta_y \frac{\overline{\lambda}_k}{1 - \overline{\lambda}_k})$ gdje je*

$$0 \leq \Delta_y \leq \frac{y^*}{1 + \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{q_{n-k-1}}{q_j}} \tag{2.29}$$

efikasna točka zadaće (1.2).

Dokaz. Prvi slučaj u dokazu Leme (2.3.2) nije moguć ako vrijedi i $\lambda = \overline{\lambda}_k$, budući da je $0 < \lambda < 1$ i iz jednakosti (2.27) slijedi $F_\lambda(\mathbf{x}^1, y^1) < F_\lambda(\mathbf{x}^0, y^0)$. S druge strane, drugi slučaj je moguć kada imamo imovinu S_l, gdje je $l \in \mathcal{J}^*(\lambda)$ koja je odabrana u optimalnom rješenju. 0čito, $(\mathbf{x}^*, y^*)$ je optimalno rješenje za (2.1) kada je $\lambda = \overline{\lambda}_k$. Konstruiramo novo rješenje $(\mathbf{x}^0, y^0)$ povećanjem vrijednosti x_l za Δ_l, gdje je $l = n - k - 1$, smanjivanjem vrijednosti svih x_j za vrijednost Δ_j, gdje je $j \in \mathcal{J}^*(\lambda)$ i y za Δ_y tako da vrijedi

$$\begin{aligned} q_j\left(x_j^* - \Delta_j\right) &= y^* - \Delta_y, \quad \text{za } j \in \mathcal{J}^*(\lambda) \\ q_l \Delta_l &\leq y^* - \Delta_y \\ \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \left(x_j^* - \Delta_j\right) + \Delta_l &= M_0 \end{aligned}$$

gdje su Δ_l, Δ_j i Δ_y pozitivni brojevi koji zadovoljavaju sljedeće:

$$\Delta_j = \frac{\Delta_y}{q_j}, \quad \text{za } j \in \mathcal{J}^*(\lambda), \tag{2.30}$$

$$\Delta_y \leq y^* - q_l \Delta_l, \tag{2.31}$$

$$\Delta_l = \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \Delta_j. \tag{2.32}$$

Analogno dokazu prethodne leme i jednakosti (2.27), možemo pokazati da vrijedi

$$F_\lambda\left(\mathbf{x}^0 + \Delta_{\mathbf{x}}, y^0 + \Delta_y\right) = F_\lambda\left(\mathbf{x}^0, y^0\right) + \Delta_y(1 - \lambda)\left(-\frac{\lambda}{1 - \lambda} + \sum_{j \in \mathcal{J}^*(\lambda)} \frac{r_j - r_l}{q_j}\right).$$

Zbog jednakosti $\sum_{j \in \mathcal{J}^(\lambda)} \frac{r_j - r_l}{q_j} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}$ te kada vrijedi $\lambda = \overline{\lambda}_k$, slijedi da je $F_\lambda(\mathbf{x}^0 + \Delta_{\mathbf{x}}, y^0 + \Delta_y) = F_\lambda(\mathbf{x}^0, y^0)$. Drugim riječima, sve točke $\left(y^* - \Delta_y, z^* + \frac{\overline{\lambda}_k}{1 - \overline{\lambda}_k}\Delta_y\right)$ su efikasne točke za bikriterijski problem (1.2) ako zadovoljavaju uvjete (2.30)-(2.32). Također, uočimo da je $\left(y^* - \Delta_y, z^* + \dfrac{\overline{\lambda}_k}{1-\overline{\lambda}_k}\Delta_y\right)$ vrijednost funkcije cilja za rješenje $(\mathbf{x}^0, y^0)$, gdje su

$$
\begin{aligned}
y^0 &= y^* - \Delta_y \qquad\qquad \text{i} \\
z^0 &= -\sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} r_j\left(x_j^* - \Delta_j\right) - r_l\Delta_l \\
&= z^* + \sum_{j\in\mathcal{J}^*(\lambda)} r_j\Delta_j - \sum_{j\in\mathcal{T}^*(\lambda)} r_l\Delta_j \\
&= z^* + \sum_{j\in\mathcal{T}^*(\lambda)} \left(r_j - r_l\right)\frac{\Delta_y}{q_j} \\
&= z^* + \beta_{k+1}\Delta_y \\
&= z^* + \frac{\overline{\lambda}_k}{1-\overline{\lambda}_k}\Delta_y.
\end{aligned}
$$

Primijetimo da Δ_y, koji zadovoljava interval u iskazu Leme (2.3.3), također zadovoljava i uvjete (2.30)-(2.32). □

Napomena 2.3.4. *Iz prethodne Leme vrijedi da su sva rješenja koja biraju imovinu iz skupa imovine za ulaganje $\mathcal{J}^*(\lambda)$ zajedno s imovinom $l = n - k - 1$ optimalna za zadaću parametarske optimizacije* (2.1). *Uključivanjem imovine koja nije u skupu $\mathcal{J}^*(\lambda)$ smanjuje se ukupan povrat, ali istovremeno i rizik. Prema Lema* (2.3.2) *ako je $\lambda \neq \overline{\lambda}_k$ za $0 \leq k < n-2$ ili vrijedi $\lambda \in (\overline{\lambda}_{n-2}, 1)$, takvo rješenje će biti zanemarivo zbog rješenja dobivenog Teoremom* (2.1.1). *Međutim, ako je $\lambda \neq \overline{\lambda}_k$ za $0 \leq k \leq n-2$, smanjenje rizika (s težinom jednakom $\overline{\lambda}_k$) je uravnoteženo smanjenjem ukupnog povrata (s težinom $1 - \overline{\lambda}_k$) i daje efikasnu točku.*

Teorem 2.3.5. *Učinkovita granica problema* (1.2) *može se odrediti uzimajući u obzir n intervala $(\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ i $n-1$ krajnjih točaka $\overline{\lambda}_k$ za $k = 0, 1, \ldots, n-2$. Točnije, učinkovita granica sastoji se od:*

1. *efikasne točke (y^*, z^*) koje odgovara svakom intervalu $(\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k)$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gdje su y^* i z^* dani Teoremom* (2.1.1) *i* (2.28),
2. *višestrukih efikasnih točaka $(y^* - \Delta_y, z^* + \Delta_y\dfrac{\overline{\lambda}_k}{1-\overline{\lambda}_k})$ koje odgovaraju svakom $\overline{\lambda}_k$, gdje $k = 0, 1, \ldots, n-2$ i Δ_y dan Lemom* (2.3.3).

Uključenje bezrizične imovine

Bez smanjenja općenitosti, ponovno pretpostavimo da postoji samo jedna bezrizična imovina S_{i_0}, dakle $q_i > 0$ za $i \neq i_0$ te $q_{i_0} = 0$. Po teoremu (2.2.5), optimalno rješenje za (2.1) je uložiti svo bogatstvo M_0 u bezrizičnu imovinu ako je uvjet (2.21) zadovoljen, tj. $\beta_{n-i_0} < \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$. Uvjet je ekvivalentan s $\lambda \in (\underline{\lambda}_{n-i_0}, 1)$. U ovom slučaju lako se pokaže da će svako drugo rješenje takvo da je $x_k > 0$ (a time i $x_{i_0} < M_0$) gdje je $k < i_0$, biti lošije od rješenja $x_k = 0$, $x^*_{i_0} = M_0$ (jer vrijedi $r_k \leq r_{i_0}$ i $q_k > q_{i_0} = 0$). Drugim riječima, svaka preraspodjela bogatstva M_0 iz bezrizične imovine S_{i_0} na imovinu S_k povećat će vrijednost funkcije cilja zadaće (2.1). Dakle, optimalno rješenje za (2.1) je jedinstveno kada $\lambda \in (\lambda_{n-i_0}, 1)$. Kada $\lambda \notin (\lambda_{n-i_0}, 1)$, bezrizična imovina S_{i_0} nije odabrana za ulaganje po Teoremu (2.1.1), slijedimo analizu rizične.

Teorem 2.3.6. *Učinkovita granica problema* (1.2) *može se odrediti uzimajući u obzir $n - i_0 + 1$ intervala $(\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n - i_0 - 1$ i $(\lambda_{n-i_0}, 1)$, kao i $n - i_0$ krajnjih točaka λ_k za $k = 0, 1, \ldots, n - i_0 - 1$. Točnije, učinkovita granica sastoji se od:*

1. *efikasne točke (y^*, z^*) koje odgovara svakom intervalu $(\underline{\lambda}_k, \overline{\lambda}_k)$ za $k = 0, 1, \ldots, n-i_0-1$ ili intervalu $(\underline{\lambda}_k, 1)$ za $k = n - i_0$, gdje su y^* i z^* dani Teoremom* (2.1.1) *i* (2.28)*,*

2. *višestrukih efikasnih točaka $(y^* - \Delta_y, z^* + \Delta_y \dfrac{\overline{\lambda}_k}{1 - \overline{\lambda}_k})$ koje odgovaraju svakom $\overline{\lambda}_k$, gdje je $k = 0, 1, \ldots, n - i_0 - 1$ i Δ_y dan Lemom* (2.3.3).

Poglavlje 3

Primjena

3.1 Ukupni rizik portfelja i kovarijanca

Ukupni rizik portfelja sadržan je u našem modelu, ali na implicitan način. Pokazat ćemo da je ukupni rizik portfelja odozgo ograničen kriterijem rizika $H_\infty(x)$. Poznato je da se ukupni rizik portfelja modelira kao nekakva vrsta odstupanja stvarnog ukupnog povrata od očekivanog ukupnog povrata. Promotrimo ukupni rizik portfelja u Markowitzovom modelu, koji je definiran kao varijanca na način:

$$H_2(\mathbf{x}) = E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right]^2 \tag{3.1}$$

Dakle, očekivano kvadratno odstupanje stvarnog ukupnog povrata $\sum\limits_{j=1}^{n} R_j x_j$ od očekivanog ukupnog povrata $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j x_j$.

Promotrimo vjerojatnost da je ovo odstupanje veće od unaprijed određene razine za neki pozitivan broj ξ , tj.

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right| \geq \xi\right)$$

Što je ova vjerojatnost manja to je odstupanje stvarnog ukupnog povrata od očekivanog ukupnog povrata manje. Korištenjem Markovljeve nejednakosti možemo pisati:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right| \geq \xi\right) &\leq \frac{1}{\xi}E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - \sum_{j=1}^{n} r_j x_j\right|\right] \\ &\leq \frac{1}{\xi}\sum_{j=1}^{n} E\left|R_j - r_j\right| x_j \\ &\leq \frac{n}{\xi}H_\infty(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Navedena nejednakost pokazuje nam da je ukupni rizik portfelja ograničen umnoškom $H_\infty(\mathbf{x})$ i konstantom $\frac{n}{\xi}$, pri čemu konstanta ne ovisi o izboru portfelja. Kako bismo smanjili ukupni rizik portfelja potrebno je održavati nižu vrijednost $H_\infty(\mathbf{x})$. Obrat ne vrijedi nužno. Dakle, ukupni rizik portfelja ovisi o riziku $H_\infty(\mathbf{x})$. Važno je napomenuti da su kovarijacije između imovina uključene u ukupni rizik portfelja.

Kako bismo promotrili promjene sastava portfelja u l_∞ modelu i modelu srednje varijance te ih usporedili, analizirat ćemo jedan primjer u kojem imovina koja se ulaže ima različit stupanj korelacije. Uzmimo jednostavan primjer koji sadrži dvije imovine.

Neka je $\sigma_1^2 = E[(R_1 - r_1)^2]$, $\sigma_2^2 = E[(R_2 - r_2)^2]$ i $Cov(R_1, R_2) = E[(R_1 - r_1)(R_2 - r_2)]$. Nadalje, neka je koeficijent korelacije između dvije imovine $\rho = \dfrac{Cov(R_1, R_2)}{\sigma_1\sigma_2}$.
Model srednje varijance formuliran je na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &min\,(H_2(\mathbf{x}), -(r_1x_1 + r_2x_2)) \\ &\text{uz } \; x_1 + x_2 = M_0 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdje je $H_2(\mathbf{x})$ varijanca ukupnog portfelja prethodno definirana. U ovom našem primjeru s dvije imovine, lako se pokaže da je $H_2(\mathbf{x}) = \sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_1x_1x_2$. Uvedimo parametar $\tau \in (0, 1)$ i transformirajmo problem u problem parametarske optimizacije na način:

$$\begin{aligned} &min\;\; \tau\left(\sigma_1^2x_1^2 + \sigma_2^2x_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2x_1x_2\right) - (1-\tau)\,(r_1x_1 + r_2x_2) \\ &\text{uz } \; x_1 + x_2 = M_0 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Optimalno rješenje navedenog problema je $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, što predstavlja i učinkovitu točku za višekriterijski problem. Primjenom Karush-Kuhn-Tuckerovih uvjeta te nakon pojednostavljivanja dobivamo sljedeće rezultate za:

$$A_1 = (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)M_0 + \frac{1-\tau}{2\tau}(r_1 - r_2)$$
$$A_2 = (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)M_0 + \frac{1-\tau}{2\tau}(r_2 - r_1)$$

1. Ako vrijedi $A_1, A_2 > 0$, tada

$$\hat{x}_1 = \frac{A_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$
$$\hat{x}_2 = \frac{A_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \tag{3.5}$$

2. Ako vrijedi $A_1 \leq 0$, tada $\hat{x}_1 = 0$ i $\hat{x}_2 = M_0$.

3. Ako vrijedi $A_2 \leq 0$, tada $\hat{x}_1 = M_0$ i $\hat{x}_2 = 0$.

Sada, promotrimo sljedeća dva slučaja ovisna o korelaciji između ove dvije imovine. Prvo, pretpostavimo da dane imovine nisu u korelaciji tj. vrijedi $\rho = 0$. Iz (3.1) slijedi

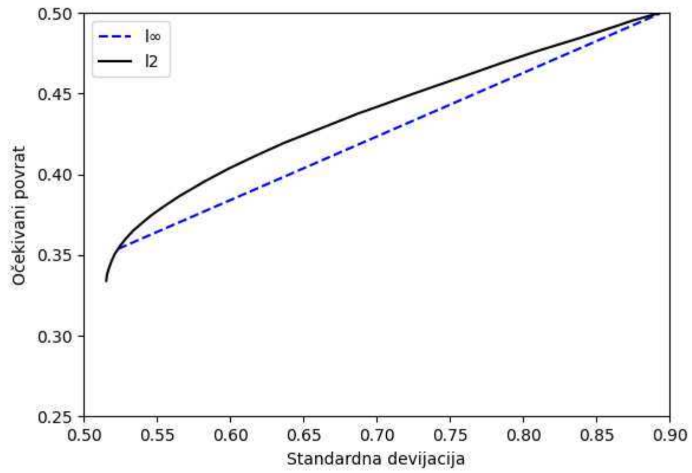
$$\hat{x}_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}M_0 + \left(\frac{1-\tau}{2\tau}\right)\left(\frac{r_2 - r_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$
$$\hat{x}_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}M_0 + \left(\frac{1-\tau}{2\tau}\right)\left(\frac{r_2 - r_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \tag{3.6}$$

S druge strane, prema teoremu (2.1.1) znamo da je

$$x_1^* = \frac{q_2}{q_1 + q_2}M_0$$
$$x_2^* = \frac{q_1}{q_1 + q_2}M_0 \tag{3.7}$$

Primijetimo, uloga q_i slična je σ_i^2. Uspoređujući zadnje četiri jednakosti, vidimo da rješenje $\hat{x}_i$ modela srednje varijance ima dodatni član. Konkretno, za x_1 član $\left(\frac{1-\tau}{2\tau}\right)\left(\frac{r_2 - r_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$, te za x_2 $\left(\frac{1-\tau}{2\tau}\right)\left(\frac{r_2 - r_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$. Ovi članovi koriste informacije o povratima r_1 i r_2 kako bi precizno prilagodili portfelj $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Taj učinak kompenzacije smanjuje se smanjivanjem

razlike između r_1 i r_2.
Promotrimo grafičke rezultate učinkovitih granica modela srednje varijance i l_∞. Prikazana su dva slučaja, kada je razlika između r_1 i r_2 velika (3.2) te kada je mala (3.2). Uočimo da je učinkovita granica modela l_∞ uvijek ispod granice l_2 modela. Učinkovita granica l_∞ približava se granici l_2 kako se razlika između r_1 i r_2 smanjuje.

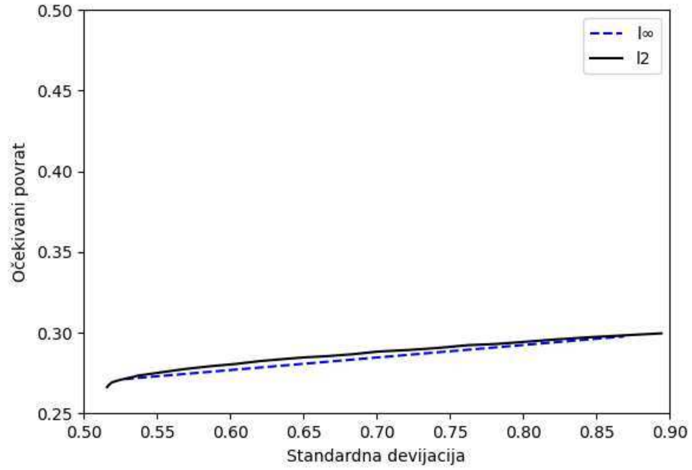


Slika 3.1: Učinkovita granica za vrijednosti $r_1 = 0.5$, $r_2 = 0.25$

S druge strane, promotrimo slučaj kada je $\sigma_1^1 \approx \sigma_2^2 \approx \sigma^2$ tj. kada su varijance dviju imovina približno jednake. Iz jednakosti (3.1) slijedi:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &\approx \frac{\sigma^2(1-\rho)M_0}{2\sigma^2(1-\rho)} + \frac{1-\tau}{2\tau}\frac{r_1 - r_2}{2\sigma^2(1-\rho)} = \frac{1}{2}M_0 + \left(\frac{1-\tau}{4\tau\sigma^2}\right)\frac{r_1-r_2}{1-\rho} \\ \hat{x}_2 &\approx \frac{\sigma^2(1-\rho)M_0}{2\sigma^2(1-\rho)} + \frac{1-\tau}{2\tau}\frac{r_2 - r_1}{2\sigma^2(1-\rho)} = \frac{1}{2}M_0 + \left(\frac{1-\tau}{4\tau\sigma^2}\right)\frac{r_2-r_1}{1-\rho} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dakle, ako je $\rho \approx 1$, ove dvije imovine su jako korelirane te portfelj $\hat{x}$ u l_2 modelu može biti jako osjetljiv na parametre. Također, moguće je da manje razlike u nekim parametrima uzorkuju da portfelj $\hat{x}$ raspoloži svo bogatstvo M_0 na samo jednu imovinu (npr. sve na prvu imovinu, a ništa na drugu). Raspodjela u modelu l_∞ ostaje kao (3.7), točnije ako je $q_1 \approx q_2$ onda $x_1^* \approx x_2^* \approx \dfrac{1}{2}M_0$.



Slika 3.2: Učinkovita granica za vrijednosti $r_1 = 0.3$, $r_2 = 0.25$

Napomena 3.1.1. *Iskažimo neke zaključke na temelju gornje analize.*

1. *Kada imovina ima nisku ili nema korelaciju, l_2 model prilagođava raspodjelu imovina na temelju informacija o stopama povrata. Također, može ostvariti veći povrat u odnosu na model l_∞.*

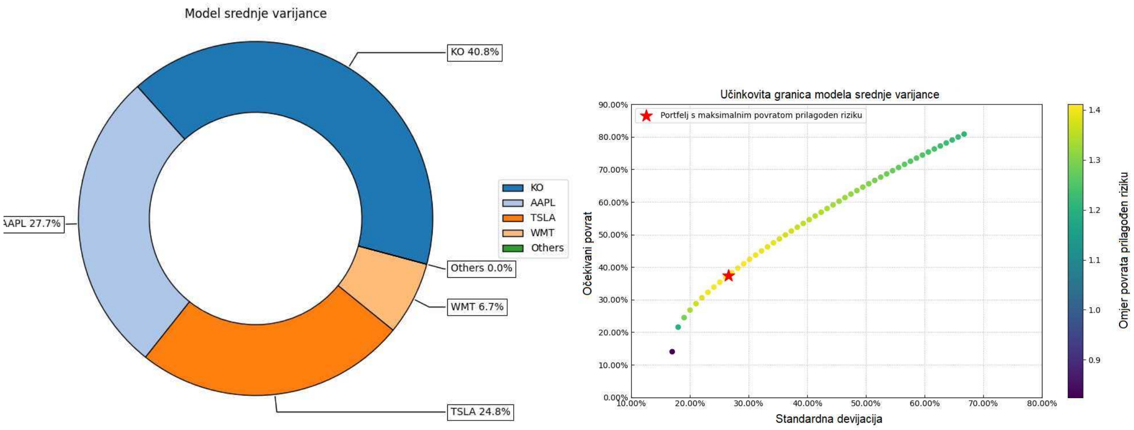
2. *Kada je imovina visoko korelirana, a varijance približno jednake, generiranje portfelja prema l_2 modelu može biti vrlo osjetljivo na parametre. Mala greška u procjeni parametara može rezultirati potpuno različitim portfeljem. S druge strane, u l_∞ modelu se održava diverzifikacija u portfelju što pomaže u izbjegavanju rizika prilikom generiranja pogrešnog portfelja uslijed malih razlika u parametrima.*

3. *Kada za 2. vrijedi $\tau = 1$, za l_2 model to odgovara portfelju s minimalnom varijancom. Tada se* (3.8) *reduciraju na $\hat{x}_1 \approx \hat{x}_2 \approx \frac{1}{2}M_0$, što rezultira gotovo identičnim portfeljem između modela l_2 i l_∞.*

3.2 Usporedba l_2 i l_∞ modela

Kako bismo usporedili modele srednje varijance l_2 i l_∞ modela, uzmimo podatke za dionice u razdoblju od 01.01.2020 do 01.01.2023. na dnevnoj bazi. Promatramo dionice Google, Apple, Coca-Cola, Tesla, Amazon te Walmart. U obzir su uzeti samo dani trgovanja tj. oni dani na koje su burze otvorene, a pretpostavka je da takvih dana u godini ima 252.

Prilikom korištenja modela srednje varijance l_2 dobivena struktura portfelja te učinkovita granica prikazane su Slikom (3.2).

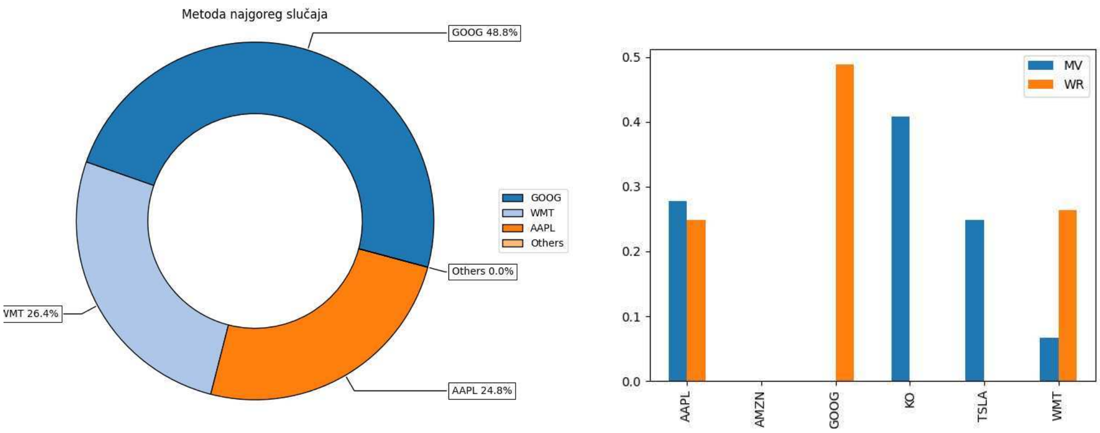


Slika 3.3: Struktura portfelja (lijevo) i učinkovita granica (desno)

Optimizacija portfelja modelom l_∞ rezultirala je drukčijom strukturom portfelja. Vidimo da su isključene dionice Coca-Cole i Tesle, dok je primjerice dionica Google-a uključena. Slikom (3.2) prikazana je dobivena struktura portfelja.

Usporedba raspodjele imovine prikazana je Slikom (3.2) te pripadnom Tablicom (3.1). Uočimo da prilikom korištenja l_2 modela u strukturi portfelja sudjeluju dionice Apple, Coca-Cola, Tesla i Walmart, dok korištenjem l_∞ modela sudjeluju samo dionice Apple, Google te Walmart.

Odnosno, ukoliko investitor ulaže početno bogatstvo u pripadni portfelj kojeg čine dionice navedenih tvrtki ulaganje 27.7154% u dionice Apple-a, 40.7837% u dionice Coca-Cole, 24.8061% u dionice Tesle te 6.6948% u dionice Walmart-a najmanje rizično prema l_2 modelu. S druge strane, prema modelu l_∞ ukoliko investitor želi minimizirati maksimalni rizik pojedinačnih imovina, najbolja optimalna strategija zahtijevala bi ulaganje 24.8241% u dionice Apple-a, 48.8180% u dionice Google-a te 26.3579% u dionice Walmart-a. Metoda najgoreg slučaja može pružiti različite rezultate od Markowitzove metode, s nagla-



Slika 3.4: Struktura portfelja dobivena modelom l_∞(lijevo) i usporedba modela (desno)

Dionice	**udjeli l_2 modela**	**udjeli l_∞ modela**
Apple	27.7154%	24.8241%
Amazon	0%	0%
Google	0%	48.8180%
Coca-Cola	40.7837%	0%
Tesla	24.8061%	0%
Walmart	6.6948%	26.3579%

Tablica 3.1: Usporedba raspodjele imovine

skom na zaštitu od ekstremnih rizika. Ova može biti korisna za investitore koji žele minimizirati rizik svojih portfelja, posebno u uvjetima visoke nestabilnosti na tržištu.

Na temelju mnogih provedenih istraživanja i usporedbi modela l_2 i l_∞ (vidi [5], [10]) možemo zaključiti da je l_∞ mjera rizika konzervativna. U članku s numeričkim primjenama [5] promatrani su modeli srednje varijance ([7]), model l_∞ ([1], kojeg smo analizirali u ovom radu), model kojeg su uveli Konno i Yamazaki (vidi [8], koristili su prosječnu apsolutnu devijaciju kao svoju mjeru rizika) te model kojeg je uveo Yang (vidi ([10], koristio je alternativnu l_∞ mjeru rizika), pokazano je da je rastuća stopa rizika za Caiov model najveća. U većini slučajeva, Markowitz model ima najveće vrijednosti korisnosti, a Yangov i Caiov model najniže. Polak [11] u svom članku uvodi strategije upravljanja rizikom putem minimax optimizacije portfelja. Usporedio je metodu najgoreg slučaja s Markowitzovom metodom srednje varijance, koja je široko prihvaćena u teoriji portfelja. Naglašava važnost metode najgoreg slučaja u upravljanju rizikom te smatra da ta metoda omogućuje inves-

titorima da se usredotoče na zaštitu od ekstremnih rizika i nepoželjnih scenarija, umjesto da se oslanjaju samo na statističke mjerne vrijednosti kao što su srednja vrijednost i varijanca. Polak također ističe da je metoda najgoreg slučaja fleksibilna i da se može prilagoditi različitim zahtjevima investitora u pogledu razine rizika i očekivanog povrata. Osim toga, važno je imati na umu ograničenja i pretpostavke koje se koriste prilikom primjene metode najgoreg slučaja. Potrebno je pažljivo procijeniti pouzdanost i dostupnost podataka te provesti temeljitu analizu očekivanih povrata i rizika kako bi se postigli optimalni rezultati. Sveukupno, metoda najgoreg slučaja pruža značajne prednosti u upravljanju rizikom i optimizaciji portfelja, te je važno razmotriti njenu primjenu u financijskom svijetu kako bi se postigla bolja ravnoteža između rizika i povrata.
Nedostatak mjere rizika l_∞, odnosno metode najgoreg slučaja, je da se fokusira samo na najgori mogući scenarij i ekstremne rizike, zanemarujući ostale varijable portfelja i statističke informacije. Ova metoda ne uzima u obzir vjerojatnosti ili raspodjelu povrata imovine, već se usredotočuje samo na maksimalni mogući gubitak. To znači da metoda najgoreg slučaja ne pruža kompletnu sliku rizika portfelja, jer ne razmatra vjerojatnosti povrata i mogućnosti manjih gubitaka. Osim toga, može rezultirati prekonzervativnim pristupom, jer se sve težine portfelja prilagođavaju najgorem mogućem scenariju, čime se može ograničiti potencijalni povrat portfelja. Također, ne uzima u obzir korelaciju između različitih imovina u portfelju već pretpostavlja da se svi gubitci događaju istovremeno. Stoga, iako metoda najgoreg slučaja ima svoje prednosti u zaštiti od ekstremnih rizika, važno je uzeti u obzir ove nedostatke i razmotriti ih u kontekstu ukupne strategije upravljanja rizikom i optimizacije portfelja. Druge metode, poput Markowitzove teorije portfelja koja uzima u obzir i očekivane povrate i kovarijacije imovine, mogu pružiti dodatne informacije i bolje uravnotežiti rizik i povrat u portfelju.

3.3 Dodatak: Implementacija u Python-u

Rezultate dobivene ovim kodom izložili smo u prethodnom poglavlju. Za implementaciju koristimo programski jezik Python.

```python
import pandas as pd
import yfinance as yf
import riskfolio as rp
import matplotlib.pyplot as plt

def izracun_i_prikaz_tezina(model, mjera_rizika, funkcija_cilja, naziv, hist=True):
    tezine = portfelj.optimization(model=model, rm=mjera_rizika,
                                   obj=funkcija_cilja, l=0, hist=hist)
    ax = rp.plot_pie(w=tezine, title=naziv)
    plt.show()
    print(tezine)

    return tezine

def izracun_i_prikaz_tezina(model, mjera_rizika, funkcija_cilja, naziv, hist=True):
    tezine = portfelj.optimization(model=model, rm=mjera_rizika,
                                   obj=funkcija_cilja, l=0, hist=hist)
    ax = rp.plot_pie(w=tezine, title=naziv)
    plt.show()
    print(tezine)

    return tezine

if __name__ == '__main__':
    pocetni_datum = '2020-03-30'
    krajnji_datum = '2023-03-30'
    pd.options.display.float_format = '{:.4%}'.format

    dionice = ['GOOG', 'AAPL', 'KO', 'TSLA', 'AMZN', 'WMT']
    dionice.sort()
    podaci = yf.download(dionice, start=pocetni_datum, end=krajnji_datum)
    podaci = podaci.loc[:, ('Adj Close', slice(None))]
    podaci.columns = dionice
    portfelj = rp.Portfolio(returns=podaci[dionice].pct_change().dropna())

    metoda_za_ocekivane_povrate = 'hist'
    metoda_za_matricu_kovarijance = 'hist'

```

```
    portfelj.assets_stats(method_mu=metoda_za_ocekivane_povrate,
        method_cov=metoda_za_matricu_kovarijance)

    model = 'Classic'
    mjera_rizika_1 = 'MV'
    funkcija_cilja_1 = 'Sharpe'
    naziv_1 = 'Model srednje varijance'
    tezine_1 = izracun_i_prikaz_tezina(model=model, mjera_rizika=
                                       mjera_rizika_1, funkcija_cilja=
                                       funkcija_cilja_1, naziv=naziv_1)

    broj_tocaka = 50
    ucinkovita_granica=portfelj.efficient_frontier(model=model,
        rm=mjera_rizika_1, points=broj_tocaka)

    naslov = 'Portfelj s maksimalnim povratom prilagoden riziku'
    ocekivani_povrati = portfelj.mu
    matrica_kovarijance = portfelj.cov
    povrati = portfelj.returns
    ax = rp.plot_frontier(w_frontier=ucinkovita_granica, mu=
                                       ocekivani_povrati, cov=
                                       matrica_kovarijance, returns=
                                       povrati, rm=mjera_rizika_1, w=
                                       tezine_1, label=naslov)

  plt.show()

mjera_rizika_2 = 'WR'
funkcija_cilja_2 = 'MinRisk'
naziv_2 = 'Metoda najgoreg slucaja'
tezine_2 = izracun_i_prikaz_tezina(model=model, mjera_rizika=
                                   mjera_rizika_2, funkcija_cilja=
                                   funkcija_cilja_2,naziv=naziv_2, hist
                                   =False)

# usporedba
tablica = pd.DataFrame()
tablica = pd.concat([tezine_1, tezine_2], axis=1)
tablica.columns = [mjera_rizika_1, mjera_rizika_2]
tablica.plot.bar()
plt.show()
```

Bibliografija

[1] Xiaoqiang Cai, Kok-Lay Teo, Xiaoqi Yang, Xun Yu Zhou, *Portfolio Optimization Under a Minimax Rule*, Management Science 46 (2000) 957–972.

[2] Vijay K. Chopra and William T. Ziemba, *The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choices*, Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making, Leonard C. MacLean (ed.), 365–373, 2013.

[3] A. Gaivoronski, G. Pflug, *Properties and Computation of Value at Risk Efficient Portfolios Based on Historical Data*, Department of Industrial Economics and Technology Management, NTNU, preprint, 2001.

[4] Robert A. Haugen, *Modern Investment Theory*, Prentice Hall International, 2001.

[5] Mei Yu, Hiroshi Inoue, Jianming Shi, *Portfolio optimization problems with linear programming models*, (2006)

[6] Wong, Chi Ying *Portfolio Optimization under Minimax Risk Measure with Investment Bounds*, (2007)

[7] Markowitz, H.M. *Portfolio selection*, (1952)

[8] Konno, H. *Piecewise linear risk function and portfolio optimization*, (1990)

[9] Young, M.R. *A minimax portfolio selection rule with linear programming solution*, (1998)

[10] Teo, K.L. and Yang, X.Q. *A minimax portfolio selection rule with linear programming solution*, (2001)

[11] Polak, George G. and Rogers, David F. *A minimax portfolio selection rule with linear programming solution*, European Journal of Operational Research 207 (2001) 409-419

Sažetak

Cilj ovog rada bio je prikazati metodu najgoreg slučaja u teoriji portfelja. Uveli smo teorijsku podlogu potrebnu za razumijevanje zadaće optimizacije portfelja te promatrali optimizaciju portfelja u kontekstu metode najgoreg slučaja, konkretno mjere l_∞. U prvom poglavlju definirali smo mjere rizika l_∞ i alternativnu l_∞. Pretpostavljajući da kratka prodaja nije dozvoljena, izveli smo eksplicitno rješenje i analizirali optimalnu investicijsku strategiju za učinkovitu granicu problema optimizacije portfelja. Optimalnost rješenja osigurana je pomoću Karush-Kuhn-Tuckerovih uvjeta. U trećem poglavlju analizirali smo ukupni rizik portfelja te usporedili model l_∞ i model srednje varijance kojeg je uveo Markowitz.

Summary

The aim of this paper was to present the worst-case method in portfolio theory. We provided the necessary theoretical background for understanding portfolio optimization and focused on portfolio optimization using the worst-case method, specifically the l_∞ risk measure. In the first chapter, we defined the l_∞ and the alternative l_∞ risk measures. Assuming the absence of short selling, we derived an explicit solution and analyzed the optimal investment strategy for the efficient frontier of the portfolio optimization problem. The optimality of the solution was ensured through the Karush-Kuhn-Tucker conditions. In the third chapter, we analyzed the overall portfolio risk and compared the l_∞ model with the mean-variance model introduced by Markowitz.

Životopis

Rođena sam 26. prosinca 1998. godine u Splitu. Osnovnu školu završila sam u Strožancu. Od 2012. do 2016. godine pohađala sam Treću gimnaziju u Splitu, poznatiju kao MIOC. Po završetku gimnazijskog obrazovanja upisala sam preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2021. stekla sam titulu sveučilišne prvostupnice matematike te sam iste godine upisala diplomski studij Financijske i poslovne matematike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tijekom diplomskog studija, na četvrtoj godini, započela sam svoju poslovnu karijeru u financijskoj industriji. Veselim se stjecanju novih vještina i iskustava te susretu s novim poslovnim prilikama koje će mi omogućiti rast i napredak u karijeri.