Tok srednje zakrivljenosti ploha u euklidskom prostoru

Krznarić, Ivan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivan Krznarić

TOK SREDNJE ZAKRIVLJENOSTI PLOHA U EUKLIDSKOM PROSTORU

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc Željka Milin Šipuš

Zagreb, srpanj 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci. Hvala Paoli i svim prijateljima.
Hvala profesorima Maji Horvat i Ivanu Marinoviću, te profesorici Željki Milin Šipuš na potpori i motivaciji.

Sadržaj

Uvod

U drugoj polovici 20. stoljeća, na području geometrije dva su pitanja bila izuzetno atraktivna - Thurstonova slutnja koja se ticala geometrijskih struktura na trodimenzionalnim prostorima i Poincaréaova slutnja koja se ticala klasifikacije određenih topoloških prostora. Mnogi su matematičari radili na spomenutim problemima, a pristup koji se pokazao kao najobećavajući bio je onaj Richarda Hamiltona koji je umjesto izučavanja "statičkih" geometrijskih objekata počeo proučavati geometrijske objekte koji na određeni način evoluiraju kroz vrijeme te je na temelju globalnih promjena do kojih dolazi tokom evolucije pokušavao donijeti zaključke o geometriji i topologiji promatranih objekata. Na taj se način razvio dio diferencijalne geometrije koji se bavi geometrijskim tokovima. Jedan od tih geometrijskih tokova jest i tok srednje zakrivljenosti kojim se bavimo u ovom radu.

U prvom poglavlju navodimo neke osnovne pojmove teorije ravninskih krivulja. Uvodimo pojam parametrizirane krivulje te definiramo njeno tangencijalno i normalno polje. Pomoću tih veličina definiramo zakrivljenost parametrizirane krivulje te uvodimo dvije klase krivulja koje će nam biti vrlo bitne u nastavku rada - zatvorene i konveksne krivulje.

U drugom poglavlju se bavimo tokom skraćivanja ravninskih krivulja koje služi kao svojevrsna priprema za proučavanje toka na plohama. Najprije definiramo tok skraćivanja kao određenu Cauchyjevu zadaću, a zatim dokazujemo teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja te se bavimo geometrijskim svojstvima rješenja. Dokazujemo Gage-Hamiltonov teorem koji opisuje tok konveksnih krivulja, te se se bavimo posljedicama Graysonovog teorema koji opisuje tok jednostavno zatvorenih krivulja.

U trećem poglavlju navodimo neke rezultate vezane uz geometriju hiperploha. Definiramo pojam hiperplohe u euklidskom prostoru te uvodimo glavne objekte diferencijalnog i tenzorskog računa na hiperplohama. Na samom kraju, uvodimo pojam srednje zakrivljenosti hiperplohe.

U četvrtom poglavlju proučavamo tok srednje zakrivljenosti hiperploha. Na samom početku definiramo tok kao određenu Cauchyjevu zadaću te dokazujemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja. Izvodimo evolucijske jednadžbe geometrijskih veličina koje nam onda služe kako bismo dokazali neka svojstva toka, primjerice princip izbjegavanja. Poglavlje završavamo navođenjem Huiskenovog teorema koji opisuje tok kompkatnih konveksnih hiperploha.

Poglavlje 1

Krivulje u euklidskom prostoru

Glavni cilj ovog poglavlja jest navesti glave rezultate teorije krivulja u euklidskom prostoru, a način izlaganja prati [2].

1.1 Osnovni rezultati i pojmovi

Definicija 1.1.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval.* ***Parametrizirana krivulja*** *u $\mathbb{R}^2$ je glatko preslikavanje $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$. Za parametriziranu krivulju kažemo da je* ***regularna*** *ako je $\gamma'(t) \neq 0$ za sve $t \in I$.* ***Trag*** *parametrizirane krivulje γ jest skup $\gamma(I)$.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizirana krivulja.* ***Parametarska transformacija*** *od γ je glatki difeomorfizam $\phi : J \to I$, pri čemu je $J \subseteq \mathbb{R}$ također neki interval. Za parametriziranu krivulju $\gamma \circ \phi$ kažemo da je* ***reparametrizacija*** *od γ.*

Definicija 1.1.3. *Za regularnu parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ kažemo da je* ***jedinične brzine*** *ili da je* ***parametrizirana duljinom luka*** *ako je $\|\gamma'(t)\| = 1$ za sve $t \in I$.*

Teorem 1.1.4. *Za svaku regularnu parametriziranu krivulju γ postoji parametarska transformacija s takva da je $\gamma \circ s$ parametrizirana duljinom luka.*

Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizirana krivulja jedinične brzine. Tada možemo definirati **tangencijalno polje** od γ kao funkciju $T : I \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je

$$T(s) := \gamma'(s).$$

Također, definiramo **normalno polje** od γ kao funkciju $N : I \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je

$$N(s) := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot T(s)$$

Budući da je γ parametrizirana duljinom luka, imamo

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1, \quad u \in I.$$

Deriviranjem gornje jednakosti po s i korištenjem defincije tangencijalnog polja, dobivamo

$$\langle T'(s), T(s) \rangle = 0, \quad u \in I$$

Iz ove jednakosti zaključujemo da su tangenecijalno polje T i njegova derivacija T' okomiti za sve $s \in I$. Zbog toga postoji funkcija $\kappa : I \to \mathbb{R}$ takva da je

$$T'(s) = \kappa(s) N(s)$$

Definicija 1.1.5. *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizirana krivulja jedinične brzine. Tada funkciju $\kappa : I \to \mathbb{R}$ nazivamo **zakrivljenost** parametrizirane kriuvlje γ.*

Uočimo kako je, po definiciji, zakrivljenost definirana samo za parametrizirane krivulje jednične brzine. Općenito, ako imamo parametriziranu krivulju koja nije jedinične brzine, onda njenu zakrivljenost definiramo kao zakrivljenost bilo koje njene reparametrizacije duljinom luka. Sljedeća nam propozicija daje eksplicitnu formulu za računanje zakrivljenosti u tom slučaju.

Propozicija 1.1.6. *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizirana krivulja. Tada za $u \in I$ vrijedi*

$$\kappa(u) = \frac{\det(\gamma'(u), \gamma''(u))}{\|\gamma'(u)\|^3}.$$

Teorem 1.1.7 (Frenet-Serretove formule). *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizirana krivulja jedinične brzine, te neka su T, N pripadno tangencijalno, odnosno normalno polje od γ. Tada za sve $s \in I$ vrijedi*

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa(s) N(s),$$
$$\frac{\partial N}{\partial s} = -\kappa(s) T(s).$$

Napomena 1.1.8. *Kao i kod zakrivljenosti, Frenet-Serretove formule definirane su samo za parametrizirane krivulje jedinične brzine. Ako je $\gamma = \gamma(u)$ parametrizirana krivulja koja nije parametrizirana duljinom luka, onda njene Frenet-Serretove formule dobijemo tako da ju reparametriziramo duljinom luka pomoću parametarske transformacije $s = s(u)$ i onda odredimo Frenet-Serretove formule za tu reparametrizaciju koje su u tom slučaju dane sa*

$$\frac{\partial T}{\partial u} = s'(u) \kappa(u) N(u),$$
$$\frac{\partial N}{\partial u} = -s'(u) \kappa(u) T(u)$$

Definicija 1.1.9. *Neka je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrizirana krivulja.* ***Duljina*** *od γ je broj $L \in \mathbb{R}$ definiran sa*

$$L := \int_a^b \|\gamma'(u)\| du$$

Za kraj ovog poglavlja, uvodimo dvije važne klase parametriziranih krivulja koje će nam biti bitne u nastavku rada.

Definicija 1.1.10. *Za regularnu parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ kažemo da je* ***periodična s periodom*** *$L > 0$ ako vrijedi $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, pri čemu je L najmanji broj sa tim svojstvom. Za γ dodatno kažemo da je* ***zatvorena*** *ako postoji neka njena periodična reparametrizacija.*

Definicija 1.1.11. *Za regularnu zatvorenu parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ kažemo da je* ***jednostavno zatvorena*** *ako postoji njena periodična reparametrizacija $\tilde{\gamma}$ sa periodom L takva da je restrikcija $\tilde{\gamma}|_{[0,L\rangle]}$ injekcija.*

Definicija 1.1.12. *Za regularnu parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ kažemo da je* ***konveksna*** *ako za svaku točku njenog traga γ^* i pripadnu tangentu kroz tu točku vrijedi da je čitav trag od γ sadržan u točno jednoj od dvije poluravnine određene tom tangentom.*

Sljedeći teorem nam daje korisnu karakterizaciju konveksnih parametriziranih krivulja.

Teorem 1.1.13. *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ regularna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja jedinične brzine. Tada je γ konveksna ako i samo ako je $\kappa \geq 0$.*

Poglavlje 2

Tok skraćivanja ravninskih krivulja

U ovom poglavlju uvodimo i proučavamo tok skraćivanja ravninskih krivulja. Na intuitivnoj razini, tok skraćivanja modelira evoluciju krivulje u kojoj se svaka točka njenog traga giba u smjeru normale brzinom čija je vrijednost jednaka zakrivljenosti u toj točki. Glavna literatura za ovo poglavlje je [4].

2.1 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

Cilj ove točke jest dokazati egzistenciju i jedinstvenost rješenja toka skraćivanja, a dokaz će biti proveden po uzoru na [9].

Neka je $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizirana krivulja. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je γ_0 jedinične brzine jer ju u suprotnom naprosto reparametriziramo duljinom luka. Cilj nam je pokazati da sljedeća zadaća ima rješenje:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa N \\ \gamma(0, \cdot) = \gamma_0 \end{cases}$$

U slučaju da rješenje gornje zadaće postoji, kažemo da familija parametriziranih krivulja $\gamma : [0, T\rangle \times I \to \mathbb{R}^2$ evoluira pod **tokom skraćivanja.**

U tu svrhu, uočimo da iz Frenet-Serretovih formula imamo

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \kappa N$$

pa vidimo da je promatrana parcijalna diferencijalna jednadžba ekvivalentna sa jednadžbom

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2}.$$

Definirajmo
$$c(t,u) := \gamma_0(u) + f(t,u)N(u),$$
pri čemu je f neka funkcija koju pokušavamo odrediti, a N je normalno polje od γ_0. Računamo:
$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial u} &= T + \frac{\partial f}{\partial u}N + f\frac{\partial N}{\partial u}\\ &= T + \frac{\partial f}{\partial u}N + -f\kappa T\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}N + (1-\kappa f)\,T\end{aligned}$$
Ponovnim deriviranjem dobivamo:
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}N + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial u} - \left(\kappa\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial \kappa}{\partial u}\right)T + (1-\kappa f)\,\frac{\partial T}{\partial u}\\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \kappa\,(1-f\kappa)\right)N - \left(f\frac{\partial \kappa}{\partial u} + 2\kappa\frac{\partial f}{\partial u}\right)T.\end{aligned}$$

Označimo li sa $\overline{\kappa}$ zakrivljenost od c, korištenjem *Propozicije 1.1.6.*, uvrštavanjem gore izvedenih formula za derivacije i sređivanjem izraza dobivamo:
$$\begin{aligned}\overline{\kappa} &= \frac{\det\left(\frac{\partial c}{\partial u}, \frac{\partial^2 c}{\partial u^2}\right)}{\|\frac{\partial c}{\partial u}\|^3}\\ &= \frac{(1-\kappa f)\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\kappa\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + f\frac{\partial \kappa}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} - 2\kappa^2 f + \kappa^3 f^2 + \kappa}{\left((1-\kappa f)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Nadalje, označimo li sa $\overline{N}$ jediničnu normalu od c, imamo
$$\overline{N} = \frac{(1-\kappa f)\,N - \frac{\partial f}{\partial u}T}{\left((1-\kappa f)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Ono što sada preostaje napraviti jest nekako okarakterizirati tok skraćivanja preko upravo izvedenih veličina. U tu svrhu, uočimo da imamo
$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial s} &= \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\\ &= \frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|}\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\end{aligned}$$

Stoga, ponovnim deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial s} \\
&= \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|}\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\right) \\
&= \frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|}\left(-\frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|^3}\langle\frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial u^2}, \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\rangle\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u} + \frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|}\frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial u^2}\right) \\
&= \frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|^2}\left(\frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial u^2} - \frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|^2}\langle\frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial u^2}, \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\rangle\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\right).
\end{aligned}$$

Korištenjem gornje jednakosti dobivamo

$$\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial s^2} \iff \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} = \frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|^2}\left(\frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial u^2} - \frac{1}{\|\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\|^2}\langle\frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial u^2}, \frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\rangle\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial u}\right).$$

Pomnožimo li desnu stranu gornje ekvivalencije skalarno sa $\overline{N}$ i iskoristimo li prethodno izvedene formule za derivacije, dobivamo

$$\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \overline{\gamma}}{\partial s^2} \iff \langle\frac{\partial f}{\partial u}N, \overline{N}\rangle = \overline{\kappa}.$$

Ovo je upravo karakterizacija koju smo tražili jer sada vidimo da $\overline{\gamma}$ zadovoljava tok skraćivanja ako i samo ako vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{(1-\kappa f)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{1-\kappa f}\left(2\kappa\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + f\frac{\partial \kappa}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} - 2\kappa^2 f + \kappa^3 f^2 + \kappa\right)\right]$$

Gornja jednadžba jest kvazilinearna strogo parabolična parcijalna diferencijalna jednadžba i ona, kao takva, ima rješenje uz zadani početni uvjet $f(0,\cdot) = 0$ (vidi [9]).

Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 2.1.1. *Neka je $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizirana krivulja. Tada postoji $T > 0$ i glatka funkcija $\gamma : [0,T\rangle \times I \to \mathbb{R}^2$ koja zadovoljava*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa N \\ \gamma(0,\cdot) = \gamma_0\end{cases}$$

Sada kada znamo da uvijek imamo neko rješenje našeg problema, nas će najviše zanimati koja su svojstva tog rješenja. Primjerice, zanimat će nas koje je maksimalno vrijeme T za koje je tok definiran, ostaju li jednostavno zatvorene krivulje jednostavno zatvorene, što se događa sa konveksnim krivuljama i slično. Tim je pitanjima posvećen ostatak ovog poglavlja, a u sljedećem primjeru ilustrirajmo kako možemo eksplicitno odrediti rješenje toka skraćivanja.

Primjer 2.1.2. *Neka je $\gamma_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizirana krivulja definirana sa*

$$\gamma_0(u) = (R\cos(u), R\sin(u)),$$

pri čemu je $R > 0$. Prema gornjem teoremu o egzistenciji i jedinstvenost rješenja, znamo da postoji rješenje za tok skraćivanja s obzirom na γ_0. Definirajmo funkciju

$$\gamma(t, u) = r(t)\gamma_0(u).$$

Dakle, $\gamma(t, \cdot)$ jest parametrizacija kružnice nekog radijusa $R \cdot r(t)$. Zbog toga imamo

$$\kappa(t, \cdot) = \frac{1}{Rr(t)}$$

te još lagano dobivamo da je

$$N(t, \cdot) = -\gamma_0.$$

Stoga, u ovom primjeru vidimo da je tok skraćivanja od γ_0 ekvivalentan sljedećoj Cauchyjevoj zadaći

$$\begin{cases} r' = -\dfrac{1}{r} \\ r(0) = R \end{cases}$$

Ovdje je sada riječ o separabilnoj običnoj diferencijalnoj jednažbi koju je lagano riješiti. Imamo

$$r(t) = \sqrt{R^2 - 2t}.$$

Dakle, vidimo da je funkcija $\gamma : \left[0, \frac{R^2}{2}\right\rangle \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definirana gornjom formulom rješenje toka skraćivanja za parametrizaciju kružnice.

Napomena 2.1.3. *Osim eksplicitne formule koju smo odredili u gornjem primjeru za tok skraćivanja, bitnije je možda uočiti sljedeće tri činjenice:*

- *Maksimalno vrijeme trajanja toka je konačno,*
- *Trag krivulje nestaje, odnosno konvergira u točku,*
- *za vrijeme trajanja toka ne stvaraju se točke samopresijecanja.*

Gornja svojstva predstavljaju glavna pitanja koja će nas zanimati kada proučavamo tok skraćivanja općenitih krivulja i vidjet ćemo da će ona ostati zadovoljena i za puno širu klasu parametriziranih krivulja.

2.2 Evolucijske jednadžbe geometrijskih veličina

U nastavku rada ćemo proučavati kako tok djeluje na jednostavno zatvorene parametrizirane krivulje. U tu svrhu, neka $\gamma : [0, T\rangle \times [0, L] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa N \\ \gamma(0, \cdot) = \gamma_0 \end{cases}$$

pri čemu je $\gamma_0 : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ regularna jednostavno zatvorena parmetrizirana krivulja. Glavne geometrijske veličine koje će nas zanimati jesu funkcije zakrivljenosti, duljine i površina unutrašnjeg područja, a u ovoj ćemo točki izvesti evolucijske jednadžbe za svaku od tih funkcija.

Posvetimo se najprije funkciji duljine $L : [0, T\rangle \to \mathbb{R}$, pri čemu je $L(t)$ duljina regularne jednostavno zatvorene parametrizirane krivulje $\gamma(t, \cdot)$. Budući da svaku regularnu parametriziranu krivulju možemo reparametrizirati duljinom luka, postoji parametarska transformacija $s = s(u)$ takva da je regularna parametrizirana krivulja $\gamma \circ s^{-1}$ jedinične brzine. Znamo da tada Frenet-Serretove formule glase

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial s}{\partial u} \kappa N, \quad \frac{\partial N}{\partial u} = -\frac{\partial s}{\partial u} \kappa T.$$

Po definiciji, imamo

$$L(t) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\langle \frac{\partial \gamma(t,u)}{\partial u}, \frac{\partial \gamma(t,u)}{\partial u} \rangle} du.$$

Deriviranjem gornje jednadžbe po t dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t}(t) &= \int_a^b \frac{1}{2} \cdot 2 \langle \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t \partial u}(t,u), \frac{\partial \gamma}{\partial u}(t,u) \rangle du \\
&= \int_a^b \langle \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)(t,u), T(t,u) \rangle du && \left[\frac{\partial \gamma}{\partial u} = T \right] \\
&= \int_a^b \langle \frac{\partial}{\partial u} (\kappa(t,u) N(t,u)), T(t,u) \rangle du && \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa N \right] \\
&= \int_a^b \kappa(t,u) \langle \frac{\partial N}{\partial u}(t,u), T(t,u) \rangle du && [\langle N, T \rangle = 0] \\
&= \int_a^b \kappa(t,u) \langle -s'(u) \kappa(t,u) T(u), T(u) \rangle du \\
&= \int_a^b -\kappa(t,u)^2 s'(u) du \\
&= -\int_a^b \kappa(t,s)^2 ds. && [ds = s'(u) du]
\end{aligned}$$

Osim eksplicitne formule za evoluciju duljine, vidmo da je funkcija $L : [0, T\rangle \to \mathbb{R}$ padajuća.

Posvetimo se sada evolucijskoj jednadžbi za zakrivljenost. U tu ćemo svrhu dokazati neke pomoćne leme.

Lema 2.2.1. *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \gamma = \gamma(u)$ regularna parametrizirana krivulja, te neka je s parametar duljine luka. Tada vrijedi sljedeća jednakost operatora:*

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{||\gamma'(u)||}\frac{\partial}{\partial u}$$

Dokaz. Po definiciji parametra duljine luka, imamo

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\int_0^u ||\gamma'(x)||dx\right) = ||\gamma'(u)||$$

Sada, iz jednakosti

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial}{\partial u}$$

dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{||\gamma'(u)||}\frac{\partial}{\partial u}.$$

□

Lema 2.2.2. *Neka $\gamma : [0, T\rangle \times [0, L] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja. Tada vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(||\frac{\partial \gamma}{\partial u}||\right) = -\kappa^2 v,$$

pri čemu je $v := ||\frac{\partial \gamma}{\partial u}||$.

Dokaz. Iz Frenet-Serretovih formula imamo

$$\frac{\partial T}{\partial u} = v\kappa N,$$
$$\frac{\partial N}{\partial u} = -v\kappa T.$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(v^2\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial\gamma}{\partial u}, \frac{\partial\gamma}{\partial u}\rangle \\
&= 2\cdot\langle\frac{\partial\gamma}{\partial u}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial t\partial u}\rangle \\
&= 2\cdot\langle\frac{\partial\gamma}{\partial u}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial u\partial t}\rangle \\
&= 2\cdot\langle vT, \frac{\partial}{\partial u}(\kappa N)\rangle \\
&= 2v\langle T, \kappa\frac{\partial N}{\partial u}\rangle \\
&= 2v\langle T, -v\kappa^2 T\rangle \\
&= -2v^2\kappa^2
\end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\frac{\partial v^2}{\partial t} = 2v\frac{\partial v}{\partial t},$$

pa iz dobivenih jednakosti slijedi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\kappa^2 v.$$

□

Lema 2.2.3. *Neka $\gamma : [0,T\rangle \times [0,L] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja. Tada vrijedi*

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s} = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t} + \kappa^2\frac{\partial}{\partial s}.$$

Dokaz. Računamo :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\right) && [\textit{Lema 2.2.1.}] \\
&= -\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} \\
&= \kappa^2\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial t} && [\textit{Lema 2.2.2 i Schwarz}] \\
&= \kappa^2\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}. && [\textit{Lema 2.2.1.}]
\end{aligned}$$

□

Napomena 2.2.4. *Razlog zašto operatori $\frac{\partial}{\partial s}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ ne komutiraju jest taj što varijable s i t nisu nezavisne varijable pa ne možemo primijeniti Schwarzov teorem. Naime, u pozadini tvrdnje da s i t nisu nezavisne varijable leži činjenica da tok skraćivanja ne čuva parametar duljine luka i to narušava mogućnost komutacije.*

Vratimo se sada izvodu evolucijske jednadžbe za zakrivljenost. Frenet-Serretove formule nam daju jednakost

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} = \kappa N.$$

Deriviranjem gornje jednakosti po t dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\kappa N) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\gamma\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\gamma \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\gamma + \kappa^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} && [\textit{Lema 2.2.3.}] \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\gamma + \kappa^2 \frac{\partial \gamma}{\partial s}\right) + \kappa^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} && [\textit{Lema 2.2.3.}] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(k^2 T\right) + \kappa^3 N && [\textit{Frenet-Serretove formule}] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial s^2}(\kappa N) + \frac{\partial}{\partial s}\left(k^2 T\right) + \kappa^3 N && \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \kappa N\right] \\
&= \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \kappa^3\right) N - \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial s} T
\end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\kappa N) = \frac{\partial \kappa}{\partial t} N + \kappa \frac{\partial N}{\partial t},$$

pa uspoređivanjem komponenti dobivamo

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \kappa^3.$$

Također, kao direktnu posljedicu ovog računa imamo sljedeći rezultat.

Lema 2.2.5. *Neka $\gamma : [0, T\rangle \times [0, L] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial \kappa}{\partial s} N, \\
\frac{\partial N}{\partial t} &= -\frac{\partial \kappa}{\partial s} T.
\end{aligned}$$

Za kraj, izvedimo evolucijsku jednadžbu za površinu unutrašnjosti regularne jednostavno zatvorene parametrizirane krivulje γ koja zadovoljava tok skraćivanja. Za početak, sljedeći nam poznati teorem govori da zaista postoji nešto što se naziva unutrašnjost od γ.

Teorem 2.2.6 (**Jordanov teorem o krivulji**). *Neka je $C \subseteq \mathbb{R}^2$ trag regularne jednostavno zatvorene parametrizirane krivulje $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$. Tada se komplement $\mathbb{R}^2 \setminus C$ sastoji od dva disjunktna povezana otvorena skupa kojima je C zajednički rub. Jedan od tih dvaju povezanih otvorenih skupova je omeđen i naziva se* ***unutrašnjost*** *od γ.*

U izvodu navedene evolucijske jednadžbe, trebat će nam i Greenov teorem.

Teorem 2.2.7 (**Greenov teorem**). *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $F = (F_1, F_2) : U \to \mathbb{R}^2$ glatko vektorsko polje, te $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ regularna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja čiji je period jednak L, te čija je unutrašnjost G sadržana u U. Tada vrijedi*

$$\iint_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_0^L \langle F(\gamma(u)), \gamma'(u) \rangle du.$$

Uvrstimo li u Greenov teorem vektorsko polje $F(x, y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$, dobivamo sljedeću formulu za površinu unutrašnjosti:

$$A(G) = \frac{1}{2} \int_0^L \gamma_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial u} - \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} du.$$

Zadnji pripremni rezultat koji će nam biti potreban je Hopfov teorem o indeksu rotacije.

Lema 2.2.8. *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizirana krivulja jedinične brzine. Tada postoji glatka funkcija $\theta : I \to \mathbb{R}$ takva da za sve $u \in I$ vrijedi*

$$\gamma'(u) = (\cos(\theta(u)), \sin(\theta(u))).$$

Tu funkciju nazivamo ***kutnom funkcijom*** *od γ.*

Definicija 2.2.9. *Neka je $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zatvorena parametrizirana krivulja sa periodom L te neka je $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pripadna kutna funkcija. Tada broj*

$$n_\gamma := \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi}$$

nazivamo ***indeks rotacije*** *od γ.*

Teorem 2.2.10. *Neka je $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zatvorena parametrizirana krivulja sa periodom L. Tada vrijedi*

$$\int_0^L \kappa(u) du = 2\pi n_\gamma.$$

Teorem 2.2.11 (**Hopfov teorem o indeksu rotacije**). *Indeks rotacije regularne jednostavno zatvorene parametrizirane krivulje iznosi* 1.

Sada imamo sve što nam je potrebno da odredimo evolucijsku jednadžbu za površinu unutrašjnosti $A(t)$ jednostavno zatvorene parametrizirane krivulje $\gamma(t,\cdot)$. Naime, računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_0^L \gamma_1\frac{\partial\gamma_2}{\partial u} - \gamma_2\frac{\partial\gamma_1}{\partial u}du\right)\\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L v\langle\gamma, N\rangle du \qquad \left[v = s'(u) = \|\frac{\partial\gamma}{\partial u}\|\right]\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L v\langle\frac{\partial\gamma}{\partial t}, N\rangle + \frac{\partial v}{\partial t}\langle\gamma, N\rangle + v\langle\gamma, \frac{\partial N}{\partial t}\rangle du\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L \kappa v - \kappa^2 v\langle\gamma, N\rangle - \frac{\partial\kappa}{\partial u}\langle\gamma, T\rangle du\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^L \kappa v - \kappa^2 v\langle\gamma, N\rangle + \kappa v + \kappa^2 v\langle\gamma, N\rangle du \qquad [\textit{parcijalna integracija}]\\
&= -\int_0^L \kappa v du\\
&= -\int_0^L \kappa ds\\
&= -2\pi.
\end{aligned}$$

Kao i kod duljine, ova nam evolucijska jednadžba govori da je funkcija $A : [0,T\rangle \to \mathbb{R}$ padajuća.

2.3 Tok skraćivanja jednostavno zatvorenih krivulja

Neka je $\gamma_0 : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ regularna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja koja zadovoljava tok skraćivanja. Ono što nas sada zanima hoće li ova krivulja pod tokom ostati jednostavno zatvorena, odnosno hoće li $\gamma(t,\cdot)$ biti jednostavno zatvorena za sve $t \in [0,T']$, $T' \leq T$? Odgovor na to pitanje dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.3.1. *Neka je $\gamma_0 : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ regularna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja. Ako $\gamma : [0,T\rangle \times [0,L] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja i ako postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ takva da je $|\kappa(t,\cdot)| \leq C$ za sve $t \in [0,T']$, $T' \leq T$, onda je $\gamma(t,\cdot)$ jednostavno zatvorena za sve $t \in [0,T']$.*

Gornji teorem dokazujemo kroz niz narednih lema, no za početak, definirajmo funkciju $f : [0, T'\rangle \times [0, L] \times [0, L] \to \mathbb{R}$ sa

$$f(t, u_1, u_2) := \|\gamma(t, u_1) - \gamma(t, u_2)\|^2.$$

Lema 2.3.2. *Prethodno definirana funkcija f zadovoljava*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4,$$

pri čemu su s_1, s_2 parametri duljine luka.

Dokaz. Po definiciji, imamo

$$f(t, s_1, s_2) = \langle \gamma(t, s_1) - \gamma(t, s_2), \gamma(t, s_1) - \gamma(t, s_2)\rangle.$$

Deriviranjem gornje jednakosti po t i korištenjem činjenice da γ zadovoljava tok skraćivanja, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2\langle \gamma(t, u_1) - \gamma(t, u_2), \kappa(t, s_1)N(t, s_1) - \kappa(t, s_2)N(t, s_2)\rangle.$$

S druge strane, deriviranjem polazne jednakosti po s_1 dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = 2\langle \gamma(t, s_1) - \gamma(t, s_2), T(t, s_1)\rangle$$

pa ponovnim deriviranjem po s_1 slijedi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} &= 2\langle T(t, s_1), T(t, s_1)\rangle + 2\langle \gamma(t, s_1) - \gamma(t, s_2), \frac{\partial T(t, s_1)}{\partial s_1}\rangle \\ &= 2 + 2\langle \gamma(t, s_1) - \gamma(t, s_2), \kappa(t, s_1)N(t, s_1)\rangle\end{aligned}$$

Analogni račun nam daje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} = 2 - 2\langle \gamma(t, s_1) - \gamma(t, s_2), \kappa(t, s_2)N(t, s_2)\rangle$$

pa vidimo da zaista vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4.$$

□

Definirajmo funkciju $l : [0, T'\rangle \times [0, L] \times [0, L] \to \mathbb{R}$ sa

$$l(t, u_1, u_2) := |\int_{u_1}^{u_2} \|\frac{\partial \gamma}{\partial u}(t, u)\| du\ |.$$

Sljedeću lemu navodimo bez dokaza, a za detalje se može pogledati u [7].

Lema 2.3.3. *Neka je $g : [0, M] \to \mathbb{R}^2$ parametrizirana krivulja jedinične brzine od točke $A \in \mathbb{R}^2$ do točke $B \in \mathbb{R}^2$ takva da g zajedno sa parametrizacijom segmenta od A do B čini konveksnu parametriziranu krivulju. Neka je h neka druga parametrizirana krivulja duljine M od točke C do točke D. Ako za pripadne zakrivljenosti vrijedi $|\kappa_g| \geq |\kappa_h|$ onda je*

$$d(A, B) \leq d(C, D).$$

Korolar 2.3.4. *Uz dosadašnje pretpostavke i notaciju, ako je $\kappa \leq C$ na $[0, T'\rangle \times [0, L]$ onda vrijedi*

$$f(t, u_1, u_2) \geq \left(\frac{2}{C} \sin\left(\frac{C}{2} l(t, u_1, u_2)\right)\right)^2.$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljan $t \in [0, T'\rangle$. Budući da je zakrivljenost "standardne" regularne parametrizacije kružnice radijusa $\dfrac{1}{C}$ upravo jednaka C, iz odnosa zakrivljenosti vidimo da je luk te kružnice duljine $l(t, u_1, u_2)$ čije se početna i krajnja točka nalaze na segmentu određenom točkama $\gamma(t, u_1)$ i $\gamma(t, u_2)$ nalazi unutar tog segmenta spojenog sa dijelom od $\gamma(t, \cdot)$ između parametara u_1 i u_2. Budući da je udaljenost kranjih točaka tog luka upravo jednaka $\dfrac{2}{C} \sin\left(\dfrac{C}{2} l(t, u_1, u_2)\right)$, primjenom prethodne leme dobivamo tvrdnju. □

Sada se možemo posvetiti dokazu *Teorema 2.3.1.* U tu svrhu, definirajmo skup

$$E := \left\{(t, u_1, u_2) \in [0, T'\rangle \times [0, L] \times [0, L] \mid l(t, u_1, u_2) < \frac{\pi}{C}\right\}.$$

Na skupu E vrijedi

$$f(t, u_1, u_2) = 0 \iff u_1 = u_2$$

Zaista, ako je $u_1 = u_2$ onda trivijalno vrijedi $f(t, u_1, u_2) = 0$. Obratno, ako je $f(t, u_1, u_2) = 0$ onda iz *Korolara 2.3.4.* imamo da je

$$\sin\left(\frac{C}{2} l(t, u_1, u_2)\right) = 0,$$

a kako na skupu E vrijedi $l(t, u_1, u_2) < \frac{\pi}{C}$, to je moguće jedino ako je $l(t, u_1, u_2) = 0$, to jest ako je $u_1 = u_2$.

Nadalje, fokusirajmo se na skup

$$D = ([0, T'\rangle \times [0, L] \times [0, L]) \setminus E.$$

Cilj nam je pokazati da funkcija f na skupu D ima strogo pozitivni minimum. U tu svrhu, uočimo da je parabolički rub tog skupa dan sa

$$\partial D = \left\{(t, u_1, u_2) |\ l(t, u_1, u_2) = \frac{\pi}{C}\right\} \cup \left\{(0, u_1, u_2) |\ l(0, u_1, u_2) > \frac{\pi}{C}\right\}.$$

Na prvom skupu imamo

$$f(t, u_1, u_2) \geq \left(\frac{2}{C} \sin\left(\frac{C}{2} l(t, u_1, u_2)\right)\right)^2 = \left(\frac{2}{C}\right)^2 > 0,$$

a na drugom skupu f ima strogi pozitivni minimum jer je $\gamma(0, \cdot) = \gamma_0$ jednostavno zatvorena. Stoga, neka je $m > 0$ manji od tih dvaju minimuma.

Uzmimo sada $\varepsilon > 0$ i promotrimo funkciju $g : [0, T'\rangle \times [0, L] \times [0, L] \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$g(t, u_1, u_2) \coloneqq f(t, u_1, u_2) + \varepsilon t.$$

Zbog *Leme 2.3.2* imamo

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \Delta g - 4 + \varepsilon.$$

Uzmimo proizvoljan $\delta \in \langle 0, m\rangle$ i pretpostavimo da funkcija g postiže vrijednost $m - \delta$ u nekoj točki skupa D. Neka je

$$t_0 \coloneqq \inf \{t \in [0, T'\rangle \mid g(t, \cdot, \cdot) = m - \delta\}.$$

Kada bi se ta vrijednost poprimala na skupu ∂D, onda bi postojala točka $(t, u_1, u_2) \in \partial D$ takva da

$$\begin{aligned} & g(t, u_1, u_2) = m - \delta \\ & \implies f(t, u_1, u_2) + \varepsilon t = m - \delta \\ & \implies f(t, u_1, u_2) = m - \delta - \varepsilon t < m, \end{aligned}$$

no to je nemoguće jer je $f \geq m$ na ∂D. Zbog toga, vrijednost $m - \delta$ se mora postizati u $(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) \in D \setminus \partial D$.

U toj točki vrijedi

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) \leq 0.$$

Zaista, u suprotnom postoji neki $t_1 \in [0, t_0\rangle$ takav da je $g(t_1, \overline{u_1}, \overline{u_2}) < m - \delta$. U tom slučaju, ako promatramo funkciju $g(\cdot, \overline{u_1}, \overline{u_2})$ na $[0, t_1]$, onda imamo

$$\begin{aligned} g(0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) &\geq m \\ g(t_1, \overline{u_1}, \overline{u_2}) &< m - \delta \end{aligned}$$

pa po teoremu srednje vrijednosti postoji $t^* \in \langle 0, t_1\rangle$ takav da je

$$g(t^*, \overline{u_1}, \overline{u_2}) = m - \delta,$$

no to je nemoguće jer je $t^* < t_1 < t_0$, a t_0 je prvi trenutak u kojem se postiže vrijednost $m - \delta$. Dakle, mora biti

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) \leq 0$$

kao što se i tvrdilo. Dalje, analognim argumentima primijenjenim na funkciju $g(t_0, \cdot, \cdot)$ zaključujemo da je

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}), \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) \geq 0.$$

Dodatno, točka $(\overline{u_1}, \overline{u_2})$ je točka minimuma funkcije $g(t_0, \cdot, \cdot)$ pa je determinanta Hesseove matrice nenegativna, odnosno imamo

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2})\right)^2 \geq 0.$$

Također, budući da funkcija f mjeri udaljenost točaka krivulje, u točki minimuma $(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2})$ funkcije g pripadne tangente moraju biti paralelne pa imamo

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) = -2\langle T(t_0, s_1), T(t_0, s_2)\rangle = \pm 2.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \Delta g\,(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) &= \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) + \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2})\,\frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2})} \\ &\geq 2\left|\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2})\right| \\ &\geq 4. \end{aligned}$$

Zbog toga pak imamo

$$\frac{\partial g}{\partial t}\left(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}\right) = \Delta g\left(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}\right) - 4 + \varepsilon \geq \varepsilon > 0,$$

međutim to je kontradikcija sa činjenicom da je $\frac{\partial g}{\partial t}\left(t_0, \overline{u_1}, \overline{u_2}\right) \leq 0$.

Iz ovoga slijedi da mora biti $g \geq m$ na skupu D, no onda puštanjem da $\varepsilon \to 0$ dobivamo $f \geq m > 0$ na skupu D. Zbog toga, f ima strogo pozitivni minimum na skupu D dok na njegovom komplementu vrijedi da je $f(t, u_1, u_2) = 0 \iff u_1 = u_2$. Iz toga pak slijedi da $\gamma(t, \cdot)$ nema samopresijecenja na $[0, L\rangle$ pa je $\gamma(t, \cdot)$ jednostavno zatvorena za sve $t \in [0, T'\rangle$ kao što je i bila tvrdnja *Teorema 2.3.1.*

2.4 Tok skraćivanja konveksnih krivulja

U ovoj točki dokazujemo da tok skraćivanja čuva konveksnost, a na samom kraju ove točke ćemo u pokazati kako iz dosadašnjih rezultata zapravo možemo u potpunosti opisati kako tok skraćivanja djeluje na proizvoljnu zatvorenu krivulju.

Neka je $\gamma_0 : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ regularna jednostavno zatvorena konveksna krivulja. Tada zbog toga što je $\kappa \geq 0$, Hopfovog teorema i fundamentalnog teorema za ravninske krivulje slijedi da γ_0 možemo raparametrizirati pomoću kuta θ koje pripadna tangenta zatvara sa pozitivnim dijelom x-osi. Stoga, u nastavku ove točke podrazumijevamo da je $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma_0 = \gamma_0(\theta)$.

Kako bismo pokazali da tok skraćivanja čuva konveksnost, prvo što ćemo napraviti jest svesti problem rješavanja toka na povoljniji Cauchyjev problem. U tu svrhu, dokažimo sljedeću lemu koja nam govori kakve se sve funkcije mogu javiti kao funkcije zakrivljenosti regularnih jednostavno zatvorenih konveksnih parametriziranih krivulja.

Lema 2.4.1. *Neka je $\kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\kappa = \kappa(\theta)$ glatka 2π-periodična funkcija. Tada je κ funkcija zakrivljenosti neke jednostavno zatvorene konveksne parametrizirane krivulje ako i samo ako vrijedi*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{\kappa(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{\kappa(\theta)} d\theta = 0.$$

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je 2π-periodična funkcija κ zakrivljenost neke regularne jednostavno zatvorene parametrizirane krivulje. Zbog regularnost, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je γ parametrizirana duljinom luka. Znamo da tada postoji glatka funkcija $\theta : I \to \mathbb{R}$ takva da je

$$\gamma'(u) = (\cos(\theta(u)), \sin(\theta(u))),$$

pri čemu dodatno vrijedi $\theta' = \kappa$. S obzirom na parametar θ imamo

$$\frac{d\gamma}{du} = \frac{d\gamma}{d\theta}\frac{d\theta}{du} = \kappa\frac{d\gamma}{d\theta}$$

pa vidimo da je

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \left(\frac{\cos(\theta)}{\kappa}, \frac{\sin(\theta)}{\kappa}\right).$$

Sada integriranjem komponenti i uzimanjem u obzir zatvorenost od γ dobivamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{\kappa(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{\kappa(\theta)} d\theta = 0.$$

Obratno, definirajmo parametriziranu krivulju $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ sa

$$\gamma(\theta) := \left(\int_0^{\theta} \frac{\cos(\theta)}{\kappa(\theta)} d\theta, \int_0^{\theta} \frac{\sin(\theta)}{\kappa(\theta)} d\theta\right).$$

Očito je $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = 0$ pa je krivulja zatvorena. Nadalje, imamo

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \left(\frac{\cos(\theta)}{\kappa(\theta)}, \frac{\sin(\theta)}{\kappa(\theta)}\right) = \frac{1}{\kappa}\frac{d\gamma}{du}.$$

Također, imamo

$$N(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

pa dobivamo

$$\frac{d^2\gamma}{d\theta^2} = -\frac{1}{\kappa(\theta)^2}\kappa'(\theta)\left(\cos(\theta), \sin(\theta)\right) + \frac{1}{\kappa(\theta)}\left(-\sin(\theta), \cos(\theta)\right).$$

Budući da je

$$\|\frac{d\gamma}{d\theta}\|^3 = \|\frac{1}{\kappa(\theta)}\left(\cos(\theta), \sin(\theta)\right)\|^3 = \frac{1}{\kappa(\theta)^3}$$

te kako je

$$\det\left(\frac{d\gamma}{d\theta}, \frac{d^2\gamma}{d\theta^2}\right) = \frac{1}{\kappa(\theta)^2}$$

imamo da je zakrivljenost od γ upravo jednaka

$$\frac{\det\left(\frac{d\gamma}{d\theta}, \frac{d^2\gamma}{d\theta^2}\right)}{\|\frac{d\gamma}{d\theta}\|^3} = \kappa(\theta).$$

Na kraju, uočimo da je N bijektivno preslikavanje pa je γ i jednostavno zatvorena. $\square$

U uvodnom smo dijelu ove točke rekli kako su nam konveksne parametrizirane krivulje vrlo pogodne za parametrizaciju preko kuta θ koje pripadna tangenta zatvara sa x-osi, pa u sljedećoj lemi izvodimo evolucijsku jednadžbu za zakrivljenost s obzirom na parametar θ. Samo za potrebe sljedeće leme podrazumijevamo da je $\kappa = \kappa(\tau, \theta)$, pri čemu je $\tau = t$, no razlog zašto koristimo drugačiju oznaku jest taj što $\frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{\partial}{\partial \tau}$. Naime, deriviranjem po τ podrazumijeva da je θ fiksan, a deriviranje po t podrazumijeva da je u fiksan i ta se dva deriviranja neće podudarati.

Lema 2.4.2. *Uz dosadašnju notaciju i pretpostavke, vrijedi* $\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3$.

Dokaz. Sjetimo se da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial s}, \; \frac{\partial \theta}{\partial s} = \kappa$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \kappa^3.$$

Sada, računamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \tau}, \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\frac{\partial \kappa}{\partial s} && \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial s}\right] \\
&= \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} \\
&= \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} + \kappa\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2 && \left[\frac{\partial \theta}{\partial s} = \kappa\right]
\end{aligned}$$

Također, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right) \\
&= \kappa \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right) \\
&= \kappa\left(\left(\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right)^2 + \kappa \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2}\right) \\
&= \kappa\left(\frac{\partial \kappa}{\partial s}\right)^2 + \kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2}.
\end{aligned}$$

Sada direktnim uvrštavanjem dobivenog u

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \kappa^3.$$

slijedi tvrdnja. □

U sljedećem teoremu, kojeg navodimo bez dokaza zbog njegove tehničke prirode (pogledati [4]), zapravo dajemo karakterizaciju za tok skraćivanja u slučaju konveksnih parametriziranih krivulja.

Teorem 2.4.3. *Preslikavanje* $\gamma : [0, T\rangle \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *jest rješenje toka skraćivanja za konveksnu parametriziranu krivulju* $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *ako i samo ako pripadna zakrivljenost* $\kappa : [0, T\rangle \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *zadovoljava*

- $\dfrac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa^2 \dfrac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3$
- $\kappa(0, \cdot) > 0$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{\kappa(0, \theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta)}{\kappa(0, \theta)} d\theta = 0.$

Sljedeći nam rezultat govori da tok skraćivanja čuva konveksnost, odnosno da ako konveksna krivulja evoluira pod tokom skraćivanja, onda ona ostaje konveksna.

Korolar 2.4.4. *Neka je* $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *regularna konveksna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja i neka* $\gamma : [0, T\rangle \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *zadovoljava tok skraćivanja. Tada je* $\gamma(t, \cdot)$ *konveksna za sve* $t \in [0, T\rangle$.

Dokaz. Definirajmo

$$\varepsilon := \inf \{\kappa(0, \theta) |\, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Budući da je γ_0 konveksna, imamo $\varepsilon > 0$.

Uzmimo sada $\delta \in \langle 0, \varepsilon \rangle$ po volji. Pretpostavimo da je $(t_0, \theta_0) \in \langle 0, T\rangle \times [0, 2\pi]$ točka takva da je $\kappa(t_0, \theta_0) = \delta$ te da je t_0 prvi trenutak sa tim svojstvom. Tada imamo $\kappa(t, \theta_0) \geq \delta$ za sve $t < t_0$.

Zaista, kada bi postojao neki $t_1 < t$ takav da je $\kappa(t_1, \theta_0) < \delta$, onda bi po teoremu srednje vrijednosti primijenjenom na funkciju $\kappa(\cdot, \theta_0)$ na segmentu $[0, t_1]$, zbog

$$\kappa(0, \theta_0) > \varepsilon > \delta, \qquad \kappa(t_1, \theta_0) < \delta,$$

postojao neki $t^* < t_1 < t_0$ takav da je $\kappa(t^*, \theta_0) = \delta$, međutim to je u kontradikciji sa činjenicom da je t_0 prvi trenutak sa tim svojstvom.

Dakle, $\kappa(t,\theta_0) \geq \delta$ za sve $t < t_0$. Kako je $\kappa(t_0,\theta_0) = \delta$, imamo $\dfrac{\partial \kappa}{\partial t}(t_0,\theta_0) \leq 0$. Nadalje, jer je t_0 prvi trenutak u kojem funkcija $\kappa(\cdot,\theta_0)$ postiže vrijednost δ, funkcija $\kappa(t_0,\cdot)$ u točki θ_0 ima lokalni minimum pa je

$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2}(t_0,\theta_0) \geq 0.$$

Budući da γ zadovoljava tok skraćivanja, iz prethodnog teorema dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{\partial \kappa}{\partial t}(t_{0,\theta_0}) \\
&= \kappa^2(t_0,\theta_0)\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2}(t_0,\theta_0) + \kappa^3(t_0,\theta_0) \\
&= \delta^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2}(t_0,\theta_0) + \delta^3 \\
&> 0,
\end{aligned}$$

a to je očita kontradikcija.

Dakle, imamo $\kappa(t,\cdot) \geq \varepsilon > 0$ pa je $\gamma(t,\cdot)$ konveksna. □

Ono što još preostaje napraviti u ovoj točki jest pokazati da ako $\gamma : [0,T\rangle \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja, pri čemu je T maksimalno vrijeme trajanja toka i $\gamma_0 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ regularna konveksna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja, da onda vrijedi $\lim\limits_{t\to T} A(t) = 0$. Ono što će nam taj rezultat onda govoriti jest da ako konveksnu krivulju pustimo da evoluira pod tokom skraćivanja, onda će onda ”nestati” kako se tok privodi kraju.

U tu svrhu, dokazujemo neke pomoćne rezultate, no za početak definirajmo

$$\kappa^*(t) = \sup\{b \mid \kappa(t,\cdot) > b \textit{ na nekom podintervalu duljine } \pi\}, t \in [0,T\rangle$$

Lema 2.4.5. *Neka $\gamma : [0,T\rangle \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja, pri čemu je γ_0 regularna konveksna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja. Neka je $A(t) > 0$ za sve $t \in [0,T\rangle$. Tada vrijedi*

$$\kappa^*(t) \leq \frac{L(t)}{A(t)}.$$

Dokaz. Za početak, znamo da je $\gamma(t,\cdot)$ konveksna za sve $t \in [0,T\rangle$. Uzmimo proizvoljan $M > 0$ takav da je $\kappa^*(t) \geq M$. Iz definicije od $\kappa^*(t)$ zaključujemo da postoji $[a,a+\pi] \subseteq [0,2\pi]$ takav da je $\kappa(t,\theta) \geq M$ za sve $\theta \in [a,a+\pi]$. Uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 0$ jer u suprotnom samo reparametriziramo sa $\theta \mapsto \theta - a$. Dakle, $\kappa(t,\theta) \geq M$ za sve $\theta \in [0,\pi]$ pa se trag parametrizirane krivulje $\gamma(t,\cdot)|_{[0,\pi]}$ nalazi unutar kruga radijusa $\frac{1}{M}$. Zbog toga, koristeći nejednakost trokuta, imamo

$$\|\gamma(t,0) - \gamma(t,\pi)\| \leq \frac{2}{M}.$$

S druge strane, po definiciji konveksnosti, promatrani je trag sadržan u području ravnine određenom tangentama u točkama $\gamma(t,0)$ i $\gamma(t,\pi)$ pa imamo ocjenu

$$A(t) \leq \frac{L(t)}{2} \cdot \|\gamma(t,0) - \gamma(t,\pi)\| \leq \frac{L(t)}{M},$$

što povlači da je

$$M \leq \frac{L(t)}{A(t)}.$$

Puštanjem na gornje jednakosti na limes kada $M \to \kappa^*(t)$ dobivamo tvrdnju. □

Sljedeći rezultat navodimo bez dokaza.

Lema 2.4.6 (**Wirtingerova nejednakost**). *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(a) = f(b) = 0$ i $b - a \leq \pi$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \int_a^b \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Lema 2.4.7. *Neka $\gamma : [0,T\rangle \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ zadovoljava tok skraćivanja, pri čemu je γ_0 regularna konveksna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja. Ako je κ^* ograničena na $[0,T\rangle$, onda je i funckija $\int_0^{2\pi} \log\kappa(\cdot,\theta)d\theta$ ograničena na $[0,T\rangle$.*

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} \log\kappa(t,\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa(t,\theta)}\frac{\partial\kappa}{\partial t}(t,\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \kappa(t,\theta)\frac{\partial^2\kappa}{\partial\theta^2}(t,\theta) + \kappa^2(t,\theta)d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \kappa^2(t,\theta)d\theta + \kappa(t,\theta)\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}(t,\theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}\right)^2(t,\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \kappa^2(t,\theta) - \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}\right)^2(t,\theta)\,d\theta.
\end{aligned}$$

Fiksirajmo sada neki $t \in [0,T\rangle$ i definirajmo skupove

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\theta \in [0,2\pi] \mid \kappa(t,\theta) > \kappa^*(t)\}, \\
\mathcal{V} &= [0,2\pi] \setminus \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Skup $\mathcal{U}$ je otvoren u $[0, 2\pi]$ kao praslika otvorenog skupa po neprekidnoj funkciji pa $\mathcal{U}$ možemo zapisati kao (najviše) prebrojivu uniju disjunktnih intervala $(I_k)_k$ takvih da je duljina svakog takvog intervala strogo manja od π. Zbog neprekidnosti zakrivljenosti, u rubovima svih tih intervala vrijedi

$$\kappa(t, \theta) = \kappa^*(t).$$

Primjenom Wirtingerove nejednakosti na svaki od tih intervala dobivamo

$$\int_{I_k} (\kappa(t, \theta) - \kappa^*(t))^2 \, d\theta \leq \int_{I_k} \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2 (t, \theta) \, d\theta$$

Zbog gornje nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}\int_{I_k} \kappa^2(t, \theta) - \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2 (t, \theta) &\leq 2\kappa^*(t) \int_{I_k} \kappa(t, \theta) d\theta - \kappa^*(t)^2 \int_{I_k} d\theta \\ &\leq 2\kappa^*(t) \int_{I_k} \kappa(t, \theta) d\theta.\end{aligned}$$

Zbog toga što je $\mathcal{U}$ unija intervala $(I_k)_k$, imamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{U}} \kappa^2(t, \theta) - \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2 (t, \theta) \, d\theta &\leq 2\kappa^*(t) \int_{\mathcal{U}} \kappa(t, \theta) d\theta \\ &\leq 2\kappa^*(t) \int_0^{2\pi} \kappa(t, \theta) d\theta.\end{aligned}$$

S druge strane, na skupu $\mathcal{V}$ imamo

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \kappa^2(t, \theta) - \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2 (t, \theta) \, d\theta &\leq \int_{\mathcal{V}} \kappa^2(t, \theta) d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \kappa^*(t)^2 d\theta \\ &\leq 2\pi\kappa^*(t)^2.\end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih ocjena dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \log \kappa(t, \theta) d\theta \leq 2\kappa^*(t) \int_0^{2\pi} \kappa(t, \theta) d\theta + 2\pi\kappa^*(t)^2.$$

Budući da je

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t) = -\int_0^{2\pi} \kappa^2(t, s) ds = -\int_0^{2\pi} \kappa(t, \theta) d\theta,$$

uvrštavanjem u gornju ocjenu dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\log\kappa(t,\theta)d\theta - \leq 2\kappa^*(t)\frac{\partial L}{\partial t}(t) + 2\pi\kappa^*(t)^2.$$

Sada, kako je κ^* ograničena, postoji $M > 0$ takav da je $\kappa^* \leq M$ pa integriranjem gornje nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\log\kappa(t,\theta)d\theta &\leq 2M\,(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t + \int_0^{2\pi}\log(\kappa(0,\theta)d\theta\\ &\leq 2ML(0) + 2\pi MT + C.\end{aligned}$$

□

Lema 2.4.8. *Ako je* $\int_0^{2\pi}\log\kappa(\cdot,\theta)d\theta$ *ograničena na* $[0,T\rangle$ *onda za svaki* $\delta > 0$ *postoji konstanta* $C > 0$ *takva da za svaki* $t \in [0,T\rangle$ *vrijedi* $\kappa(t,\cdot) \leq C$*, osim evenutalno na nekim intervalima duljine manje ili jednake* δ*.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoji $\delta > 0$ takav da za svaku konstantu $C > 0$ postoji $t(C) \in [0,T\rangle$ takav da je $\kappa(t(C),\cdot) > C$ na nekom intervalu $I(C)$ duljine strogo veće od δ. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $t_n \in [0,T\rangle$ i interval $I_n := [a_n, b_n]$ duljine veće od δ takav da je $\kappa(t_n,\cdot) > n$ na I_n. Uzmemo li sada proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\log\kappa(t_n,\theta)d\theta &= \int_0^{a_n}\log\kappa(t_n,\theta)d\theta + \int_{a_n}^{b_n}\log\kappa(t_n,\theta)d\theta + \int_{b_n}^{2\pi}\log\kappa(t_n,\theta)d\theta\\ &> a_n\log\kappa_{MIN}(0) + \delta\log n + (2\pi - b_n)\log\kappa_{MIN}(0)\\ &\geq \delta\log n + (2\pi - \delta)\log\kappa_{MIN}(0)\end{aligned}$$

pri čemu je $\kappa_{MIN}(0)$ minimum funkcije $\kappa(0,\cdot)$ (sjetimo se da nam evolucijska jednadžba za κ govori da je funkcija κ_{MIN} nepadajuća). Zbog proizvoljnosti od $n \in \mathbb{N}$, gornja jednakost nam da je kontradikciju sa ograničenošću funkcije $\int_0^{2\pi}\log\kappa(\cdot,\theta)d\theta$. Stoga, imamo tvrdnju leme. □

Lema 2.4.9. *Uz dosadašnje pretpostavke i notaciju; postoji konstanta* $D > 0$ *takva da je*

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}(t,\theta)\right)^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi}\kappa(t,\theta)^2 d\theta + D,\ \ t \in [0,T\rangle\,.$$

Dokaz. Računamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} \kappa^2 - \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)^2 d\theta &= 2\int_0^{2\pi} 2\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} - \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t \partial \theta} d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} 2\kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} d\theta - 2\int_0^{2\pi} \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \kappa}{\partial t \partial \theta} d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} d\theta - 2\left[\underbrace{\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2}\frac{\partial \kappa}{\partial t} d\theta\right] \\
&= 2\int_0^{2\pi} \kappa\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2}\frac{\partial \kappa}{\partial t} d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa\right)\frac{\partial \kappa}{\partial t} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa\right)\left(\kappa^2\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \kappa^2\left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa\right)^2 d\theta \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Integriranjem gornje nejednakosti dobivamo tvrdnju. □

Lema 2.4.10. *Uz dosadašnje pretpostavke i notaciju; ako je* $\int_0^{2\pi} \log \kappa(\cdot, \theta) d\theta$ *ograničena na* $[0, T\rangle$, *onda je* κ *ograničena na* $[0, T\rangle \times [0, 2\pi]$.

Dokaz. Budući da je $\int_0^{2\pi} \log \kappa(\cdot, \theta) d\theta$ ograničena na $[0, T\rangle$, po *Lemi 2.4.8* znamo da za svaki $\delta > 0$ postoji $C > 0$ takav da je $\kappa \leq C$ osim eventualno na nekim intervalima duljine manje ili jednake δ.

Definirajmo

$$\kappa_{MAX}(t) := \max \{\kappa(t, \theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Uzmimo proizvoljan $t \in [0, T\rangle$. Ako je $\kappa_{MAX}(t) \leq C$, onda nemamo što dokazivati. Stoga, pretpostavimo da je, za taj odabrani trenutak t, $\kappa_{MAX}(t) = \kappa(t, \theta_0)$ pri čemu θ_0 pripada nekom intervalu $[a, b]$ duljine manje ili jednake δ na kojem *Lema 2.4.8* ne daje ocjenu. Sada razlikujemo dva slučaja.

Prvi slučaj. Neka je $a > 0$. Zbog *Leme 2.4.8.* znamo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\kappa(t, \cdot) \leq C$ na $[a - \varepsilon, a]$ (naime - u suprotnom bismo imali interval duljine veće ili jednake δ na kojem je $\kappa \geq C$ što smo vidjeli da je nemoguće). Imamo

$$\begin{aligned}\kappa(t,\theta_0) &= \kappa(t,a-\varepsilon) + \int_{a-\varepsilon}^{\theta_0} \frac{\partial\kappa}{\partial\theta} d\theta \\ &\leq C + \sqrt{\delta}\sqrt{\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}\right)^2 d\theta} \qquad [CSB] \\ &\leq C + \sqrt{\delta}\sqrt{\int_0^{2\pi}\kappa^2 d\theta + D} \qquad [\mathit{Lema\ 2.4.9.}]\end{aligned}$$

Iz gornje nejednakosti sada imamo

$$\begin{aligned}\kappa_{MAX}(t) &\leq C + \sqrt{\delta}\sqrt{2\pi\kappa_{MAX}^2(t) + D} \\ &\leq C + \sqrt{\delta}\left(\sqrt{2\pi}\kappa_{MAX}(t) + \sqrt{D}\right) \qquad \left[\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}\right] \\ &\leq C + \sqrt{2\pi\delta}\kappa_{MAX}(t) + \sqrt{\delta D}\end{aligned}$$

pa vidimo da je

$$\left(1 - \sqrt{2\pi\delta}\right)\kappa_{MAX}(t) \leq C + \sqrt{\delta D}.$$

Budući da je $\lim_{\delta\to 0} \frac{C + \sqrt{\delta D}}{1 - \sqrt{2\pi\delta}} = C$, možemo uzeti $\delta > 0$ takav da je $\kappa_{MAX}(t) \leq 2C$.

Drugi slučaj. Neka je $a = 0$. Kao i u prvom slučaju, zaključujemo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\kappa(t,\cdot) \leq C$ na $[b, b+\varepsilon]$. Tada imamo

$$\int_{\theta_0}^{b+\varepsilon} \frac{\partial\kappa}{\partial\theta}(t,\theta)\, d\theta = \kappa(t,b+\varepsilon) - \kappa(t,\theta_0)$$

iz čega dobivamo

$$\begin{aligned}|\kappa(t,\theta)| &= |\kappa(t,b+\varepsilon) - \int_{\theta_0}^{b+\varepsilon} \frac{\partial\kappa}{\partial\theta}(t,\theta)\, d\theta| \\ &\leq |\kappa(t,b+\varepsilon)| + \int_{\theta_0}^{b+\varepsilon} |\frac{\partial\kappa}{\partial\theta}(t,\theta)\, |d\theta\end{aligned}$$

i analogno kao i u prvom slučaju dobivamo $\delta > 0$ takav da je $\kappa_{MAX}(t) \leq 2C$.

Dakle, imamo $\kappa_{MAX} \leq 2C$ pa je κ zaista ograničena. □

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, a detalje je moguće pogledati u [10].

Teorem 2.4.11. *Neka su* $A, B, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $w_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *glatke funkcije i neka je* $w = w(t, x)$ *ograničeno glatko rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = A(w)w_{xx} + B(w)w_x + C(w) \\ w(0, \cdot) = w_0 \end{cases}$$

definirano na $[0, T\rangle \times [0, 2\pi]$ *.*
Ako postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ *takve da je*

$$\begin{aligned} &A(w(t, x)) \geq C_1 > 0 \\ &A(w(t, x)) + A'(w(t, x))w(t, x) \geq C_2 > 0 \end{aligned}$$

za sve $x \in [0, 2\pi]$ *i* $t \in [0, T\rangle$ *, onda su sve vremenske i prostorne derivacije od w ograničene na* $[0, T\rangle \times [0, 2\pi]$ *.*

U našem slučaju za tok skraćivanja, imamo

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + \kappa^3 \\ &\kappa(0, \cdot) = \kappa_0 > 0 \end{aligned}$$

pa za funkcije $A, B, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$A(\theta) := \theta^2, \quad B(\theta) = 0, \quad C(\theta) = \theta^3$$

i za donju među m od κ (funkcija κ je ograničena odozdo sa $\kappa_{MIN}(0)$) imamo

$$\begin{aligned} &A(\kappa(t, \theta)) = \kappa(t, \theta)^2 \geq m^2 > 0 \\ &A(\kappa(t, \theta)) + A'(\kappa(t, \theta))\kappa(t, \theta) = 3\kappa(t, \theta)^2 \geq 3m^2 > 0 \end{aligned}$$

pa se nalazimo u uvjetima gornjeg teorem zbog kojeg onda zaključujemo da su sve vremenske i prostorne derivacije od κ ograničene.

Sada napokon možemo dokazati teorem koji nam u potpunosti opisuje tok skraćivanja konveksnih krivulja.

Teorem 2.4.12 (Gage-Hamilton). *Neka* $\gamma : [0, T\rangle \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *rješava tok skraćivanja, pri čemu je* $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *regularna jednostavno zatvorena konveksna parametrizirana krivulja. Tada je maksimalno vrijeme T za koje je tok definiran dano uvjetom* $\lim_{t \to T} A(t) = 0$*.*

Dokaz. Prema teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja znamo da postoji maksimalno rješenje $\gamma : [0, T\rangle \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ toka skraćivanja.

Budući da je $\frac{dA}{dt} = -2\pi$, funkcija $A = A(t)$ je padajuća i ograničena odozdo pa postoji $\lim_{t\to T} A(t)$. Pretpostavimo da je $\lim_{t\to T} A(t) = \varepsilon > 0$. Tada je $A(t) \geq \varepsilon$ za sve $t \in [0, T\rangle$ pa iz prethodnih lema zaključujemo da je κ ograničena, no onda su i sve derivacije od κ ograničene. Tada postoji glatka funkcija $\kappa(T, \cdot) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ takva da je $\kappa(T, \cdot) = \lim_{t\to T} \kappa(t, \cdot)$. Tada nam teorem o egzistenciji i jedinstvenosti primijenjen na parametriziranu krivulju γ_T određenu sa $\kappa_{T,\cdot}$ (isto kao i u *Teoremu 2.4.3*) kaže da možemo proširiti rješenje toka i nakon trenutka T, no to je nemoguće jer je T maksimalno vrijeme za koje je tok definiran.

Stoga, mora biti $\lim_{t\to T} A(t) = 0$. □

Dakle, Gage-Hamiltonov teorem nam govori da će konveksna krivulja pod tok skraćivanja nestati, odnosno da će se sažeti u točku.

Napomena 2.4.13. *Pomoću Gage-Hamiltonovog teorema i evolucijske jednakosti za površinu unutrašjnosti možemo eksplicitno odrediti mmaksimalno vrijeme trajanja toka. Naime, iz spomenute evolucijske jednakosti imamo*

$$\frac{dA}{dt} = -2\pi.$$

pa integiranjem dobivamo

$$A(T) - A(0) = -2\pi T.$$

Gage-Hamiltonov teorem kaže da tok traje sve dok krivulja ne nestane pa imamo $A(T) = 0$ iz čega dobivamo da je maksimalno vrijeme trajanja toka dano sa

$$T = \frac{A(0)}{2\pi}.$$

2.5 Tok skraćivanja krivulja koje nisu konveksne

U ovoj ćemo kratkoj točki navesti Graysonov teorem koji će nam sa prethodno dokazanim rezultatima u potpunosti opisati kako tok skraćivanja djeluje na općenitu jednostavno zatvorenu parametriziranu ravninsku krivulju čime ćemo u potpunosti zaokružiti priču o toku skraćivanja.

U tu svrhu, dokazujemo sljedeći iznimno bitan rezultat.

Propozicija 2.5.1 (Princip izbjegavanja). *Neka su $\gamma : [0, T_1\rangle \times I \to \mathbb{R}^2$ i $\alpha : [0, T_2\rangle \times J \to \mathbb{R}^2$ dva rješenja toka skraćivanja za polazne regularne parametrizirane krivulje γ_0, α_0. Ako su tragovi parametriziranih krivulja γ_0, α_0 disjunktni, onda su tragovi parametriziranih krivulja $\gamma(t, \cdot)$ i $\alpha(t, \cdot)$ također disjunktni za sve trenutke t.*

Dokaz. Budući da su parametrizirane krivulje γ, α regularne, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su one parametrizirane duljinom luka. Neka je $T = \min\{T_1, T_2\}$ Definirajmo funkciju $f : [0, T\rangle \times I \times J \to \mathbb{R}$ sa

$$f(t, s_1, s_2) := \langle \gamma(t, s_1) - \alpha(t, s_2), \gamma(t, s_1) - \alpha(t, s_2) \rangle.$$

Prvo, imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= 2\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \gamma - \alpha \rangle \\ &= 2\langle \kappa_\gamma N_\gamma - \kappa_\alpha N_\alpha, \gamma - \alpha \rangle\end{aligned}$$

Nadalje, računamo

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = 2\langle T_\gamma, \gamma - \alpha \rangle$$

iz čega dobivamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} = 2\langle \kappa_\gamma N_\gamma, \gamma - \alpha \rangle + 2$$

Sasvim analogno dobivamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} = -2\langle \kappa_\alpha N_\alpha, \gamma - \alpha \rangle + 2.$$

Iz dobivenih jednakosti vidimo da vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial s_2^2} - 4,$$

odsnosno imamo

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = -4.$$

Pretpostavimo sada da postoji neki trenutak $t \in [0, T\rangle$ takav da se tragovi parametriziranih krivulja $\gamma(t, \cdot)$ i $\alpha(t, \cdot)$ sijeku. Tada postoje postoje parametri $s_1 \in I$, $s_2 \in J$ takvi da je

$$f(t, s_1, s_2) = 0.$$

Budući da su tragovi od γ_0 i α_0 disjunktni, nužno je $t > 0$. Međutim, budući da je

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \Delta f = -4 < 0,$$

znamo da funkcija f zadovoljava načelo minimuma pa budući da je $f(t, s_1, s_2) = 0$ u nekom trenutku $t > 0$, moralo bi isto vrijediti i u trenutku $t = 0$, međutim to je nemoguće jer su polazni tragovi bili disjunktni. $\square$

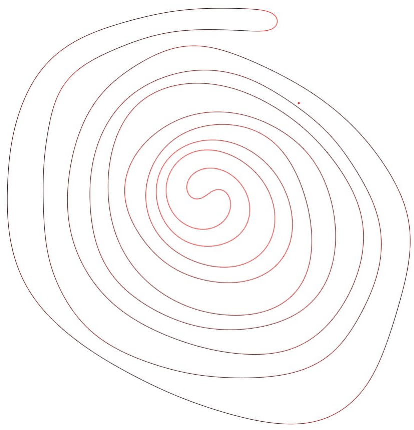
Dakle, princip izbjegavanja nam govori da ako se tragovi parametriziranih krivulja ne sijeku, onda se neće sijeći niti za vrijeme evolucije pod tokom skraćivanja. Iz toga zaključujemo da ako je $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ regularna zatvorena parametrizirana krivulja, onda je vrijeme trajanja toka nužno konačno. Naime, γ je glatko preslikavanje, a skup $[0, L]$ je kompaktan, pa je i trag od γ kompaktan skup. Zbog toga postoji neka kružnica radijusa $R > 0$ takva da je trag od γ sadržan u unutrašnjosti te kružnice. Parametriziramo li spomenutu kružnicu sa $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je $\alpha(u) = (R\cos(u), R\sin(u))$, onda po *Primjeru 2.1.2.* znamo da je vrijeme trajanja toka skraćivanja za α konačno, a sada nam princip izbjegavanja govori da je nužno onda i vrijeme trajanja toka skraćivanja za γ također konačno.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, a detaljnije se može pogledati u [6].

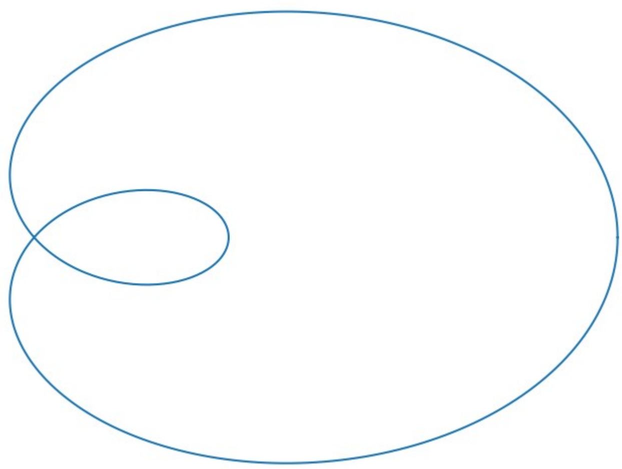
Teorem 2.5.2 (**Grayson**). *Neka je $\gamma_0 : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ regularna jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja.*
Tada postoji rješenje $\gamma : [0, T\rangle \times [0, L] \to \mathbb{R}^2$ toka skraćivanja s obzirom na γ_0. Štoviše, $\gamma(t, \cdot)$ je glatko za sve $t \in [0, T\rangle$ i postoji trenutak $T^* < T$ takav da je $\gamma(T^*, \cdot)$ konveksna.

Pokažimo sada kako nam Graysonov teorem zajedno za prethodnim rezultatima u potpunosti opisuje tok skraćivanja jednostavno zatvorenih krivulja. U tu svrhu, neka je $\gamma_0 : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ jednostavno zatvorena parametrizirana krivulja. Graysonov teorem nam kaže da tada postoji rješenje $\gamma : [0, T\rangle \times [0, L] \to \mathbb{R}^2$ toka skraćivanja i da postoji neki trenutak $T^* < T$ takav da je $\gamma(T^*, \cdot)$ konvkeksna i da je $\gamma(t, \cdot)$ glatko za sve $t \in [0, T\rangle$. Funkcija $\kappa : [0, T^*] \times [0, L] \to \mathbb{R}$ je zbog toga glatka, a kako je definirana na kompaktnom skupu, ona je i ograničena. Stoga nam *Teorem 2.3.1.* kaže da je $\gamma(t, \cdot)$ jednostavno zatvorena za sve $t \in [0, T^*]$. Drugim riječima, jednostavno zatvorena krivulja pod tokom skraćivanja postane konveksna bez samopresijecanja. Međutim, jednom kada krivulja postane konveksna, onda nam Gage-Hamiltonov teorem kaže da krivulja i u ostatku toka ostaje konveksna i da konvergira u točku, odnosno da nestaje. Dakle, pod tokom skraćivanja svaka jednostavno zatvorena krivulja nestaje u konačnom vremenu bez samopresijecanja i bez razvijanja singulariteta (dakle, imamo glatkoću u svim trenucima). Napomenimo kako to uopće nije intuitivan rezultat - naime, ta tvrdnja vrijedi i za parametriziranu krivulju sa tragom kao na priloženoj slici.

Na kraju, napomenimo da ako početna parametrizirana krivulja nije jednostavno zatvorena da onda singulariteti mogu nastati i prije nego što se krivulja stisne u točku, primjerice ako promatramo trag neke parametrizacija Pascalovog puža.



Slika 2.1: Trag jednostavno zatvorene krivulje koja će pod tokom skraćivanja nestati bez samopresijecanja i stvaranja singulariteta.



Slika 2.2: Pod tokom skraćivanja će se manji kružni dio stisnuti brže od većeg kružnog dijela zbog veće zakrivljenosti i doći će do stvaranja singulariteta.

Poglavlje 3

Geometrija hiperploha

Glavni cilj ovog poglavlja jest obraditi osnovne pojmove i rezultate teorije hiperploha u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

3.1 Diferencijalni račun na hiperplohama

Definicija 3.1.1. ***Parametrizirana ploha*** *u* $\mathbb{R}^3$ *jest glatko preslikavanje* $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$*, pri čemu je* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *otvoren skup, takvo da je diferencijal* $d\varphi_x \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ *injektivan za sve* $x \in U$*. Sliku* $\varphi(U)$ *nazivamo* ***hiperploha****.*

Napomena 3.1.2.

- *Hiperplohe, općenito, nisu regularne plohe u* $\mathbb{R}^3$*.*
- *Ovisno o kontekstu, kod parametrizirane plohe ćemo dopustiti i da je skup* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *kompaktan, no onda zahtijevamo da je diferencijal injektivan na njegovom interioru.. U tom je slučaju, jasno, pripadna hiperploha također kompaktan skup u* $\mathbb{R}^3$*.*

U nastavku ovog rada, koristit ćemo Einsteinovu notaciju kako bismo što je više moguće pojednostavili eksplicitni račun svih veličina.

Neka je S hiperploha u $\mathbb{R}^3$ imerzirana pomoću preslikavanja $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$. Ako je $p \in S$ točka, onda je skup $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}|_p, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}|_p \right\}$ baza za tangencijalni prostor T_pS. Nadalje, hiperploha nasljeđuje metriku iz ambijentalnog prostora $\mathbb{R}^3$ - naime, za točku $p \in S$, pripadna metrika $g : T_pS \times T_pS$ definirana je sa

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j,$$

pri čemu je

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \rangle.$$

Definicija 3.1.3. *Neka je S hiperploha u $\mathbb{R}^3$.* ***Vektorsko polje*** *na S jest preslikavanje $V : S \to TS$ takvo da je $V(p) \in T_pS$ za sve $p \in S$.*

Uzmimo sada $f \in C^\infty(S)$. Definiramo **gradijent funkcije** f u točki $p \in S$ kao jedinstveni tangencijalni vektor $\nabla f_p \in T_pS$ za koji vrijedi

$$df_p(X) = g(\nabla f_p, X), \forall X \in T_pS.$$

Ono što nas sada zanima jest kako izraziti gradijent u lokalnim koordinatama. U tu svrhu, uočimo kako nam, za točku $p \in S$, metrika g inducira izomorfizam prostora T_pS i $T_p^*S = \left(T_pS\right)^*$ - naime, za dani $v \in T_pS$ imamo da je $b := g(v, \cdot) \in T_p^*S$ i očito je $b : T_pS \to T_p^*S$ linearni operator. Zbog nedegeneriranosti metrike, taj je operator injektivan pa nam teorem o rangu i defektu kaže da je to ustvari izomorfizam s inverzom $\# : T_p^*S \to T_pS$. Kako po definiciji imamo

$$b\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right) = g_{ij}dx^j,$$

te kako djelovanje inverzom odgovara množenju inverznom matricom, imamo

$$\#(dx^i) = g^{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j},$$

pri čemu je $\left[g^{ij}\right] = \left[g_{ij}\right]^{-1}$.
Sada, po definiciji gradijenta, imamo

$$\begin{aligned}
\nabla f_p &= \#(df) \\
&= \#(\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^i}\#(dx^i) \\
&= g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}.
\end{aligned}$$

Nadalje, neka je $\overline{\nabla}$ kovarijantna derivacija na $\mathbb{R}^3$. Tada djelovanje te kovarijantne derivacije odgovara standardnom deriviranju funkcije u smjeru danog vektora. Pomoću te kovarijantne derivacije u ambijentalnom prostoru definiramo kovarijantnu derivaciju na hiperplohi S kao

$$\nabla_V W := \left(\overline{\nabla}_V W\right)^T$$

gdje su V, W vektorska polja na S, a ^{T} označava projekciju na pripadni tangencijalni prostor. Dodatno, očimo da ako je $f \in C^\infty(S)$ da onda imamo $(\nabla_V f)_p = df_p(V)$ za $V \in T_pS$.

Sada nas zanima kako djelovanje kovarijantne derivacije prikazati u lokalnim koordinatama. U tu svrhu, uočimo da su $\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}$ tangencijalni vektori pa je $\nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \in TS$. Stoga, taj vektor možemo prikazti kao linearnu kombinaciju baznih vektora pa imamo

$$\nabla_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

Koeficijente Γ_{ij}^k nazivamo **Christoffelovim simbolima.** Uočimo kako njih, ekvivalentno, možemo definirati preko relacija

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right)^T = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

Sljedeća nam lema daje osnovna i poznata svojstva kovarijantne derivacije.

Lema 3.1.4. *Neka je S hiperploha u $\mathbb{R}^3$, neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, neka su V, V_1, V_2, W_1, W_2 glatka vektorska polja na S te neka je $f \in C^\infty(S)$. Tada vrijedi:*

1. $\nabla_W(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha \nabla_W V_1 + \beta \nabla_W V_2$,
2. $\nabla_W(fV) = \nabla_W f \cdot V + f \nabla_W V$,
3. $\nabla_{\alpha W_1 + \beta W_2} V = \alpha \nabla_{W_1} V + \beta \nabla_{W_2} V$,
4. $\nabla_{fW} V = f \nabla_W V$.

Pomoću gornje leme možemo u koordinatama zapisati djelovanje kovarijantne derivacije. Naime, ako su dana vektorska polja $V = v^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ i $W = w^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, onda imamo

$$\begin{aligned}
\nabla_V W &= \nabla_{v^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}} w^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \\
&= v^j \partial_j w^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \\
&= v^j w^i \nabla_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + v^j \nabla_j w^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \\
&= v^j w^i \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \\
&= \left(v^j w^i \Gamma_{ij}^k + v^j \frac{\partial w^k}{\partial x^j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Posebno, ako je $V = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$, onda imamo

$$\nabla_j W = \left(w^k \Gamma_{kj}^i + \frac{\partial w^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

Sljedeći nam je cilj definirati Laplace-Beltramijev operator. U tu svrhu, neka je X neko vektorsko polje na S. Uzmemo li točku $p \in S$, onda nam kovarijantna derivacija inducira endomorfizam $\nabla.X : T_pS \to T_pS$ definiran sa $Y_p \mapsto \nabla_{Y_p}X$. Trag tog endomorfizma nazivamo **divergencija** vektorskog polja X i označavamo ga sa $div(X)$. Ono što nas sada zanima jest kako $div(X)$ izraziti u lokalnim koordinatama.
U tu svrhu, prvo računamo:

$$\begin{aligned}\nabla_j X &= \nabla_j X^i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}\\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + X^i \nabla_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + X^i \Gamma^k_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\\ &= \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + X^i\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\end{aligned}$$

pa slijedi da je

$$div(X) = \frac{\partial X^j}{\partial x^j} + X^i \Gamma^i_{ij}.$$

Trebat će nam i drugačija formula za divergenciju u koordinatama koju sada izvodimo. Naime, računamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{det(g)}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{det(g)}X^i\right) &= \frac{1}{\sqrt{det(g)}}\left(\sqrt{det(g)}\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{\partial\left(\sqrt{det(g)}\right)}{\partial x^i}\right)\\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2det(g)}\frac{\partial\,(det(g))}{\partial x^i}X^i\\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}tr(g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^i})X^i \qquad [\textit{Jacobijeva formula}]\\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}tr(g^{jk}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i})X^i\\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}g^{jk}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}X^i\end{aligned}$$

Veza između derivacije metrike i Christoffelovih simbola dana je jednadžbom

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \Gamma^l_{ik}g_{lj} + \Gamma^l_{ij}g_{kl}.$$

Uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{det(g)}}\frac{\partial\left(\sqrt{det(g)}X^i\right)}{\partial x^i} &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}g^{jk}\left(\Gamma^l_{ik}g_{lj} + \Gamma^l_{ij}g_{kl}\right)X^i \\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{ik}\delta^k_l + \Gamma^l_{ij}\delta^j_l\right)X^i \\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{il} + \Gamma^l_{il}\right)X^i \\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma^l_{il}X^i \\ &= div(X).\end{aligned}$$

Stoga, dobili smo

$$div(X) = \frac{1}{\sqrt{det(g)}}\frac{\partial\left(\sqrt{det(g)}X^i\right)}{\partial x^i}.$$

Napomena 3.1.5. *Mi smo do sada definirali divergenciju samo za vektorska polja, međutim ako imamo općenito polje $X : S \to \mathbb{R}^3$na hiperplohi S (dakle, kodomena nije nužno tangencijalni prostor u danoj točki) onda definiramo divergenciju od X kao*

$$div(X) := g^{ij}\langle\frac{\partial X}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\rangle.$$

Pokazuje se da ako je X dodatno i vektorsko polje na S da se onda navedene dvije definicije divergencije podudaraju.

Uzmimo sada $f \in C^\infty(S)$. Po definiciji, znamo da je ∇f vektorsko polje na S pa možemo promatrati njegovu divergenciju. Na taj način dolazimo do **Laplace-Beltramijevog operatora** funkcije f koji je definiran kao $\triangle f : S \to \mathbb{R}$, pri čemu je $\triangle f := div(\nabla f)$. Sada želimo Laplace-Beltramijev operator prikazati u lokalnim koordinatama. Imamo

$$\begin{aligned}\triangle f &= div(\nabla f) \\ &= div(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{det(g)}}\frac{\partial}{\partial i}\left(\sqrt{det(g)}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right).\end{aligned}$$

Zadnji objekt diferencijalnog računa na hiperplohama koji će nam biti potreban jest pojam Hesijana. Naime, za $f \in C^\infty(S)$ definiramo **Hesijan** kao linearni operator definiran sa

$$\nabla^2 f(X, Y) := X(fY) - df(\nabla_X Y).$$

Napomena 3.1.6. *Ekvivalentna definicijia Hesijana funkcije f jest kao dvostruka iteracija kovarijantne derivacije, odnosno $\nabla^2 f = \nabla\nabla f$.*

Kako bismo izrazili Hesijan u lokalnim koordinatama, računamo:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(X,Y) &= X(fY) - df(\nabla_X Y) \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - df(\nabla_{X^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}} Y^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}) \\
&= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) - df(X^i(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k})) \\
&= X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) - X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) \\
&= X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - X^i Y^j \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

3.2 Tenzori

Definicija 3.2.1. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i neka je V^* njegov dual. Za $p, q \geq 0$ sa T^p_q označavamo prostor svih multilinearnih preslikavanja $f : (V^*)^p \times V^q \to \mathbb{R}$. Elemente tog prostora nazivamo **tenzorima tipa** (p, q).*

Primjer 3.2.2. *U okviru teorije hiperploha, bitni su nam sljedeći tenzori:*

1. *Funkcionali na tangencijalnim prostorima jesu tenzori tipa* $(0, 1)$.

2. *Svaki tangencijalni vektor možemo poistovjetiti sa tenzorom tipa* $(1, 0)$. *Naime, to je direktna posljedica činjenice da su prostori $(T_pS)^{**}$ i T_pS izomorfni.*

3. *Bilinearne forme jesu tenzori tipa* $(0, 2)$.

4. *Linearne operatore možemo poistovjetiti sa tenzorima tipa* $(1, 1)$. *Naime, ako je $T : V \to V$ linearni operator, onda ga možemo identificirati sa tenzorom tipa* $(1, 1)$ *koji je definiran sa $\tau : V^* \times V \to \mathbb{R}$ i koji djeluje kao $\tau(\alpha, v) = \alpha(Tv)$.*

Jedna izuzetno korisna stvar vezana uz tenzore u okviru teorije hiperploha jest činjenica da pomoću metrike g možemo mijenjati tip tenzora.
Naime, pretpostavimo da je $v \in T_pS$ tangencijalni vektor. Tada je $g(v, \cdot) \in T^*_pS$ pa ga možemo prikazati kao

$$g(v, \cdot) = \alpha_i dx^i.$$

Zbog toga, imamo

$$\begin{aligned}\alpha_i &= g(v, \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}) \\ &= g(v^j \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}) \\ &= g_{ij} v^j.\end{aligned}$$

Sukladno gore izvedenim koeficijentima i zbog toga što je funkcional $g(v, \cdot)$ usko vezan uz vektor v, označavamo ga sa $v_i = g_{ij} v^j$. Dakle, ono što smo sada napravili jest to da smo tangencijalni vektor (dakle, tenzor tipa $(1, 0)$) transformirali u linearni funkcional na T_pS (dakle, u tenzor tipa $(0, 1)$) i zbog toga kažemo da smo vektoru v **spustili indeks**.

Koristeći metriku, možemo i podizati indekse. Naime, recimo da imamo tenzor tipa $(0, 1)$ - označimo ga sa A. Dakle, A je funkcional na T_pS pa ga možemo prikazati kao

$$A = A_j dx^j.$$

Već smo prije vidjeli da metrika inducira izomorfizam prostora T_pS i T_p^*S pa kontangencijalnom vektoru A (dakle, tenzoru tipa $(0, 1)$) možemo pridružiti tangencijalni vektor (dakle, tenzor tipa $(1, 0)$) definiran sa

$$\#(A) = g^{ij} A_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}.$$

Stoga, kotangencijalni vektor smo pretvorili u tangencijalni vektor, pa kažemo da smo mu **podigli indeks.**

Pretpostavimo sada da je A tenzor tipa $(0, 2)$ (dakle, bilinearna forma) na tangencijalnom prostoru T_pS. Tada toj bilinearnoj formi A možemo metrikom podići indeks i na taj način dobiti tenzor tipa $(1, 1)$ (odnosno, možemo dobiti linearni operator na T_pS). Zaista, to podizanje indeksa dobivamo tako da definiramo preslikavanje $\theta : T_pS \to T_pS$ sa

$$\theta(v) := \#(A(v, \cdot)).$$

U koordinatnom zapisu imamo $\theta^i_j = g^{ik} A_{kj}$.

Također, dvostrukim djelovanjem inverznom metrikom možemo tenzoru tipa $(0, 2)$ dva puta podići indekse i na taj način dobiti tenzor tipa $(2, 0)$. Zaista, ako je A tenzor tipa $(0, 2)$ onda definiramo $B : T_p^*S \times T_p^*S \to \mathbb{R}$ sa

$$A(f, g) := A(\#(f), \#(g)).$$

U koordinatnom zapisu imamo

$$\begin{aligned}B^{ik} &= A(\#(dx^i, \#(dx^k)) \\ &= A(g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}, g^{kl} \frac{\partial\varphi}{\partial x^l}) \\ &= g^{ij} g^{kl} A_{jl}.\end{aligned}$$

3.3 Srednja zakrivljenost

Glavni cilj ove točke jest definirati srednju zakrivljenost hiperplohe u $\mathbb{R}^3$. U tu svrhu, neka je S hiperploha u $\mathbb{R}^3$ i neka je $N : S \to \mathbb{S}^2$ normalno jedinično polje na S. Kako je $\langle N, N\rangle = 1$ deriviranjem dobivamo

$$\langle \frac{\partial N}{\partial x^i}, N\rangle = 0,$$

to jest, imamo $\dfrac{\partial N}{\partial x^i} \in T_pS$.

Definicija 3.3.1. *Preslikavanje $W : T_pS \to T_pS$ definirano sa*

$$W(X) := \overline{\nabla}_X N$$

naziva se ***Weintgartenovo preslikavanje.***

Napomena 3.3.2. *Budući da je $N : S \to \mathbb{S}^2$, po definiciji slijedi da je kodomena Weintgartenovog preslikavanja skup $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, međutim vrijedi $T_{N(p)}\mathbb{S}^2 = T_pS$ pa je Weintgartenovo preslikavanje dobro definirano.*

Weintgartenovo preslikavanje je simetrični endomorfizam od T_pS i kao takav je taj operator dijagonalizabilan. Svojstvene vrijednosti κ_1, κ_2 Weintgartenovog preslikavanja nazivamo **glavnim zakrivljenostima**, a **srednju zakrivljenost** hiperplohe S u točki $p \in S$ definiramo kao trag pripadnog Weintgartenovog preslikavanja i označavamo ju sa $H(p)$.

Weintgartenovom preslikavanju možemo pridružiti simetričnu bilinearnu formu koju nazivamo **druga fundamentalna forma** i označavamo ju sa $A = \left[h_{ij}\right]$. Ta je forma definirana sa

$$A(X, Y) := \langle W_p(X), y\rangle,$$

pri čemu je $p \in S$ točka, W_p pripadni Weintgartenov operator, a $X, Y \in T_pS$. U lokalnim koordinatama, koeficijenti druge fundamentalne forme dani su sa

$$h_{ij} = \langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}\rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\rangle.$$

Budući da imamo metriku g, možemo i definirati trag fundamentalne forme. Naime, metrikom g možemo drugoj fundamentalnoj formi podići indeks i na taj način dobiti tenzor tipa $(1, 1)$ (dakle, dobivamo linearni operator) i onda trag druge fundamentalne forme definiramo kao trag tog linearnog operatora. Međutim, po definiciji druge fundamentalne forme, taj linearni operator je upravo Weintgartenovo preslikavanje pa ako sa $\left[h^i_j\right]$ označimo matricu koja reprezentira Weintgartenov operator u standardnoj bazi, imamo

$$h^i_j = g^{ik} h_{kj}.$$

Kao posljedicu toga, dobivamo sljedeću formulu za srednju zakrivljenost:

$$
\begin{aligned}
H &= \kappa_1 + \kappa_2 \\
&= h_i^i \\
&= g^{ik} h_{ki} \\
&= g^{ik} h_{ik} \\
&= g^{ij} h_{ij} \\
&= g^{ij} \langle \frac{\partial N}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \rangle \\
&= div(N).
\end{aligned}
$$

Poglavlje 4

Tok srednje zakrivljenosti ploha u $\mathbb{R}^3$

Ono što u ovom poglavlju želimo napraviti jest definirati analogon toka skraćivanja, no ovaj put za plohe u prostoru. Dakle, kao i kod krivulja, želimo modelirati tok u kojem se točke plohe gibaju u smjeru normale određenom brzinom, a za vrijednost te brzine biramo upravo srednju zakrivljenost. Motivirani time, u ovom poglavlju definiramo tok srednje zakrivljenosti i dokazujemo neka njegova osnovna svojstva, a za više informacija se može pogledati u [11].

4.1 Egzistencija i jedinstvenost rješenja

U ovoj ćemo točki definirati tok srednje zakrivljenosti hiperploha u $\mathbb{R}^3$ te ćemo dokazati egzistenciju i jedinstvenost rješenja po uzoru na [12].

Definicija 4.1.1. *Neka je $\varphi_0 : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana ploha.* ***Tok srednje zakrivljenosti*** *jest familija parametriziranih ploha $\varphi : [0, T\rangle \times U \to \mathbb{R}^3$ koja zadovoljava*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = HN \\ \varphi(0, \cdot) = \varphi_0 \end{cases}$$

pri čemu su H, N redom srednja zakrivljenost i unutarnja normala parametrizirane plohe φ_t.

Napomena 4.1.2. *1. Uočimo kako predznak normale ne utječe na predzank veličine HN budući da promjenom predznaka normala i srednja zakrivljenost mijenja predznak.*

2. *Tok srednje zakrivljenosti invarijantan je na izometrije od* $\mathbb{R}^3$. *Zaista, ako je* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *izometrija, onda imamo*

$$\begin{aligned}\frac{\partial (A\varphi)}{\partial t} &= A\frac{\partial \varphi}{\partial t}\\ &= A \cdot HN\\ &= H(AN).\end{aligned}$$

3. *Tok srednje zakrivljenosti je također invarijantan pod difeomorfizmima od* U, *odnosno invarijantan je na reparametrizacije. To nam govori da su sve bitne karakteristike toka sadržane u hiperplohama* $\varphi_t(U)$.

Da bismo se mogli posvetiti dokazu teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja toka, moramo najprije vektor HN prikazati na nešto pogodniji način koristeći objekte vezane uz diferencijalni račun na hiperplohama.
U tu svrhu, sjetimo se da je Hesijan preslikavanja $f \in C^\infty(S)$ u lokalnim koordinatama dan kao

$$\nabla^2 f(X, Y) = X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - X^i Y^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Iz toga posebno dobivamo

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

Sljedeći korak jest povezivanje Laplace-Beltramijevog operatora sa Hesijanom. Naime, po definiciji je Laplace-Beltramijev operator dan kao

$$\triangle = div \circ \nabla.$$

Zbog definicije divergencije, gornja jednakost postaje

$$\triangle = tr \circ \nabla \circ \nabla = tr_g(\nabla^2),$$

pri čemu sa tr_g označavamo da uzimamo trag Hesijana s obzirom na metriku g (naime, Hesijan je, po definiciji, tenzor tipa $(0, 2)$ pa je njegov trag definiran samo u kontekstu metrike). Nadalje, Gauss-Weintgartenove jednadžbe nam daju

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + h_{ij} N.$$

Kao posljedicu gornjih razmatranja, dobivamo sljedeću formulu za vektor srednje zakrivljenosti

$$\begin{aligned}
\triangle\varphi &= tr_g(\nabla^2\varphi) \\
&= g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) \\
&= g^{ij}h_{ij}N \\
&= HN.
\end{aligned}$$

Zbog toga, tok srednje zakrivljenosti možemo zapisati i kao

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \triangle\varphi.$$

Unatoč tome što ova jednadžba izgledom podsjeća na jednadžbu provođenja topline, ovdje se radi o nešto kompleksnijem tipu jednadžbe. Naime, ovdje je riječ o kvazilinearnoj paraboličkoj jednadžbi drugog reda budući da Laplace-Beltramijev operator $\triangle$ sa desne strane ovisi o konkretnoj metrici $g(t)$.

Sada se posvećujemo dokazu egzistencije i jedinstvenosti rješenja toka srednje zakrivljenosti u slučaju kompaktnih hiperploha.

Teorem 4.1.3. *Neka je $\varphi_0 : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana ploha sa kompaktnim nosačem S. Tada postoji $T > 0$ i jedinstvena familija parametriziranih ploha $\varphi : [0, T\rangle \times U \to \mathbb{R}^3$ koja zadovoljava*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = HN \\ \varphi(0,\cdot) = \varphi_0 \end{cases}$$

Dokaz. Za početak, budući da je φ_0 parametrizirana ploha, teorija stabilnosti (vidi [8]) nam kaže da će i $\varphi(t,\cdot)$ biti parametrizirana ploha za dovoljno male $t > 0$ pa je dovoljno samo dokazati egzistenciju rješenja.

U tu svrhu, pretpostavimo da je $V = v^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$ neko vektorsko polje na S takvo da jednadžba

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} = \triangle_g\tilde{\varphi} + v^k\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x^k}$$

ima rješenje $\tilde{\varphi} : [0, T\rangle \times U \to \mathbb{R}^3$ za zadanu početnu parametriziranu plohu φ_0. Uzmimo sada neku familiju $\phi : [0, T\rangle \times U \to U$ difeomorfizama od U i definirajmo

$$\varphi(t, p) := \tilde{\varphi}(t, \phi(t, p)).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,p) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(t,\phi(t,p)) \\
&= \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}(t,\phi(t,p))\frac{\partial \phi^k}{\partial t}(t,p) + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(t,\phi(t,p)) \\
&= \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}(t,\phi(t,p))\frac{\partial \phi^k}{\partial t}(t,p) + \triangle_{g(t)}\tilde{\varphi}(t,\phi(t,p)) + v^k\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}(t,\phi(t,p)) \\
&= \triangle_{g(t)}\tilde{\varphi}(t,\phi(t,p)) + \frac{\tilde{\varphi}}{\partial x^k}(t,\phi(t,p))\left(v^k + \frac{\partial \phi^k}{\partial t}(t,p)\right)
\end{aligned}$$

Iz ove jednadžbe sada vidimo da je dovoljno pronaći familiju difeomorfizama koja zadovoljava

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -V \\ \phi(0,\cdot) = id. \end{cases}$$

Gornja zadaća ima rješenje budući da se radi o sustavu običnih diferencijalnih jednadžbi sa početnim uvjetom (slično kao i *Teorem 4.9.9* u [1]) pa možemo naći njegovo rješenje. Ponovno, teorija stabilnosti (vidi [8]) nam garantira da je za dovoljno male $t > 0$ preslikavanje $\phi(t,\cdot)$ difeomorfizam. Stoga, dobivamo da vrijedi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,p) = \triangle_{g(t)}\tilde{\varphi}(t,\phi(t,p)) = \triangle_{g(t)}\varphi(t,p)$$

te dodatno

$$\varphi(0,p) = \tilde{\varphi}(0,\phi(0,p)) = \tilde{\varphi}(0,p) = \varphi_0(p)$$

pa smo došli do rješenja toka srednje zakrivljenosti.

Iz gornjeg vidimo da sve što ustvari sada moramo napraviti jest dokazati da jednadžba

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \triangle_{g(t)}\tilde{\varphi} + v^k\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}$$

ima rješenje za neko pogodno odabrano vektorsko polje V.
U tu svrhu, definirajmo vektorsko polje V sa

$$v^k = g^{ij}\left(\Gamma^k_{ij} - (\Gamma_0)^k_{ij}\right),$$

pri čemu su Γ^k_{ij} Christoffelovi simboli hiperplohe $\varphi(t,U)$, a $(\Gamma_0)^k_{ij}$ su Christoffelovi simboli hiperplohe S. Tada promatrana jednadžba postaje

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} &= \triangle_{g(t)}\tilde{\varphi} + v^k\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k} \\
&= g^{ij}(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}) + g^{ij}\left(\Gamma^k_{ij} - (\Gamma_0)^k_{ij}\right)\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k} \\
&= g^{ij}\left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_0)^k_{ij}\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^k}\right)
\end{aligned}$$

Ovo je sada sustav kvazilinearnih paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (jer je $[g^{ij}]$ pozitivno definitna matrica koja ovisi samo o prvim derivacijama od φ) pa nam rješenje promatrane zadaće slijedi iz lokalne teorije paraboličkih jednadžbi (vidi [12]). □

Primjer 4.1.4. *Kako minimalne plohe imaju srednju zakrivljenost koja je svugdje jednaka nuli, one ne evoluiraju pod tokom srednje zakrivljenosti.*

Primjer 4.1.5. *Neka je S sfera u $\mathbb{R}^3$ radijusa $R > 0$ i središtem u ishodištu. Neka je φ_0 standardna parametrizacija sfere S i definirajmo*

$$\varphi(t, p) := R(t)\varphi_0(p).$$

Želimo odrediti funkciju $R(t)$ tako da gore definirana funkcija φ zadovoljava tok skraćivanja. U tom slučaju, zaključujemo da mora biti

$$\begin{aligned} R'(t)\varphi_0(p) &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, p) \\ &= H(t, p)N(t, p) \\ &= \frac{2}{R(t)}\varphi_0(p). \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da funkcija R mora zadovoljavati sljedeću zadaću

$$\begin{cases} R'(t) = \dfrac{2}{R(t)} \\ R(0) = R. \end{cases}$$

Ovo je separabilna obična diferencijalna jednadžba čije je rješenje funkcija

$$R(t) = \sqrt{R^2 - 4t}.$$

Stoga, tok srednje zakrivljenosti sfere S jest $\varphi(t, p) = \sqrt{R^2 - 4t} \cdot \varphi_0(p)$.

Napomena 4.1.6. *Gornji nam primjer ukazuje na neka svojstva toka srednje zakrivljenosti koja su vrlo slična toku skraćivanja krivulja:*

- *sfera ima konačno vrijeme trajanja toka ($T_{MAX} = \frac{R^2}{4}$),*
- *sfera pod tokom srednje zakrivljenosti konvergira prema točki, odnosno nestaje.*

Ovo su također neka od pitanja koja će nas zanimati i za općenite hiperplohe - naime, zanimat će nas što možemo reći o vremenu trajanja toka i zanimat će nas hoće li konveksne hiperplohe pod tokom konvergirati prema točki, odnosno hoće li nestajati.

4.2 Evolucijske jednadžbe geometrijskih veličina

U ovoj točki ćemo izvesti evolucijske jednadžbe geometrijskih veličina za tok srednje zakrivljenosti. U nastavku ove točke uvijek radimo po pretpostavkom da je promatrana hiperploha dana kao slika parametrizirane plohe φ koja na toj hiperplohi inducira metriku $\left[g_{ij}\right]$, te čija je pripadna druga fundamentalna forma dana sa $A = h_{ij}$, a N je normala tih hiperploha.

Propozicija 4.2.1. *Pod tokom srednje zakrivljenosti, vrijedi*

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla H.$$

Dokaz. Budući da je $\langle N, N\rangle = 1$, imamo

$$\langle \frac{\partial N}{\partial t}, N\rangle = 0.$$

Također kako je $\langle N, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\rangle = 0$, imamo

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\rangle &= -\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x^i}\rangle \\
&= -\langle N, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial t}\rangle \\
&= -\langle N, \frac{\partial}{\partial x^i}(HN)\rangle \\
&= -\langle N, \frac{\partial H}{\partial x^i} N + H \frac{\partial N}{\partial x^i}\rangle \\
&= -\frac{\partial H}{\partial x^i}
\end{aligned}$$

Zbog toga, sve zajedno imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} &= g^{ij} \langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \\
&= -g^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \\
&= -\nabla H.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 4.2.2. *Pod tokom srednje zakrivljenosti vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{ij}\right) = -2H h_{ij}.$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{ij}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\langle\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\rangle \\
&= \langle\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\rangle + \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j\partial t}\rangle \\
&= \langle\frac{\partial(HN)}{\partial x^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\rangle + \langle\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial(HN)}{\partial x^j}\rangle \\
&= 2H\langle\frac{\partial N}{\partial x^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\rangle \\
&= -2Hh_{ij}
\end{aligned}$$

□

Na hiperplohi, pomoću metrike, definiramo **element površine** kao

$$d\mu := \sqrt{det(g)}dx.$$

Element površine nam omogućuje integriranje "dovoljno lijepih" funkcija po hiperplohi jer naprosto definiramo

$$\int_S hd\mu = \int_U h(\varphi(x))\sqrt{det(g)}dx.$$

Propozicija 4.2.3. *Pod tokom srednje zakrivljenosti vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{det(g)}\right) = -H^2\sqrt{det(g)}.$$

Dokaz. Za početak, sjetimo se da imamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(det(g)) = det(g)tr_g\left(\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}\right).$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{det(g)}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{det(g)}}\frac{\partial(det(g))}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g)}}det(g)tr_g(\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}) \\
&= \frac{\sqrt{det(g)}}{2}g^{ij}\left(-2Hh_{ij}\right) \\
&= -\sqrt{det(g)}Hg^{ij}h_{ij} \\
&= -H^2\sqrt{det(g)}.
\end{aligned}$$

□

Pomoću elementa površine možemo definirati i **površinu hiperplohe** kao broj

$$A(S) := \int_S d\mu.$$

Korolar 4.2.4. *Za kompaktnu hiperplohu pod tokom srednje zakrivljenosti vrijedi*

$$\frac{dA}{dt}(\varphi(t,U)) = -\int_{\varphi(t,U)} H^2 d\mu_t.$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}(\varphi(t,U)) &= \int_{\varphi(t,U)} \frac{d}{dt} d\mu_t \\ &= . - \int_{\varphi(t,U)} H^2 d\mu_t\end{aligned}$$

□

Gornji nam korolar posebno govori da se pod tokom srednje zakrivljenosti površina hiperplohe ne povećava.

Propozicija 4.2.5. *Pod tokom srednje zakrivljenosti vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{is}\right) = 2Hh^{is}.$$

Dokaz. Budući da je $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, deriviranjem dobivamo

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}g_{ik}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)g_{jk} + g^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}g_{jk}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)g_{jk} + g^{ij}\left(-2Hh_{jk}\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)g_{jk} - 2Hh^i_k.\end{aligned}$$

Dakle, imamo $\left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)g_{jk} = 2Hh^i_k$ pa izlazi

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)g_{jk}g^{ks} = 2Hh^i_k g^{ks} \\ \implies &\left(\frac{\partial}{\partial t}g^{ij}\right)\delta^s_j = 2Hh^{is} \\ \implies &\frac{\partial}{\partial t}\left(g^{is}\right) = 2Hh^{is}.\end{aligned}$$

□

Sljedeći rezultat koji želimo izvesti jest evolucijska jednadžba za srednju zakrivljenost. U tu svrhu, koristit ćemo posebne koordinate na hiperplohi S, tzv. **normalne geodetske koordinate.** Takav izbor koordinata usko je vezan uz pojam eksponencijalnog preslikavanja hiperplohe, a najbitnije karakteristike tih koordinata koje će nam trebat jest da za njih vrijedi

$$g_{ij} = \delta^i_j, \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right)^T = 0.$$

Više o takvim koordinatama moguće je pronaći u [1].

Propozicija 4.2.6. *Pod tokom srednje zakrivljenosti vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} = \nabla_i \nabla_j H - H h^l_j h_{il}.$$

Dokaz. Sav račun koji slijedi provodimo u normalnim geodetskim koordinatama. Računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\rangle \\
&= \underbrace{\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\rangle}_{=0} + \langle N, \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(HN)\rangle \\
&= \langle N, \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} N\rangle + \underbrace{\langle N, \frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial N}{\partial x^i}\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle N, \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial N}{\partial x^j}\rangle}_{=0} + \langle N, H\frac{\partial^2 N}{\partial x^i \partial x^j}\rangle \\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} + H\langle N, \frac{\partial^2 N}{\partial x^i \partial x^j}\rangle \\
&= \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} - H\langle \frac{\partial N}{\partial x^i}, \frac{\partial N}{\partial x^j}\rangle,
\end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi zbog toga što je $\langle N, \frac{\partial N}{\partial x^j}\rangle = 0$.

Budući da je vektor $\frac{\partial N}{\partial x^j}$ element tangencijalnog prostora, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x^j} &= g^{kl}\langle \frac{\partial N}{\partial x^j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\rangle \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \\
&= g^{kl} h_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \\
&= h^l_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^l}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u gornju jednakost sada dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j} - H h^l_j h_{il}.$$

Budući da radimo u normalnim koordinatama, sada slijedi da je gornja jednakost ustvari

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = \nabla_i \nabla_j H - H h^l_j h_{il}.$$

□

Propozicija 4.2.7. *Pod tokom srednje zakrivljenosti vrijedi*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = H|A|^2 + \triangle H.$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij} h_{ij}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(g^{ij}\right) h_{ij} + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t}\left(h_{ij}\right) \\
&= 2H|A|^2 + g^{ij}\left(\nabla_i \nabla_j H - H h^l_j h_{il}\right) \\
&= 2H|A|^2 + tr_g(\nabla^2 H) - H|A|^2 \\
&= H|A|^2 + \triangle H.
\end{aligned}$$

□

4.3 Princip izbjegavanja

U ovoj ćemo točki dokazati da se dvije disjunktne hiperplohe koje evoluiraju pod tokom srednje zakrivljenosti nikada neće sijeći.

U tu svrhu, navodimo sljedeća dva poznata rezultata diferencijalne geometrije koji nam zajedno govore da se svaka hiperpoloha u $\mathbb{R}^3$ može lokalno prikazati kao graf glatke funkcije.

Propozicija 4.3.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizirana ploha i $x \in U$ proizvoljna točka. Tada postoji otvorena okolina V točke x u $\mathbb{R}^2$ takva da je $\varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^3$ regularna ploha.*

Propozicija 4.3.2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3$ regularna ploha i $p \in S$. Tada postoji lokalna parametrizacija $\varphi : U \to S$ oko p i funkcija $f \in C^\infty(U)$ takva da je*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (x, y, f(x,y) \\ (x, f(x,z), z) \\ (f(x,y), x, y) \end{cases}$$

Posvetimo se sada grafovima glatkih funkcija $f : U \to \mathbb{R}$. Očito je graf $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^3$ hiperploha. Sljedeća nam lema govori kako izgledaju geometrijske veličine za takve hiperplohe.

Lema 4.3.3. *Neka je $f : U \to \mathbb{R}$ glatka funkcija i neka je $S := \Gamma_f$ hiperploha. Tada vrijedi:*

1. $g_{ij} = \delta_{ij} + D_i f D_j f$,
2. $g^{ij} = \delta_{ij} - \dfrac{D_i f D_j f}{1 + |Df|^2}$,
3. $N = \dfrac{1}{\sqrt{1 + |Df|^2}} \left(-D_1 f, -D_2 f, 1\right)$,
4. $h_{ij} = \dfrac{D^2_{ij} f}{\sqrt{1 + |Df|^2}}$,
5. $H = div\left(\dfrac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}}\right)$.

Dokaz. Za početak, budući da je S graf funkcije f, možemo pretpostaviti da je ta hiperploha ustvari nosač parametrizirane plohe $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ definirane sa

$$\varphi(u,v) := (u, v, f(u,v)) .$$

1. Označimo li sa $\{e_1, e_2\}$ kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2$, onda imamo

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \rangle \\ &= \langle (e_i, D_i f), (e_j, D_j f) \rangle \\ &= \delta_{ij} + D_i f D_j f. \end{aligned}$$

2. Računamo
$$\begin{aligned}
g_{ik}\left(\delta_{kj} - \frac{D_kfD_jf}{1+|Df|^2}\right) &= (\delta_{ik} + D_ifD_kf)\left(\delta_{kj} - \frac{D_kfD_jf}{1+|Df|^2}\right) \\
&= \delta_{ik}\delta_{kj} - \delta_{ik}\frac{D_kfD_jf}{1+|Df|^2} + D_ifD_kf\delta_{kj} - D_ifD_kf\frac{D_kfD_jf}{1+|Df|^2} \\
&= \delta_{ij} - \frac{D_ifD_jf}{1+|Df|^2} + D_ifD_jf - \frac{|Df|^2D_ifD_jf}{1+|Df|^2} \\
&= \delta_{ij} - \frac{1+|Df|^2}{1+|Df|^2}D_ifD_jf + D_ifD_jf \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}$$
Budući da je inverzna matrica, ukoliko postoji, jedinstvena, slijedi tvrdnja.

3. Očito je navedeni vektor okomit na tangencijalni prostor pa normiranjem dobivamo jediničnu normalu.

4. Računamo
$$\begin{aligned}
h_{ij} &= \langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}, N\rangle \\
&= \langle \left(0, 0, D^2_{ij}f\right), N\rangle \\
&= \frac{D^2_{ij}f}{\sqrt{1+|Df|^2}}.
\end{aligned}$$

5. Prvo, imamo
$$\begin{aligned}
div(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} &= \frac{div(Df)}{\sqrt{1+|Df|^2}} + \langle \nabla(\sqrt{1+|Df|^2}), Df\rangle \\
&= \frac{\triangle f}{\sqrt{1+|Df|^2}} - \frac{1}{2}\frac{2D_if\langle D_i(Df), Df\rangle}{(1+|Df|^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\triangle f}{\sqrt{1+|Df|^2}} - \frac{D_ifD_jfD^2_{ij}f}{(1+|Df|^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} H &= g^{ij}h_{ij} \\ &= \left(\delta_{ij} - \frac{D_i f D_j f}{1+|Df|^2}\right)\frac{D^2_{ij}f}{\sqrt{1+|Df|}} \\ &= \delta_{ij}\frac{D^2_{ij}f}{\sqrt{1+|Df|}} - \frac{D_i f D_j f D^2_{ij} f}{(1+|Df|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\triangle f}{\sqrt{1+|Df|}} - \frac{D_i f D_j f D^2_{ij} f}{(1+|Df|^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Iz dobivenih jednakosti slijedi tvrdnja.

□

Pomoću gornje leme možemo izraziti tok srednje zakrivljenosti hiperploha koje su ustvari graf neke glatke funckije. Naime, neka je $f : U \to \mathbb{R}$ glatka funkcija i neka je $S = \Gamma_f$ graf funkcije f, odnosno neka je S nosač parametrizirane plohe $\varphi_0 : U \to \mathbb{R}^3$ definirane sa $\varphi_0(x,y) := (x, y, f(x,y))$. Pretpostavimo da je $\varphi = \varphi(t, x^1, x^2)$ rješenje toka srednje zakrivljenosti za hiperplohu S.Imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \langle Df, \frac{\partial x}{\partial t}\rangle + \frac{\partial f}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

Budući da φ zadovoljava tok srednje zakrivljenosti, imamo $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = HN$, odnosno imamo

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \langle Df, \frac{\partial x}{\partial t}\rangle + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}}(-Df, 1),$$

ili ekvivalentno rečeno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}}Df \\ \langle Df, \dfrac{\partial x}{\partial t}\rangle + \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Iz gornjih jednadžbi izlazi

$$\begin{aligned}\langle Df, \frac{\partial x}{\partial t}\rangle &= -\frac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}}\langle Df, Df\rangle \\ &= -\frac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}}|Df|^2,\end{aligned}$$

pa kao posljedicu dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}} - \langle Df, \frac{\partial x}{\partial t}\rangle \\ &= \frac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}} + \frac{H}{\sqrt{1+|Df|^2}}|Df|^2 \\ &= H\sqrt{1+|Df|^2}.\end{aligned}$$

Dalje, budući da je $H = div\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right)$, dobivamo

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial t} = -div\left(\dfrac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right)\dfrac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = div\left(\dfrac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right)\sqrt{1+|Df|^2}.\end{cases}$$

Također, imamo

$$\begin{aligned}div\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) &= \frac{\triangle f}{\sqrt{1+|Df|^2}} - \frac{D_i f D_j f D^2_{ij} f}{(1+|Df|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|Df|^2}}\left(D^2_{ii} f - \frac{D_i f D_j f D^2_{ij} f}{1+|Df|^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|Df|^2}}\left(\delta_{ij} D^2_{ij} f - \frac{D_i f D_j f D^2_{ij} f}{1+|Df|^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|Df|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{D_i f D_j f}{1+|Df|^2}\right) D^2_{ij} f.\end{aligned}$$

Iz gore izvedenih formula slijedi da tok srednje zakrivljenosti grafova glatkih funkcija možemo izraziti preko sljedeće parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \left(\delta_{ij} - \frac{D_i f D_j f}{1+|Df|^2}\right) D^2_{ij} f \\ &= \triangle f - \frac{D^2 f\,(Df, Df)}{1+|Df|^2}.\end{aligned}$$

Za dokaz principa izbjegavanja su nam još potrebna sljedeća dva rezultata čiji se dokazi mogu pronaći u [11].

Teorem 4.3.4 (Jaki princip maksimuma). *Neka je* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *kompaktna hiperploha i neka je* $f : [0, T\rangle \times S \to \mathbb{R}$ *glatka funkcija za koju vrijedi*

$$\frac{\partial f}{\partial t} \geq \triangle f + b\nabla f + cf,$$

pri čemu su b, c *glatke funkcije i* $c \geq 0$.
Ako je $f(0, \cdot) \geq 0$, *onda vrijedi*

$$\min_S f(t, \cdot) \geq \min_S f(0, \cdot)$$

za sve $t \in [0, T\rangle$. *Dodatno, ako je* $f(t_0, p) = \min_S f(0, \cdot)$ *za neku točku* $p \in S$, *onda vrijedi*

$$f \equiv \min_S f(0, \cdot)$$

za sve $t \in [0, t_0]$.

Lema 4.3.5 (Hamiltonov trik). *Neka je* $f : [0, T] \times S \to \mathbb{R}$ *glatka funkcija takva da za svaki trenutak* $t \in \langle 0, T\rangle$ *postoji* $\delta > 0$ *i kompaktan skup* $K \subsetneqq (S \setminus \partial S)$ *takvi da za sve trenutke* $t' \in \langle t - \delta, t + \delta\rangle$ *vrijedi da se maksimum* $f_{MAX}(t') := \max_S f(t', \cdot)$ *postiže barem u jednoj točki iz* K.
Tada je f_{MAX} *lokalno Lipschitzova funkcija na* $\langle 0, T\rangle$ *i u svakom derivabilnom trenutku* $t \in \langle 0, T\rangle$ *vrijedi*

$$\frac{d}{dt} f_{MAX}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, p),$$

pri čemu je $p \in S \setminus \partial S$ *točka kojoj se navedeni maksimum postiže.*

Sada možemo dokazati željeni princip izbjegavanja.

Teorem 4.3.6 (Princip izbjegavanja). *Neka su* $\varphi : [0, T\rangle \times U \to \mathbb{R}^3$, $\psi : [0, T\rangle \times V \to \mathbb{R}^3$ *dva rješenja toka srednje zakrivljenosti sa svojstvom da su hiperplohe* $S_0 := \varphi(0, U)$ *i* $S_1 := \psi(0, V)$ *disjunktne i da je* S_0 *kompaktna.*
Tada je $\varphi(t, U) \cap \psi(t, V) = \emptyset$ *za sve trenutke* $t \in \langle 0, T\rangle$.

Dokaz. Definirajmo funkciju $F : [0, T\rangle \to \mathbb{R}$ sa

$$\begin{aligned} F(t) &:= d(\varphi(t, U), \psi(t, V)) \\ &= \inf_{x \in U, y \in V} \{||\varphi(t, x) - \psi(t, y)||\}. \end{aligned}$$

Kako je srednja zakrivljenost danih hiperploha uniformno ograničena u prostoru i lokalno ograničena u vremenu, funkcija F je lokalno Lipschitzova i stoga je derivabilna u skoro svakom trenutku t pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je t derivabilno vrijeme funkcije F.

Budući da je S_0 kompaktna hiperploha, navedeni infimum kojim je definirana funkcija F je ustvari minimum. Zbog toga, neka su, za dani trenutak $t \in \langle 0, T\rangle$, $p_t \in \varphi(t, U)$ i $q_t \in \psi(t, V)$ točke u kojima se taj minimum postiže. Kako se u tim točkama postiže minimum udaljenosti, pripadne tangencijalne ravnine su paralelne, to jest imamo

$$T_{p_t}\varphi(t, U) \parallel T_{q_t}\psi(t, V).$$

Zbog toga, hiperplohe $\varphi(t, U)$ i $\psi(t, V)$ možemo lokalno oko točaka p_t, q_t prikazati kao grafove funckija f, h za trenutke $\langle t - \varepsilon, t + \varepsilon\rangle$ nad jednim od tih tangencijalnih prostora. Izaberimo bilo koji od tih dvaju tangencijalnih prostora i neka je $\{b_1, b_2\}$ ortonormirana baza te ravnine tako da bude zadovoljeno

$$\begin{aligned}\varphi(t, p_t) &= (0, f(t, 0))\\ \psi(t, q_t) &= (0, h(t, 0)).\end{aligned}$$

Prema karakterizaciji toka srednje zakrivljenosti za grafove glatkih funkcija, imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \triangle f - \frac{D^2 f\,(Df, Df)}{1 + |Df|^2},\\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \triangle h - \frac{D^2 h\,(Dh, Dh)}{1 + |Dh|^2}.\end{aligned}$$

Zbog minimalnosti, funkcija $f(t, \cdot) - h(t, \cdot)$ ima minimum u točki $x = 0$ pa imamo

$$\begin{aligned}\triangle f(t, 0) - \triangle h(t, 0) &\geq 0,\\ Df(t, 0) = Dh(t, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Kako su promatrane plohe dane kao grafovi glatkih funkcija, imamo

$$\begin{aligned}\triangle f(t, 0) &= H_\varphi(t, p_t)\langle N_\varphi(t, p_t), b_1 \times b_2\rangle\\ \triangle h(t, 0) &= H_\psi(t, q_t)\langle N_\psi(t, q_t), b_1 \times b_2\rangle,\end{aligned}$$

pa dobivamo

$$\langle H_\varphi(t, p_t)N_\varphi(t, p_t) - H_\psi(t, q_t)N_\psi(t, q_t), b_1 \times b_2\rangle = \triangle f(t, 0) - \triangle h(t, 0) \geq 0.$$

Također, uočimo da, po konstrukciji, imamo

$$\frac{p_t - q_t}{\|p_t - q_t\|} = b_1 \times b_2.$$

Sada, zbog Hamiltonovog trika, imamo

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(t) &= \inf \frac{\partial}{\partial t} \|\varphi(t, p_t) - \psi(t, q_t)\| \\
&= \inf \frac{\langle H_\varphi N_\varphi - H_\psi N_\psi, p_t - q_t \rangle}{\|p_t - q_t\|} \\
&= \inf \langle H_\varphi N_\varphi - H_\psi N_\psi, b_1 \times b_2 \rangle \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

pri čemu se gornji infimum odnosi na sve parove točaka iz hiperploha $\varphi(t, U), \psi(t, V)$ u kojima se postiže minimum udaljenosti.
Dakle, udaljenost promatranih hiperploha pod tokom srednje zakrivljenosti jest neopadajuća, pa kako su polazne hiperplohe disjunktne, onda one i ostaju disjunktne pod tokom srednje zakrivljenosti. □

Korolar 4.3.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3$ kompaktna hiperploha.*
Tada će ta hiperploha u konačnom vremenu razviti singularitet pod tokom srednje zakrivljenosti.

Dokaz. Kako je S kompaktna hiperploha, onda je ona strogo sadržana unutar neke sfere $\mathbb{S}(R)$ radijusa $R > 0$. Znamo da sfera $\mathbb{S}(R)$ razvija singularitet u konačnom vremenu jer nestaje u točki pa nam princip izbjegavanja govori da i hiperploha S razvija singularitet u konačnom vremenu. □

4.4 Tok konveksnih i srednje-konveksnih hiperploha

Glavni cilj ove točke jest definirati dvije inačice konveksnih hiperploha i dokazati su obje inačice invarijante toka srednje zakrivljenosti.

Definicija 4.4.1. *Za hiperplohu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ kažemo da je* ***konveksna*** *ako su joj obje glavne zakrivljenosti nenegativne u svakoj točki.*

Napomena 4.4.2. *Motivacija za ovakvu definiciju kovneksnosti jest činjenica da ako je $S \subseteq \mathbb{R}^3$ rub konveksnog tijela da je onda S konveksna hiperploha.*

Definicija 4.4.3. *Za hiperplohu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ kažemo da je* ***srednje-konveksna*** *ako je $H \geq 0$ u svakoj točki.*

Napomena 4.4.4. *Očito je svaka konveksna hiperploha ujedno i srednje-konveksna dok obrat ne mora vrijediti.*

Propozicija 4.4.5. *Neka je S kompaktna srednje-konveksna hiperploha u $\mathbb{R}^3$ i neka je $\varphi : [0, T\rangle \times U \to \mathbb{R}^3$ njen tok srednje zakrivljenosti.*
Tada je $H(t, \cdot) > 0$ za sve trenutke $t \in [0, T\rangle$. Posebno, hiperploha $\varphi(t, U)$ je srednje-konveksna za sve $t \in [0, T\rangle$.

Dokaz. Evolucijska jednadžba za srednju zakrivljenost glasi

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \triangle H + |A|^2 H.$$

Hiperploha S je srednje-konveksna pa po definiciji imamo $H(0, \cdot) \geq 0$. Jaki princip maksimuma nam sada daje

$$\min_U H(t, \cdot) \geq \min_U H(0, \cdot) \geq 0,$$

odnosno imamo $H(t, \cdot) \geq 0$ za sve trenutke $t \in [0, T\rangle$.

Pretpostavimo sada da postoji trenutak $t_0 \in [0, T\rangle$ i da postoji točka $p \in U$ takva da je $H(t_0, p) = 0$. Očito tada imamo

$$\min_U H(t_0, \cdot) \leq H(t_0, p) = 0,$$

a kako je

$$\min_U H(t_0, \cdot) \geq \min_U H(0, \cdot) \geq 0$$

dobivamo da je

$$\min_U H(0, \cdot) = 0.$$

Zbog toga imamo

$$H(t_0, p) = 0 = \min_U H(0, \cdot)$$

pa nam jaki princip maksimuma daje

$$H(t, \cdot) = \min_U H(0, \cdot) = 0,$$

međutim to je nemoguće jer ne postoje kompaktne hiperplohe u $\mathbb{R}^3$ sa $H \equiv 0$.
Stoga, imamo $H(t, \cdot) > 0$ za sve $t \in [0, T\rangle$. □

U nastavku dokazujemo da se i konveksnost čuva pod tokom srednje zakrivljenosti, a nakon toga navodimo glavnu značajku koja razlikuje tok konveksnih i srednje-konveksnih hiperploha.
Za dokaz prve tvrdnje, treba nam sljedeći rezultat koji proširuje princip maksimuma na tenzore tipa $(0, 2)$ (za dokaz vidjeti [11]).

Teorem 4.4.6 (Jaki princip maksimuma za simetrične $(0,2)$-tenzore). *Neka je S kompaktna hiperploha u $\mathbb{R}^3$, neka je B simetrična bilinearna forma na tangencijalnom svežnju od S koja zadovoljava*

$$\frac{\partial B}{\partial t} \geq \triangle B + \Psi(B),$$

gdje je matrica $\Psi(B) \geq 0$ kad god je $B \geq 0$.
Ako je $B \geq 0$ u trenutku $t = 0$, onda je $B \geq 0$ za sve trenutke t za koje je definiran tok srednje zakrivljenosti.

Propozicija 4.4.7. *Neka je S kompaktna konveksna hiperploha u $\mathbb{R}^3$ i neka je $\varphi : [0,T\rangle \times U \to \mathbb{R}^3$ njen tok srednje zakrivljenosti.*
Tada je $\varphi(t,U)$ konveksna hiperploha za sve $t \in [0,T\rangle$.

Dokaz. Sjetimo se da je evolucijska jednadžba za drugu fundamentalnu formu dana sa

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = \nabla^2_{ij} H - H h^l_j h_{il}.$$

Koristeći *Simonov identitet* (vidi [11]), gornju jednakost možemo zapisati kao

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = \triangle h_{ij} - 2H h_{im} h^m_j + |A|^2 h_{ij}.$$

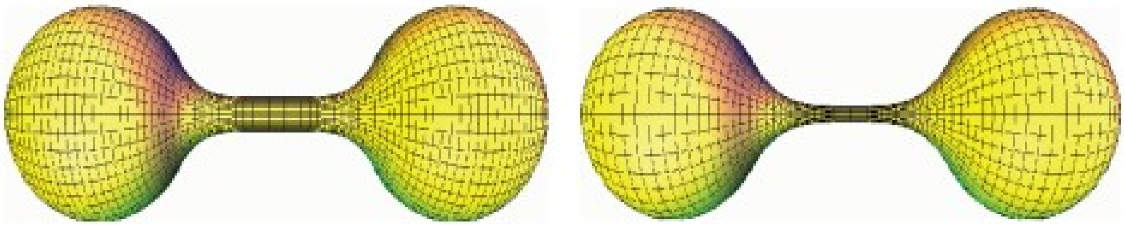
Sada tvrdnju propozicije dobivamo odmah iz jakog principa maksimuma za simetrične $(0,2)-$tenzore. □

Dakle, kroz prethodna dva rezultata smo vidjeli da srednje-konveksne hiperplohe ostaju srednje-konveksne pod tokom srednje zakrivljenosti te da isti zaključak vrijedi i za konveksne hiperplohe. Ono u čemu se tokovi razlikuju u tim slučajevima jest trenutak nastanka singulariteta. Naime, sljedeći veliki teorem teorije toka srednje zakrivljenosti nam govori da se kompaktne konveksne hiperplohe pod tokom srednje zakrivljenosti sažimaju u točku te da je to prvi trenutak nastanka singulariteta.

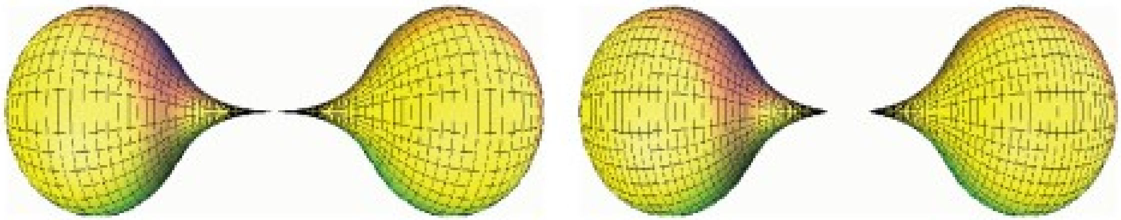
Teorem 4.4.8 (Huisken). *Svaka kompaktna konveksna hiperploha u $\mathbb{R}^3$ konvergira prema točki u konačnom vremenu.*

Drugim riječima, gornji nam teorem govori da kompaktne konveksne hiperplohe pod tokom srednje zakrivljenosti stvaraju singularitet tek kada ”nestanu”.

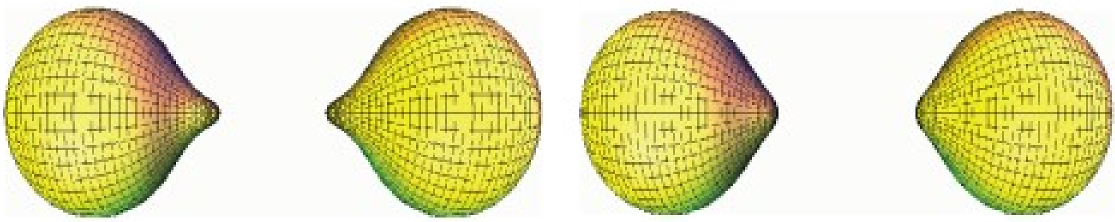
S druge strane, tvrdnja tog teorema ne vrijedi za srednje-konveksne kompaktne hiperplohe! Naime, na narednim je slikama prikaz toka srednje zakrivljenosti za plohu bučice na kojoj jasno vidimo da dolazi do stvaranja singulariteta prije nego ploha isčezne u točku (slike preuzete iz [3]).



Slika 4.1: Prve dvije iteracije toka za plohu bučice



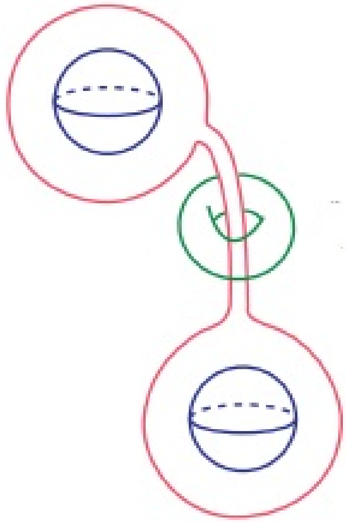
Slika 4.2: Druge dvije iteracije toka za plohu bučice. Vidimo da dolazi do stvaranja singulariteta prije nego je ploha iščezla u točku.



Slika 4.3: Nakon stvaranja singulariteta, svaka komponenta povezanosti nastavlja zasebno evoluirati pod tokom srednje zakrivljenosti.

Napomena 4.4.9. *Ovaj nam primjer također govori da analogon Graysonovg teorema ne vrijedi u dimenzijama* $n \geq 2$.

Razlog zbog čega ploha bučice stvara singularitet prije iščezivanja u točki zapravo leži u principu izbjegavanja. Naime, oko "vrata" bučice možemo "provući" maleni torus te unutar krajeva bučice umetnuti sfere tako da imamo situaciju kao na sljedećoj slici. Dobivena se konfiguracija sastoji od četiri disjunktne hiperplohe (dvije sfere, torus i ploha bučice) pa će one pod tokom srednje zakrivljenosti ostati disjunktne zbog principa izbjegavanja. Maleni će se torus sažeti u točku (ponovno, princip izbjegavanja) prije obje sfere, pa kako su torus i ploha bučice disjunktni, na vratu plohe bučice mora doći do stvaranja singulariteta.



Slika 4.4: Princip izbjegavanja implicira da će se na ”vratu” bučice stvoriti singularitet prije nego ploha iščezne u točku.

Bibliografija

[1] Marco Abate i Francesca Tovena, *Curves and surfaces*, Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Christian Bär, *Elementary differential geometry*, Cambridge University Press, 2010.

[3] Tobias Colding, William Minicozzi, Erik Pedersen i ost., *Mean curvature flow*, Bulletin of the American Mathematical Society **52** (2015), br. 2, 297–333.

[4] Michael Gage i Richard S Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, Journal of Differential Geometry **23** (1986), br. 1, 69–96.

[5] Ilja Gogić, *Diferencijalna geometrija 1, ak. god. 2018.-19.*, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu.

[6] Matthew A Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, Journal of Differential geometry **26** (1987), br. 2, 285–314.

[7] Heinrich W Guggenheimer, *Differential geometry*, Courier Corporation, 2012.

[8] Victor Guillemin i Alan Pollack, *Differential topology*, sv. 370, American Mathematical Soc., 2010.

[9] Robert Haslhofer, *Lectures on curve shortening flow*, preprint (2016).

[10] Yu Chu Lin i Dong Ho Tsai, *On a simple maximum principle technique applied to equations on the circle*, Journal of Differential Equations **245** (2008), br. 2, 377–391.

[11] Carlo Mantegazza, *Lectures on mean curvature flow*, Progress in Mathematics **290**.

[12] FRANCISCO MARTÍN i Jesús Pérez, *An introduction to the mean curvature flow*, XXIII International Fall Workshop on Geometry and Physics, held in Granada. https://www. ugr. es/jpgarcia/investigacion. html, 2014.

Sažetak

Cilj ovog rada jest obraditi osnove teorije toka srednje zakrivljenosti hiperploha u euklidskom prostoru.

U prvom poglavlju rada dan je pregled osnovnih pojmova i rezultata teorije ravninskih krivulja.

Dalje, drugo je poglavlje posvećeno toku skraćivanja ravninskih krivulja. Najprije je definiran pojam toka skraćivanja u obliku određene Cauchyjeve zadaće, zatim je dokazan teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja toka te su proučena najbitnija svojstva toka. Također, dokazan je Gage-Hamiltonov teorem koji u potpunosti opisuje tok konveksnih krivulja te je naveden Graysonov teorem koji pak u potpunosti opisuje tok jednostavno zatvorenih krivulja.

U trećem poglavlju posvetili smo se geometriji hiperploha u euklidskom prostoru, uveli smo osnovne pojmove diferencijalnog i tenzorskog računa na hiperplohama te smo definirali pojam srednje zakrivljenosti.

U četvrtom poglavlju bavili smo se tokom srednje zakrivljenosti hiperploha u euklidskom prostoru. Tok srednje zakrivljenosti uveli smo u obliku Cauchyjeve zadaće, dokazali smo egzistenciju i jedinstvenost rješenja te smo dokazali neka osnovna svojstva toka poput principa izbjegavanja. Na kraju poglavlja, naveden je Huiskenov teorem kojim smo u potpunosti opisali tok kompaktnih konveksnih hiperploha.

Summary

Goal of this paper is to examine the basic properties of the mean curvature flow of hypersurfaces in Euclidean space.

In the first chapter, a brief review of the theory of plane curves is given.

In the second chapter, the curve shortening flow is analyzed. Firstly, we defined the curve shortening flow in the form of a Cauchy problem, then the existence and uniqueness theorem for the solution is obtained and the main properties of the flow are studied. Furthermore, we proved the Gage-Hamilton theorem which gives a complete description of the curve shortening flow of convex curves and we showed how Grayson's theorem gives a full description of the curve shortening flow for simply closed curves.

The third chapter is used for the review of the basic results regarding the differential and tensor calculus on hypersurfaces as well as the definition of the mean curvature.

Finally, in the fourth chapter we introduced the mean curvature flow of a hypersurface in the form of a Cauchy problem. We proved the existence and uniqueness theorem for the solution of the flow as well as some of the basic properties of the flow, for example the avoidance principle. In the end of the chapter, we stated Huisken's theorem which gives a complete description of the mean curvature flow of compact convex hypersurfaces.

Životopis

Rođen sam 26. travnja 1999. godine u Zagrebu. U Zagrebu sam pohađao osnovnu školu, a srednjoškolsko obrazovanje sam stekao u Drugoj gimnaziji u Zagrebu. 2018. godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija 2021. godine upisujem studij Teorijska matematika na istom fakultetu. U akademskoj godini 2021./22. osvojio sam Rektorovu nagradu na području prirodnih znanosti radom "Weierstrassova reprezentacijska formula minimalnih B-pravčastih ploha u Lorentz-Minkowskijevom prostoru" pod mentorstvom prof. dr. sc. Željke Milin Šipuš.

Tokom studiranja, pripremao sam učenike Druge gimnazije za matematička natjecanja te sam dva puta sudjelovao kao njihov mentor na Državnom natjecanju.

Osim matematikom, bavim se i squashom kojeg treniram već 16 godina, a od 2015. godine sam aktivni član hrvatske squash reprezentacije. Sudjelovao sam na europskim timskim i individualnim prvenstvima, Prvenstvima Balkana, državnim prvenstvima te na raznim drugim domaćim i stranim natjecanjima.