SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lara Milić

RAZNI ASPEKTI POVEZANOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2023

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo povezanost u metričkim i topološkim prostorima.

U prvom poglavlju dajemo definiciju norme i metrike te proučavamo ekvivalentne metrike. Nadalje, istražujemo otvorene i zatvorene skupove u metričkim prostorima te neprekidne funkcije između metričkih prostora. Nakon toga definiramo topologiju i topološke prostore te proučavamo pojam baze topologije. Bavimo se i neprekidnim funkcijama između topoloških prostora te na kraju istražujemo potprostore metričkih i topoloških prostora.

U drugom poglavlju definiramo separaciju topološkog i metričkog prostora te povezane topološke i metričke prostore. Dokazujemo da je svaki segment [a,b] povezan. Nadalje, definiramo pojam komponente povezanosti točke u topološkom prostoru te proučavamo neka njihova svojstva. Nakon toga definiramo produkt topoloških prostora i dokazujemo da je produkt dva povezana topološka prostora povezan. Uvodimo pojam putevima povezanog topološkog prostora, dokazujemo da je svaki putevima povezan topološki prostor povezan i dajemo primjer topološkog prostora koji je povezan, ali nije putevima povezan. Nakon toga, proučavamo lokalnu povezanost i dajemo primjer topološkog prostora koji je povezan, ali nije lokalno povezan. Na kraju, dokazujemo da se povezan, lokalno povezan i potpun metrički prostor ne može prikazati kao unija prebrojivo mnogo zatvorenih, pravih i međusobno disjunktnih podskupova. U tu svrhu, analiziramo potpune metričke prostore i dokazujemo Baireov teorem o kategoriji.

Poglavlje 1

Metrički i topološki prostori

1.1 Norma i metrika

Definicija 1.1.1. *Neka je $X \neq \emptyset$ neprazan skup i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje s Kartezijevog produkta $X \times X$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ za koje vrijedi:*

1. $d(a, b) \geq 0, \forall a, b \in X$ *(pozitivnost),*
2. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ *(strogost),*
3. $d(a, b) = d(b, a), \forall a, b \in X$ *(simetričnost),*
4. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)\ \forall a, b, c \in X$ *(nejednakost trokuta).*

Kažemo da je d metrika na skupu X. Uređeni par (X, d) nazivamo metrički prostor, a uvjete 1) - 4) aksiomi metrike.

Primjer 1.1.2. *Na proizvoljnom skupu X možemo definirati metriku d formulom*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Lako se vidi da je d metrika i tu metriku zovemo diskretna metrika.

Definicija 1.1.3. *Neka je V (realan) linearni prostor, a $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ preslikavanje s ovim svojstvima:*

1. $\forall a \in V, \|a\| \geq 0,$
2. $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0,$

3. $||\lambda a|| = |\lambda| ||a||, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in V$,

4. $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||, \forall a, b \in V$.

To preslikavanje nazivamo norma na prostoru V, a uređeni par $(V, || \cdot ||)$ *normirani prostor.*

Primjer 1.1.4. *Svaki normirani prostor V postaje na prirodan način metrički prostor, preko metrike* $d(a, b) = ||a - b||$ *inducirane normom na V. Odmah se iz svojstava norme vidi, da su za d ispunjena prva tri svojstva metrike, a četvrto se lako pokaže:*

$$d(a, b) = ||a - b|| = ||(a - c) + (c - b)|| \leq ||a - c|| + ||c - b|| = d(a, c) + d(c, b).$$

1.2 Ekvivalentne metrike

Definicija 1.2.1. *Neka su* d_1 *i* d_2 *metrike na X. Kažemo da su* d_1 *i* d_2 *ekvivalentne i pišemo* $d_1 \approx d_2$*, ako postoje realni brojevi* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *takvi da za sve* $x, y \in X$ *vrijedi* $d_1(x, y) \leq \lambda_1 d_2(x, y)$ *i* $d_2(x, y) \leq \lambda_2 d_1(x, y)$*.*

Primjer 1.2.2. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s:*

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Tvrdimo da je $|| \cdot ||$ *norma na* $\mathbb{R}^n$*.*
Svojstva $1-3$ *iz definicije norme očito vrijede. Da bismo dokazali da vrijedi* (4) *iz definicije norme treba nam prvo tvrdnja.*

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$*,* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$*. Tvrdimo da je:*

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq ||x|| ||y||.$$

Za $||y|| = 0$ *tvrdnja očito vrijedi pa pretpostavimo da je* $||y|| > 0$*.Definirajmo funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom*

$$f(t) = (x_1 + t y_1)^2 + \ldots + (x_n + t y_n)^2$$

Vrijedi:

$$f(t) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2) + 2t(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) + (y_1^2 + \ldots + y_n^2)t^2 = ||x||^2 + 2t(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) + t^2 ||y||^2.$$

Kako je funkcija f nenegativna funkcija $(f(t) \geq 0, t \in \mathbb{R})$*, njezina diskriminanta je* $D = 4(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 - 4||x||^2 ||y||^2 \leq 0$*, pa slijedi tražena nejednakost. Dokažimo da*

vrijedi četvrto svojstvo iz definicije norme.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$. *Vrijede sljedeće ekvivalencije:*

$$\begin{gathered} \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x + y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow \\ (x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 \le (x_1^2 + \dots + x_n^2) + 2\|x\|\|y\| + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \Leftrightarrow \\ x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \Leftrightarrow \\ x_1y_1 + \dots + x_ny_n \le \|x\|\|y\| \end{gathered}$$

Zadnja nejednakost vrijedi iz prethodno dokazane tvrdnje. Stoga je $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$. *Prema tome* $\|\cdot\|$ *je norma na* $\mathbb{R}^n$. *Za* $\|\cdot\|$ *kažemo da je euklidska norma na* $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.2.3. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s:*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Tvrdimo da je $\|\cdot\|_1$ *norma na* $\mathbb{R}^n$.
Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Očito je da svojstva* $(1) - (3)$ *iz definicije norme vrijede. Dokažimo (4).*
Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$.
Imamo

$$\begin{gathered} \|x + y\|_1 = \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_1 = |x_1 + y_1| + \dots + |x_n + y_n| \le \\ \le |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n| = (|x_1| + \dots + |x_n|) + (|y_1| + \dots + |y_n|) = \|x\|_1 + \|y\|_1. \end{gathered}$$

Dakle, $\|x + y\|_1 \le \|x\|_1 + \|y\|_1$. *Prema tome* $\|\cdot\|_1$ *je norma na* $\mathbb{R}^n$.
Nadalje, neka je $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s:*

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Tvrdimo da je $\|\cdot\|_\infty$ *norma na* $\mathbb{R}^n$.
Očito su zadovoljena svojstva $(1) - (3)$ *iz definicije norme. Dokažimo (4).*
Za neki $i \in \{1, \dots, n\}$ *imamo* $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} = |x_i + y_i|$. *Tada vrijedi:*

$$\|x + y\|_\infty = |x_i + y_i| \le |x_i| + |y_i| \le \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\} + \max\{|y_j| : j = 1, \dots, n\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Dakle, vrijedi $\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. *Prema tome* $\|\cdot\|_\infty$ *je norma na* $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.2.4. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Neka je* d *metrika inducirana euklidskom normom nad* $\mathbb{R}^n$. *Za* d *kažemo da je euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Uočimo da za* $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Neka su $\|\cdot\|_1$ *i* $\|\cdot\|_\infty$ *norme na* $\mathbb{R}^n$ *iz prethodnog primjera. Neka je* d_1 *metrika inducirana s* $\|\cdot\|_1$ *te* d_∞ *metrika incucirana s* $\|\cdot\|_\infty$. *Tada za sve* $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))_1 = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|,$$

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

Uočimo sljedeće. Ako su d_1, d_2, d_3 metrike na nekom skupu X takve da su d_1 i d_2 ekvivalentne te da su d_2 i d_3 ekvivalentne onda su i d_1 i d_3 ekvivalentne.

Primjer 1.2.5. *Metrike d, d_1 i d_∞ na $\mathbb{R}^n$ su ekvivalentne.*

Neka su $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pokazujemo prvo da su metrike d_1 i d_∞ ekvivalentne. Očito je za sve $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ $d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \leq d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$. Tada za $\lambda_1 = 1$ vrijedi $d_\infty \leq \lambda_1 d_1$. Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned} d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq n \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \\ &= n d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)). \end{aligned}$$

Tada za $\lambda_2 = n$ vrijedi $d_1 \leq \lambda_2 d_\infty$. Iz čega zaključujemo da su metrike d_1 i d_∞ ekvivalentne.

Pokažimo sada da su metrike d i d_∞ ekvivalentne. Očito je $d_\infty \leq d$. Tada za $\lambda_1 = 1$ vrijedi $d_\infty \leq \lambda_1 d$. Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned} d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{n \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}^2} = \\ &= \sqrt{n} d_\infty((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

Tada za $\lambda_2 = \sqrt{n}$ vrijedi $d \leq \lambda_2 d_\infty$. Iz ovoga zaključujemo da su metrike d i d_∞ ekvivalentne.

Kako su ekvivalentne metrike d_1 i d_∞ te d i d_∞ slijedi da su ekvivalentne i metrike d i d_1 pa tvrdnja vrijedi.

1.3 Otvoreni i zatvoreni skupovi

Definicija 1.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te $x_0 \in X$ i $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Definiramo:*

$$K_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}.$$

Za $K_d(x_0, r)$ kažemo da je otvorena kugla u (X, d) oko x_0 radijusa r. Ako je iz konteksta jasno o kojoj se metrici radi pišemo $K(x_0, r)$.

Definiramo:

$$\overline{K_d}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}.$$

Za $\overline{K_d}(x_0, r)$ kažemo da je zatvorena kugla u (X, d) oko x_0 radijusa r. Ako je iz konteksta jasno o kojoj se metrici radi pišemo $\overline{K}(x_0, r)$.

Definicija 1.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.*

Definicija 1.3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te $F \subseteq X$. Kažemo da je F zatvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako je njegov komplement $X \backslash F$ otvoren u (X, d).*

Propozicija 1.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *$\emptyset, X$ su otvoreni skupovi u (X, d);*
2. *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d), onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d);*
3. *Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d) onda je $U \cap V$ otvoren u (X, d).*

Dokaz.

1. Tvrdnja očito vrijedi.
2. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova i neka je $x_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha \in A$ takav da je $x_0 \in U_\alpha$. Iz definicije otvorenog skupa slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U_\alpha$ pa je i $K(x_0, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ to jest $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je otvoren skup u (X, d).
3. Neka je $x_0 \in U \cap V$. Tada je $x_0 \in U$ i $x_0 \in V$. Iz definicije otvorenih skupova slijedi da postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da $K(x_0, r_1) \subseteq U$ i $K(x_0, r_2) \subseteq V$. Neka je $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tada je $K(x_0, r) \subseteq U \cap V$.

□

Propozicija 1.3.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Ako je $x \in K(x_0, r)$, definiramo $s = r - d(x, x_0)$. Imamo $s > 0$ te vrijedi $K(x, s) \subseteq K(x_0, r)$. Naime, ako je $y \in K(x, s)$, onda je

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < s + d(x, x_0) = r$$

pa je $y \in K(x_0, r)$. Time je tvrdnja dokazana. □

Propozicija 1.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $\overline{K}(x_0, r)$ zatvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in X \backslash \overline{K}(x_0, r)$ to jest $x \notin \overline{K}(x_0, r)$. Iz ovoga slijedi da je $d(x, r_0) > r$. Definiramo $s = d(x, x_0) - r$. Tvrdimo:

$$K(x, s) \subseteq X \backslash \overline{K}(x_0, r).$$

U suprotnom bi postojao y takav da je $y \in K(x, s)$ i $y \in \overline{K}(x_0, r)$. Imamo:

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) < s + r(x, x_0) = r.$$

Što bi bilo u kontradikciji s $d(x, r_0) > r$. Dakle, $\overline{K}(x_0, r)$ je zatvoren skup u (X, d). □

Lema 1.3.7. *Neka je X skup i neka su d_1 i d_2 metrike na X. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$ takva da za sve $x, y \in X$ vrijedi $d_1(x,y) \leq \alpha d_2(x,y)$. Neka su $x_0 \in X$ i $r > 0$. Tada je $K_{d_2}\left(x_0, \frac{r}{\alpha}\right) \subseteq K_{d_1}(x_0, r)$.*

Dokaz. Neka je $x \in K_{d_2}\left(x_0, \frac{r}{\alpha}\right)$. Tada vrijedi

$$d_2(x, x_0) \leq \frac{r}{\alpha}$$
$$\text{pa je } \alpha d_2(x, x_0) \leq r$$
$$\text{što povlači } d_1(x, x_0) < r, \text{ dakle } x \in K_{d_1}(x_0, r)$$

□

Lema 1.3.8. *Neka je X skup i neka su d_1 i d_2 metrike na X. Pretpostavimo da je $\alpha > 0$ takva da za sve $x, y \in X$ vrijedi $d_1(x,y) \leq \alpha d_2(x,y)$. Tada je svaki skup otvoren u metričkom prostoru (X, d_1) otvoren u metričkom prostoru (X, d_2).*

Dokaz. Neka je U otvoren u (X, d_1). Neka je $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K_{d_1}(x, r) \subseteq U$. Prema prethodnoj lemi slijedi da je $K_{d_2}\left(x, \frac{r}{\alpha}\right) \subseteq K_{d_1}(x, r)$ pa je $K_{d_2}\left(x, \frac{r}{\alpha}\right) \subseteq U$. Iz ovoga slijedi da je U otvoren u (X, d_2). □

Propozicija 1.3.9. *Neka je X skup te neka su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na X. Neka je $U \subseteq X$. Tada je U otvoren skup u (X, d_1) ako i samo ako je otvoren u (X, d_2).*

Dokaz. Tvrdnja direktno slijedi iz prethodne leme. □

1.4 Neprekidnost u metričkim prostorima

Definicija 1.4.1. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija te neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki x_0 (s obzirom na metrike d i d') ako vrijedi:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\ (d(x.x_o) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Uočimo da je to ekvivalentno sljedećem:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ takva da } f(K_d(x_o, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(x_o), \epsilon).$$

Propozicija 1.4.2. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija te neka je $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna u x_0 ako i samo ako za svaki otvoren skup V u (Y, d') takav da je $f(x_0) \in V$ postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ i $f(U) \subseteq V$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je V otvoren u (Y, d') takav da je $f(x_0) \in V$. Skup V je otvoren pa postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K_{d'}(f(x_o, \epsilon)) \subseteq V$. Zbog neprekidnosti od f slijedi da postoji $\delta > 0$ takva da je $f(K_d(x_o, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(x_o, \epsilon))$. Slijedi da je $f(K_d(x_o, \delta)) \subseteq V$ pa je $K_d(x_o, \delta)$ traženi otvoren skup u (X, d) koji sadrži x_0.
Obratno, pretpostavimo da za svaki otvoren skup V u (Y, d') takav da je $f(x_0) \in V$ postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ i $f(U) \subseteq V$. Neka je $K_{d'}(f(x_o), \epsilon)$ proizvoljna otvorena kugla oko točke $f(x_o)$. Po pretpostavci postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ i $f(U) \subseteq K_{d'}(f(x_o), \epsilon)$. U je otvoren pa postoji $\delta > 0$ takva da je $K_d(x_o, \delta) \subseteq U$ i za nju vrijedi $f(K_d(x_o, \delta)) \subseteq K_{d'}(f(x_o), \epsilon)$ to jest funkcija f je neprekidna u točki x_0. □

Definicija 1.4.3. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je funkcija f neprekidna (s obzirom na metrike d i d') ako je f neprekidna u x_o za svaki $x_0 \in X$.*

Propozicija 1.4.4. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori i neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna (s obzirom na metrike d i d') ako i samo ako je za svaki otvoren skup V u (Y, d') skup $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, d).*

Dokaz. Neka je f neprekidna i neka je V otvoren skup u (Y, d'). Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$. Prema prethodnoj propoziciji postoji otvoren skup U_x u (X, d) takav da je $x \in U_x$ i $f(U_x) \subseteq V$. Slijedi $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Stoga je $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in X} U_x$. Iz propozicije 1.3.4 slijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren kao unija otvorenih skupova.
Obratno, pretpostavimo da za svaki otvoren skup V u (Y, d') je $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, d). Neka je $x_0 \in X$ i neka je V otvoren skup u (Y, d') takav da je $f(x_0) \in V$. Po pretpostavci slijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, d). Očito je $x_o \in f^{-1}(V)$ i $f\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq V$. Iz propozicije 1.4.2 slijedi da je f neprekidna u x_0. Iz proizvoljnosti točke x_0 slijedi da je funkcija f neprekidna. □

Definicija 1.4.5. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je (x_n) niz u X. Neka je $a \in X$. Kažemo da niz (x_n) teži ili kovergira prema a u (X, d) i pišemo $x_n \to a$ ako*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n \in K(a, \epsilon)).$$

Propozicija 1.4.6. *Neka je (X, d) metrički prostor i (x_n) niz u X. Neka je $a \in X$. Tada $x_n \to a$ ako i samo ako za svaki otvoreni skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ je $x_n \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da za svaki otvoren skup U postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geqslant n_0$ je $x_n \in U$. Tada iz činjenice da je svaka otvorena kugla otvoren skup direktno slijedi $x_n \to a$.
Obratno, pretpostavimo da $x_n \to a$. Neka je U otvoren skup i $a \in U$. Tada postoji $\epsilon > 0$

takav da je $K(a,\epsilon) \subseteq U$. Iz definicije konvergencije slijedi da $(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n \in K(a,\epsilon)$. Očito za svaki $n \geqslant n_0$ je $x_n \in U$. □

Definicija 1.4.7. *Neka je $f : X \to \mathbb{R}^m$, X skup. Označimo s $p_1, \ldots, p_m$ koordinatne projekcije s $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}$, to jest funkcije definirane s*

$$p_k(x_1, \ldots, x_m) = x_k, \quad (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad k = 1, \ldots, m$$

Funkcije $f_k = p_k \circ f$, $k = 1, \ldots, m$, $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, m$ nazivamo komponentnim funkcijama od f i možemo pisati $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Napomena 1.4.8. *Kada nije drugačije napisano na $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ podrazumijevamo euklidsku metriku.*

Propozicija 1.4.9. *Koordinatne projekcije $p_1, \ldots, p_m : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ su neprekidne funkcije.*

Dokaz. Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ točka u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Definirajmo $\delta = \epsilon$ i pokažimo da za tu δ, vrijedi $|p_i(x) - p_i(y)| < \epsilon$ za sve točke y za koje je $d(x,y) < \delta$. Neka je $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ točka u $\mathbb{R}^n$ za koju je $d(x,y) < \delta = \epsilon$. To znači da vrijedi:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} < \epsilon.$$

Tada posebno za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $|p_i(x) - p_i(y)| = |x_i - y_i| < \epsilon$. Iz ovoga slijedi da su sve koordinatne projekcije neprekidne funkcije. □

Propozicija 1.4.10. *Neka je (X,d) metrički prostor. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}^m$ je neprekidna ako i samo ako je svaka njena komponentna funkcija $f_k : D \to \mathbb{R}, k = 1, \ldots, m$, neprekidna.*

Dokaz. Neka je f neprekidna i neka su $f_k = p_k \circ f, k = 1, \ldots, m$ komponentne funkcije. Iz propozicija 1.7.5 i 1.4.9 slijedi da su komponentne funkcije neprekidne.
Obratno, neka su komponentne funkcije $f_k : X \to \mathbb{R}, k = 1, \ldots, m$ neprekidne i neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka. Po definiciji neprekidnosti u točki slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $\delta_k > 0$ takav da za svaki $x \in X$ čim je $d(x, x_0) < \delta_k$ slijedi $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Uzmimo za $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Tada za svaki $x \in X$ za koji je $d(x, x_0) < \delta$ vrijede sve nejednakosti $|f_k(x) - f_k(x_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, k = 1, \ldots, m$. Prema tome imamo

$$d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - f_k(x_0)|^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon,$$

gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^m$. Tada je funkcija f neprekidna u x_0. Tvrdnja sada slijedi iz proizvoljnosti točke x_0.

□

1.5 Topologija

Definicija 1.5.1. *Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X sa sljedećim svojstvima:*

1. *$\emptyset, X \in \mathcal{T}$;*
2. *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$, onda je $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$;*
3. *Ako su $U, V \in \mathcal{T}$ onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*

Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je topologija na skupu X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je topološki prostor.

Primjer 1.5.2. *Neka je X neprazan skup. Očito je $\mathcal{P}(X)$ topologija na skupu X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je diskretna topologija na skupu X. S druge strane, familija $\{\emptyset, X\}$ je također topologija na X. Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je indiskretna topologija na skupu X.*

Primjer 1.5.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Definirajmo $\mathcal{T}_d$ kao familiju svih skupova koji su otvoreni u tom metričkom prostoru. Tada iz propozicije 1.3.4 slijedi da je $\mathcal{T}_d$ topologija na skupu X. Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je topologija inducirana metrikom d.*

Napomena 1.5.4. *Neka je X skup te neka su d i d' metrike na X koje su ekvivalentne. Iz propozicije 1.3.9 slijedi da su topologije inducirane metrikama d i d' jednake, to jest $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.*

Definicija 1.5.5. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je metrizabilan ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.*

Definicija 1.5.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*

Definicija 1.5.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $x \in X$ te neka je $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U$. Tada za U kažemo da je otvorena okolina točke x u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 1.5.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $F \subseteq X$. Kažemo da je F zatvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $X \backslash F \in \mathcal{T}$.*

Napomena 1.5.9. *Neka je (X, d) metrički prostor i $U \subseteq X$. Uočimo da je tada U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Definicija 1.5.10. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je Hausdorffov ako za sve $a, b \in X$ takve da je $a \neq b$ postoje otvoreni skupovi U, V u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Primjer 1.5.11. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije Hausdorffov.*

Propozicija 1.5.12. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$. Neka su $a, b \in X$, $a \neq b$. Neka je $r = \frac{1}{2} d(a, b)$. Uočimo da je $r > 0$. Definirajmo $U = K(a, r)$ i $V = K(b, r)$. Očito je $a \in U$ i $b \in V$, nadalje U i V su otvoreni u (X, d) pa su $U, V \in \mathcal{T}$. Dokažimo da je $U \cap V = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoji $x \in U \cap V$. Tada je $d(a, x) < r$ i $d(b, x) < r$. Vrijedi $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + r = d(a, b)$, to jest $d(a, b) < d(a, b)$ što je nemoguće. Dakle $U \cap V = \emptyset$. Prema tome $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov prostor. □

Primjer 1.5.13. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan što slijedi iz prethodnog primjera i propozicije.*

1.6 Baza topologije

Definicija 1.6.1. *Neka je X skup te $\mathcal{T}$ topologija na X. Neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X sa sljedećim svojstvima:*

1. *$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$;*
2. *svaki element od $\mathcal{T}$ je unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, to jest za svaki $U \in \mathcal{T}$ postoji indeksirana familija $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha$.*

Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je baza topologije $\mathcal{T}$.

Primjer 1.6.2. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\{\{x\} \,|\, x \in X\}$ baza topologije $\mathcal{P}(X)$.*

Primjer 1.6.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $\mathcal{B} = \{K(x, r) | x \in X,\ r > 0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*

Propozicija 1.6.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$. Po definiciji baze U postoji indeksirana familija $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha$ pa posebno postoji $\alpha \in A$ takva da je $x \in B_\alpha \subseteq U$.
Obratno, neka za svaki $U \in \mathcal{T}$ i za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq U$. Tada vrijedi $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. Iz ovoga slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. □

Napomena 1.6.5. *Pretpostavimo da je X skup te da su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$. Tada je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Naime, imamo $\mathcal{T}_1 = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha | \, (\mathcal{B}_\alpha) \text{ indeksirana familija elemenata od } \mathcal{B} \right\}$

te isto tako $\mathcal{T}_2 = \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha | \, (\mathcal{B}_\alpha) \text{ indeksirana familija elemenata od } \mathcal{B} \right\}$.

Teorem 1.6.6. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X sa sljedećim svojstvima:*

1. $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;
2. *za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i za svaki $x \in B_1 \cap B_2$ postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Tada postoji jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Dokaz. Jedinstvenost slijedi iz prethodne napomene.
Dokažimo da postoji topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Definirajmo

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid \text{za svaki } x \in U \text{ postoji } B \in \mathcal{B} \text{ takav da je } x \in B \subseteq U\}.$$

Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X.

1. Očito je $\emptyset \in \mathcal{T}$, a da je $X \in \mathcal{T}$ slijedi iz prvog svojstva teorema.
2. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$.

   $$\text{Neka je } x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ što povlači da postoji } \alpha_0 \in A \text{ takva da je } x \in U_{x_0}.$$
   $$\text{Kako je } U_{\alpha_0} \in \mathcal{T} \text{ postoji } B \in \mathcal{B} \text{ takav da je } x \in B \subseteq U_{\alpha_0}.$$
   $$\text{Iz ovoga slijedi da je } x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$
   $$\text{Dakle } \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

3. Neka su $U, V \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in U \cap V$ to jest $x \in U$ i $x \in V$. Kako su $U, V \in \mathcal{T}$ slijedi da postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1 \subseteq U$ i $x \in B_2 \subseteq V$. Tada je $x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$. Po svojstvu dva iz teorema slijedi da postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ pa je $x \in B_3 \subseteq U \cap V$. Dakle $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Prema tome $\mathcal{T}$ je topologija na X.
Jasno je da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ pa iz propozicije 1.6.4 i definicije od $\mathcal{T}$ slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. □

1.7 Neprekidnost u topološkim prostorima

Definicija 1.7.1. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *funkcija te neka je* $x_0 \in X$. *Kažemo da je funkcija* f *neprekidna u točki* x_0 *s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *ako za svaku otvorenu okolinu* V *točke* $f(x_o)$ *postoji otvorena okolina* U *točke* x_0 *takva daj je* $f(U) \subseteq V$.

Napomena 1.7.2. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori i neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Tada je* f *neprekidna u* x_0 *s obzirom na metrike* d *i* d' *ako i samo ako je* f *neprekidna u* x_0 *s obzirom na topologije* $\mathcal{T}_d$ *i* $\mathcal{T}_{d'}$. *Ovo slijedi iz propozicije 1.4.2 i napomene 1.5.9.*

Definicija 1.7.3. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Kažemo da je* f *neprekidna s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *ako za svaki* $V \in \mathcal{S}$ *vrijedi da je* $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$

Propozicija 1.7.4. *Neka su* X *i* Y *topološki prostori te* $f :\longrightarrow Y$. *Tada je* f *neprekidna ako i samo ako je* $f^{-1}(G)$ *zatvoren u* X *za svaki* G *zatvoren u* Y.

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna. Neka je G zatvoren u Y pa je $Y \backslash G$ otvoren u Y. Po prethodnoj definiciji slijedi da je $f^{-1}(Y \backslash G)$ otvoren u X. No $f^{-1}(Y \backslash G) = X \backslash f^{-1}(G)$. Tada je $f^{-1}(G)$ zatvoren u X.
Obrat se dokazuje analogno. □

Propozicija 1.7.5. *Neka su* X, Y *i* Z *topološki prostori i neka je* $x_0 \in X$. *Neka su* $f : X \to Y$ *i* $g : Y \to Z$ *funkcije. Ako je* f *neprekidna u* x_0 *i* g *neprekidna u* $f(x_0)$, *onda je kompozicija* $g \circ f : X \to Z$ *neprekidna u* x_0.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka skupa X i neka je $W \subseteq Z$ otvorena okolina točke $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$. Iskoristimo prvo neprekidnost g u točki $f(x_0)$, to jest za okolinu W postoji otvorena okolina $V \subseteq Y$ točke $f(x_0)$ takva da je $g(V) \subseteq W$. Sada iskoristimo neprekidnost f u točki x_0, to jest za okolinu V postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Vrijedi sljedeće, $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subseteq g(V) \subseteq W$, pa je $g \circ f$ neprekidna u x_0. □

Lema 1.7.6. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i neka je* $V \subseteq X$ *takav da za svaki* $x \in V$ *postoji* $U \in \mathcal{T}$ *takav da je* $x \in U \subseteq V$. *Tada je* $V \in \mathcal{T}$.

Dokaz. Prema pretpostavci za svaki $x \in V$ postoji $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U_x \subseteq V$.Tada je $V = \bigcup_{x \in V} U_x$ pa je V otvoren kao unija otvorenih skupova. □

Propozicija 1.7.7. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Tada je* f *neprekidna s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *ako i samo ako je* f *neprekidna u* x *s obzirom na* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *za svaki* $x \in X$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Neka je $x \in X$ i neka je V otvorena okolina točke $f(x)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Kako je f neprekidna vrijedi $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Očito je $x \in f^{-1}(V)$. Dakle, $f^{-1}(V)$ je otvorena okolina točke x u $(X, \mathcal{T})$ i vrijedi $f\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq V$. Stoga je f neprekidna u x.
Obratno, pretpostavimo da je f neprekidna u x za svaki $x \in X$. Neka je $V \in \mathcal{S}$. Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x) \in V$. Dakle, V je otvorena okolina točke $f(x)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Iz neprekidnosti funkcije f u točki x slijedi da postoji otvorena okolina U točke x u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $f(U) \subseteq V$. Očito je $U \subseteq f^{-1}(V)$. Iz toga zaključujemo da za svaki $x \in f^{-1}(V)$ postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. Prema prethodnoj lemi je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Time smo dokazali da je f neprekidna. □

Korolar 1.7.8. *Neka su (X, d) i (Y, d') metrički prostori i neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike d i d' ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_d$ i $\mathcal{T}_{d'}$.*

Dokaz. Koristeći napomenu 1.7.2 i prethodnu propoziciju dobivamo sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{gathered}
f \text{ je neprekidna s obzirom na } d \text{ i } d' \iff \\
\iff f \text{ je neprekidna u } x \text{ s obzirom na } d \text{ i } d' \text{ za svaki } x \in X \iff \\
\iff f \text{ neprekidna u } x \text{ s obzirom na } \mathcal{T}_d \text{ i } \mathcal{T}_{d'} \text{ za svaki } x \in X \iff \\
\iff f \text{ neprekidna s obzirom na } \mathcal{T}_d \text{ i } \mathcal{T}_{d'}.
\end{gathered}$$

□

1.8 Potprostori

Definicija 1.8.1. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je Y neprazan podskup od X. Uočimo da je $d_{|Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ metrika na Y. Za metrički prostor $(Y, d_{|Y \times Y})$ kažemo da je potprostor metričkog prostora (X, d).*

Definicija 1.8.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$.*
Za $d_{|X \times X}$ kažemo da je euklidska metrika na X.
Za $\mathcal{T}_{d_{|X \times X}}$ kažemo da je euklidska topologija na X.

Propozicija 1.8.3. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je (Y, d') potprostor od (X, d). Neka je $V \subseteq Y$. Tada je V otvoren skup u (Y, d') ako i samo ako postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = Y \cap U$.*

Dokaz. Uočimo da za svaki $x \in Y$ i svaki $r > 0$ vrijedi

$$K_{d'}(x, r) = K_d(x, r) \cap Y. \tag{1.1}$$

Neka je V otvoren u (Y, d'). Prema definiciji otvorenog skupa za svaki $x \in V$ postoji $r_x > 0$ takav da je $K_{d'}(x, r_x) \subseteq V$. Slijedi da je $V = \bigcup_{x \in V} K_{d'}(x, r_x)$. Definirajmo $U = \bigcup_{x \in V} K(x, r_x)$. Skup U je otvoren u (X, d) kao unija otvorenih skupova. Koristeći (1.1) dobivamo:

$$U \cap Y = \left(\bigcup_{x \in V} K_d(x, r_x) \right) \bigcap Y = \bigcup_{x \in V} (K_d(x, r_x) \cap Y) = \bigcup_{x \in V} K_{d'}(x, r) = V$$

Dakle, $U \cap Y = V$.
Obratno, neka je U otvoren skup u (X, d) i neka je $U \cap Y = V$. Neka je $x \in V$. Tada je $x \in U$ pa postoji $r > 0$ takav da je $K_d(x, r) \subseteq U$. Slijedi $K_d(x, r_x) \cap Y \subseteq U \cap Y$ pa zaključujemo da je $K_{d'}(x, r) \subseteq V$. Stoga je V otvoren u (Y, d'). □

Definicija 1.8.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka je $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Definiramo $\mathcal{S} = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$. Tada je $\mathcal{S}$ topologija na Y. Za $\mathcal{S}$ kažemo da je relativna topologija na Y određena topologijom $\mathcal{T}$. Za $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Pokažimo da je $\mathcal{S}$ topologija na Y.

1. Imamo $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i $\emptyset \in \mathcal{T}$ te $Y = X \cap Y$ i $X \in \mathcal{T}$ pa zaključujemo da vrijedi $\emptyset, Y \in \mathcal{S}$.

2. Pretpostavimo da je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{S}$. Za svaki $\alpha \in A$ vrijedi $V_\alpha \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Na taj način smo dobili indeksiranu familiju $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{T}$. Budući da je $\mathcal{T}$ topologija vrijedi $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$. Imamo

   $$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap Y$$

   pa je $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}$ (jer je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$).

3. Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Tada je $V_1 = U_1 \cap Y$ i $V_2 = U_2 \cap Y$ gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Slijedi da je

   $$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y,$$

   a znamo da je $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Stoga je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$.

Iz toga slijedi da je $\mathcal{S}$ topologija na Y.

Napomena 1.8.5. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je $\left(Y, \mathcal{T}_p\right)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$ to jest $\mathcal{T}_p = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}_d\}$.*

Dokaz. Neka je $V \subseteq Y$. Tada vrijede sljedeće ekvivalencije: $V \in \mathcal{T}_p$ ako i samo ako je V otvoren u (Y, p) ako i samo ako postoji U otvoren u (X, d) takav da je $V = Y \cap U$ ako i samo ako postoji $U \in \mathcal{T}_d$ takav da je $V = Y \cap U$ ako i samo ako $V \in \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}_d\}$. □

Napomena 1.8.6. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ takvi da su $X, Y \neq \emptyset$ i $Y \subseteq X$. Neka je d_Y euklidska metrika na Y te neka je d_X euklidska metrika na X. Tada je (Y, d_Y) potprostor metričkog prostora (X, d_X). Iz napomene 1.8.5 slijedi da je $(Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_{d_X})$. Dakle, $(Y, \mathcal{E}_Y)$ je potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{E}_X)$, gdje je $\mathcal{E}_Y$ euklidska topologija na Y, a $\mathcal{E}_X$ euklidska topologija na X.*

Propozicija 1.8.7. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{P})$ topološki prostori takvi da je $(Z, \mathcal{P})$ potprostor od $(Y, \mathcal{S})$ te $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Tada je $(Z, \mathcal{P})$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Očito je $Z \subseteq X$. Treba dokazati da je

$$\mathcal{P} = \{U \cap Z \mid U \in \mathcal{T}\}. \tag{1.2}$$

Neka je $W \in \mathcal{P}$. Tada postoji $V \in \mathcal{S}$ takav da je $W = V \cap Z$. Nadalje, postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je $V = U \cap Y$. Iz ovoga slijedi da je $W = (U \cap Y) \cap Z = U \cap (Y \cap Z) = U \cap Z$.
Zaključak: $W = U \cap Z$.
Obratno, neka je $U \in \mathcal{T}$. Imamo $U \cap Z = U \cap (Y \cap Z) = (U \cap Y) \cap Z$. Znamo da je $U \cap Y \in \mathcal{S}$ pa je $(U \cap Y) \cap Z \in \mathcal{P}$. Tada je $U \cap Z \in \mathcal{P}$. Dakle (1.2) vrijedi. □

Poglavlje 2

Povezanost

2.1 Povezanost u metričkim i topološkim prostorima

Definicija 2.1.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Za uređeni par* (U, V) *kažemo da je separacija topološkog prostora* $(X, \mathcal{T})$ *ako vrijedi sljedeće:*

$$U, V \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset, V \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset, U \cup V = X.$$

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je povezan ako ne postoji separacija tog topološkog prostora.*

Primjer 2.1.2. *Neka je* X *skup koji ima barem dva različita elementa. Tada* $(X, \mathcal{P}(X))$ *nije povezan. To slijedi iz činjenice da je su svi podskupovi od* X *otvoreni pa separaciju možemo formirati tako da je* $U = \{x\}$ *gdje je* $x \in X$ *proizvoljan.* V *je tada skup koji sadrži sve ostale elemente iz* X*.*

Primjer 2.1.3. *Neka je* X *neprazan skup. Tada je* $(X, \{\emptyset, X\})$ *očito povezan.*

Definicija 2.1.4. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Neka je* Y *podskup od* X*. Za* Y *kažemo da je povezan skup u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *ako je* $Y = \emptyset$ *ili* $Y \neq \emptyset$ *i topološki prostor* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *povezan, gdje je* $\mathcal{T}_Y$ *relativna topologija na* Y*.*

Propozicija 2.1.5. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori i neka je* $f : X \to Y$ *neprekidna surjekcija. Pretpostavimo da je topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *povezan. Tada je topološki prostor* $(Y, \mathcal{S})$ *povezan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da $(Y, \mathcal{S})$ nije povezan. Tada postoji separacija (U, V) od $(Y, \mathcal{S})$. Kako je f neprekidna funkcija tada su $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ otvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Očito su ovi skupovi disjunktni i njihova je unija jednaka skupu X. Iz činjenice da je $U \neq \emptyset$ i da je f surjekcija slijedi da je $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Analogno vrijedi $f^{-1}(V) \neq$

$\emptyset$. Zaključujemo da je $\left(f^{-1}(U), f^{-1}(V)\right)$ separacija od $(X, \mathcal{T})$. Ovo je kontradikcija s činjenicom da je $(X, \mathcal{T})$ povezan. Dakle, $(Y, \mathcal{S})$ je povezan. □

Napomena 2.1.6. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Neka je $(A, \mathcal{T}_A)$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f_{|A} : A \to Y$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_A$ i $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{S}$. Tada je $f_{|A}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$. f je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ pa je $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Iz ovoga slijedi da je $f^{-1}(U) \cap A \in \mathcal{T}_A$ pa je $f_{|A}$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}_A$ i $\mathcal{S}$ po definiciji neprekidnosti. □

Napomena 2.1.7. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{V})$ topološki prostori takvi da je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor od $(Z, \mathcal{V})$. Neka je $f : X \to Y$ funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako je f neprekidna kao funkcija $f : X \to Z$ s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{V}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Neka je $V \in \mathcal{V}$. Tada je $Y \cap V \in \mathcal{S}$. Kako je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ vrijedi $f^{-1}(Y \cap V) \in \mathcal{T}$. No $f^{-1}(Y \cap V) = f^{-1}(V)$ pa je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ to jest f je neprekidna funkcija s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{V}$. Analogno se pokaže i drugi smjer. □

Korolar 2.1.8. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Neka je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $f(A)$ povezan u $(Y, \mathcal{S})$.*

Dokaz. Ako je $A = \emptyset$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da je $A \neq \emptyset$. Tada je očito i $f(A) \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{T}'$ relativna topologija na A s obzirom na $\mathcal{T}$ i neka je $\mathcal{S}'$ relativna topologija na $f(A)$ s obzirom na $\mathcal{S}$. Definirajmo funkciju $g : A \to f(A)$ s $g(x) = f(x)$ za sve $x \in A$. Prema napomeni 1.5.6 funkcija $f_{|A} : A \to Y$ je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}'$ i $\mathcal{S}$. Sada iz napomene 1.5.7 slijedi da je $g : A \to f(A)$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}'$ i $\mathcal{S}'$. Znamo da je $(A, \mathcal{T}')$ povezan topološki prostor pa je po propoziciji 1.5.5 $(f(A), \mathcal{S}')$ povezan topološki prostor. Dakle $f(A)$ je povezan u $(Y, \mathcal{S})$. □

Definicija 2.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za uređeni par (U, V) kažemo da je separacija metričkog prostora (X, d) ako su U i V otvoreni u metričkom prostoru (X, d) i ako vrijedi sljedeće:*

$$U \neq \emptyset, V \neq \emptyset, U \cap V = \emptyset, U \cup V = X.$$

Za metrički prostor (X, d) kažemo da je povezan ako ne postoji separacija tog metričkog prostora.

Uočimo da je metrički prostor (X, d) povezan ako i samo ako je pripadni topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ povezan.

Definicija 2.1.10. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je Y podskup od X. Za Y kažemo da je povezan skup u metričkom prostoru (X, d) ako je $Y = \emptyset$ ili $Y \neq \emptyset$ i metrički prostor $(Y, d_{|Y\times Y})$ povezan, gdje je $d_{|Y\times Y}$ restrikcija metrike $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ na $Y \times Y$.*

Napomena 2.1.11. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $A \subseteq X$. Tada vrijedi da je A povezan u (X, d) ako i samo ako je A povezan u $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz.

1. Neka je A povezan u (X, d) to je po definiciji 2.1.10 ekvivalentno s time da je $(A, d_{|A\times A})$ povezan, što je ekvivalentno s time da je $\left(A, \mathcal{T}_{d_{|A\times A}}\right)$ povezan.
2. Neka je A povezan u $(X, \mathcal{T}_d)$ to je ekvivalentno s time da je $(A, \mathcal{S})$ povezan, gdje je $\mathcal{S}$ relativna topologija na A. Po propoziciji 1.8.4 je $\mathcal{S} = \mathcal{T}_{d_{|A\times A}}$.

Iz 1. i 2. slijedi da je A je povezan u (X, d) ako i samo ako je A povezan u $(X, \mathcal{T}_d)$. □

Definicija 2.1.12. *Kažemo da je skup $A \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj M takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in A$. Svaki broj M s navedenim svojstvom nazivamo majoranta ili gornja međa skupa A. Ako skup A nije odozgo omeđen kažemo da je odozgo neomeđen.*
Kažemo da je skup $A \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđen ili ograničen, ako postoji realan broj m takav da je $x \geq m$ za svaki $x \in A$. Svaki broj m s navedenim svojstvom nazivamo minoranta ili donja međa skupa A. Ako skup A nije odozdo omeđen kažemo da je odozdo neomeđen.
Skup $A \subseteq \mathbb{R}$ je omeđen, ako je i odozgo i odozdo omeđen. U protivnom se kaže da je A neomeđen.

Definicija 2.1.13. *Najmanju majorantu skupa A nazivamo supremum i označavamo sa* $\sup A$. *Ako je $supA \in S$, nazivamo ga maksimalnim elementom skupa A i označavamo s* $\max A$. *Najveću minorantu skupa A nazivamo infimum i označavamo s* $\inf A$. *Ako je* $\inf A \in A$, *nazivamo ga minimalnim elementom skupa A i označavamo s* $\min A$.

Napomena 2.1.14. *Aksiom potpunosti: Svaki neprazan odozgo omeđen podskup $A \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.*
Lako se pokaže da vrijedi analogna tvrdnja za infimum: Svaki neprazan odozdo omeđen podskup $A \subset \mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$.

Teorem 2.1.15. $([a, b], d)$ *je povezan, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i d euklidska metrika na* $[a, b]$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno to jest da postoje otvoreni skupovi U_1, U_2 u $([a, b], d)$ takvi da je $U_1, U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ i $[a, b] = U_1 \cup U_2$, drugim riječima pretpostavimo da segment $[a, b]$ nije povezan. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a \in U_1$ i neka je $c := \inf U_2$. Pokazat ćemo da točka c mora pripadati ili skupu U_1 ili skupu U_2. Prema pretpostavci da je skup U_1 otvoren i $a \in U_1$, postoji $r > 0$ takav da je $[a, a + r\rangle \subseteq U_1$, gdje je $U_1 = [a,b]\backslash U_2$ iz čega slijedi da je $c = \inf U_2 \neq a$. Dakle, $c \neq b$, jer bi u suprotnom bilo $U_2 = \{b\}$, što nije otvoren skup u $[a,b]$. Kao što smo naveli ranije, mora vrijediti ili $c \in U_1$ ili $c \in U_2$. Kada bi točka c pripadala skupu U_2, tada bi zbog otvorenosti skupa U_2, postojao $r > 0$ takav da je $\langle c-r, c+r\rangle \subseteq U_2$ te bi u tom slučaju infimum skupa U_2 bio manji od c, iz čega zaključujemo da c mora pripadati skupu U_1. Kako c pripada otvorenom skupu U_1 mora postojati $r > 0$ takav da je $\langle c-r, c+r\rangle \subseteq U_1$ pa c ne može biti infimum skupa U_2 i time dolazimo do kontradikcije sa pretpostavkom da segment $[a,b]$ nije povezan te iz toga slijedi tražena tvrdnja, to jest segment $[a,b]$ je povezan. □

Propozicija 2.1.16. *Neka je $(Y,\mathcal{S})$ potprostor od $(X,\mathcal{T})$ i neka je $F \subseteq Y$. F je zatvoren u $(Y,\mathcal{S})$ ako i samo ako postoji G zatvoren u $(X,\mathcal{T})$ takav da je $F = G \cap Y$.*

Dokaz. Neka je F zatvoren u $(Y,\mathcal{S})$. Tada je njegov komplement $Y\backslash F$ otvoren u $(Y,\mathcal{S})$. Po definiciji od $\mathcal{S}$ za $Y\backslash F$ postoji skup U otvoren u $(X,\mathcal{T})$ takav da je $Y\backslash F = U \cap Y$. Definiramo skup $G = X\backslash U$. G je zatvoren u $(X,\mathcal{T})$ jer je njegov komplement U otvoren u $(X,\mathcal{T})$ i vrijedi $F = G \cap Y$.
Obratno, pretpostavimo da postoji skup G zatvoren u $(X,\mathcal{T})$ takav da je $F = G \cap Y$. Tada vrijedi $Y\backslash F = (X\backslash G) \cap Y$. Skup $X\backslash G$ je otvoren u $(X,\mathcal{T})$ pa je i $Y\backslash F$ otvoren u $(Y,\mathcal{S})$ po definiciji relativne topologije na Y. Iz toga slijedi da je F zatvoren skup u $(Y,\mathcal{S})$. □

Korolar 2.1.17. *Neka je (Y,p) potprostor od (X,d) i neka je $F \subseteq Y$. F je zatvoren u (Y,p) ako i samo ako postoji G zatvoren u (X,d) takav da je $F = G \cap Y$.*

Dokaz. Korolar slijedi direktnom primjenom prethodne propozicije, napomene 1.5.9 i propozicije 1.8.4. □

Propozicija 2.1.18. *Neka je $K \subseteq \mathbb{R}$, $K \neq \emptyset$ i neka je K zatvoren, odozdo omeđen skup. Tada K ima minimum.*

Dokaz. Neka je $K \subseteq \mathbb{R}$, $K \neq \emptyset$ i neka je K zatvoren, odozdo omeđen skup. Tada po napomeni (2.1.14) postoji infimum skupa K. Trebamo još pokazati da je $\inf K \in K$. Pretpostavimo da $\inf K \notin K$, to jest $\inf K \in \mathbb{R}\backslash K$. Kako je K zatvoren, to jest $\mathbb{R}\backslash K$ otvoren, postoji $r > 0$ takav da je $\langle \inf K - r, \inf K + r\rangle \subseteq \mathbb{R}\backslash K$. No tada bi i broj $\inf K + \frac{r}{2}$ bio donja međa skupa K, koja je veća od $\inf K$, što je u suprotnosti s definicijom infimuma kao najveće donje međe. □

Napomena 2.1.19. *Analogno se kao u prethodnoj propoziciji pokaže tvrdnja: Neka je $K \subseteq \mathbb{R}$, $K \neq \emptyset$ i neka je K zatvoren, odozgo omeđen skup. Tada K ima maksimum.*

Propozicija 2.1.20. *Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(Y,\mathcal{S})$ potprostor od $(X,\mathcal{T})$. Neka je $A \subseteq Y$. Tada je A povezan u $(Y,\mathcal{S})$ ako i samo ako je A povezan u $(X,\mathcal{T})$.*

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je $A = \emptyset$.
Pretpostavimo da je $A \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S}_A$ relativna topologija na A određena sa $\mathcal{S}$. Neka je $\mathcal{T}_A$ relativna topologija na A određena s $\mathcal{T}$.
Vrijedi: $(A, \mathcal{S}_A)$ je potprostor od $(Y, \mathcal{S})$. Iz propozicije 1.8.7 slijedi da je $(A, \mathcal{S}_A)$ potprostor od $(X, \mathcal{T})$ pa je $\mathcal{S}_A = \mathcal{T}_A$.
Imamo:
A povezan u $(Y, \mathcal{S})$ ako i samo ako je $(A, \mathcal{S}_A)$ povezan topološki prostor.
A povezan u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $(A, \mathcal{T}_A)$ povezan topološki prostor.
Iz ovoga slijedi tvrdnja propozicije. □

Lema 2.1.21. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka je (U, V) separacija od X. Neka je $Y \subseteq X$ povezan podskup. Tada je ili $Y \subseteq U$ ili $Y \subseteq V$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno to jest neka je $U \cap Y \neq \emptyset$ i $V \cap Y \neq \emptyset$ Skupovi $U \cap Y$ i $V \cap Y$ su otvoreni u Y po definiciji relativne topologije na Y, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ i $Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y)$. Tada je $((U \cap Y), (V \cap Y))$ separacija od Y što je u kontradikciji s pretpostavkom da je Y povezan skup. Iz toga slijedi da je ili $U \cap Y = \emptyset$ ili $V \cap Y = \emptyset$ to jest $Y \subseteq U$ ili $Y \subseteq V$. □

Propozicija 2.1.22. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka je $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija povezanih skupova u X. Neka je T povezan skup u X takav da za svaki $\alpha \in A$ je $B_\alpha \cap T \neq \emptyset$. Tada je $Y = \left(\bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha \right) \cup T$ povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest pretpostavimo da postoji separacija (U, V) od Y. Kako je T povezan skup vrijedi da je $T \subseteq U$ ili $T \subseteq V$.
Ako je $T \subseteq U$ onda je $A_\alpha \subseteq U$ za svaki $\alpha \in A$. Tada je i $Y \subseteq U$ što je nemoguće. Analogno dobijemo kontradikciju i za $T \subseteq V$. Iz ovoga zaključujemo da ne postoji separacija od Y, to jest Y je povezan skup u X. □

Korolar 2.1.23. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i neka su $B_\alpha \subseteq X$, $\alpha \in A$ povezani skupovi koji imaju neprazan presjek. Tada je njihova unija povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je $Y = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$, B_α povezani i $p \in \bigcap_{\alpha \in A} B_\alpha$. Tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije uzimanjem $T = \{p\}$. □

2.2 Komponente povezanosti

Definicija 2.2.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $A \subseteq X$.*
Nutrina (interior) od A ($\operatorname{Int} A$) definiramo s

$$\operatorname{Int} A = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ otvoren u } (X,\mathcal{T})}} U.$$

Zatvarač (zatvorenje) skupa A ($\operatorname{Cl} A$) definiramo s

$$\operatorname{Cl} A = \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ zatvoren u } X}} F.$$

Rub skupa A (∂A) definiramo s

$$\partial A = \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl}(X \backslash A).$$

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je $x_0 \in X$ točka gomilanja ili gomilište skupa $A \subseteq X$, ako za svaki otvoreni skup $U \subset X$ takav da je $x_0 \in U$ vrijedi $U \cap (A \backslash \{x_0\}) \neq \emptyset$, to jest U sadrži točku iz A koja je različita od x_0.*
Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A' i zovemo derivat skupa A.

Propozicija 2.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $A \subseteq X$ te $x_0 \in X$. Tada je $x_0 \in ClA$ ako i samo ako svaka otvorena okolina od x_0 siječe A.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in A$. Pretpostavimo da postoji otvorena okolina U od x_0 takva da je $U \cap A = \emptyset$. Tada je $A \subseteq U^c$. Kako je U^c zatvoren vrijedi da je $\operatorname{Cl} A \subseteq U^c$. Iz ovoga slijedi da je $U \cap \operatorname{Cl} A = \emptyset$ što je u kontradikciji s $X_0 \in U$ i $x_0 \in \operatorname{Cl} A$.
Obratno, pretpostavimo da svaka otvorena okolina od x_0 siječe A. Pretpostavimo da $x_0 \notin \operatorname{Cl} A$ pa je $x_0 \in (\operatorname{Cl} A)^c$. Tada je $(\operatorname{Cl} A)^c$ otvorena okolina od x_0. Iz ovoga slijedi da je $A \cap (\operatorname{Cl} A)^c \neq \emptyset$. Vrijedi:

$$\emptyset \neq A \cap (\operatorname{Cl} A)^c \subseteq \operatorname{Cl} A \cap (\operatorname{Cl} A)^c = \emptyset,$$

što je nemoguće pa zaključujemo da je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. □

Propozicija 2.2.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Skup A je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.*

Dokaz. Neka je A zatvoren i x gomilište od A. Kada bi bilo $x \in A^C$ i zbog otvorenosti skupa A^C, postojao bi otvoren skup $U \subset X$ takav da je $U \subseteq A^C$, odnosno $U \cap A = \emptyset$. No to nije moguće jer je x gomilište od A. Dakle, mora vrijediti $x \in A$. Odatle slijedi da A mora

sadržavati sva svoja gomilišta.
Obratno, neka A sadrži sva svoja gomilišta i neka je $x \in A^C$ bilo koji element. Kako x nije gomilište od A to postoji otvoreni skup $U \subset X$ koja ne sadrži niti jedan element skupa A, tj. $U \subseteq A^C$. Kako to vrijedi za sve $x \in A^C$ to je A^C otvoren skup, pa je A zatvoren skup. □

Propozicija 2.2.5. *Zatvarač skupa A je unija skupa A i skupa svih gomilišta od A, to jest* $ClA = A \cup A'$.

Dokaz.
1. Neka je $x \in \mathrm{Cl}\, A$. Ako je $x \in A$ tada trivijalno vrijedi $\mathrm{Cl}\, A \subseteq A \cup A'$. Pretpostavimo da $x \notin A$ pa po propoziciji 2.2.3 slijedi da svaka otvorena okolina od x siječe A. Kako $x \notin A$ vrijedi da svaka otvorena okolina od x siječe $A \setminus \{x\}$. Neka je U otvorena okolina od x. Po prethodno navedenom imamo da je $U \cap A \neq \emptyset$ to jest $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. To znači da postoji $a \in A$ takav da je $a \in U$ i $a \neq x$. Tada je $x \in A'$. Zaključujemo da vrijedi $\mathrm{Cl}\, A \subseteq A \cup A'$.

2. Vrijedi $A \subseteq \mathrm{Cl}\, A$. Dovoljno je još pokazati da je $A' \subseteq \mathrm{Cl}\, A$. Neka je $x \in A'$. tada svaka otvorena okolina od x siječe skup $A \setminus \{x\}$ pa posebno svaka otvorena okolina siječe i A. Iz propozicije 2.2.3 slijedi da je $x \in \mathrm{Cl}\, A$. Zaključujemo da vrijedi $A \cup A' \subseteq \mathrm{Cl}\, A$.

Iz 1. i 2. slijedi slijedi $\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'$. □

Propozicija 2.2.6. *Neka je X topološki prostor. Neka je $Y \subseteq X$ i (U, V) separacija od Y. Tada vrijedi* $\mathrm{Cl}\, U \cap V = \emptyset$.

Dokaz. V je otvoren skup u Y pa po propoziciji 1.8.3 postoji V' otvoren u X takav da je $V = Y \cap V'$.
Tvrdimo da je $U \cap V' = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoji $x \in U \cap V'$. Tada je $x \in U$ i $x \in V'$. Kako je i $x \in Y$ slijedi da je $x \in Y \cap V' = V$. Ovo je nemoguće pa vrijedi $U \cap V' = \emptyset$. Iz ovoga slijedi da je $U \subseteq X \setminus V'$. Kako je $X \setminus V'$ zatvoren u X slijedi da je $\mathrm{Cl}\, U \subseteq X \setminus V'$. Tada je $\mathrm{Cl}\, U \cap V' = \emptyset$. Iz ovoga i činjenice da je $V \subseteq V'$ slijedi da je $\mathrm{Cl}\, U \cap V = \emptyset$. □

Propozicija 2.2.7. *Neka je $A \subseteq B \subseteq \mathrm{Cl}\, A$. Ako je A povezan onda je i B povezan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno to jest pretpostavimo da je B nepovezan i da je (U, V) separacija od B. Prema lemi 1.5.17 je $A \subseteq U$ (ili $A \subseteq V$), pa je i $B \subseteq \mathrm{Cl}\, A \subseteq \mathrm{Cl}\, U$. Po prethodnoj propoziciji je $\mathrm{Cl}\, U \cap V = \emptyset$. To je $B \cap V = \emptyset$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je (U, V) separacija od B.

□

Definicija 2.2.8. *Neka je X topološki prostor te $x_0 \in X$. Definiramo*

$$K_{x_0} = \bigcup_{\substack{x_0 \in P \\ P \text{ povezan skup u } X}} P.$$

Za K_{x_0} kažemo da je komponenta povezanosti točke x_0 u X.

Očito je $\{x_0\}$ povezan skup u X pa je $\{x_0\} \subseteq K_{x_0}$, dakle $x_0 \in K_{x_0}$.
Iz propozicije 2.1.23 slijedi da je K_{x_0} povezan skup u X.
Uočimo sljedeće: ako je P povezan skup u X takav da je $x_0 \in P$, onda je $P \subseteq K_{x_0}$. Dakle K_{x_0} je najveći (u smislu inkluzije) povezan skup u X koji sadrži x_0.

Napomena 2.2.9. *Neka je X topološki prostor te $x_0, x_1 \in X$. Tada je $K_{x_0} = K_{x_1}$ ili $K_{x_0} \cap K_{x_1} = \emptyset$. Naime, ako je $K_{x_0} \cap K_{x_1} \neq \emptyset$, onda je $K_{x_0} \cup K_{x_1}$ povezan skup koji sadrži x_0 i x_1 pa slijedi $K_{x_0} \cup K_{x_1} \subseteq K_{x_0}$ i $K_{x_0} \cup K_{x_1} \subseteq K_{x_1}$, to jest $K_{x_1} \subseteq K_{x_0}$ i $K_{x_0} \subseteq K_{x_1}$ pa je $K_{x_0} = K_{x_1}$.*

Napomena 2.2.10. *Neka je X topološki prostor te neka je $\mathcal{K} = \{K_x | x \in X\}$. Tada je $\mathcal{K}$ prema prethodnoj napomeni particija od X.*

Propozicija 2.2.11. *Neka je X topološki prostor te neka je $x \in X$. Tada je K_x zatvoren skup u X.*

Dokaz. Općenito, ako je A povezan skup, tada je i $\operatorname{Cl} A$ povezan skup. To slijedi iz propozicije 2.2.7. Stoga je $\operatorname{Cl} K_x$ povezan skup u X pa je $\operatorname{Cl} K_x \subseteq K_x$. Iz ovoga slijedi da je $K_x = \operatorname{Cl} K_x$ što znači da je K_x zatvoren. □

Primjer 2.2.12. *Neka je X neprazan skup te neka je $x \in X$. Tada je $\{x\}$ komponenta povezanosti od x u topološkom prostoru $(X, \mathcal{P}(X))$.*

Pretpostavimo suprotno, to jest da je $K_x \neq \{x\}$. Tada postoji $y \in K_x$ takav da je $y \neq x$. Iz ovoga slijedi da je uređeni par $(\{x\}, (X \setminus \{x\}) \cap K_x)$ separacija od $(K_x, \mathcal{S})$, gdje je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K_x. To je nemoguće jer je K_x povezan skup u $(X, \mathcal{P}(X))$. Dakle $K_x = \{x\}$.

Primjer 2.2.13. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{Q}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{Q}$ vrijedi $K_x = \{x\}$ u topološkom prostoru $(\mathbb{Q}, \mathcal{E})$.*

Naime, pretpostavimo da je $x \in \mathbb{Q}$ te da je $K_x \neq \{x\}$. Tada postoji $y \in K_x$ takav da je $y \neq x$. Pretpostavimo da je $y < x$ pa postoji $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takav da je $y < z < x$. Znamo da su $\langle -\infty, z\rangle$ i $\langle z, \infty\rangle$ elementi euklidske topologije na $\mathbb{R}$ pa su $\langle -\infty, z\rangle \cap \mathbb{Q}$, $\langle z, \infty\rangle \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{E}$. Tada su $\langle -\infty, z\rangle \cap \mathbb{Q} \cap K_x$, $\langle z, \infty\rangle \cap \mathbb{Q} \cap K_x \in \mathcal{S}$ gdje je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K_x (određena topologijom $\mathcal{E}$). Iz ovoga slijedi da je uređeni par $(\langle -\infty, z\rangle \cap \mathbb{Q} \cap K_x, \langle z, \infty\rangle \cap \mathbb{Q} \cap K_x)$ separacija od $(K_x, \mathcal{S})$. To je nemoguće jer je K_x povezan skup u $(\mathbb{Q}, \mathcal{E})$.

Na isti način dolazimo do kontradikcije u slučaju $x < y$.

Napomena 2.2.14. *Uočimo da $\mathcal{E}$ nije diskretna topologija na $\mathbb{Q}$, to jest $\mathcal{E} \neq \mathcal{P}(X)$. Naime, imamo $\{0\} \notin \mathcal{E}$ jer bi u suprotnom $\{0\}$ bio otvoren skup u metričkom prostoru $(\mathbb{Q}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{Q}$, no to je nemoguće jer ne postoji $r > 0$ takav da je $K_d(0, r) \subseteq \{0\}$.*

Definicija 2.2.15. *Za topološki prostor X koji je nepovezan kažemo da je potpuno nepovezan ako za svaki $x \in K$ vrijedi $K_x = \{x\}$.*

Napomena 2.2.16. *Uočimo sljedeće: nepovezan topološki prostor X je potpuno nepovezan ako i samo ako ne postoji povezan skup u X koji ima barem dva različita elementa. Primijetimo da je topološki prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{E})$ iz primjera 2.2.13 potpuno nepovezan.*

2.3 Produkt povezanih prostora

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Definirajmo

$$\mathcal{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}.$$

Tvrdimo da je $\mathcal{B}$ baza neke topologije na $X \times Y$.
Očito je $X \times Y \in \mathcal{B}$ pa je $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$.
Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Tada za neke $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ i $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$ vrijedi $B_1 = U_1 \times V_1$ i $B_2 = U_2 \times V_2$. Imamo

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

a $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ i $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$ pa je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Dakle, za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Iz teorema 1.6.6 slijedi da postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ na $X \times Y$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Definicija 2.3.1. *Za $\mathcal{R}$ kažemo da je produktna topologija na $X \times Y$ (određena s $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$), a za topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ da je produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.*

Propozicija 2.3.2. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka su $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ i $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ projekcije na prvu i drugu koordinatu, to jest $p_1(x, y) = x$, $p_2(x, y) = y$ za sve $x \in X$ i sve $y \in Y$. Tada je p_1 neprekidna s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$ te je p_2 neprekidna s obzirom na $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{T}$. Tada je $p_1^{-1}(U) = U \times Y$ pa je $p_1^{-1}(U) \in \mathcal{R}$. Stoga je p_1 neprekidna funkcija.
Analogno dobivamo da je p_2 neprekidna funkcija. □

Propozicija 2.3.3. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \longrightarrow Y$ funkcija. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topološgije $\mathcal{S}$. Tada je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako i samo ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.*

Dokaz. Nužnost trivijalno vrijedi.
Pokažimo dovoljnost. Pretpostavimo da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$. Neka je $V \in \mathcal{S}$. Tada postoji $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $V = \bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$. Sada imamo:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha) \in \mathcal{T} \text{ jer je } f^{-1}(B_\alpha) \in \mathcal{T} \text{ za sve } \alpha \in A.$$

Iz ovoga slijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$, to jest f je neprekidna. □

Propozicija 2.3.4. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $(Z, \mathcal{P})$ topološki prostor te $f : Z \longrightarrow X \times Y$. Tada je f neprekidna ako i samo ako su kompozicije $p_1 \circ f : Z \longrightarrow X$ i $p_2 \circ f : Z \longrightarrow Y$ neprekidne funkcije.*

Dokaz. Ako je f neprekidna, tada su $p_1 \circ f$ i $p_2 \circ f$ neprekidne prema propoziciji 2.3.2 i propoziciji 1.7.5.
Obratno, pretpostavimo da su $p_1 \circ f$ i $p_2 \circ f$ neprekidne. Želimo dokazati da je f neprekidna. Neka je $\mathcal{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$. Znamo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{R}$. Dovoljno je prema propoziciji 2.3.3 dokazati da je $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$. Neka je $B \in \mathcal{B}$, to jest $B = U \times V$ za neke $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$. Imamo:

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) = f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z \mid f(z) \in U \times V\} = \\ &= \{z \in Z \mid (p_1(f(z)), p_2(f(z))) \in U \times V\} = \\ &= \{z \in Z \mid p_1(f(z)) \in U \text{ i } p_2(f(z)) \in V\} = \\ &= \{z \in Z \mid (p_1 \circ f)(z) \in U\} \cap \{z \in Z \mid (p_2 \circ f)(z) \in V\} = \\ &= (p_1 \circ f)^{-1}(U) \cap (p_2 \circ f)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Imamo $(p_1 \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{P}$ jer je $p_1 \circ f$ neprekidna te $(p_2 \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{P}$ jer je $p_2 \circ f$ neprekidna. Iz ovoga slijedi da je $(p_1 \circ f)^{-1}(U) \cap (p_2 \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{P}$ pa je $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}$. Zaključujemo da je f neprekidna. □

Teorem 2.3.5. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Tada je $(X \times Y, \mathcal{R})$ povezan topološki prostor ako i samo ako su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ povezani topološki prostori.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $(X \times Y, \mathcal{R})$ povezan topološki prostor. Neka je $p : X \times Y \longrightarrow X$ projekcija na prvu koordinatu. Prema propoziciji 2.3.2 p je neprekidna funkcija, a očito je p surjekcija pa iz propozicije 2.1.5 slijedi da je $(X, \mathcal{T})$ povezan topološki prostor.
Analogno zaključujemo da je $(Y, \mathcal{S})$ povezan topološki prostor.

Obratno, pretpostavimo da su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ povezani topološki prostori. Odaberimo neki $x_0 \in X$. Definirajmo funkciju:

$$f : Y \longrightarrow X \times Y \text{ sa } f(y) = (x_0, y).$$

Neka su $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$ i $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ projekcije. Imamo da je $p_1 \circ f : Y \longrightarrow X$ konstantna funkcija, stoga je $p_1 \circ f$ neprekidna. Nadalje, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ je identiteta na Y, stoga je $p_2 \circ f$ neprekidna funkcija. Iz propozicije 2.3.4 slijedi da je f neprekidna funkcija. Imamo da je Y povezan skup u $(Y, \mathcal{S})$ pa iz korolara 2.1.8 slijedi da je $f(Y)$ povezan skup u $(X \times Y, \mathcal{R})$. Uočimo da je $f(Y) = \{(x_0, y) \mid y \in Y\} = \{x_0\} \times Y$. Dakle $\{x_0\} \times Y$ je povezan skup u $(X \times Y, \mathcal{R})$.
Neka je $y \in Y$. Definirajmo:

$$g : X \longrightarrow X \times Y \text{ sa } g(x) = (x, y).$$

Analogno kao u slučaju funkcije f zaključujemo da je g neprekidna funkcija. Stoga je $g(X)$ povezan skup u $(X \times Y, \mathcal{R})$. No $g(X) = X \times \{y\}$, dakle $X \times \{y\}$ je povezan skup u $(X \times Y, \mathcal{R})$ za svaki $y \in Y$.

$$\text{Imamo } X \times Y = \left(\bigcup_{y \in Y} (X \times \{y\}) \right) \cup (\{x_0\} \times Y).$$

Za svaki $y \in Y$ vrijedi da je $(X \times \{y\}) \cap (\{x_0\} \times Y) \neq \emptyset$ jer svaki presjek sadrži točku (x_0, y). Iz propozicije 2.1.22 slijedi da je $X \times Y$ povezan skup u $(X \times Y, \mathcal{R})$ pa je $(X \times Y, \mathcal{R})$ povezan topološki prostor. □

2.4 Povezanost putevima

Definicija 2.4.1. *Put u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ je svako neprekidno preslikavanje $\omega : [0, 1] \to X$. Pri tome na $[0, 1]$ gledamo euklidsku topologiju. Točku $x_0 = \omega(0)$ zovemo početak puta ω, a točku $x_1 = \omega(a)$ kraj puta ω. Kažemo da put ω povezuje točku x_0 s točkom x_1.*

Definicija 2.4.2. *Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan putevima ako za svaki par točaka $x_0, x_1 \in X$ postoji put ω koji povezuje x_0 s x_1.*

Definicija 2.4.3. *Put u metričkom prostoru (X, d) je svako neprekidno preslikavanje $\omega : [0, 1] \to X$. Pri tome na $[0, 1]$ gledamo euklidsku topologiju. Točku $x_0 = \omega(0)$ zovemo početak puta ω, a točku $x_1 = \omega(a)$ kraj puta ω. Kažemo da put ω povezuje točku x_0 s točkom x_1.*

Napomena 2.4.4. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te* $\omega : [0, 1] \to X$*. Tada je* ω *put u* (X, d) *ako i samo ako je* ω *put u* $(X, \mathcal{T}_d)$*.*
Ova tvrdnja slijedi iz korolara 1.7.8.

Definicija 2.4.5. *Kažemo da je metrički prostor* (X, d) *povezan putevima ako za svaki par točaka* $x_0, x_1 \in X$ *postoji put* ω *u* (X, d) *koji povezuje* x_0 *s* x_1*.*

Napomena 2.4.6. *Metrički prostor* (X, d) *je putevima povezan ako i samo ako je pripadni topološki prostor* $(X, \mathcal{T}_d)$ *putevima povezan.*

Teorem 2.4.7. *Svaki putovima povezan topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je povezan.*

Dokaz. Odaberimo točku $x_0 \in X$. Po pretpostavci za svaku točku $x \in X$ postoji put $\omega_x : [0, 1] \to X$ koji povezuje točku x_0 sa x. Kako je segment $I = [0, 1]$ povezan i skup $\omega_x(I)$ je povezan. Jer je $x_0 \in \omega_x(I)$ za svaki $x \in X$, zaključujemo da je i prostor $X = \bigcup_{x \in X} \omega_x(I)$ povezan. □

Korolar 2.4.8. *Svaki putovima povezan metrički prostor* (X, d) *je povezan.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz napomene 2.4.6 i prethodnog teorema. □

Lema 2.4.9 (Lema o lijepljenju). *Neka su* X *i* Y *topološki prostori te neka su* A_1 *i* A_2 *zatvoreni skupovi u* X *takvi da je* $X = A_1 \cup A_2$*. Neka je* $f : X \to Y$ *funkcija takva da su funkcije* $f_{|A_1} : A_1 \to Y$ *i* $f_{|A_2} : A_2 \to Y$ *neprekidne (pri čemu na* A_1 *i* A_2 *gledamo relativne topologije). Tada je* f *neprekidna.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $f^{-1}(K)$ zatvoren skup u X za svaki zatvoreni skup K u Y. Neka je K zatvoren skup u Y. Imamo

$$f^{-1}(K) = (f_{|A_1})^{-1}(K) \cup (f_{|A_2})^{-1}(K). \tag{2.1}$$

Budući da je $f_{|A_1} : A_1 \to Y$ neprekidna funkcija skup $(f_{|A_1})^{-1}(K)$ je zatvoren na A_1. Tada po propoziciji (2.1.16) slijedi da postoji zatvoren skup F u X takav da je $(f_{|A_1})^{-1}(K) = F \cap A_1$. Iz ovoga zaključujemo da je $(f_{|A_1})^{-1}(K)$ zatvoren skup u X kao presjek zatvorenih skupova. Analogno dobivamo da je $(f_{|A_2})^{-1}(K)$ zatvoren u X.
Tada je $(f_{|A_1})^{-1}(K) \cup (f_{|A_2})^{-1}(K)$ zatvoren u X kao unija zatvorenih skupova. Iz jednakosti 2.1 slijedi da je $f^{-1}(K)$ zatvoren u X. Dakle f je neprekidna. □

Neka je X topološki prostor te neka su ω i η putevi u X takvi da je $\omega(1) = \eta(0)$. Definiramo funkciju $\omega \cdot \eta : [0, 1] \longrightarrow X$ pravilom:

$$(\omega \cdot \eta)(t) = \begin{cases} \omega(2t), \text{ako je } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \eta(2t - 1), \text{ako je } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Uočimo da je $\omega \cdot \eta$ dobro definirana funkcija.
Tvrdimo da je $\omega \cdot \eta$ neprekidna funkcija. U tu svrhu dovoljno je prema lemi o lijepljenju dokazati da su funkcije $(\omega \cdot \eta)_{|[0,\frac{1}{2}]} : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow X$ i $(\omega \cdot \eta)_{|[\frac{1}{2},1]} : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow X$ neprekidne. Pri tome na $[0, \frac{1}{2}]$ i $[\frac{1}{2}, 1]$ promatramo relativnu topologiju, dakle euklidsku topologiju (prema napomeni 1.8.6).
Funkcija $f : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow [0, 1]$ definirana s $f(t) = 2t$ je neprekidna pa je i funkcija $\omega \cdot f : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow X$ neprekidna. No to je jednako funkciji $(\omega \cdot \eta)_{|[0,\frac{1}{2}]}$.
Dakle $(\omega \cdot \eta)_{|[0,\frac{1}{2}]} : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow X$ je neprekidna.
Analogno dobivamo da je $(\omega \cdot \eta)_{|[\frac{1}{2},1]} : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow X$ neprekidna.
Iz ovoga slijedi da je $\omega \cdot \eta$ neprekidna funkcija. Prema tome, $\omega \cdot \eta$ je put u X.
Za $\omega \cdot \eta$ kažemo da je produkt puteva ω i η.

Propozicija 2.4.10. *Neka je X topološki prostor te neka su $x, y, z \in X$.*

1. *Postoji put u X koji povezuje x i x.*

2. *Ako postoji put u X koji povezuje x i y, onda postoji put u X koji povezuje y i x.*

3. *Ako postoji put u X koji povezuje x i y te ako postoji put u X koji povezuje y i z, onda postoji put u X koji povezuje x i z.*

Dokaz.

1. Funkcija $\omega : [0, 1] \longrightarrow X$ definirana s $\omega(t) = x$ za svaki $t \in [0, 1]$ je put u X koji povezuje x i x.

2. Pretpostavimo da je ω put u X koji povezuje x i y. Neka je $\gamma : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ funkcija defnirana s $\gamma(t) = 1 - t$. Funkcija γ je neprekidna. Tada je i funkcija $\omega \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija. Osim toga, vrijedi $(\omega \circ \gamma)(0) = \omega(1) = y$ i $(\omega \circ \gamma)(1) = \omega(0) = x$. Iz ovoga slijedi da je $\omega \circ \gamma$ put u X koji povezuje y i x.

3. Pretpostavimo da je ω put u X koji povezuje x i y te da je η put u X koji povezuje y i z. Produkt puteva ω i η je neprekidna funkcija u X i vrijedi $(\omega \cdot \eta)(0) = \omega(0) = x$ i $(\omega \cdot \eta)(1) = \eta(1) = z$. Tada je $\omega \cdot \eta$ put u X koji povezuje x i z.

□

Teorem 2.4.11. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je X otvoren skup u $\mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$. Neka je d euklidska metrika na X. Tada je (X, d) povezan metrički prostor ako i samo ako je (X, d) putevima povezan metrički prostor.*

Dokaz. Dovoljnost slijedi iz korolara 2.4.8.
Dokažimo nužnost. Pretpostavimo da je (X, d) povezan. Neka je $x_0 \in X$. Dovoljno je

pokazati prema prethodnoj propoziciji da za svaki $x \in X$ postoji put u (X, d) od x_0 do x. Definirajmo:

$$U = \{x \in X | \exists \text{ put u } (X, d) \text{ od } x_0 \text{ do } x\} \text{ i } V = X \setminus U.$$

Dokažimo da je U otvoren skup u (X, d).
Neka je $x \in U$. Imamo $x \in X$. Neka je p euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Kako je X otvoren u $(\mathbb{R}^n, p)$ postoji $r > 0$ takav da je

$$K_p(x, r) \subseteq X. \tag{2.2}$$

Neka je $y \in K_p(x, r)$. Definirajmo $\omega : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sa $\omega(t) = (1-t)x+ty$ za svaki $t \in [0, 1]$. Iz propozicije 1.4.10 lako slijedi da je ω neprekidna funkcija. Neka je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$. Za svaki $t \in [0, 1]$ imamo

$$\begin{aligned} p(\omega(t), x) &= \|\omega(t) - x\| = \\ = \|(1 - t)x + ty - x\| &= \|ty - tx\| = \|t(y - x)\| = \\ = t\|y - x\| &\leq \|y - x\| = p(y, x) < r, \end{aligned}$$

pri čemu zadnja nejednakost vrijedi jer je $y \in K_p(x, r)$.
Dakle $p(\omega(t), x) < r$ pa je $\omega(t) \in K_p(x, r)$, to jest $\omega(t) \in X$ po (2.2) za svaki $t \in [0, 1]$. Funkciju ω možemo shvatiti kao funkciju s $[0, 1]$ u X pa iz napomene 2.1.7 slijedi da je ω neprekidna kao funkciju s $[0, 1]$ u X. Očito je $\omega(0) = x$ i $\omega(1) = y$, dakle postoji put u X koji povezuje x i y. Budući da je $x \in U$ postoji put u X koji povezuje x_0 i x. Iz propozicije 2.4.10 slijedi da postoji put u X koji povezuje x_0 i y. Dakle $y \in U$. Time smo dokazali da je $K_p(x, r) \subseteq U$. Ovo znači da je U otvoren skup u $(\mathbb{R}^n, p)$ pa je otvoren i u (X, d).
Dokažimo sada da je V otvoren skup u (X, d). Neka je $x \in V$. Kako je X otvoren u $(\mathbb{R}^n, p)$ postoji $r > 0$ takav da je $K_p(x, r) \subseteq X$. Tvrdimo da je

$$K_p(x, r) \subseteq V. \tag{2.3}$$

U suprotnom bi postojao $y \in K_p(x, r)$ takav da je $y \in U$ pa bismo na isti način kao maloprije dobili da postoji put u X koji povezuje x i y, no zbog $y \in U$ postoji put u X koji povezuje x_0 i y, što bi značilo da postoji put u X koji povezuje x_0 i x, to jest $x \in U$, a to je u kontradikciji s $x \in V$. Dakle vrijedi tvrdnja (2.3). Prema tome V je otvoren skup u $(\mathbb{R}^n, p)$ pa i u (X, d).
Imamo sljedeće: U i V su otvoreni u (X, d), $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$ te $U \neq \emptyset$ (jer je očito $x_0 \in U$). Kako bi vrijedilo da je $V \neq \emptyset$, onda bi (U, V) bila separacija od (X, d), no to je nemoguće jer je (X, d) povezan. Dakle $V = \emptyset$. Iz ovoga slijedi da je $U = X$ pa po definiciji skupa U slijedi da za svaki $x \in X$ postoji put u X koji povezuje x_0 i x. □

Primjer 2.4.12. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada su otvoren interval $\langle a, b \rangle$ i poluotvoreni intervali $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ povezani skupovi.*

Pokažimo da to vrijedi za otvoreni interval $\langle a, b \rangle$. Analogno se dokazuje za ostale. Neka su $x, y \in \langle a, b \rangle, x \neq y$. Funkcija $\omega : [0, 1] \to \langle a, b \rangle$ zadana s $\omega(t) = x + t(y - x)$ je *očito put od x do y u* $\langle a, b\rangle$ *pa je* $\langle a, b\rangle$ *putovima povezan, a po prethodnom teoremu slijedi da je i povezan.*

Primjer 2.4.13. *Najpoznatiji primjer povezanog prostora koji nije putevima povezan je topološka sinusoida to jest skup definiran s*

$$S = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in \langle 0, 1]\right\} \bigcup \{\{0\} \times [-1, 1]\}.$$

Pokažimo da je topološka sinusoida povezan skup. Definiramo funkciju $f : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \left(x, sin\frac{1}{x}\right)$. *Po propoziciji 1.4.10 je funkcija* f *neprekidna jer su njene komponentne funkcije neprekidne. U primjeru 2.4.12 smo pokazali da je* $\langle 0, 1]$ *povezan skup. Tada je po korolaru 2.1.8 slika funkcije* f *povezan skup to jest skup* $\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in (0, 1]\right\}$ *je povezan.*

Tvrdimo da je skup S *sadržan u zatvaraču skupa* $\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in (0, 1]\right\}$. *Svaki skup je sadržan u svom zatvaraču pa moramo još pokazati da su točke skupa* $\{\{0\} \times [-1, 1]\}$ *sadržane u zatvaraču.*

Neka je $(0, y) \in \{0\} \times [-1, 1]$ *i neka je* U *otvorena okolina točke* $(0, y)$. *Prema definiciji otvorenog skupa postoji* $r > 0$ *takav da je* $K((o, y), r) \subseteq U$. *Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je* $r < 1$. *Kako je* $y \in [-1, 1]$ *postoji* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *takav da je* $\sin\alpha = y$. *Tada je i*

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha+2k\pi}}\right) = y$$

za svaki $k \in \mathbb{Z}$. *Odaberemo* $k \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{\alpha+2k\pi} < r$. *Ovo možemo napraviti jer niz* $\left(\frac{1}{\alpha+2k\pi}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *kovergira u* 0. *Definiramo* $t = \frac{1}{\alpha+2k\pi}$. *Za taj* t *vrijedi da je* $t \in \langle 0, 1\rangle$ *i da je* $\sin\frac{1}{t} = y$. *Imamo:*

$$d\left((0, y), \left(t, \sin\frac{1}{t}\right)\right) = d((0, y), (t, y)) = t < r.$$

Iz ovoga slijedi da je $\left(t, \sin\frac{1}{t}\right) \in K((0, y), r)$ *pa je posebno i* $\left(t, \sin\frac{1}{t}\right) \in U$. *ada postoji dovoljno mali t takav da vrijedi* $\left(t, \sin\frac{1}{t}\right) \in U$. *Iz ovoga slijedi da je točka* $(0, y)$ *gomilište skupa* $\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in \langle 0, 1]\right\}$ *pa je po propoziciji 2.2.5 sadržana u zatvaraču. Sada je po propoziciji 2.2.7 i* S *povezan skup.*

Pokažimo još da S *nije putevima povezan.*

Pretpostavimo suprotno, to jest pretpostavimo da je S *putevima povezan. Tada postoji put*

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow X \text{ u } X \text{ koji povezuje točke } (0, 0) \text{ i } (1, \sin 1),$$
$$\text{to jest vrijedi } \gamma(0) = (0, 0) \text{ i } \gamma(1) = (1, \sin 1).$$

Kako je skup $\{0\} \times [-1,1]$ *zatvoren u* $\mathbb{R}^2$ *i kako je funkcija* γ *neprekidna, vrijedi da je* $\gamma^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ *zatvoren u* $[0,1]$.
Točka $0 \in \gamma^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ *pa je* $\gamma^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ *neprazan. Iz ovoga zaključujemo da* $\gamma^{-1}(\{0\} \times [-1,1])$ *ima maksimum u* $[0,1]$. *Označimo taj maksimum s m.*
Očito je $m < 1$ *jer* $\gamma(1) \notin \{0\} \times [-1,1]$. *Također vrijedi:*

$$\gamma(t) \notin \{0\} \times [-1,1] \text{ za svaki } t \in \langle m, 1]. \tag{2.4}$$

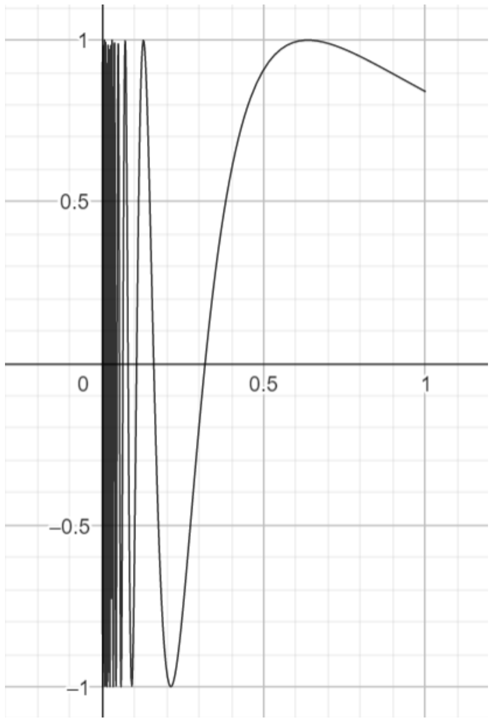
Kako je γ *neprekidna to postoji* $\delta > 0$ *takva da je* $m + \delta \leq 1$

$$\text{te da za sve } t \in \langle m-\delta, m+\delta\rangle \text{ vrijedi } \gamma(t) \in K\left(\gamma(m), \frac{1}{2}\right). \tag{2.5}$$

Odaberemo r takav da je $m < r < m + \delta$. *Očito je* $r < 1$.
Neka je $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *projekcija na prvu koordinatu, to jest* $p(x,y) = x$. *Promatramo kompoziciju* $p \circ \gamma : [m,r] \longrightarrow \mathbb{R}$. *Vrijedi:* $(p \circ \gamma)(m) = 0$.
Neka je $\epsilon = (p \circ \gamma)(r) > 0$. *Tada je očito* $[0,\epsilon] \subseteq (p \circ \gamma)[m,r]$.
Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{2k\pi} < \epsilon$ *pa je i* $\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} < \epsilon$. *Sada imamo:*

$$\frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \in (p \circ \gamma)[m,r] \text{ što povlači da postoji } x \in \langle m, r]$$
$$\text{takav da je } \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = (p \circ \gamma)(x),$$
$$\text{to jest } \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = p(\gamma(x)).$$

Iz ovoga slijedi da je $\gamma(x) = \left(t, \sin\frac{1}{t}\right)$. *Za* $t = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ *vrijedi* $\sin\frac{1}{t} = 1$.
Za odabrani $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi i* $\frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} < \epsilon$.
Na analogan način kao maloprije postoji $x' \in \langle m, r]$ *takav da je* $\frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}} = (p(\gamma))(x)$. *Imamo* $\gamma(x') = \left(t, \sin\frac{1}{t}\right)$. *Za* $t = \frac{1}{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}$ *vrijedi* $\sin\frac{1}{t} = -1$.
Sada za $x, x' \in \langle m, r]$ *vrijedi* $d(\gamma(x), \gamma(x')) > 2$ *što je u kontradikciji s 2.5.*
Zaključak: S nije putevima povezan.



Slika 2.1: Topološka sinusoida

2.5 Lokalna povezanost

Definicija 2.5.1. *Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ lokalno povezan ako za svaki $x \in X$ i za svaku otvorenu okolinu U od x postoji povezana otvorena okolina V od x takva da je $V \subseteq U$.*

Primjer 2.5.2. *Segment $[0, 1]$ je lokalno povezan. Neka je $x_0 \in [0, 1]$ i neka je U otvorena okolina od x_0 u $[0, 1]$.*

Pogledajmo prvo slučaj za $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$.
Tada postoji $r < 0$, $r < x_0$ i $r < 1 - x_0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$.
Kako je $K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$ slijedi da je $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle \subseteq U$. Topološki prostor $([0, 1], \mathcal{E}_{[0,1]})$ je topološki potprostor od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, a skup $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$ je povezan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ pa je po propoziciji 2.1.20 skup $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$ povezan i u $([0, 1], \mathcal{E}_{[0,1]})$.

Pogledajmo sada slučaj kada je $x_0 = 0$. Na isti se način pokaže i slučaj $x_0 = 1$. Postoji $r \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$.
Kako je $K(x_0, r) = [0, r\rangle$ slijedi da je $[0, r\rangle \subseteq U$. Skup $[0, r\rangle$ je povezan u $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ pa je po propoziciji 2.1.20 skup $[0, r\rangle$ povezan i u $([0, 1], \mathcal{E}_{[0,1]})$.

Iz ovoga slijedi da je $[0, 1]$ lokalno povezan.

Primjer 2.5.3. *Topološka sinusoida je primjer skupa koji nije lokalno povezan.*

Da dokažemo da S nije lokalno povezan, pokazat ćemo da ne postoji povezana okolina od $(0,0)$ *u S koja je podskup od otvorene okoline*

$$U = \left(\left[0, \frac{1}{\pi}\right\rangle \times \langle -1, 1\rangle\right) \cap S = \left(\left\langle -1, \frac{1}{\pi}\right\rangle \times \langle -1, 1\rangle\right) \cap S.$$

Neka je $V \subseteq ([0, \frac{1}{\pi}\rangle \times \langle -1, 1\rangle) \cap S$ okolina od $(0,0)$*.Kako je $\left(\left(\frac{1}{2n\pi}, 0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u S koji konvergira prema* $(0,0)$*, tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\left(\frac{1}{2n\pi}, 0\right) \in V$.*
Neka je L vertikalni pravac određen jednadžbom $x = \frac{1}{(2n+1/2)\pi}$. L siječe S u točki $\left(\frac{1}{(2n+1/2)\pi}, 1\right)$, koja ne pripada skupu V jer je $V \subset [0, \frac{1}{\pi}\rangle \times \langle -1, 1\rangle$.
Tada vrijedi $L \cap V = \emptyset$. Nadalje, ako definiramo skupove

$$W = \left\{(x,y) \in V : x < \frac{1}{(2n+1/2)\pi}\right\} \text{ i } Z = \left\{(x,y) \in V : x > \frac{1}{(2n+1/2)\pi}\right\},$$

tada je $(0,0) \in W, \left(\frac{1}{2n\pi}, 0\right) \in Z$ *i* (W, Z) *je separacija od V. Iz definicije slijedi da V nije povezan skup pa S nije lokalno povezan.*

Definicija 2.5.4. *Neka je (X,d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) konvergentan niz u (X,d) ako postoji $a \in X$ takav da $x_n \longrightarrow a$ u (X,d).*

Definicija 2.5.5. *Neka je (X,d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Kažemo da je (x_n) Cauchyev niz u (X,d) ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Propozicija 2.5.6. *Neka je (X,d) metrički prostor te (x_n) konvergentan niz u (X,d). Tada je (x_n) Cauchyev niz u (X,d).*

Dokaz. Imamo da postoji $a \in X$ takav da $x_n \longrightarrow a$. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$, za svaki $n \geq n_0$. Neka su $m, n \geq n_0$. Imamo

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle $d(x_m, x_n) < \epsilon$, za sve $m, n \geq n_0$. Prema tome (x_n) je Cauchyev niz. □

Propozicija 2.5.7. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Pretpostavimo da su $a, b \in X$ takvi da $x_n \longrightarrow a$ i $x_n \longrightarrow b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $a \neq b$. Neka je $\epsilon = \frac{d(a,b)}{2}$. Tada postoje $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ takvi da je:

$$d(x_n, a) < \epsilon, \text{ za sve } n \geq n_a$$

$$\text{i } d(x_n, b) < \epsilon, \text{ za sve } n \geq n_b.$$

Neka je $n = \max\{n_a, n_b\}$. Tada je $n \geq n_a$ i $n \geq n_b$ pa je $d(x_n, a) < \epsilon$ i $d(x_n, b) < \epsilon$. Vrijedi:

$$2\epsilon = d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Dakle $2\epsilon < 2\epsilon$, što je nemoguće. Zaključujemo da je $a = b$. □

Primjer 2.5.8 (Primjer Cauchyevog niza koji nije konvergentan). *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je (x_n) niz definiran s $x_n = \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da $x_n \longrightarrow 0$ u $(\mathbb{R}, d)$.*

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $n > \frac{1}{\epsilon}$ pa je $\frac{1}{n} < \epsilon$, to jest $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. Dakle $d(x_n, 0) < \epsilon$, za sve $n \geq n_0$. Time smo dokazali da $x_n \longrightarrow 0$ u $(\mathbb{R}, d)$. Iz propozicije 2.5.6 slijedi da je (x_n) Cauchyev niz u $(\mathbb{R}, d)$.

Neka je d' euklidska metrika na $\langle 0, \infty\rangle$. Očito za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi $d'(x_m, x_n) = d(x_m, x_n)$ pa zaključujemo da je (x_n) Cauchyev niz u $(\langle 0, \infty\rangle, d')$. No (x_n) nije konvergentan niz u $(\langle 0, \infty\rangle, d')$. Naime, pretpostavimo da jest, dakle postoji $b \in \langle 0, \infty\rangle$ takav da $x_n \longrightarrow b$ u $(\langle 0, \infty\rangle, d')$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $d'(x_n, b) = d(x_n, b)$ pa slijedi da $x_n \longrightarrow b$ u $(\mathbb{R}, d)$. Iz ovoga te činjenice da $x_n \longrightarrow 0$ u $(\mathbb{R}, d)$ i propozicije 2.5.7 slijedi da je $b = 0$, što je nemoguće jer je $b \in \langle 0, \infty\rangle$. Dakle (x_n) nije konvergentan niz u $(\langle 0, \infty\rangle, d')$.

Definicija 2.5.9. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpun ako je svaki Cauchyev niz u (X, d) konvergentan.*

Definicija 2.5.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$. Kažemo da je K omeđen skup u (X, d) ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $K \subseteq K(x, r)$.*

Definicija 2.5.11. *Neka je (X, d) metrički prostor te K neprazan omeđen skup u (X, d). Tada postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $K \subseteq K(x, r)$ pa za sve $a, b \in K$ vrijedi:*

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + r = 2r.$$

Dakle $d(a, b) < 2r$. To znači da je skup $\{d(a, b) \mid a, b \in K\}$ odozgo omeđen (a očito je neprazan) pa definiramo:

$$diamK = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in K\}.$$

Za $diamK$ kažemo da je dijametar skupa K.

Napomena 2.5.12. *Uz oznake iz prethodne definicije imamo da je $diamK \leq 2r$ (jer je $2r$ gornja međa skupa $\{d(a, b) \mid a, b \in K\}$.) Posebno, za sve $x_0 \in X$ i $r > 0$ imamo da je $K(x_0, r)$ omeđen skup te je $diamK(x_0, r) \leq 2r$.*
Analogno je $\overline{K}(x_0, r)$ omeđen skup te je $diam\overline{K}(x_0, r) \leq 2r$.

Lema 2.5.13. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je (x_n) niz u X te neka je $l \in X$ takav da $x_n \longrightarrow l$. Pretpostavimo da je F zatvoren skup u (X, d) te da je $m \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in F$, za sve $n \geq m$. Tada je $l \in F$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $l \notin F$. Tada je $l \in F^c$. Skup F^c je otvoren u (X, d) pa iz propozicije 1.4.6 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in F^c$.
Neka je $n = \max\{m, n_0\}$. Imamo $n \geq m$ i $n \geq n_0$ pa je $x_n \in F$ i $x_n \in F^c$, što je nemoguće.
Zaključak: $l \in F$. □

Teorem 2.5.14 (Cantorov teorem o presjeku). *Neka je (X, d) potpun metrički prostor te neka je (F_n) niz nepraznih, zatvorenih i omeđenih skupova u (X, d) takav da je $F_{n+1} \subseteq F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te takav da niz realnih brojeva $(diam F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teži prema 0. Tada je $\bigcap F_n \neq \emptyset$.*

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberemo neki $x_n \in F_n$. Uočimo sljedeće: ako su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $m \leq n$, onda je $F_n \subseteq F_m$ pa je $x_n \in F_m$. Dakle $x_n \in F_m$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq m$.
Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $diam F_{n_0} < \epsilon$. Neka su $m, n \geq n_0$. Tada imamo $x_m, x_n \in F_{n_0}$ pa je $d(x_m, x_n) \leq diam F_{n_0} < \epsilon$. Dakle $d(x_m, x_n) < \epsilon$, za sve $m, n \geq n_0$.
Zaključak: niz (x_n) je Cauchyev u (X, d).
Budući da je (X, d) potpun, niz (x_n) je konvergentan u (X, d), dakle postoji $l \in X$ takav da $x_n \longrightarrow l$. Tvrdimo da je

$$l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n. \tag{2.6}$$

Neka je $m \in \mathbb{N}$. Za svaki $n \geq m$ vrijedi $x_n \in F_m$ pa lema 2.5.13 povlači da je $l \in F_m$. Dakle $l \in F_m$, za sve $m \in \mathbb{N}$ to jest vrijedi (2.6). Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Teorem 2.5.15. *Neka je (X, d) potpun metrički prostor te neka je (U_n) niz otvorenih gustih skupova u (X, d). Tada je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$.*

Dokaz. Odaberimo $x_1 \in U_1$ (to možemo jer iz činjenice da je U_1 gust slijedi da je $U_1 \neq \emptyset$). Budući da je U_1 otvoren i $x_1 \in U$ postoji $\mu > 0$ takav da je $K(x_1, \mu) \subseteq U$. Tada je

$$\overline{K}\left(x_1 \frac{\mu}{2}\right) \subseteq K(x_1, \mu).$$

Iz ovoga slijedi da je $\overline{K}\left(x_1 \frac{\mu}{2}\right) \subseteq U$. Dakle, postoji $r_1 > 0$ takav da je

$$\overline{K}(x_1, r_1) \subseteq U_1 \tag{2.7}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $r_1 < 1$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $x_n \in X$ i $r_n > 0$. Kako je U_{n+1} gust u (X, d) slijedi da je skup

$K(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ neprazan. Izabereimo $x_{n+1} \in K(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$. $K(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ je otvoren skup jer je presjek dvaju otvorenih skupova pa postoji $r_{n+1} > 0$ takav da je

$$\overline{K}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq K(x_n, r_n) \cap U_{n+1} \tag{2.8}$$

pri čemu možemo pretpostaviti da je $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$. Ovime smo definirali niz (x_n) u X i niz pozitivnih realnih brojeva (r_n) tako da vrijedi (2.7) i tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $r_n < \frac{1}{n}$ te (2.8). Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\operatorname{diam} \overline{K}(x_n, r_n) \leq 2r_n < \frac{2}{n}$$

pa možemo zaključiti da niz $\left(\operatorname{diam} \overline{K}(x_n, r_n)\right)$ teži nuli. Kako je $\left(\overline{K}(x_n, r_n)\right)$ niz nepraznih, zatvorenih i omeđenih skupova u(X, d), a koristeći (2.8) dobivamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\overline{K}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{K}(x_n, r_n).$$

Iz propozicije 2.5.14 slijedi da postoji $a \in X$ takav da je $a \in \overline{K}(x_n, r_n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz (2.7) i (2.8) slijedi da je $a \in U_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time smo dokazali tvrdnju. □

Definicija 2.5.16. *Neka je X topološki prostor te neka je $A \subseteq X$. Kažemo da je A nigdje gust skup u X ako je* $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl}(A)) = \emptyset$.

Uočimo da vrijedi A je nigdje gust ako i samo ako ne postoji neprazan otvoren skup U u X takav da je $U \subseteq \operatorname{Cl} A$.

Uočimo da za topološki prostor X i $A \subseteq X$ vrijedi sljedeće:

$$A \text{ je nigdje gust u } X \Leftrightarrow X \setminus \operatorname{Cl} A \text{ gust u } X. \tag{2.9}$$

Definicija 2.5.17. *Za topološki prostor X kažemo da je prve kategorije ako je X unija prebrojivo mnogo skupova koji su nigdje gusti u X. Ako je X topološki prostor koji nije prve kategorije, onda za X kažemo da je druge kategorije.*

Napomena 2.5.18. *Analogno definiramo pojam nigdje gustog skupa u metričkom prostoru te pojmove metričkog prostora prve i druge kategorije.*

Teorem 2.5.19 (Baireov teorem o kategoriji). *Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Tada je (X, d) metrički prostor druge kategorije.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da (X, d) nije druge kategorije. Tada je (X, d) prve kategorije što znači da postoji niz (A_n) nigdje gustih skupova u (X, d) takav da je $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Iz ovoga slijedi $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Cl} A_n$. Imamo:

$$\emptyset = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \operatorname{Cl} A_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \operatorname{Cl} A_n). \tag{2.10}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup $X \setminus \operatorname{Cl} A_n$ je gust u X (prema (2.9)), a očito je i otvoren u X. Iz teorema 2.5.15 slijedi da vrijedi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \operatorname{Cl} A_n) \neq \emptyset$, što je u kontradikciji sa (2.10). □

Propozicija 2.5.20. *Neka je X topološki prostor te $A \subseteq X$. Tada je*

$$\mathrm{Cl}\,A \setminus \mathrm{Int}\,A = \partial A.$$

Posebno, ako je A zatvoren, vrijedi $\partial A = A \setminus \mathrm{Int}\,A$.

Dokaz. Neka je $x \in \mathrm{Cl}\,A \setminus \mathrm{Int}\,A$. Dovoljno je pokazati da je $x \in \mathrm{Cl}\,(X \setminus A)$. Vrijedi $x \notin \mathrm{Int}\,A$ pa je $x \in X \setminus \mathrm{Int}\,A$. Pokažimo da vrijedi:

$$\mathrm{Cl}\,(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Int}\,A. \tag{2.11}$$

Neka je $y \in \mathrm{Cl}\,(X \setminus A)$. Treba dokazati da $y \notin \mathrm{Int}\,A$. Svaka okolina U točke y siječe skup $X \setminus A$ pa $y \notin \mathrm{Int}\,A$.
Neka je $y \in X \setminus \mathrm{Int}\,A$ tada svaka okolina V od y siječe skup $X \setminus A$. Tada je $y \in \mathrm{Cl}\,(X \setminus A)$. Iz toga zaključujemo da vrijedi tvrdnja (2.11).
Iz (2.11) slijedi da je $x \in \mathrm{Cl}\,(X \setminus A)$. Iz ovoga slijedi da je $\mathrm{Cl}\,A \setminus \mathrm{Int}\,A \subseteq \mathrm{Cl}\,A \cap \mathrm{Cl}\,(X \setminus A)$, to jest $\mathrm{Cl}\,A \setminus \mathrm{Int}\,A \subseteq \partial A$.

Analogno se pokazuje i $\partial A \subseteq \mathrm{Cl}\,A \setminus \mathrm{Int}\,A$. □

Propozicija 2.5.21. *Neka je (X, d) potpun metrički prostor te neka je Y neprazan zatvoren podskup od X. Tada je $(Y, d|_{Y \times Y})$ potpun metrički prostor.*

Dokaz. Neka je (x_n) Cauchyev niz u $(Y, d|_{Y \times Y})$. Tada je (x_n) i Cauchyev niz u (X, d). Iz činjenice da je (x_n) potpun slijedi da je (x_n) konvergentan niz u (X, d). Stoga postoji $l \in X$ takav da $x_n \longrightarrow l$. Kako je Y zatvoren iz leme 2.5.13 slijedi da je $l \in Y$. Iz ovoga slijedi da $x_n \longrightarrow l$ i u $(Y, d|_{Y \times Y})$. □

Napomena 2.5.22. *Neka je X povezan topološki prostor. Tada ne postoji skup A koji je i otvoren i zatvoren u X te takav da je $A \neq \emptyset$ i $A \neq X$. Naime, kada bi takav skup A postojao, onda bi $(A, X \setminus A)$ bila separacija od X.*

Teorem 2.5.23. *Neka je (X, d) metrički prostor koji je povezan, lokalno povezan i potpun. Tada se X ne može prikazati kao unija prebrojivo mnogo međusobno disjunktnih skupova koji su zatvoreni u (X, d) i koji su pravi podskupovi od X (to jest različiti od X).*

Dokaz. Prvo primijetimo da se X ne može prikazati kao unija konačno mnogo takvih skupova zbog povezanosti od (X, d). Pretpostavimo suprotno to jest pretposravimo da se X može prikazati kao prebrojiva unija

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \tag{2.12}$$

gdje je (C_i) niz nepraznih zatvorenih skupova u (X, d) takav da je $C_i \neq X$ za svaki $i \in \mathbb{N}$ i takav da za sve $i, j \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$i \neq j \Longrightarrow C_i \cap C_j = \emptyset. \tag{2.13}$$

Neka je

$$D = X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} C_i \right). \tag{2.14}$$

Tvrdimo da je

$$D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial C_i.$$

Neka je $x \in D$. Tada je $x \in X$ i $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} C_i$. Iz (2.12) slijedi da postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in C_j$. No $x \notin \operatorname{Int} C_j$ povlači da je $x \in C_j \setminus \operatorname{Int} C_j$. Sada iz propozicije 2.5.20 slijedi da je $x \in \partial C_j$ pa je posebno i $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial C_i$.
Obratno, neka je $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial C_i$. Tada je $x \in \partial C_j$ za neki $j \in \mathbb{N}$. Koristeći propoziciju 2.5.20 dobivamo da je $x \in C_j \setminus \operatorname{Int} C_j$ to jest $x \notin \operatorname{Int} C_j$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \neq j$. Imamo $x \in C_j$ pa iz (2.13) slijedi da $x \notin C_i$. Posebno i $x \notin \operatorname{Int} C_i$. Dakle $x \notin \operatorname{Int} C_i$ za svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi da $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} C_i$. Tada je $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} C_i \right)$, to jest $x \in D$.
Zaključujemo da vrijedi

$$D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial C_i. \tag{2.15}$$

Tvrdimo da je $D \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, to jest pretpostavimo da je $D = 0$. Tada iz (2.14) slijedi da je $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} C_i$ pa postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{Int} C_{i_0} \neq \emptyset$. Kako je $C_{i_0} \neq X$ vrijedi $\operatorname{Int} C_{i_0} \neq X$ pa je $\bigcup_{i \neq i_0} \operatorname{Int} C_i \neq \emptyset$. Iz ovoga slijedi da je $(\operatorname{Int} C_{i_0}, \bigcup_{i \neq i_0} \operatorname{Int} C_i$) separacija metričkog prostora (X, d). To je u kontradikciji s povezanošću prostora (X, d). Dakle, $D \neq \emptyset$. Očito je po (2.14) D zatvoren u (X, d). Iz propozicije 2.5.21 slijedi da je D, kao potprostor od (X, d), potpun metrički prostor. Sada teorem 2.5.19 povlači da je D druge kategorije.
Iz (2.15) možemo zaključiti da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da ∂C_i nije nigdje gust u D. To znači da postoji neprazan otvoren skup V u D takav da je $V \subseteq \operatorname{Cl} \partial C_i$. No vrijedi $\operatorname{Cl} \partial C_i = \partial C_i$ jer je ∂C_i zatvoren u X pa i u D. Imamo

$$V \subseteq \partial C_i.$$

Nadalje, postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = U \cap D$. Prema tome $U \cap D \neq \emptyset$ i

$$U \cap D \subseteq \partial C_i. \tag{2.16}$$

Zaključujemo da je $U \cap \partial C_i \neq \emptyset$. Nadalje, iz (2.16) slijedi da je

$$U \cap (D \setminus \partial C_i) = \emptyset. \tag{2.17}$$

Odaberimo $x \in U \cap \partial C_i$. Tada je $x \in U$ pa budući da je (X, d) lokalno povezan postoji otvorena okolina W od x u (X, d) takva da je $W \subseteq U$ i takva da je W povezan skup u (X, d). Svaka otvorena okolina od x u (X, d) siječe i C_i i $X \backslash C_i$ jer je $x \in \partial C_i$. Posebno

$$W \cap (X \backslash C_i) \neq \emptyset$$

pa iz (2.12) slijedi da postoji $j \in \mathbb{N}$, $j \neq i$, takav da je

$$W \cap C_j \neq \emptyset. \tag{2.18}$$

Iz $W \subseteq U$ i (2.17) slijedi

$$W \cap (D \backslash \partial C_i) = \emptyset. \tag{2.19}$$

Iz (2.13) slijedi da je $\partial C_i \cap \partial C_j = \emptyset$. Iz ovoga i (2.15) slijedi da je $\partial C_j \subseteq D \backslash \partial C_i$ pa (2.19) povlači da je

$$W \cap \partial C_j = \emptyset.$$

Koristeći prethodnu jednakost i propoziciju 2.5.20 imamo

$$W \cap C_j = W \cap \left(\operatorname{Int} C_j \cup \partial C_j\right) = \left(W \cap \operatorname{Int} C_j\right) \cup \left(W \cap \partial C_j\right) = W \cap \operatorname{Int} C_j,$$

dakle $W \cap C_j = W \cap \operatorname{Int} C_j$. Ovo implicira da je presjek skupova W i C_j i otvoren i zatvoren u W. Nadalje, taj presjek je neprazan prema (2.18), a vrijedi $W \cap C_j \neq W$ jer bismo inače imali $W \subseteq C_j$, što bi povlačilo da je $x \in C_j$ (budući da je W otvorena okolina od x), no to je nemoguće jer je $x \in C_i$ (zbog $x \in \partial C_i$) i $C_i \cap C_j = \emptyset$. Dakle, imamo neprazan skup koji je različit od W i koji je i otvoren i zatvoren u W. To je u kontradikciji s činjenicom da je W povezan (napomena 2.5.22). Time je tvrdnja teorema dokazana.

□

Bibliografija

[1] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, C. O. Christenson, 1975.

[2] W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, New York:Marcel Dekker, 1977.

[3] Z.Iljazović, *Opća topologija*, skripta.

Sažetak

Ovaj smo diplomski rad podijelili na dva veća poglavlja u kojima smo promatrali razne aspekte povezanosti.
U prvom smo poglavlju ovog rada proučavali definicije norme i metrike te ekvivalentne metrike u kontekstu metričkih prostora. Također smo istraživali otvorene i zatvorene skupove u tim prostorima, kao i neprekidne funkcije između njih. Nakon toga smo uveli pojmove topologije i topološkog prostora, te smo detaljnije proučavali baze topologije i neprekidne funkcije između topoloških prostora. Nadalje, obrađivali smo potprostore metričkih i topoloških prostora.
U drugom poglavlju smo definirali pojam separacije u topološkim i metričkim prostorima, kao i povezane topološke i metričke prostore. Dokazali smo da je svaki segment [a,b] povezan, a zatim smo proučavali komponente povezanosti točke u topološkom prostoru i neka njihova svojstva. Također smo definirali produkt topoloških prostora i dokazali da je produkt dva povezana topološka prostora povezan. Uveli smo pojam putevima povezanog topološkog prostora, dokazali da je svaki putevima povezan topološki prostor povezan i dali primjer topološkog prostora koji je povezan, ali nije putevima povezan. Nadalje, istaživali smo lokalnu povezanost i naveli primjer topološkog prostora koji je povezan, ali nije lokalno povezan. Na kraju smo dokazali Baireov teorem o kategoriji i pomoću njega teorem kojim se tvrdi da se povezan, lokalno povezan i potpun metrički prostor ne može prikazati kao unija prebrojivo mnogo zatvorenih, pravih i međusobno disjunktnih podskupova.

Summary

We divided this thesis into two larger chapters in which we observed various aspects of connection.
In the first chapter of this work, we studied the definitions of norm, metric and equivalent metric in the context of metric spaces. We also explored open and closed sets in these spaces, as well as continuity of functions between them. After that, we introduced the term of topology and topological spaces. Also, we studied the bases of a topology and continuity of functions between topological spaces. Furthermore, we researched subspaces of metric and topological spaces.
In the second chapter, we defined the notion of separation in topological and metric spaces, as well as connected topological and metric spaces. We proved that every segment [a,b] is connected. Then we studied the connected components of a node in topological spaces and some of their properties. We also defined the product of topological spaces and proved that the product of two connected topological spaces is connected. We introduced the notion of a path-connected topological space, proved that every path-connected topological space is connected topological space, and gave an example of a topological space that is connected but not path-connected. Furthermore, we investigated local connectivity and provided an example of a topological space that is connected but not locally connected. Finally, we proved Baire's category theorem and using it the theorem that claims that a connected, locally connected, and complete metric space cannot be represented as the union of countably many closed, real, and mutually disjoint subsets.

Životopis

Rođena sam 3.10.1995. godine u Splitu. Školovanje započinjem 2002. godine u Osnovnoj školi Mertojak. 2010. godine završavam osnovnu školu i upisujem Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Splitu. Nakon završene srednje škole 2014. godine nastavljam školovanje na preddiplomskom studiju Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu. Diplomski studij upisujem 2019. godine na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu smjer Matematička statistika.

Tijekom diplomskog studija radila sam kao učiteljica matematike u Osnovnoj školi Ivana Gundulića u Zagrebu. Trenutno sam zaposlena u A1 na mjestu *Data Analysta*.