Kaos u jednodimenzionalnoj dinamici

Behtanić, Manuela

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:717875

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: 2024-12-10

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Manuela Behtanić

KAOS U JEDNODIMENZIONALNOJ DINAMICI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sonja Štimac

Zagreb, studeni 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala od srca obitelji, prijateljima te svima drugima, pogotovo Heleni, na pruženoj podršci i pomoći tijekom studiranja. Posebno hvala od srca mentorici prof. dr. sc. Sonji Štimac što mi je svojim znanjem i stručnim savjetima pomogla pri izradi ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Dinamički sustavi imaju relativno dugu povijest kao grana matematike, počevši s radom Isaaca Newtona u sedamnaestom stoljeću. Newton se, u svojem bogatom djelovanju, bavio i problemom tri tijela. Time je inspirirao početak moderne teorije dinamičkih sustava koja datira iz kraja devetnaestog stoljeća s fundamentalnim pitanjem stabilnosti i evolucije Sunčevog sustava. 1980. godine, švedski kralj Oscar II. objavljuje nagradu za prvog znanstvenika koji će riješiti problem n tijela. Veliki francuski matematičar Henri Poincaré je došao najbliže rješenju. U njegovom lijepom i osebujnom radu, Poincaré je, između ostalog, ponudio kvalitativan pristup običnim diferencijalnim jednadžbama, koristeći topološke i geometrijske tehnike kako bi se razotkrila globalna struktura svih rješenja. Svojim radom je dao tračak "kaosa", stoga se smatra da teorija kaosa datira iz kraja devetnaestog stoljeća.

U dvadesetom stoljeću je američki matematičar G. D. Birkhoff nastavio s Poincaréovim kvalitativnim gledanjem na dinamičke sustave. Zalagao se za proučavanje iterativnih procesa kao najjednostavnijeg načina razumjevanja dinanmičkih sustava, pogled koji i mi imamo u ovom radu. U 60-ima su velik doprinos u razumjevanju dinamičkih sustava, ali i u samoj teoriji kaosa imali američki matematičar Stephen Smale te američki matematičar i meteorolog Edward N. Lorenz. Smale je, na primjer, osmislio *Smaleovu potkovu* te ju je analizirao uz pomoć simboličke dinamike s kojom ćemo se susresti u četvrtom poglavlju. Lorenz je, koristeći računalo, otkrio da vrlo jednostavne diferencijalne jednadžbe mogu predstaviti tip kaosa koji je Poincaré primijetio. Lorenz je primijetio da njegov jednostavan meteorološki model (sada zvan Lorenzov sustav) pokazuje osjetljivost na početne uvjete. Taj koncept ćemo definirati kasnije u radu u poglavlju Kaos. Grubo govoreći, to znači da jako mala promjena početnih uvjeta sustava može voditi do značajno drugačijih ishoda što je Lorenz pojednostavnio govoreći da zamah leptirovih krila u Brazilu može izazvati tornado u Texasu.

1975. godine T.Y. Li i James Yorke objavili su nevjerojatan rad pod nazivom *Period tri implicira kaos*. U tom radu su pokazali da ako neprekidna funkcija definirana na $\mathbb{R}$ ima periodičnu točku perioda tri, onda mora imati periodične točke svih perioda. Njihov rad je prva znanstvena literatura u kojoj je upotrebljena riječ "kaos". 1964. godine Oleksandr Sharkovsky je dokazao da ako neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ ima periodičnu točku perioda n, onda možemo izlistati sve druge periode periodičnih točaka koje ta funkcija ima. Nažalost, na Zapadu više od desetljeća nisu bili upoznati sa Sharkovskyjevim rezultatom koji je bio objavljen u Ukrajini. S razvojem računala dolazi do otkrića mnogih zanimljivh rezultata i velikog razvoja teorije kaosa.

U ovom radu, cilj nam je proučiti kaos iz teorije dinamičkih sustava u što jednostavnijem okruženju. Sukladno tome, svi dinamički sustavi kojima ćemo se baviti su jednodimenzionalni. Što to znači da je dinamički sustav kaotičan bi nam moglo biti najlakše razumljivo u svijetlu primjera, zato se dosta u ovom radu bavimo familijom šatorskih funkcija te familijom kvadratnih funkcija.

U prvom poglavlju ćemo navesti osnovne definicije koje će nam trebati kasnije u radu. Neki od pojmova koje ćemo definirati su orbita, fiksna točka, (završno) periodična točka.

U drugom poglavlju ćemo proučavati središnji pojam ovog rada - kaos, točnije kaos u jednodimenzionalnoj dinamici. Navest ćemo Devaneyjevu definiciju kaotične funkcije. Prije toga ćemo definirati neke koncepte koje koristi, odnosno topološku tranzitivnost i osjetljivost na početne uvjete. Taj dio se refera na [3]. Nadalje je poglavlje bazirano na člancima [2] i [7]. Iskazat ćemo i dokazati dva važna rezultata. Prvi ukazuje kako je za neprekidnu funkciju na metričkom prostoru uvjet osjetljivosti na početne uvjete u definiciji kaotične funkcije suvišan. Drugi rezultat tvrdi da kako bismo pokazali da je neprekidna funkcija definirana na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ kaotična, dovoljno je pokazati da je topološki tranzitivna. Također imamo kontraprimjere koji dokazuju da se kod neprekidne funkcije svi uvjeti koji trebaju biti zadovoljeni za kaotičnost međusobno ne impliciraju. Na kraju poglavlja će biti jedan primjer kaotične funkcije.

U trećem poglavlju ćemo se baviti familijom šatorskih funkcija. Glavni cilj će nam biti pokazati da je šatorska funkcija s parametrom $\mu = 1$, T_1, kaotična na $[0, 1]$. Prvo ćemo analizirati članove familije šatorskih funkcija za različite μ. Zatim ćemo gledati koliko fiksnih točaka imaju iteracije šatorske funkcije T_μ, odnosno gledat ćemo kardinalnost (broj elemenata) skupa fiksnih točaka funkcije T_μ^n za $n \in \mathbb{N}$. Nakon toga ćemo se baviti karakterizacijom (završno) periodičnih točaka šatorske funkcije T_1. Poglavlje ćemo završiti tako što ćemo pokazati da šatorska funkcija T_1 zadovoljava uvjete kaotičnosti pa je kaotična na $[0, 1]$. Treće poglavlje je uglavnom bazirano na izvoru [4].

U zadnjem poglavlju ćemo se baviti još jednim primjerom - familijom kvadratnih funkcija. Želimo poglavlje završiti tako da pokažemo kada je kvadratna funkcija kaotična (za koji parametar μ te na kojoj domeni). Zato ćemo uvesti simboličku dinamiku u istoimenom odjeljku. Tamo ćemo definirati i funkciju pomak te pokazati da je kaotična i topološki konjugirana (preko itinerera S) s kvadratnom funkcijom za dovoljno velike parametre μ te definiranoj na odgovarajućoj domeni. Topološku konjugiranost i itinerer ćemo definirati u odjeljku Topološka konjugacija. Za kraj ćemo dokazati da je kvadratna funkcija na $[0, 1]$ za parametar $\mu = 4$ topološki konjugirana sa šatorskom funkcijom T_1. Za ovo poglavlje se služimo izvorima [3], [6] i [8]. Za izradu grafova smo koristili programski jezik Python u Visual Studio Codeu uz Jupyter ekstenziju.

Poglavlje 1

Osnovne definicije

Diskretni dinamički sustav (X, f) sastoji se od nepraznog skupa X i funkcije $f\colon X \to X$. Skup X još zovemo i fazni prostor, a preslikavanje f fazno preslikavanje. Teorija diskretnih dinamičkih sustava se bavi proučavanjem dugoročnog ponašanja točaka skupa X pod djelovanjem iteracija danog preslikavanja f. Iteracije od f definirane su induktivno: $f^0 = Id$ (identiteta na X, $Id(x) = x$ za svaki $x \in X$) te za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Ako je f invertibilna, tada je definirano i $f^{-n} = (f^{-1})^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da vrijedi $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, iteracije čine grupu ako je f invertibilna, odnosno polugrupu ako nije (preciznije, ako f nije invertibilna, iteracije čine monoid s jedinicom $f^0 = Id$). Iako smo definirali dinamički sustav u potpuno apstraktnom okruženju, gdje je X samo neprazan skup, u proučavanju dinamičkih sustava uobičajeno je da je skup X opskrbljen nekom strukturom koja se čuva preslikavanjem f. Na primjer, X može biti metrički prostor, a f neprekidno preslikavanje. Budući da ćemo se ovdje pretežno baviti jednodimenzionalnim diskretnim dinamičkim sustavima, nama će X biti realni pravac ili neki njegov podskup, a f neprekidno preslikavanje.

Definicija 1.1. *Za $x \in X$* orbita naprijed *(ili* pozitivna orbita*) od x je skup*

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ako je f invertibilna, orbita nazad *(ili* negativna orbita*) od x je skup*

$$\mathcal{O}(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}_0\},$$

a (puna) orbita *od x je skup*

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Točku x često zovemo početno stanje, a točku $f^n(x)$, za $n \in \mathbb{N}$, buduće stanje (orbite). Na orbitu se može gledati i kao na niz pa ima smisla razmatrati npr. podniz orbite ili gomilište orbite.

Definicija 1.2. *Kažemo da je točka $x \in X$:*

(1) fiksna točka *(ili* invarijantna točka*, ili* ekvilibrij*) od f ako je $f(x) = x$. Skup svih fiksnih točaka funkcije f označavat ćemo* $\mathrm{Fix}\, f$.

(2) periodična točka *od f* perioda *$p \in \mathbb{N}$ ako je $f^p(x) = x$. Primjetimo da ako je p period od x, onda je i kp period od x za svaki $k \in \mathbb{N}$. Najmanji period od x zovemo* osnovni period*. Skup svih periodičnih točaka (ne nužno osnovnog) perioda p funkcije f označavat ćemo $Per_p f$, a skup svih periodičnih točaka od f sa* $\mathrm{Per}\, f$*. Primjetimo da je* $\mathrm{Per}\, f = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Per}_p\, f$*. Periodične orbite perioda n još nazivamo i n*-ciklusi.

(3) predperiodična *(ili* završno periodična*) točka od f ako postoji $m \in \mathbb{N}_0$ takav da je $f^m(x)$ periodična točka perioda p ($p \in \mathbb{N}$) od f. Posebno, za $p = 1$ kažemo da je x* predfiksna *(ili* završno fiksna*). Broj $m \in \mathbb{N}_0$ nazivamo* predperiod.

Napomena 1.3. *Primjetimo da je orbita fiksne točke x_0 od funkcije f jednočlan skup $\{x_0\}$. Periodična orbita perioda n je konačan skup od n elemenata $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$.*

Definicija 1.4. *Točka $y \in X$ je* naprijed *(ili* pozitivno*)* asimptotična *sa $x \in X$ ako $\left|f^j(y) - f^j(x)\right|$ teži u 0 kako j teži u ∞. Specijalno, ako je x periodična točka perioda n, onda je y* naprijed asimptotična *sa x ako je $\lim_{j\to\infty} f^{jn}(y) = x$.*

Stabilni skup *od x, oznaka $W^s(x)$, se sastoji od svih točaka koje su naprijed asimptotične sa x.*

Također, ako je funkcija f invertibilna, onda kažemo da je $y \in X$ nazad *(ili* negativno*)* asimptotična *sa $x \in X$ ako $\left|f^j(y) - f^j(x)\right|$ teži u 0 kako j teži u $-\infty$.*

Skup točaka nazad asimptotičnih sa x zovemo nestabilan skup *od x te ga označavamo sa $W^u(x)$.*

Definicija 1.5. *Točka x je* kritična točka *od f ako je $f'(x) = 0$. Kritična točka x je* nedegenerirana *ako je $f''(x) \neq 0$.*

U nastavku ovog poglavlja, neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija (reda n, pri čemu je n koliko god nam treba).

Definicija 1.6. *Neka je x periodična točka osnovnog perioda p. Točka x je* hiperbolična *ako je $|(f^p)'(x)| \neq 1$. Broj $(f^p)'(x)$ zovemo* multiplikator *periodične točke x.*

Definicija 1.7. *Neka je x hiperbolična periodična točka osnovnog perioda p. Ako je $|(f^p)'(x)| < 1$, točka x se zove* privlačna periodična točka*, ili* atraktor*, ili* ponor*. Ako je $|(f^p)'(x)| > 1$, točku x zovemo* odbojna periodična točka*, ili* izvor.

Poglavlje 2

Kaos

Nema univerzalno prihvaćene definicije kaosa. U ovom radu uzimamo Devaneyjevu definiciju kaosa koja je bazirana na topološkom pristupu. Prije toga ćemo proći ključne koncepte koje koristi.

Definicija 2.1. *Neka je $J \subset \mathbb{R}$ segment. Kažemo da je funkcija $f\colon J \to J$* topološki tranzitivna *ako za svaka dva otvorena skupa $U, V \subset J$ postoji $k > 0$ takav da je $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Intuitivno, za topološki tranzitivnu funkciju postoje točke koje se pod iteracijama gibaju od bilo kojeg proizvoljno malog otvorenog skupa do bilo kojeg drugog proizvoljno malog otvorenog skupa. Stoga, dinamički sustav ne može biti dekomponiran u dva disjunktna otvorena skupa koji su invarijantni za danu funkciju. Primijetimo da ako preslikavanje ima gustu orbitu, onda je topološki tranzitivno. Obrat je također točan na kompaktnim podskupovima od $\mathbb{R}$ i S^1 bez izoliranih točaka, ali ga nećemo dokazivati (dokaz koristi teorem o Baireovoj kategoriji).

Definicija 2.2. *Neka je $J \subset \mathbb{R}$ segment. Kažemo da je funkcija $f\colon J \to J$* osjetljiva na početne uvjete *ako postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in J$ i za svaku okolinu N od x, postoje $y \in N$ i $n \geq 0$ takvi da vrijedi $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$. δ nazivamo* konstanta osjetljivosti.

Intuitivno, funkcija je osjetljiva na početne uvjete ako za svaku točku x postoje točke koje su proizvoljno blizu x i čije se iteracije razdvajaju od iteracija od x za najmanje δ. Pri tome se ne trebaju separirati od x sve točke blizu x, ali mora postojati barem jedna takva točka u svakoj okolini od x. Ako je funkcija osjetljiva na početne uvjete, onda se svaka mala pogreška u računu, nastala npr. zaokruživanjem, iteriranjem može uvećati.

Stigli smo do glavne definicije ovog rada, pojma kaotičnog dinamičkog sustava. Postoje mnoge moguće definicije kaosa u dinamičkom sustavu (kao što smo spomenuli na početku) te nisu sve međusobno ekvivalentne. Devaney daje sljedeću jer je primjenjiva na velik broj važnih primjera te je, u dosta slučajeva, laka za provjeriti.

Definicija 2.3. *Neka je X metrički prostor. Kažemo da je funkcija $f\colon X \to X$* kaotična *na X ako vrijedi:*

(1) f je topološki tranzitivna,

(2) skup periodičnih točaka od f je gust u X,

(3) f je osjetljiva na početne uvjete.

Dakle, kaotična funkcija f ima tri sastojka: nepredvidljivost (3), nerazloživost (1) te element regularnosti (2). Kaotični sustav je nepredvidljiv radi osjetljivosti na početne uvjete. Radi topološke tranzitivnosti ne može biti rastavljen na dva podsustava (dva otvorena podskupa koja su invarijantna za f) koje f ne dovodi u interakciju. Element regularnosti je u ovoj priči skup periodičnih točaka of f koje su guste u X.

Iako Devanyjeva definicija kaotične funkcije općenito iskazuje što je to kaotična funkcija, za familiju neprekidnih funkcija (koje se najčešće proučavaju) u definiciji je navedeno više nego što je potrebno. Naime, uvijet da je f osjetljiva na početne uvjete nije potreban za neprekidne funkcije jer slijedi iz toga što je f tranzitivna te su periodične točke od f guste u X. Sljedeći teorem se bavi tim rezultatom.

Teorem 2.4. *Neka je X metrički prostor. Ako je funkcija $f\colon X \to X$ neprekidna, topološki tranzitivna te je skup periodičnih točaka od f gust u X, onda je f osjetljiva na početne uvjete.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna, topološki tranzitivna funkcija te da je skup periodičnih točaka od f gust u X. Prvo primijetimo da postoji broj $\delta_0 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ postoji periodična točka $q \in X$ čija orbita, $O(q)$, je udaljena od x za barem $\delta_0/2$. Uistinu, neka su q_1 i q_2 proizvoljne periodične točke s disjunktnim orbitama, $O(q_1)$ i $O(q_2)$. Označimo sa δ_0 udaljenost između $O(q_1)$ i $O(q_2)$. Tada prema nejednakosti trokuta, svaka točka $x \in X$ je udaljena za barem $\delta_0/2$ od jedne od promatranih periodičnih orbita.

Pokazat ćemo da f ima osjetljivost na početne uvjete s konstantom osjetljivosti $\delta = \delta_0/8$. Neka je x proizvoljna točka u X te neka je N neka okolina od x. Budući da je skup periodičnih točaka od f gust u X, postoji periodična točka p u presjeku $U = N \cap B_\delta(x)$, gdje je $B_\delta(x)$ kugla radijusa δ sa središtem u x. Označimo period od p sa n. Kao što smo pokazali, postoji periodična točka $q \in X$ čija orbita, $O(q)$, je udaljena od x za barem 4δ. Neka je

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(B_\delta(f^i(q))).$$

V je otvoren kao konačan presjek otvorenih skupova te je neprazan jer je $q \in V$. Budući da je f topološki tranzitivna te V otvoren skup, postoje $y \in U$ i $k \in \mathbb{N}$ takvi da je $f^k(y) \in V$. Neka je j cjelobrojni dio (najveće cijelo) od $\frac{k}{n} + 1$, $\lfloor \frac{k}{n} + 1 \rfloor$. Vrijedi $j \leq n_j - k \leq n$. Po konstrukciji $f^{n_j}(y) = f^{n_j-k}(f^k(y)) \in f^{n_j-k}(V) \subset B_\delta(f^{n_j-k}(q))$. Primjetimo da je $f^{n_j}(p) = p$ pa po nejednakosti trokuta slijedi

$$d(f^{n_j}(p), f^{n_j}(y)) = d(p, f^{n_j}(y)) \geq d(x, f^{n_j-k}(q)) - d(f^{n_j-k}(q), f^{n_j}(y)) - d(p, x)$$

gdje je d metrika na X. Zato, i jer je $O(q)$ udaljena od x najmanje 4δ, $p \in B_\delta(x)$ te $f^{n_j}(y) \in B_\delta(f^{n_j-k}(q))$, slijedi

$$d(f^{n_j}(p), f^{n_j}(y)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Ponovnom primjenom nejednakosti trokuta

$$d(f^{n_j}(p), f^{n_j}(x)) + d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)) \geq d(f^{n_j}(p), f^{n_j}(y)) > 2\delta$$

slijedi da je ili $d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)) > \delta$, ili $d(f^{n_j}(x), f^{n_j}(p)) > \delta$. U oba slučaja smo pronašli točku u N čija je n_j-ta iteracija udaljena od $f^{n_j}(x)$ za više od δ. QED

Ako se ograničimo na intervale, dovoljno je pokazati topološku tranzitivnost neprekidne funkcije f kako bismo se uvjerili da je kaotična (rezultat ne vrijedi općenito za metričke prostore).

Propozicija 2.5. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (ne nužno konačan) te neka je $f : I \to I$ neprekidna i topološki tranzitivna funkcija. Tada je skup periodičnih točaka od f gust u I te je f osjetljiva na početne uvjete.*

Prije dokaza propozicije, iskažimo i dokažimo lemu.

Lema 2.6. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (ne nužno konačan) i $f : I \to I$ neprekidna funkcija. Nadalje, neka je $J \subseteq I$ interval koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f te neka su $z, f^m(z), f^n(z) \in J$ gdje je $0 < m < n$. Tada je ili $z < f^m(z) < f^n(z)$, ili $z > f^m(z) > f^n(z)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $J \subseteq I$ interval koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f i da postoji $z \in J$ takav da su $f^m(z), f^n(z) \in J$, $0 < m < n$ te pretpostavimo da vrijedi $z < f^m(z)$ i $f^m(z) > f^n(z)$. Zbog jednostavnosti, definiramo $g(x) := f^m(x)$. Dakle, $z < g(z)$. Pokažimo da to po indukciji povlači da je $z < g(z) < g^{k+1}(z)$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $g^{k+1}(z) < g(z)$ te neka je k najmanji takav. Tada je funkcija $g^k(x) - x$ neprekidna te ima pozitivnu vrijednost u z i negativnu vrijednost u $g(z)$. Po teoremu srednje vrijednosti slijedi da postoji točka $c \in (z, g(z)) \subset J$, gdje $g^k(c) - c = 0$, odnosno $g^k(c) = c$. No, to znači da je $c \in J$ periodična točka od f s periodom km, što je u kontradikciji s pretpostavkom da J ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f. Dakle, $z < g^k(z)$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Posebno za $k = n - m > 0$, tj. $z < f^{(n-m)m}(z)$.

Definirajmo sada $g(x) := f^{n-m}(x)$ i označimo $v := f^m(z)$. Tada je $v > g(v)$. Možemo analogno po indukciji pokazati da vrijedi $v > g(v) > g^{k+1}(v)$ za sve $k \in \mathbb{N}$, konkretno za $k+1 = m$. Dakle, vrijedi $f^{(n-m)m}(f^m(z)) < f^m(z)$. Iz svega slijedi da je funkcija $f^{(n-m)m}(x) - x$

neprekidna te ima pozitivnu vrijednost u z i negativnu vrijednost u $f^m(z)$. No, to implicira da f ima periodičnu točku perioda $(n-m)m$ u J, a to je u kontradikciji s tim da J ne sadrži periodičke točke od f. Dakle, $z < f^m(z) < f^n(z)$.

Drugi slučaj $z > f^m(z) > f^n(z)$ možemo dokazati analogno. QED

Dokaz propozicije 2.5. Pretpostavimo da je f neprekidna i topološki tranzitivna. Zbog teorema 2.4, dovoljno je pokazati da je skup periodičnih točaka od f gust u I. Pretpostavimo suprotno, tj. da skup periodičnih točaka od f nije gust u I. Tada postoji interval $J \subseteq I$ koji ne sadrži niti jednu periodičnu točku od f. Uzmimo točku $x \in J$ koja nije krajnja točka od J, otvorenu okolinu $N \subsetneq J$ od x te otvoren interval $E \subset J \setminus N$. Budući da je f topološki tranzitivna na I, postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da $f^m(N) \cap E \neq \emptyset$ pa je za $y \in J$, $f^m(y) \in E \subset J$. Zato što J ne sadrži nikakve periodične točke, vrijedi $y \neq f^m(y)$, te je f neprekidna što implicira da ne možemo naći otvorenu okolinu U od y takvu da je $f^m(U) \cap U = \emptyset$. Jer je U otvoren skup, ponovno možemo iskoristiti topološku tranzitivnost te pronaći $n > m$ i $z \in U$ takve da $f^n(z) \in U$. No, tada imamo $0 < m < n$, $z, f^n(z) \in U$ i $f^m(z) \notin U$ što je u kontradikciji s lemom 2.6. QED

Gornji dokaz propozicije ne može biti generaliziran na više dimenzije ili jediničnu kružnicu jer koristi uređaj na $\mathbb{R}$.

Neprekidna funkcija na intervalu, čiji je skup periodičnih točaka gust u tom intervalu, nema nužno osjetljivost na početne uvjete. Kontraprimjer je funkcija $f\colon I \to I$, $f(x) = x$ za svaki $x \in I$ (identiteta na $I = [0,1]$). Skup periodičnih točaka je $[0,1]$ jer je svaka točka fiksna (perioda jedan). Pokažimo da f nije osjetljiva na početne uvjete. Neka je $\delta > 0$ proizvoljan te neka su $x, y \in [0,1]$ takvi da je $|x-y| < \delta$. Tada $\forall n \geq 0$ vrijedi $|f^n(x) - f^n(y)| = |x-y| < \delta$. Dakle, f nije osjetljiva na početne uvjete.

Neprekidna funkcija na intervalu koja je osjetljiva na početne uvjete i čije su periodične točke guste na intervalu ne mora biti topološki tranzitivna. Kao kontraprimjer definirajmo na $I = [0,\infty)$ funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ -3x+2, & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 3x-2, & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ f(x-1)+1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

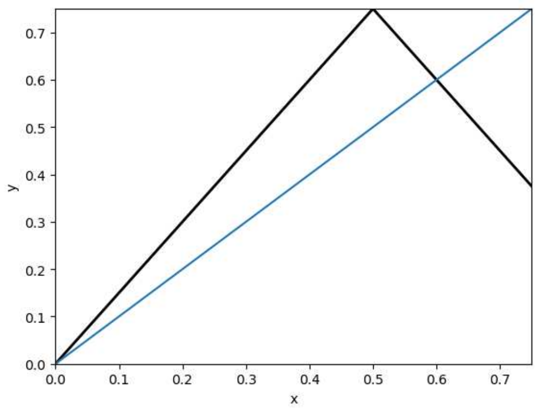
Funkcija f je osjetljiva na početne uvjete jer je $\left|\frac{df}{dx}\right| = 3 > 1$, $\forall x \in I$. Lako vidimo da f^n ima fiksnu točku u svakoj cjelobrojnoj vrijednosti te $3^n - 2$ fiksnih točaka između bilo koje dvije uzastopne cjelobrojne vrijednosti s udaljenošću između tih točaka manjom od $(\frac{1}{3})^{n-1}$ pa su periodične točke od f guste u I. No, funkcija f nije topološki tranzitivna jer vrijedi $f([0,1]) = [0,1]$, tj. $[0,1]$ je invarijantan skup. Ako restringiramo funkciju f na interval $I = [0,2]$, dobijemo kontraprimjer za konačni interval.

Funkcija koja je neprekidna na intervalu te je osjetljiva na početne uvjete nema nužno gust skup periodičnih točaka u tom intervalu.

Kao kontraprimjer uzmimo interval $I = [0, \frac{3}{4}]$ i funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2}(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Osjetljivost na početne uvjete je jasna jer vrijedi $|f'(x)| = \frac{3}{2} > 1$, $\forall x \in [0, \frac{3}{4}]$, no ne postoje periodične točke u intervalu $(0, \frac{1}{4}]$, tj. lako vidimo da se niti jedna točka orbite s inicijalnom vrijednosti iz tog intervala neće vratiti u njega. Naime, f ima dvije fiksne točke, 0 (ako je $x \in [0, \frac{1}{2})$) i 0.6 (ako je $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$). Jer je f strogo rastuća funkcija te se nalazi iznad dijagonale na intervalu $(0, \frac{1}{4}]$ (što možemo lijepo vidjeti na slici 2.1), te je $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{3}{4})$, slijedi da niz $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ za $x \in (0, \frac{1}{4}]$ za dovoljno velik n napušta interval $(0, \frac{1}{4}]$ te se više ne vraća u njega. (To možemo vidjeti na slici 2.2 za početnu vrijednost $x_0 = 0.2 \in (0, \frac{3}{8}]$.)

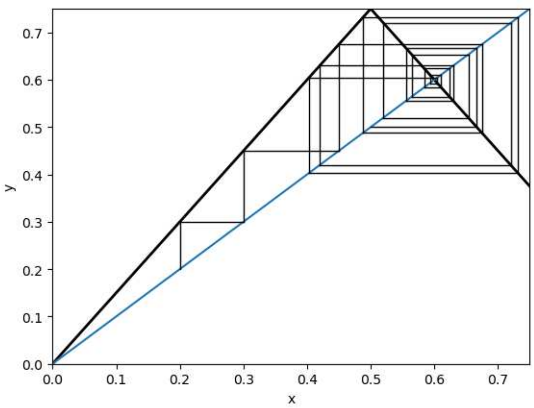


Slika 2.1: Pravac $y = x$ i graf funkcije f dane sa (2.2).

Kao kontraprimjer na neomeđenoj domeni uzmimo interval $I = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ i $f(x) = 2x$. Jet je $|f'(x)| = 2 > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, funkcija f je osjetljiva na početne uvjete. Primijetimo da f nema niti jednu periodičnu točku u skupu $\mathbb{R}_+$.

Završimo ovo poglavlje primjerom kaotične funkcije.

Primjer 2.7. *Neka je S^1 jedinična kružnica u ravnini. Označimo točku iz S^1 njezinim kutom θ mjerenim u radijanima. Dakle, točka je određena kutom oblika $\theta + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$. Neka je $f(\theta) = 2\theta$. (Primijetimo da je $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ na kružnici pa je funkcija f dobro definirana.) Slijedi da je $f^n(\theta) = 2^n\theta$, pa je θ periodična točka perioda n ako i samo ako je $2^n\theta = \theta + 2k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, tj. ako i samo ako $\theta = \frac{2k\pi}{2^n-1}$, gdje je $0 \leq k \leq 2^n$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, periodične točke perioda n funkcije f su $(2^n - 1)$-i korijeni od jedan.*



Slika 2.2: Grafička analiza funkcije f dane sa (2.2) uz početni uvjet $x_0 = 0.2$.

Pokažimo da je skup periodičnih točaka od f gust u S^1. Budući da je $x \mapsto \alpha x$ homeomorfizam u Euklidskom prostoru za $\alpha \neq 0$, kako bismo pokazali da je skup

$$\left\{2\pi \frac{k}{2^n - 1} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\right\}$$

gust u $[0, 2\pi)$ dovoljno je dokazati da je skup

$$\left\{\frac{k}{2^n - 1} : (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\right\}$$

gust u $[0, 1)$.

Neka je $x \in [0, 1)$ proizvoljan. Ako je $x = 0$, sve okoline od x sadrže interval oblika $[0, r)$ za $0 < r \leq 1$ te direktno slijedi da za $k = 1$ i dovoljno velike n imamo da je $\frac{k}{2^n-1} \in [0, r)$. Ako je $0 < x < 1$, okoline od x sadrže intervale oblika $(x - r, x + r)$ za dovoljno mali $r > 0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{2^n-1} < 2r$. Neka je k najveći prirodan broj takav da vrijedi $\frac{k}{2^n-1} < x - r$ (takav k uvijek postoji jer je n fiksan te maksimum konačnog podskupa prirodnih brojeva uvijek postoji). Slijedi da je $\frac{k+1}{2^n-1} > x - r$ (po definiciji od k), također vrijedi da je $\frac{k+1}{2^n-1} < x + r$ (tako smo odabrali n), pa je $\frac{k+1}{2^n-1} \in (x - r, x + r)$. Zaključujemo da je skup $\left\{\frac{k}{2^n-1} : (k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n\right\}$ gust u $[0, 1)$.

Kutna udaljenost između dvije točke je udvostručena pod iteracijama od f. Topološka tranzitivnost slijedi iz te observacije jer je svaki (proizvoljno) mali kut iz S^1 sa f^k, za neki k, proširen tako da pokriva cijeli S^1, te time i bilo koji drugi kut u S^1. Također, f je osjetljiva na početne uvjete, što slijedi iz Teorema 2.4, a i lako se vidi direktno iz udvostručavanja kutne udaljenosti. Dakle, f je kaotična na S^1.

Poglavlje 3

Familija šatorskih funkcija

3.1 Osnovna svojstva familije šatorskih funkcija

Familija šatorskih funkcija, $\{T_\mu\}$, se sastoji od funkcija T_μ definiranih sa:

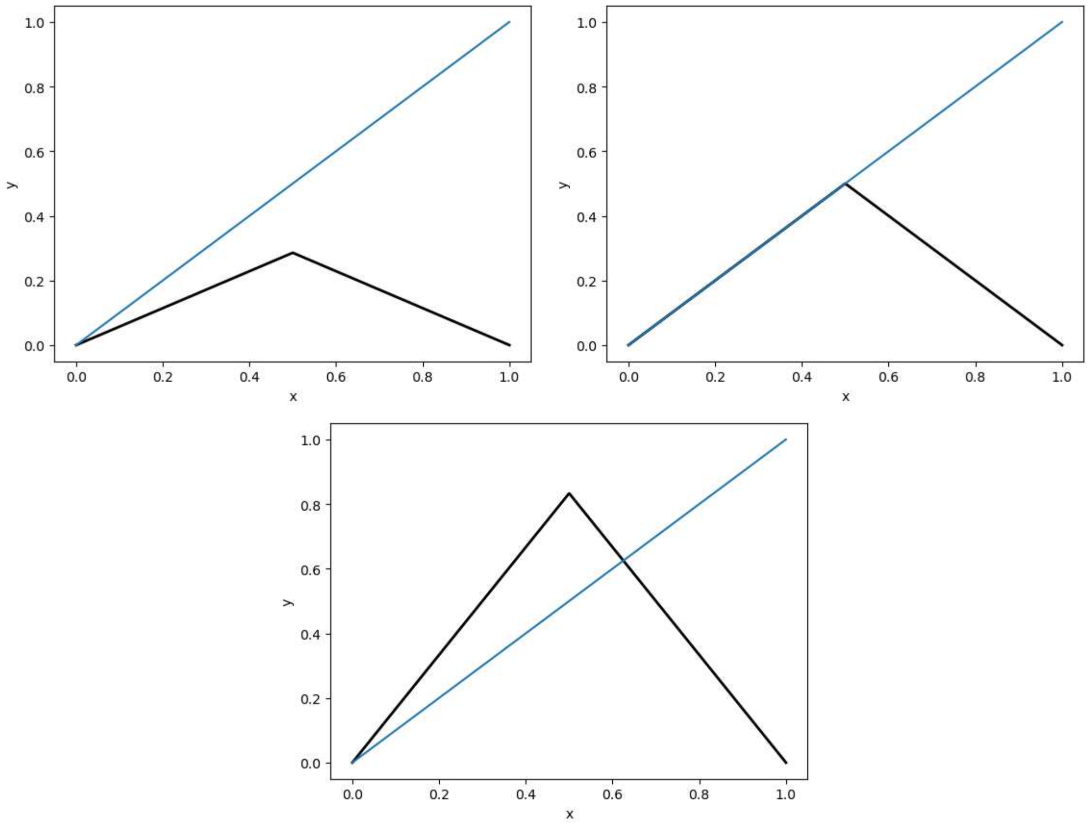
$$T(x) = \begin{cases} 2\mu x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2\mu(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Visina grafa raste proporcionalno s parametrom μ zato što je μ faktor u formuli za T_μ. Lako se pokaže da ako je $0 < \mu < \frac{1}{2}$, onda T_μ siječe pravac $y = x$ u jednoj točki (u nuli), te ako je $\frac{1}{2} < \mu < 1$, onda T_μ siječe pravac $y = x$ u dvije točke. Odvojeno ćemo analizirati članove familije $\{T_\mu\}$ za koje je $0 < \mu < \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < 1$. Naposljetku ćemo proučavati originalnu šatorsku funkciju s parametrom $\mu = 1$, $T_1 = T$.

1. slučaj: $0 < \mu < \frac{1}{2}$
U ovom slučaju je 0 jedina fiksna točka za T_μ, slika 3.1 za parametar $\mu = \frac{2}{7}$. Jer je $0 < \mu < \frac{1}{2}$, iz definicije šatorske funkcije slijedi da ako je $0 < x \leq \frac{1}{2}$, onda je $0 \leq T_\mu(x) = 2\mu x < x$, te ako je $\frac{1}{2} < x \leq 1$, onda je $0 \leq T_\mu(x) = 2\mu(1-x) < 1 - x < \frac{1}{2} < x$. Posljedično, za bilo koji $x \in [0,1]$, niz $(T_\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je ograničen i padajući pa konvergira prema fiksnoj točki 0. Stoga je 0 privlačna fiksna točka te $W^s(0) = [0,1]$.

2. slučaj: $\mu = \frac{1}{2}$
Prvo primjetimo da ako je $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, onda vrijedi $T_{\frac{1}{2}}(x) = 2(\frac{1}{2})x = x$, pa je x fiksna točka za $T_{\frac{1}{2}}$ za svaki $x \in [0, \frac{1}{2}]$, slika 3.1 za parametar $\mu = \frac{1}{2}$. Sljedeće računamo da ako je $\frac{1}{2} < x \leq 1$, onda je $0 \leq T_{\frac{1}{2}}(x) = 2(\frac{1}{2})(1-x) = 1 - x \leq \frac{1}{2}$. Stoga je x predfiksna točka za $T_{\frac{1}{2}}$ za svaki $x \in (\frac{1}{2}, 1]$, slika 3.1 za parametar $\mu = \frac{1}{2}$.

3. slučaj: $\frac{1}{2} < \mu < 1$
Uz fiksnu točku 0, postoji druga fiksna točka $p \in (0,1]$, slika 3.1 za $\mu = \frac{5}{6}$. Kako bismo dobili p, riješimo jednadžbu $p = T_\mu(p) = 2\mu(1-p)$. Slijedi da je $p = \frac{2\mu}{1+2\mu}$. Kako μ raste

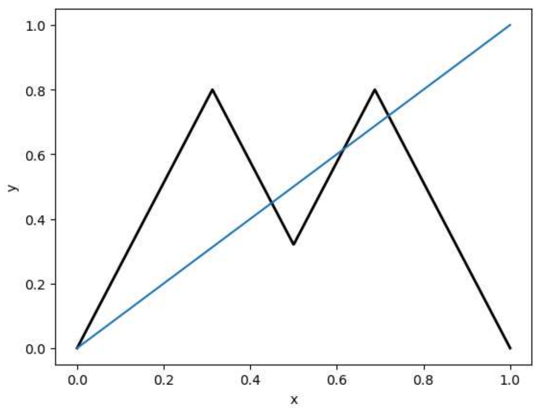


Slika 3.1: Pravac $y = x$ te grafovi šatorske funkcije za parametre $\mu = \frac{2}{7}$, $\mu = \frac{1}{2}$ i $\mu = \frac{5}{6}$, respektivno

od $\frac{1}{2}$ prema 1, p raste od $\frac{1}{2}$ prema $\frac{2}{3}$. Jer je $\left|T'_\mu(x)\right| = 2\mu > 1$ na $[0, 1]$, osim u $\frac{1}{2}$, obje fiksne točke su odbojne. Periodične točke perioda dva za T_μ su fiksne točke za T^2_μ koja je dana sa

$$T^2_\mu(x) = \begin{cases} 4\mu^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4\mu} \\ 2\mu(1 - 2\mu x), & \frac{1}{4\mu} < x \leq \frac{1}{2} \\ 2\mu(1 - 2\mu + 2\mu x), & \frac{1}{2} < x \leq 1 - \frac{1}{4\mu} \\ 4\mu^2(1 - x), & 1 - \frac{1}{4\mu} < x \leq 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Slika 3.2 prikazuje graf od T^2_μ koji sugerira da za $\frac{1}{2} < \mu < 1$, T^2_μ ima četiri fiksne točke koje možemo pronaći rješavanjem jednadžbe $x = T^2_\mu(x)$. Dobivamo da su fiksne točke 0, $\frac{2\mu}{1+4\mu^2}$, $\frac{2\mu}{1+2\mu}$ i $\frac{4\mu^2}{1+4\mu^2}$.



Slika 3.2: Pravac $y = x$ i graf funkcije T^2 za parametar $\mu = 0.8$.

0 i $\frac{2\mu}{1+2\mu}$ su fiksne točke za T_μ pa slijedi da je $\left\{\frac{2\mu}{1+4\mu^2}, \frac{4\mu^2}{1+4\mu^2}\right\}$ 2-ciklus za T_μ. Taj 2-ciklus je odbojan jer je $\left|(T_\mu^2)'(x)\right| = 4\mu^2 > 1$, gdje god je derivacija definirana. Jer je graf od T_μ^n afin na 2^n podintervala od $[0, 1]$, $[0, \frac{1}{2^n}]$, ..., $[1 - \frac{1}{2^n}, 1]$, moguće je (iako mukotrpno) opisati razne n-cikluse od T_μ - među kojima su svi odbojni.

4. slučaj: $\mu = 1$

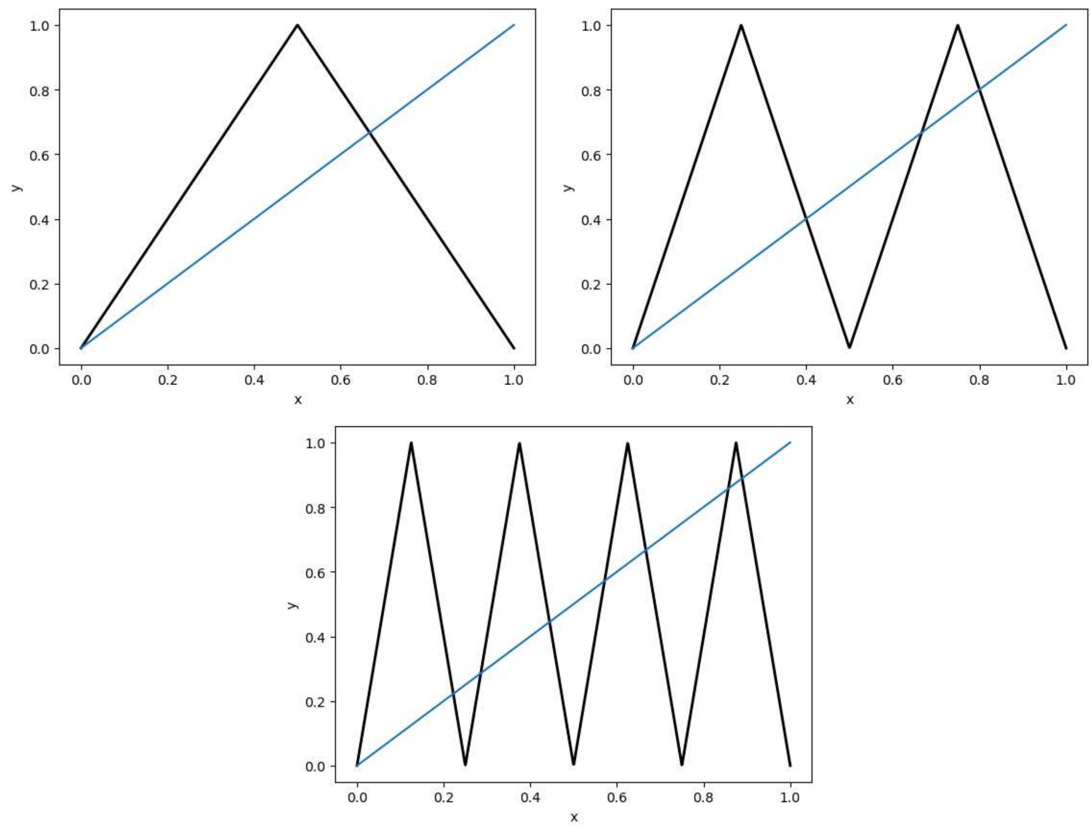
Za $\mu = 1$, označimo $T_\mu = T_1 = T$. Šatorska funkcija je dana sa

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

Velika razlika između grafa od T i grafa od T_μ, kada $\mu < 1$, je činjenica da je slika od T cijeli segment $[0, 1]$, dok je slika od T_μ, kada $\mu < 1$, pravi podskup od $[0, 1]$.

Funkcija T rasteže interval $[0, \frac{1}{2}]$ preko cijelog intervala $[0, 1]$ te preklapa interval $[\frac{1}{2}, 1]$ ponovno preko cijelog intervala $[0, 1]$. Takvo širenje i preklapanje je karakteristično za dosta funkcija koje su kaotične.

Točka 0 je fiksna za sve funkcije iz familije $\{T_\mu\}$, pa tako i za T. Budući da je $x = T(x) = 2(1 - x)$, ako je $x = \frac{2}{3}$, vidimo da je $\frac{2}{3}$ druga fiksna točka za T. Grafovi od T^2 i T^3, slika 3.3, indiciraju da T^2 i T^3 imaju četiri i osam fiksnih točaka, respektivno. Stoga T ima dvije periodične točke perioda dva te šest periodičnih točaka perioda tri, koje možemo dobiti rješavajući jednadžbe $x = T^2(x)$ i $x = T^3(x)$ za x. Rađe nego da određujemo vrijednosti periodičnih točaka perioda n za T, prebacit ćemo se na broj periodičnih točaka perioda n od T za $n \ge 1$. Funkcija T^n je po dijelovima afina i ima $2^n + 1$ točaka ekstrema. Posljedično postoji 2^n fiksnih točaka za T^n, jedna u svakom od podintervala $[0, \frac{1}{2^n}]$, ..., $[\frac{2^n-1}{2^n}]$ na kojima je funkcija afina. Neke od tih fiksnih točaka za T^n su fiksne točke za



Slika 3.3: Pravac $y = x$ te grafovi funkcija T_1, T_1^2 i T_1^3, respektivno

T^k, $k < n$, preostale fiksne točke su n-ciklusi za T. Kako bismo dobili broj periodičnih točaka osnovnog perioda n za T, uzmimo 2^n fiksnih točaka za T^n i oduzmimo ukupan broj periodičnih točaka perioda k za sve vrijednosti $k < n$ za koje $k|n$. Na primjer, ako je $n = 4$, onda postoji $2^4 = 16$ fiksnih točaka za T^4. Dvije od njih su fiksne točke za T, dok su druge dvije fiksne točke za T^2. Stoga je preostalih dvanaest fiksnih točaka za T^4 osnovnog perioda četiri, te čine tri 4-ciklusa za T.

3.2 Završno periodične i periodične točke šatorske funkcije T

U ovom odjeljku ćemo odrediti završno periodične i periodične točke za T. Nerijetko ćemo pojmom završno periodične točke obuhvaćati i pojmove periodične, završno periodične, završno fiksne i fiksne točke. U sljedećim rezultatima pretpostavljamo da ako je $x = \frac{k}{p} \in (0,1)$ da je x u reduciranom obliku.

Teorem 3.1. *Neka je $x \in [0,1]$. Tada je x završno periodična točka za T ako i samo ako je x racionalan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x završno periodična. Ili je $T(x) = 2x$ ili $T(x) = 2 - 2x$. U svakom slučaju je $T(x) = b \pm 2x$, $b \in \mathbb{Z}$. Slično, $T^2(x) = b \pm 2^2 x$, $b \in \mathbb{Z}$, te općenito $T^n(x) = b \pm 2^n x$, $b \in \mathbb{Z}$. Za svaki n, neka su $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ takvi da $a_n = 2^n$ ili $a_n = -2^n$, te $T^n(x) = b_n + a_n x$. Budući da je x završno periodična, postoje $k, m \in \mathbb{N}$, $k \neq m$, takvi da vrijedi $T^k(x) = T^m(x)$. Stoga je $b_k + a_k x = b_m + a_m x$. Jer je $k \neq m$, slijedi da je $a_k \neq a_m$, pa je

$$x = \frac{b_m - b_k}{a_k - a_m}$$

što znači da je x racionalan broj. Obratno, pretpostavimo da je $x = \frac{k}{p}$, gdje je $p \in \mathbb{N}$ neparan, tj. $p = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Tada je $T(\frac{k}{p}) = \frac{2k}{p}$ ili $T(\frac{k}{p}) = \frac{2(p-k)}{p}$ tako da je $T(x) = \frac{2m}{p}$, $m \in \mathbb{Z}$. Postoji konačno mnogo različitih brojeva iz $(0,1)$ oblika $\frac{2m}{p}$, $m \in \mathbb{Z}$ pa je x završno periodična. Nadalje, pretpostavimo da je $x = \frac{k}{p}$, gdje je $p \in \mathbb{N}$ paran, tj. oblika $p = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$. U tom slučaju je $T(x) = \frac{2k}{p} = \frac{k}{\frac{p}{2}}$ ili $T(x) = 2\left(1 - \frac{k}{p}\right) = \frac{p-k}{\frac{p}{2}}$ pa je sada nazivnik $\frac{p}{2}$. Nastavljamo proces tako da supstituiramo x sa $T(x)$. Slijedi da je za neki $i \in \mathbb{N}$, ovisno o x, ili $T^i(x) = \frac{a}{2m+1}$ za $a, m \in \mathbb{Z}$ ili $T^i(x) = 1$. Prva mogućnost, prema pokazanom za $2m + 1$, znači da je x završno periodična točka, dok druga mogućnost znači da je $T^{i+1}(x) = 0$. Dakle, x je završno fiksna te time i završno periodična točka. QED

Prethodni teorem implicira da su racionalni brojevi iz $(0,1)$ završno periodične točke za T, što uključuje i periodične točke. Kako bismo odredili koji racionalni brojevi su periodične točke prvo iskažimo i dokažimo dvije leme.

Lema 3.2. *Neka je $x = \frac{k}{p} \in (0,1)$. Pretpostavimo da je $p = 2m + 1$ za neki $m \in \mathbb{Z}$. Tada je x periodična točka za T ako i samo ako je $k = 2l$ za neki $l \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x periodična točka perioda n. Jer je po pretpostavci $p = 2m+1$ za neki $m \in \mathbb{Z}$ te jer je $T(x) = \frac{2k}{p}$ ili $T(x) = \frac{2(p-k)}{p}$, slijedi da je $T(x) = \frac{2l}{p}$ za $l \in \{k, p-k\}$. Isto vrijedi za sve iteracije od x, tj. za $n \in \mathbb{N}$, $x = T^n(x) = \frac{2l}{p}$ za neki $l \in \mathbb{Z}$. Stoga, ako je x periodična, onda k mora biti paran, tj. oblika $2l$ za neki $l \in \mathbb{Z}$.

Obratno, pretpostavimo da je $k = 2l$ za neki $l \in \mathbb{Z}$. Pokazat ćemo da je x periodična. Za proizvoljni $i \in \mathbb{N}$ je $T^i(x) = \frac{2a}{p}$ za neki $a \in \mathbb{Z}$. Naime, za $i = 1$ tvrdnja slijedi iz definicije šatorske funkcije. Ako je $i > 1$, indukcijom iz definicije šatorske funkcije te jer je $T^i(x) = T(T^{i-1}(x))$ slijedi

$$T^i(x) = \begin{cases} \frac{2\cdot 2l}{p} = \frac{4l}{p}, l \in \mathbb{Z}, & 0 \le T^{i-1}(x) \le \frac{1}{2}, \\ 2\left(1 - \frac{2l}{p}\right) = \frac{2p-4l}{p}, l \in \mathbb{Z}, & \frac{1}{2} < T^{i-1}(x) \le 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dakle, čim vidimo oblik od $T^i(x)$, znamo je li $T^{i-1}(x)$ u $[0, \frac{1}{2}]$ ili $(\frac{1}{2}, 1]$; ako četiri dijeli brojnik od $T^i(x)$, onda je $T^{i-1}(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, inače je u $(\frac{1}{2}, 1]$. Iz prethodnog teorema slijedi da je x završno periodična, tako da postoje najmanji $i \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ takvi da $i < n$ te $T^i(x) = T^n(x)$. Ako je $i = 0$, onda je x periodična točka perioda n jer $T^n(x) = T^i(x) = T^0(x) = x$.

Pokažimo sada da i ne može biti pozitivan broj, tj. da $i = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $i > 0$. Budući da je $T^n(x) = T^i(x)$, slijedi da četiri dijeli oba ili niti jednog. Ovisno o tome dijeli li četiri $T^i(x) = T^n(x)$, oba broja $T^{i-1}(x)$ i $T^{n-1}(x)$ leže u $[0, \frac{1}{2}]$ ako četiri dijeli $T^i(x) = T^n(x)$, ili oba broja leže u $(\frac{1}{2}, 1]$ ako četiri ne dijeli $T^i(x) = T^n(x)$. Jer je T strogo rastuća ne segmentu $[0, \frac{1}{2}]$ i strogo padajuća na $[\frac{1}{2}, 1]$, slijedi da je T injektivna na svakom od ta dva segmenta. Stoga iz $T^i(x) = T^n(x)$ te jer smo pokazali da $T^{i-1}(x)$ i $T^{n-1}(x)$ ili oba leže u $[0, \frac{1}{2}]$, ili oba leže u $(\frac{1}{2}, 1]$, slijedi da je $T^{i-1}(x) = T^{n-1}(x)$. No, to je u kontradikciji s tim da su i i n najmanji takvi brojevi. Stoga $i = 0$, pa je x periodična točka za T. QED

Lema 3.3. *Neka je $x = \frac{k}{p} \in (0, 1)$ pri čemu je $p = 2l$ za neki $l \in \mathbb{Z}$. Tada x nije periodična točka za T.*

Dokaz. Budući da je x u reduciranom obliku te $p = 2l$ za neki $l \in \mathbb{Z}$, slijedi da k mora biti oblika $2m + 1$ za neki $m \in \mathbb{Z}$, pa je $x = \frac{2m+1}{p}$. Kako je po definiciji šatorske funkcije $T(x) = \frac{2k}{p}$ ili $T(x) = \frac{2(p-k)}{p}$, slijedi da je u svakom slučaju $T(x) = \frac{2a}{p}$ za neki $a \in \mathbb{Z}$. Također, iz (3.4) slijedi da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $T^i(x) = \frac{2b}{p}$ za neki $b \in \mathbb{Z}$. Stoga ni reducirani oblik za $T(x)$ ni reducirani oblik za $T^i(x)$, $i > 1$, ne mogu biti oblika $\frac{2m+1}{p}$, gdje je $m \in \mathbb{Z}$. Slijedi da x nije periodična točka za T. QED

Teorem 3.4. *Racionalan broj $x \in (0, 1)$ je periodična točka za T ako i samo ako je x oblika $\frac{2k}{2l+1}$ za neke $k, l \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je racionalan broj $x \in (0, 1)$ periodična točka za T. Također pretpostavimo da je nazivnik od x oblika $2l$, $l \in \mathbb{Z}$. Tada iz leme 3.3 slijedi da x nije periodična točka čime smo dobili kontradikciju. Dakle, nazivnik od x je oblika $2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$. Sada iz leme 3.2 slijedi da je brojnik od x oblika $2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Obratno, neka je x oblika $\frac{2k}{2l+1}$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Po lemi 3.2 je x periodična točka. QED

3.3 Kaotičnost šatorske funkcije T

Po propoziciji 2.5 dovoljno je dokazati da je T tranzitivna na $[0, 1]$, no dokazat ćemo sva tri svojstva funkcije T iz definicije kaotičnosti.

Propozicija 3.5. *T je osjetljiva na početne uvjete na* $[0,1]$.

Dokaz. Neka je $x \in [0,1]$ proizvoljan. Prvo ćemo pokazati da ako je $v \in [0,1]$ proizvoljni dijadski racionalni broj (oblika $\frac{j}{2^m}$, u reduciranom obliku) te $w \in [0,1]$ proizvoljan iracionalan broj, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da

$$|T^n(v) - T^n(w)| > \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

Kako bismo to pokazali, primjetimo da ako je $v = \frac{j}{2^m}$, onda vrijedi $T^m(v) = 1$ i $T^{m+k}(v) = 0$ za sve $k > 0$. Kontrasno, ako je $w \in [0,1]$ iracionalan broj, onda, jer T udvostručuje svaki broj iz $(0, \frac{1}{2})$, postoji $n > m$ takav da $T^n(w) > \frac{1}{2}$. Budući da je $n > m$, slijedi da je $T^n(v) = 0$ pa vrijedi (3.5). Nadalje, neka je $\delta > 0$. Tada postoje dijadski racionalni broj $v \in [0,1]$ i iracionalan broj $w \in [0,1]$ takvi da $|x - v| < \delta$ i $|x - w| < \delta$. Dakle, (3.5) implicira da je ili $|T^n(x) - T^n(v)| < \delta$, ili $|T^n(x) - T^n(w)| < \delta$. Stoga, ako stavimo $\epsilon = \frac{1}{4}$, onda smo dokazali osjetljivost na početne uvjete funkcije T na $[0,1]$ jer je točka $x \in [0,1]$ bila proizvoljna. QED

U osnovi, razlog zašto T ima osjetljivost na početne uvjete na $[0,1]$ je u tome što za $x \neq \frac{1}{2}$ vrijedi $|T'(x)| = 2$ pa je udaljenost između dva broja iz $(0, \frac{1}{2})$ ili iz $(\frac{1}{2}, 1)$ udvostručena sa T.

Propozicija 3.6. *Skup periodičnih točaka šatorske funkcije T, Per(T), je gust u* $[0,1]$.

Dokaz. Neka je $U = (a,b) \subset [0,1]$ otvoren skup duljine $d = b - a$ te neka je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj takav da je $n > \frac{2}{d}$. Budući da je $\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} < \frac{d}{2}$ te je skup U duljine d, slijedi da dva uzastopna broja iz niza $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-2}{n}$ leže u U. Od ta dva uzastopna broja jedan treba biti oblika $\frac{2l}{2m+1}$ za $l, m \in \mathbb{Z}$. Po teoremu 3.4 takav broj je periodičan za T, pa je iz $Per(T)$. Dakle, $Per(T)$ je gust podskup od $[0,1]$. QED

Većina ovog poglavlja je bazirana na izvoru [4], dok je sljedeći teorem iz [1].

Propozicija 3.7. *Šatorska funkcija T je tranzitivna na* $[0,1]$.

Dokaz. Neka su $I = (a,b)$ te $J = (c,d)$ otvoreni intervali u $[0,1]$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ najveći broj takav da $\frac{1}{2^n} < b - a$. Tada $T^n(I) = [0,1]$. To implicira da je $(T^n)^{-1}(J)$ otvoren interval od I. Jer su periodične točke guste u $[0,1]$, slijedi da postoji periodična točka $x \in I$ takva da $T^n(x) \in J$. QED

Teorem 3.8. *Šatorska funkcija T je kaotična na* $[0,1]$

Dokaz. Tvrdnja teorema slijedi iz propozicija 3.5, 3.6 te 3.7. QED

Poglavlje 4

Familija kvadratnih funkcija

4.1 Osnovna svojstva, završno periodične i periodične točke

U ovom poglavlju ćemo se baviti kvadratnom familijom funkcija, također poznatom i pod nazivom logaritamska ili logistička familija, $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ za $\mu > 1$. Primjer je često primjenjivan u populacijskoj dinamici gdje x predstavlja veličinu populacije pa je $x \geq 0$, dok je parametar μ nerijetko zvan intrinzična stopa rasta. Ova familija također ilustrira mnogo važnih fenomena koji se javljaju u dinamičkim sustavima. U ovom radu nas najviše zanima kaotičnost koju ćemo dokazati na kraju poglavlja. Kako bismo se ograničili na nama interesantniju domenu funkcija iz kvadratne familije, bez većine točaka iz $\mathbb{R}$ koje se ponašaju "pitomo" pod iteracijama funkcije F_μ, iskažimo i dokažimo sljedeći rezultat koji tvrdi da sve točke koje ne leže u segmentu $[0, 1]$ teže prema $-\infty$.

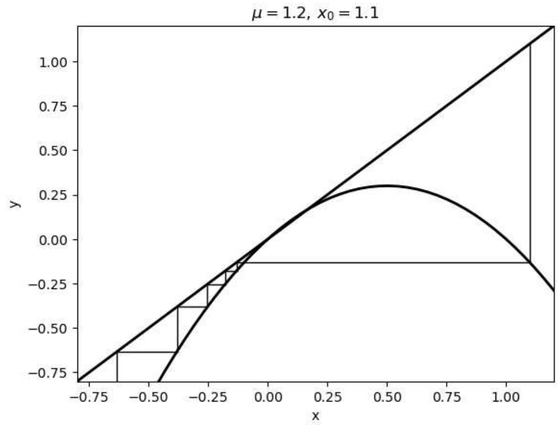
Propozicija 4.1. *Neka je $\mu > 1$. Ako $x \notin [0, 1]$, onda $F_\mu^j(x)$ ide u minus beskonačnost kako j ide u beskonačnost.*

Dokaz. Ako je $x < 0$, onda je $F_\mu(x) = \mu x(1 - x) < x$. Stoga je za $x_0 < 0$, $(F_\mu^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}_0}$ padajući niz točaka. Taj niz ne može konvergirati prema $p \in \mathbb{R}$ jer bismo u suprotnom imali $p = \lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x)$ i zato $\lim_{n\to\infty} F_\mu^{n+1}(x) = F_\mu(p)$ pa bi točka p bila fiksna točka za F_μ, a F_μ nema negativnu fiksnu točku. Dakle, $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$.

Ako je $x_0 > 1$, onda je $F_\mu(x_0) < 0$ pa opet $F_\mu^n(x_0) = F_\mu^{n-1}(F_\mu(x_0))$ ide u minus beskonačnost kako n ide u beskonačnost. QED

Grafička analiza lako daje prethodni rezultat kao što je prikazano na slici 4.1.

Posljedica propozicije je da se sva zanimljiva dinamika kvadratne familije odvija na jediničnom intervalu $I = [0, 1]$. Stoga ćemo promatrati funkcije na $I = [0, 1]$. Sljedeće nađimo fiksne i kritične točke familije kvadratnih funkcija.



Slika 4.1: Grafička analiza za $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ kada je $\mu > 1$ (na slici je $\mu = 1.2$ i $x_0 = 1.1$).

Propozicija 4.2. *Fiksne točke familije kvadratnih funkcija $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ su 0 i $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$. Fiksna točka 0 je ponor za $0 < \mu < 1$ i izvor za $\mu > 1$. Fiksna točka p_μ je ponor za $1 < \mu < 3$ te izvor za $0 < \mu < 1$ i $\mu > 3$. Jedina kritična točka je $\frac{1}{2}$ koja nije degenerirana.*

Dokaz. Fiksne točke zadovoljavaju $x = \mu x - \mu x^2$. Točke koje to zadovoljavaju su $x = 0$ i $x = p_\mu = \frac{\mu-q}{\mu}$ kao što propozicija tvrdi. Kako bismo odredili njihovu stabilnost, uočimo da je $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$. Stoga $\left|F'_\mu(0)\right| = |\mu| = \mu$ pa je 0 ponor za $0 < \mu < 1$ i izvor za $\mu > 1$. S druge strane, $\left|F'_\mu(p_\mu)\right| = |\mu - 2(\mu - 1)| = |2 - \mu|$. Stoga je p_μ ponor za $1 < \mu < 3$ te izvor za $0 < \mu < 1$ i $\mu > 3$. Kritične točke zadovoljavaju $F'_\mu(x) = \mu x(1 - 2x) = 0$ pa je jedina kritična točka $x = \frac{1}{2}$. Napokon, $F''_\mu(x) = -2\mu$ pa je $x = \frac{1}{2}$ nedegenerirana kritična točka. QED

Uočimo da je $F_\mu(0) = 0$ i $F_\mu(1) = 0$ pa je 1 završno fiksna točka. Radi simetričnosti grafa funkcije, ako je $\hat{p}_\mu = 1 - p_\mu = \frac{1}{\mu}$, onda je $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$, pa je $\hat{p}_\mu$ isto završno fiksna.

Definicija 4.3. *Kažemo da je funkcija $f\colon I \to I$, $I = [0, 1]$,* unimodalna *ako $f(0) = f(1) = 0$ te f ima jedinstvenu kritičnu točku $c \in (0, 1)$.*

Ponovimo, jedina kritična točka od $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ je $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ te vrijedi $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$, stoga je kvadratna funkcija unimodalna na jediničnom intervalu.

Pretpostavimo da $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ ima periodične točke perioda dva. Njih pronalazimo iz $p = F^2_\mu(p)$. Raspisujemo, $F^2_\mu(p) = F_\mu(\mu p(1 - p)) = \mu^2 p[1 - (\mu + 1)p + 2\mu p^2 - \mu p^3]$. Dvije netrivijalne periodične točke trebaju zadovoljiti kubnu jednadžbu:

$$\mu^3 p^3 - 2\mu^3 p^2 + \mu^2(\mu + 1)p + 1 - \mu^2 = 0 \tag{4.1}$$

Budući da je svaka fiksna točka (periodična točka osnovnog perioda jedan) i periodična točka perioda dva znamo da je $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ rješenje od kubne jednadžbe (4.1). Podijelimo jednadžbu (4.1) polinomom $(p - p_\mu) = (p - \frac{\mu-1}{\mu}) = \frac{p\mu-\mu+1}{\mu}$ i brojem $\mu > 0$. Tako dobijemo

$$\mu^2 p^2 - (\mu^2 + \mu)p + \mu + 1 = 0$$

Slijedi da su periodične točke

$$p_{1,2} = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu},$$

gdje je $\mu > 3$ nužan uvjet za realno rješenje. Točke perioda tri su dobivene iz $p = F_\mu^3(p)$. (Moguće je pokazati da točke perioda tri ne postoje osim ako $\mu > 1 + \sqrt{8}$, no račun je dosta glomazan pa ga nećemo ovdje navesti.) Općenito, za velike n je beznadan zadatak doći do točaka perioda n direktnim računom iz jednadžbe $(n + 1)$-og reda. Za $\mu = 4$ u kvadratnoj funkciji možemo doći do točaka svih perioda. Sada ćemo demonstrirati kako izvesti takav račun. Izrazimo prvo kvadratnu funkciju, $x \mapsto \mu x(1 - x)$ u obliku diferencijske jednadžbe $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$. Neka je $x_t = sin^2\rho_t$. Tada iz $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$, $sin^2\rho_t + cos^2\rho_t = 1$ te $sin(2\rho_t) = 2sin\rho_t cos\rho_t$ imamo $sin^2\rho_{t+1} = 4sin^2\rho_t cos^2\rho_t = sin^2(2\rho_t)$. Nadalje,

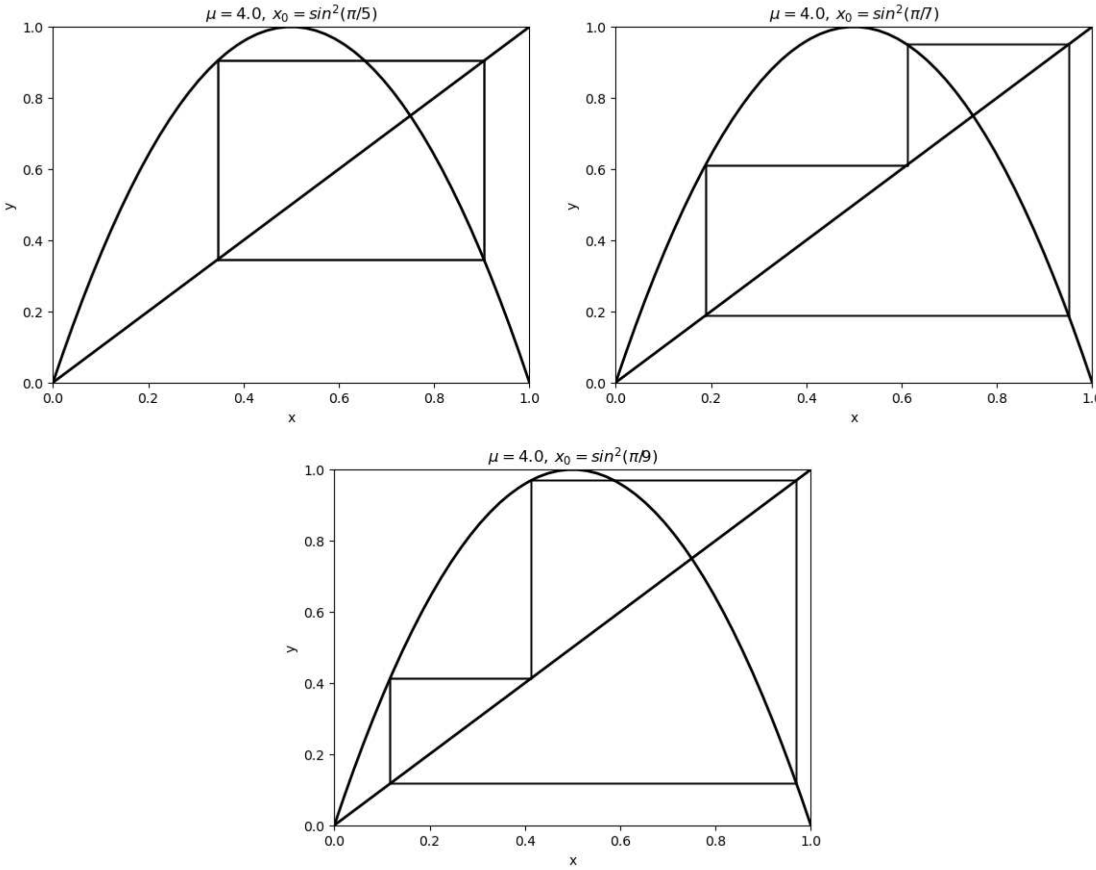
$$sin^2\rho_{t+2} = 4sin^2\rho_{t+1}(1 - sin^2\rho_{t+1}) = 4sin^2\rho_{t+1}(1 - sin^2(2\rho_t))$$

$$= 4sin^2(2\rho_t)cos^2(2\rho_t) = sin^2(2^2\rho_t)$$

Stoga, nakon n iteracija imamo $sin^2\rho_{t+n} = sin^2(2^n\rho_t)$ što implicira $\rho_{t+n} = \pm 2^n\rho_t + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Sada, ako imamo orbitu perioda n, onda $sin^2\rho_{t+n} = sin^2\rho_t$. Stoga $\rho_{t+n} = \pm\rho_t + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ $\iff \pm 2^n\rho_t + l\pi = \pm\rho_t + m\pi \iff (2^n \pm 1)\rho_t = (m - l)\pi$ pa $\rho_t = \frac{k\pi}{2^n \pm 1}$, gdje je $k = m - l$, $l, m \in \mathbb{Z}$. Posljedično, periodične točke su dane sa $p_i = sin^2\frac{k\pi}{2^n \pm 1}$.

Primjer 4.4. *Izračunajmo sve točke perioda jedan (fiksne točke), perioda dva i perioda tri funkcije* $F_4(x) = 4x(1 - x)$. *Iz prethodno pokazanog slijedi da su fiksne točke* $sin^2\frac{\pi}{2-1} = 0$ *i* $sin^2\frac{\pi}{2+1} = 0.75$. *Točke perioda dva su točke osnovnog perioda jedan (fiksne točke) te točke kojima je osnovni period dva. Uz prethodne dvije su to još* $sin^2\frac{\pi}{5} \approx 0.34549$ *i* $sin^2\frac{2\pi}{5} \approx 0.904508$. *U točke perioda tri ubrajamo točke osnovnog perioda jedan, dva i tri. U ovom primjeru postoji šest točaka osnovnog perioda tri. Točke* $sin^2\frac{\pi}{7} \approx 0.188255$, $sin^2\frac{2\pi}{7} \approx 0.611260$ *i* $sin^2\frac{4\pi}{7} \approx 0.950484$ *su periodične točke jednog 3-ciklusa, dok su* $sin^2\frac{\pi}{9} \approx 0.116977$, $sin^2\frac{2\pi}{9} \approx 0.4131759$ *i* $sin^2\frac{4\pi}{9} \approx 0.969846$ *periodične točke osnovnog perioda tri druge orbite.*

Netrivijalna fiksna točka $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ je iz intervala $(0, 1)$ za $\mu > 1$. Koncentrirat ćemo se na taj slučaj $(\mu > 1)$.

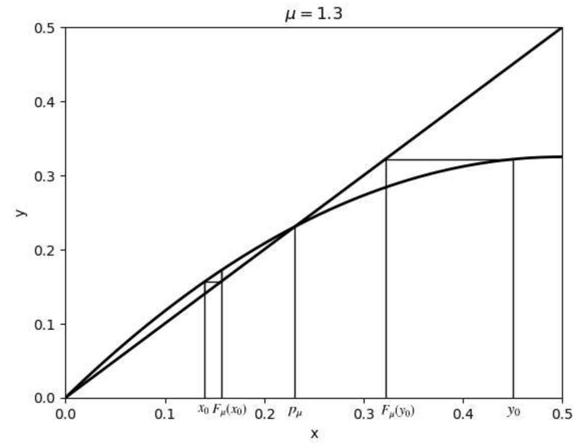


Slika 4.2: 2-ciklus i dva 3-ciklusa funkcije $F_4(x) = 4x(1-x)$.

Propozicija 4.5. *Neka je* $1 < \mu < 3$. *Ako je* $x \in (0,1)$, *onda* $F_\mu^j(x)$ *konvergira prema* p_μ *kako* j *ide u beskonačnost. Stoga* $W^s(p_\mu) = (0,1)$.

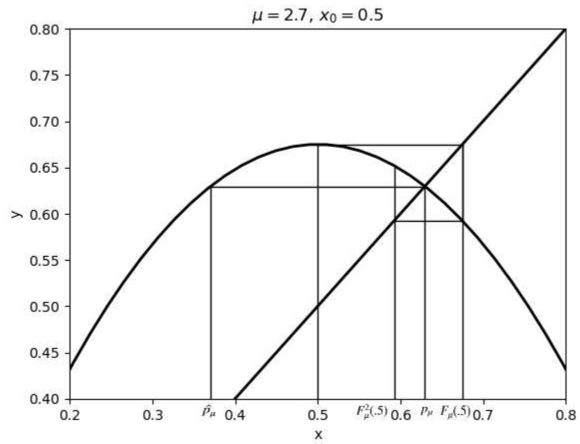
Dokaz. (a) Prvo promotrimo slučaj $1 < \mu \leq 2$.
Maksimum se postiže u točki $x = \frac{1}{2}$. Za taj raspon parametra μ je $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} \leq \frac{1}{2}$. Vrijedi $p_\mu \leq \frac{1}{2}$, to se lijepo vidi iz grafa na slici 4.3. Stoga je funkcija monotono rastuća na $(0, p_\mu)$ te graf leži iznad dijagonale. Slijedi da je za $x_0 \in (0, p_\mu)$, $(F_\mu^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}_0}$ monotono rastući niz koji mora konvergirati prema fiksnoj točki p_μ. Slično, na intervalu $(p_\mu, \frac{1}{2}]$ je funkcija monotono rastuća i graf leži ispod dijagonale. Pogledajmo sliku 4.3. Stoga za $y_0 \in (p_\mu, \frac{1}{2}]$, $F_\mu^n(y_0)$ monotono pada prema p_μ. Napokon, za $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $F_\mu(x_0) \in (0, \frac{1}{2})$ pa $F_\mu^n(x_0)$ konvergira prema p_μ. Ovime smo dokazali tvrdnju za $\mu \in (1, 2]$.

(b) Sada pretpostavimo da je $2 < \mu < 3$. Primjetimo da je $p_\mu > \frac{1}{2}$.



Slika 4.3: Prve iteracije od x_0 i y_0 za $1 < \mu < 2$, $0 < x_0 < p_\mu$ i $p_\mu < y_0 \leq 0.5$.

(i) Promotrimo segment $[\frac{1}{2}, p_\mu]$.
Jer je F_μ^2 monotona na $[\frac{1}{2}, p_\mu]$, kako bismo našli sliku funkcije F_μ^2 na segmentu $[\frac{1}{2}, p_\mu]$, dovoljno je odrediti iteracije krajnjih točaka.
$F_\mu^2([\frac{1}{2}, p_\mu]) = F_\mu([p_\mu, \frac{1}{4}]) = [\mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}), p_\mu]$.



Slika 4.4: Iteracije od $x_0 = 0.5$ za $2 < \mu < 3$.

Želimo pokazati da je ta slika sadržana u $[\frac{1}{2}, p_\mu]$, $\mu(\frac{\mu}{4})(1-\frac{\mu}{4}) > \frac{1}{2}$, ili $0 > \mu^3 - 4\mu^2 + 8 = (\mu-2)(\mu^2-2\mu-4)$. Korijeni od $\mu^2-2\mu-4$ su $1 \pm \sqrt{5}$ pa je taj faktor negativan za $\mu < 3$. Prvi faktor $(\mu - 2)$ je pozitivan, stoga je njihov produkt negativan. Dakle, pokazali smo da vrijedi $F_\mu^2(\frac{1}{2}) = \mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}) > \frac{1}{2}$ i $F_\mu^2([\frac{1}{2}, p_\mu]) \subset [\frac{1}{2}, p_\mu]$. Pogledajmo sliku 4.4. Druga iteracija od F_μ je monotona na $[\frac{1}{2}, p_\mu]$ pa graf od F_μ^2 siječe dijagonalu jednom na intervalu $[\frac{1}{2}, p_\mu]$, i to je u p_μ. Jer je graf od F_μ^2 iznad dijagonale, no ispod $\frac{1}{2}$ na $[\frac{1}{2}, p_\mu]$, sve točke iz tog intervala konvergiraju prema p_μ.

(ii) Neka je sada $\hat{p}_\mu < \frac{1}{2}$.
Imamo $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$, $F_\mu([\hat{p}_\mu, \frac{1}{2}]) = F_\mu([\frac{1}{2}, p_\mu])$ i $F_\mu^2([\hat{p}_\mu, \frac{1}{2}]) \subset [\frac{1}{2}, p_\mu]$. Stoga sve točke iz $[\hat{p}_\mu, \frac{1}{2}]$ također konvergiraju prema p_μ prema rezultatima prethodnog slučaja.

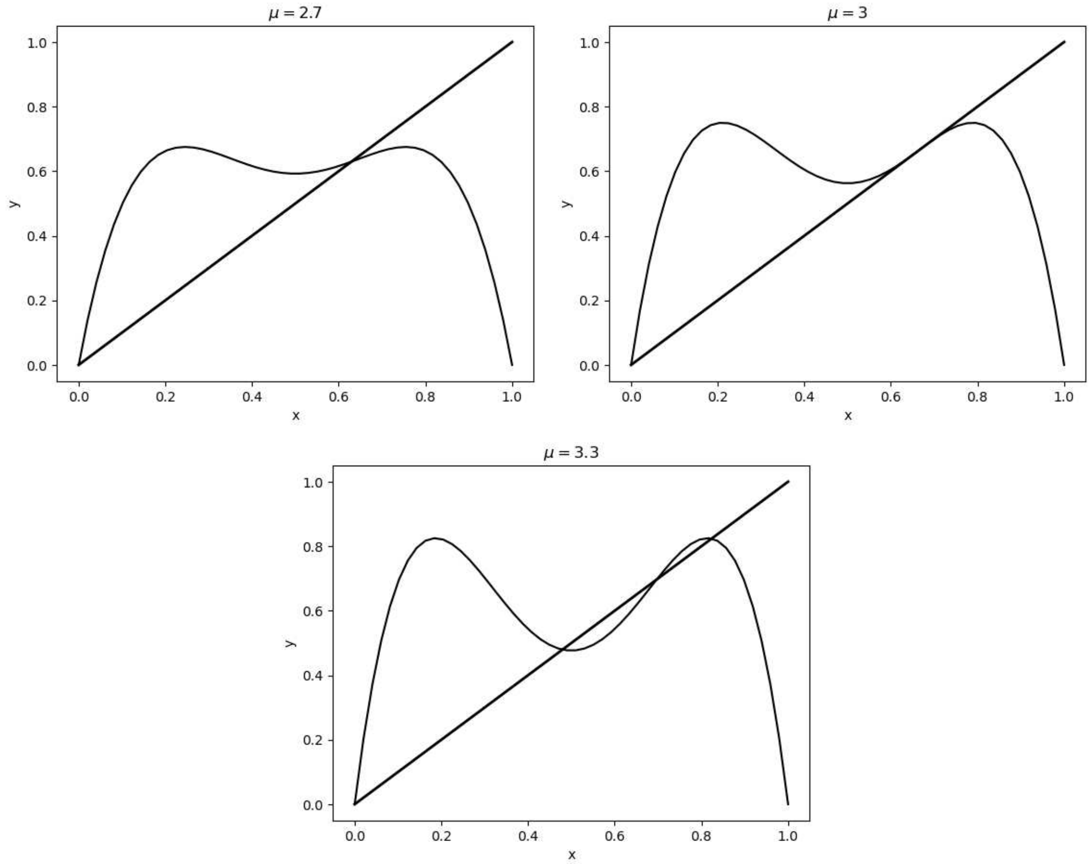
(iii) Sada promotrimo $x_0 \in (0, p_\mu)$.
Funkcija F_μ je monotono rastuća na intervalu $(0, p_\mu)$ te njen graf leži iznad dijagonale. Stoga je $F_\mu^n(x_0)$ monotono rastući niz dokle god iteracije ostaju u tom intervalu. Jer $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$, prvi put kada iteracija $F_\mu^n(x_0)$ napusti interval $(0, \hat{p}_\mu)$ mora završiti u $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$, tj. $F_\mu^k(x_0) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ za neki $k > 0$. Tada, ako je $x_0 \in (p_\mu, 1)$, onda je $F_\mu(x_0) \in (0, p_\mu)$ pa iteracije konvergiraju prema p_μ.

QED

Dakle, za $1 < \mu < 3$, F_μ ima samo dvije fiksne točke, 0 i $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, te su sve ostale točke iz intervala $I = [0, 1]$ asimptotske prema p_μ. Stoga je dinamika od F_μ jasna za μ u tom rasponu. Kada je $\mu = 3$, $F'_\mu(p_\mu) = F'_\mu(\frac{2}{3}) = -1$. Nacrtajmo grafove za F_μ^2 za μ blizu 3, slika 4.5. Primjetimo da se pojave dvije nove fiksne točke za F_μ^2 kako se μ udaljava udesno od 3, tj. raste od 3. To su ujedno i nove periodične točke funkcije F_μ osnovnog perioda dva. Došlo je do bifurikacije. Također, imamo promjenu u $Per_2(F_\mu)$.

Dakle, kako μ prolazi kroz 3, dinamika od F_μ postaje nešto kompliciranija, što počinje tako što je rođena nova periodična točka perioda dva. Kako μ nastavlja rasti tako dinamika od F_μ postaje sve kompliciranija.

Sada promotrimo $F_\mu \colon I \to I$, $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ kada je $\mu > 4$. Primjetimo da, zato što je $\mu > 4$, maksimalna vrijednost koju poprima F_μ u $\frac{1}{2}$, $\frac{\mu}{4}$, je veća od 1 (slika 4.6 i 4.7 kada je $\mu > 4$). Stoga neke točke napuštaju I nakon prve iteracije od F_μ. Označimo sa A_0 skup takvih točaka. A_0 je dakle zatvoren interval centriran oko $\frac{1}{2}$ sa svojstvom da, ako je $x \in A_0$, onda je $F_\mu(x) > 1$, pa je $F_\mu^2(x) < 0$ te $F_\mu^n(x) \to -\infty$. Točke iz $I \setminus A_0$ ostaju u I nakon prve iteracije od F_μ. Neka je $A_1 = \left\{x \in I | F_\mu(x) \in A_0\right\}$. Ako je $x \in A_1$, onda je $F_\mu^2(x) > 1$, $F_\mu^3(x) < 0$, pa kao prije $F_\mu^n \to -\infty$. Induktivno, neka je $A_n = \left\{x \in I | F_\mu^n(x) \in A_0\right\}$, tj. $A_n = \left\{x \in I | F_\mu^i(x) \in I, i \leq n, F_\mu^{n+1}(x) \notin I\right\}$ takav da se A_n sastoji od svih točaka koje su izašle iz I u $(n-1)$-oj iteraciji, Kao i prije, iz $x \in A_n$ slijedi da orbita od x teži u $-\infty$. Zato znamo sudbinu svake točke iz A_n. Ostaje nam vidjeti što je s točkama koje nikada ne



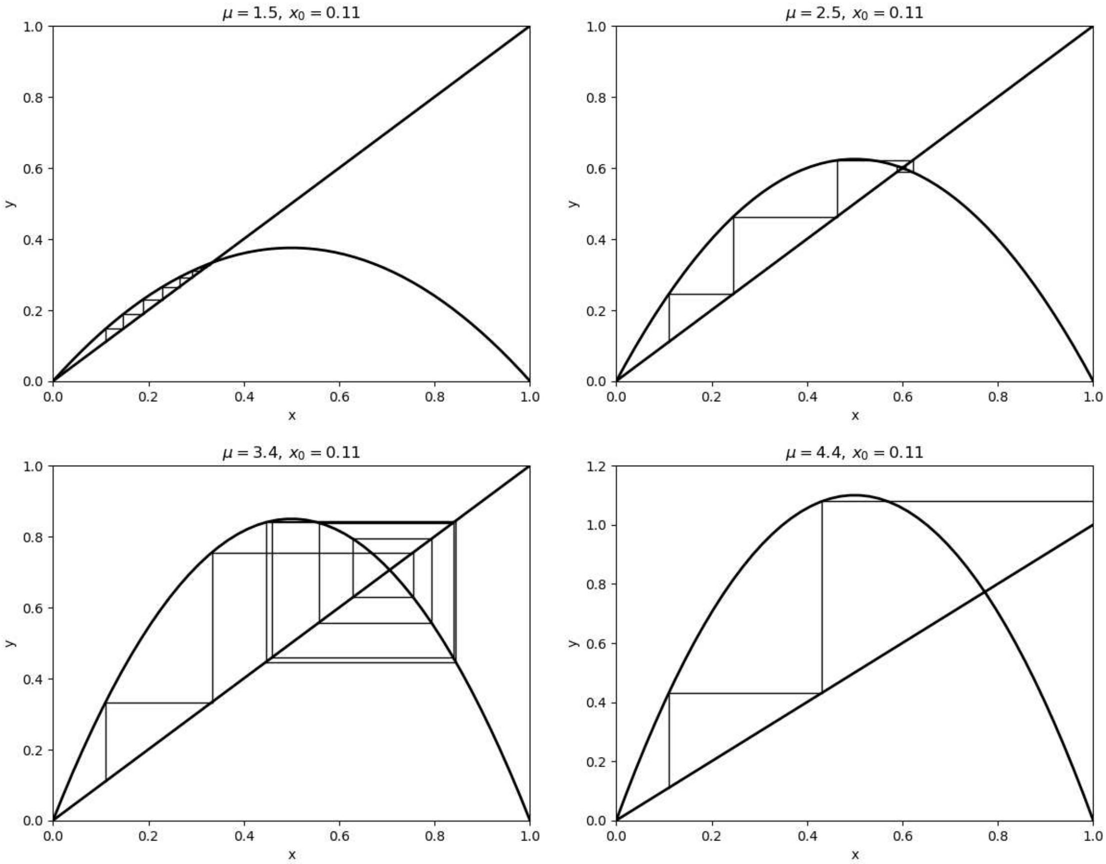
Slika 4.5: Grafovi funkcija F_μ^2 gdje je $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ za $\mu < 3$, $\mu = 3$ i $\mu > 3$, respektivno.

napuste I, tj. točkama iz

$$\Lambda := I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

Opišimo rekurzivno konstrukciju od Λ. Jer je A_0 otvoren interval centriran u $\frac{1}{2}$, $I \setminus A_0$ se sastoji od dva segmenta, I_0 na lijevoj strani te I_1 na desnoj strani (slika 4.8).

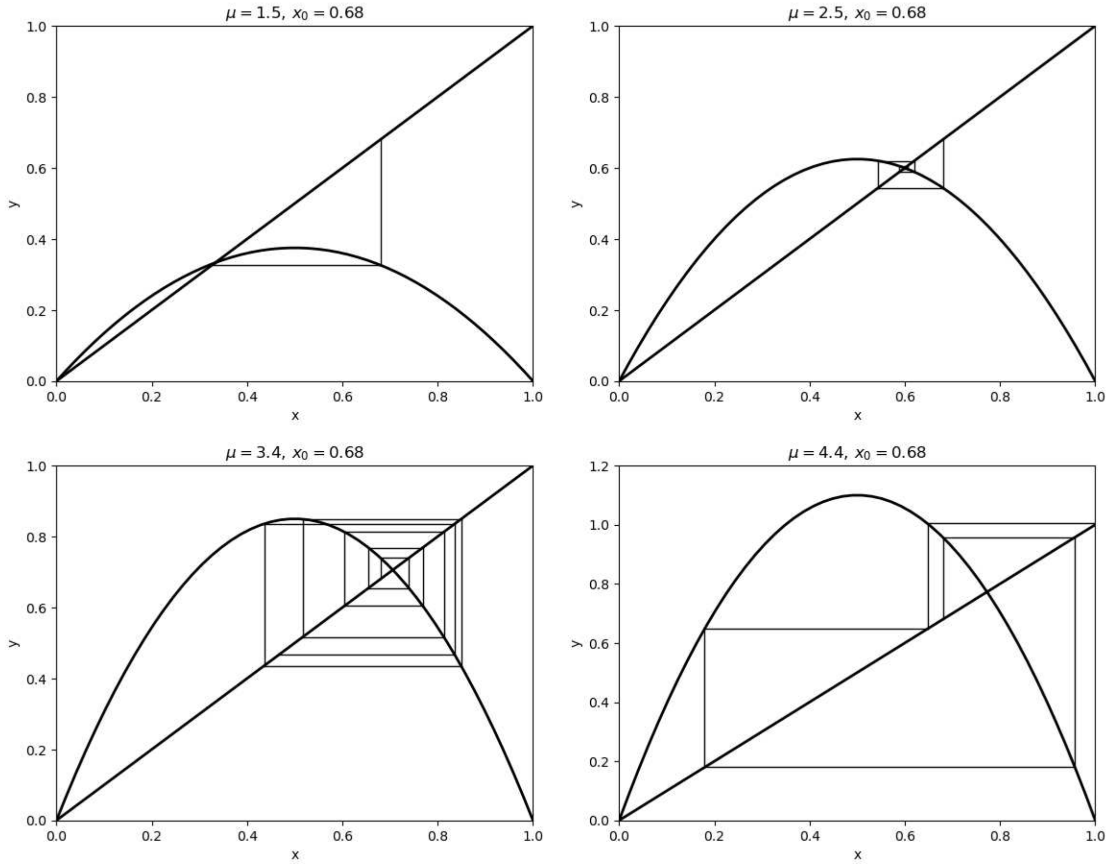
Primjetimo da F_μ preslikava i I_0 i I_1 monotono na I, tj. F_μ je rastuća na I_0 te padajuća na I_1. Budući da je $F_\mu(I_0) = F_\mu(I_1) = I$, postoje dva otvorena intervala, jedan u I_0 te jedan u I_1 koje F_μ preslikava u A_0. Ta dva otvorena intervala su točno A_1. Sada promotrimo $I \setminus (A_0 \cup A_1)$. Taj skup čine četiri segmenta te F_μ preslikava svaki od njih monotono na I_0 ili I_1. Posljedično, F_μ^2 preslikava svaki od njih na I. Svaki od ta četiri segmenta u



Slika 4.6: Grafička analiza za $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ kada je $1 < \mu < 2$, $2 < \mu < 3$, $3 < \mu < 4$ te $\mu > 4$, respektivno. U svim slučajevima je početni uvjet $x_0 = 0.11$.

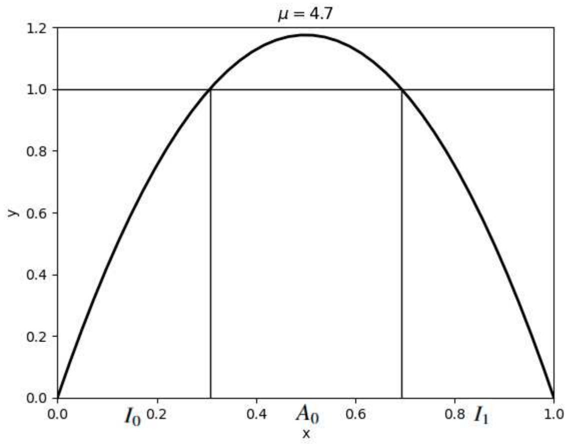
$I \setminus (A_0 \cup A_1)$ sadrži otvoren podinterval koji F_μ^2 preslikava u A_0 pa točke u tim intervalima izlaze iz I s trećom iteracijom od F_μ. Skup tih točaka označimo sa A_2. Primjetimo kako je F_μ^2 izmjenjujuće rastuća i padajuća na ta četiri intervala. Graf od F_μ^2 ima dva "jednaka brijega", točnije postiže dvije maksimalne vrijednosti koje su jednake te između kojih je minimalna vrijednost (od jedne maksimalne vrijednosti graf pada prema minimalnoj te zatim raste prema drugoj maksimalnoj vrijednosti; prije prve maksimalne vrijednosti graf raste od 0 prema njoj te nakon druge maksimalne vrijednosti opet pada u 0), i maksimalne i minimalna vrijednost izlaze iz intervala $[0, 1]$ (za $\mu > 4$ su maksimalne vrijednosti strogo veće od 1, dok je minimalna vrijednost strogo manja od 0) kao što je prikazano na grafu na slici 4.9.

Induktivno, A_n se sastoji od 2^n disjunktnih intervala. Zato se $I \setminus (A_0 \cup ... \cup A_n)$ sastoji

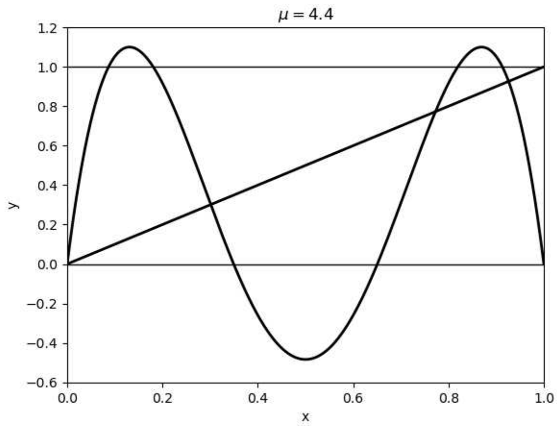


Slika 4.7: Grafička analiza za $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ kada je $1 < \mu < 2$, $2 < \mu < 3$, $3 < \mu < 4$ te $\mu > 4$, respektivno. U svim slučajevima je početni uvjet $x_0 = 0.68$.

od 2^n zatvorenih intervala, $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Također, F_μ^{n+1} preslikava svaki od zatvorenih intervala monotono na I. Zapravo, graf od F_μ^{n+1} je naizmjenično rastući i padajući na tim intervalima. Iz tog razloga graf od F_μ^{n+1} ima točno 2^n maksimalnih vrijednosti na I te $2^n - 1$ lokalno minimalnih vrijednosti između njih (za razliku od maksimalnih vrijednosti, sve minimalne vrijednosti nisu nužno međusobno jednake, stoga se ne radi o globalno minimalnim vrijesnostima, tj. na intervalu $[0, 1]$, nego o minimalnim vrijednostima na podintervalima, npr. $[0, \frac{1}{2^n}]$, $[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}]$, ..., $[\frac{2^{n-1}}{2^n}]$, pogledajmo slike 4.10 i 4.11). Slijedi da graf od F_μ^n siječe pravac $y = x$ barem 2^n puta. To implicira da F_μ^n ima barem 2^n fiksnih točaka ili, ekvivalentno, $Per_n(F_\mu)$ se sastoji od 2^n točaka iz I. Struktura od Λ je mnogo kompliciranija kada je $\mu > 4$, nego u ranijem slučaju $\mu < 3$. Konstrukcija od Λ podsjeća na konstrukciju Cantorovog trijadskog skupa: Λ dobivamo tako da uzastopno izbacujemo



Slika 4.8:



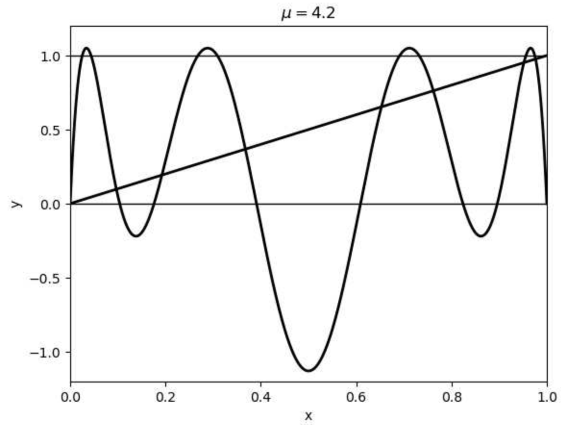
Slika 4.9: Graf funkcije $F^2_{4.4}$

intervale iz "sredine" skupa segmenata.

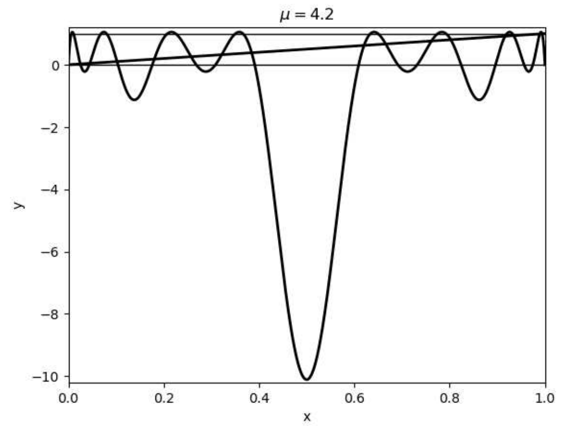
Definicija 4.6. *Kažemo da je skup* Λ Cantorov skup *ako je potpuno nepovezan, savršen i kompaktan. Skup je* potpuno nepovezan *ako ne sadrži niti jedan interval. Skup je* savršen *ako je svaka njegova točka gomilište točaka skupa.*

Napomena 4.7. *Podsjetimo se, skup je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.*

Kako bismo se jednostavnije uvjerili da je Λ Cantorov skup, uvodimo dodatnu pretpos-



Slika 4.10: Graf funkcije $F_{4.2}^3$



Slika 4.11: Graf funkcije $F_{4.2}^4$

tavku na μ. Želimo da μ bude dovoljno velik da vrijedi $\left|F'_\mu(x)\right| > 1$ za sve $x \in I_0 \cup I_1$. U tome će nam pomoći sljedeća lema.

Lema 4.8. $\left|F'_\mu(x)\right| > 1$ *za sve* $x \in I_0 \cup I_1$ *ako i samo ako je* $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Dokaz. Derivacija od F_μ je dana sa $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$. Također, $F''_\mu(x) = -2\mu < 0$ pa se najmanja vrijednost od $\left|F'_\mu(x)\right|$ na I_j postiže tamo gdje je $F_\mu(x) = 1$. Rješavanjem $1 = F_\mu(x) = \mu x - \mu x^2$ dobivamo $x_\pm = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$. Za te točke je $\left|F'_\mu(x)\right| = \left|\mu - 2\mu \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}\right| =$

$\left|\mp\sqrt{\mu^2-4\mu}\right| = \sqrt{\mu^2-4\mu}$. Zato treba vrijediti $\left|F'_\mu(x_\pm)\right| = \sqrt{\mu^2-4\mu} > 1$, tj. $\mu^2-4\mu-1 > 0$. $\sqrt{\mu^2-4\mu}-1 = 0$ za $\mu = 2 \pm \sqrt{5}$ te možemo lako provjeriti da je $\sqrt{\mu^2-4\mu}-1 > 0$ za $\mu > 2+\sqrt{5}$ QED

Zato za te vrijednosti parametra μ postoji $\lambda > 1$ takav da $\left|F'_\mu(x)\right| > \lambda$ za sve $x \in \Lambda$. Po lančanom pravilu slijedi $\left|(F^n_\mu)'(x)\right| > \lambda^n$, $\forall x \in \Lambda$.

Teorem 4.9. *Ako je $\mu > 2+\sqrt{5}$, onda je $\Lambda := I \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)$ Cantorov skup.*

Dokaz. Prvo dokažimo da Λ ne sadrži niti jedan interval. Pretpostavimo suprotno, tj. da Λ sadrži interval. Tada možemo odabrati $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$ takvi da $[x, y] \subset \Lambda$. No, onda $\left|(F^n_\mu)'(\alpha)\right| > \lambda^n$ za sve $\alpha \in [x, y]$. Odaberimo n takav da $\lambda^n|y-x| > 1$. Po teoremu srednje vrijednosti slijedi $\left|F^n_\mu(y) - F^n_\mu(x)\right| \geq \lambda^n|y-x| > 1$ što implicira da barem jedan od $F^n_\mu(y)$ i $F^n_\mu(x)$ leži izvan I. Time smo dobili kontradikciju. Dakle, Λ je potpuno nepovezan. Λ je zatvoren kao presjek ugnježđenih zatvorenih skupova. Λ je ograničen jer $\Lambda \subset [0, 1]$. Jer je zatvoren i ograničen, Λ je kompaktan. Sljedeće dokazujemo da je Λ savršen. Prvo primjetimo da je svaka krajnja točka od A_k u Λ. Uistinu, takve točke su s vremenom preslikane u fiksnu točku 0 (orbite tih točaka se u nekom trenutku zadrže u fiksnoj točki 0) pa ostanu u I pod iteracijama. Ako je $p \in \Lambda$ izolirana, svaka točka u blizini treba napustiti I pod iteracijama od F_μ. Takve točke trebaju pripadati nekom A_k. Imamo dva slučaja: ili postoji niz krajnjih točaka od A_k koji konvergira prema p ili sve točke u izbačenoj okolini od p bivaju preslikane van iz I pod nekom iteracijom od F_μ. U prvom slučaju smo gotovi jer se krajnje točke od A_k preslikaju u 0 te su stoga u Λ. U drugom slučaju možemo pretpostaviti da F^n_μ preslika p u 0 te sve druge točke iz okoline od p u negativnu realnu os. No, onda F^n_μ ima maksimum u p pa $\left|(F^n_\mu)'(p)\right| = 0$. Po lančanom pravilu treba vrijediti $F'_\mu(F^i_\mu(p)) = 0$ za neki $i < n$. Stoga $F^i_\mu(p) = \frac{1}{2}$. No, onda $F^{i+1}_\mu(p) \notin I$ pa $F^n_\mu \to -\infty$ što je u kontradikciji s $F^n_\mu(p) = 0$. QED

Napomena 4.10. *Teorem vrijedi i za $\mu > 4$, no dokaz je delikatniji.*

Sada smo dobili sliku kako se orbite od F_μ ponašaju za $\mu > 4$. Ili točka pod iteracijama od F_μ teži u $-\infty$ ili njezina cijela orbita leži u Λ. Stoga u potpunosti razumijemo orbitu točke x_0 dokle god x_0 nije iz Λ. Kasnije ćemo kompletirati dinamiku funkcije F_μ tako što ćemo analizirati njenu dinamiku na Λ. Pokazali smo da vrijedi $\left|F'_\mu(x)\right| > 1$ na $I_0 \cup I_1$ za $\mu > 2+\sqrt{5}$. To implicira $\left|F'_\mu(x)\right| > 1$ na Λ. Taj uvjet je sličan hiperboličnosti, samo što sada zahtjevamo $\left|F'_\mu(x)\right| \neq 1$ na cijelom skupu, a ne samo u periodičnoj točki. To nas motivira na definiciju hiperboličnog skupa:

Definicija 4.11. *Skup $\Gamma \subset \mathbb{R}$ je* odbojan (privlačan) hiperboličan skup *za f ako je zatvoren, ograničen, invarijantan pod f te postoji $N > 0$ takav da $|(f^n)'(x)| > 1$ ($|(f^n)'(x)| < 1$) za sve $n \geq N$ i sve $x \in \Gamma$.*

Cantorov skup Λ za kvadratnu funkciju kada je $\mu > 2 + \sqrt{5}$ je odbojan hiperboličan skup sa $N = 1$.

4.2 Simbolička dinamika

Cilj nam je dati model za bogatu dinamičku strukturu kvadratne funkcije na Cantorovom skupu Λ. Treba nam prostor na kojem će djelovati naša modelirana funkcija. Točke tog prostora će biti beskonačni nizovi nula i jedinica. Ne brine nas konvergencija tih nizova, nego želimo moći zamisliti takav beskonačan niz kao reprezentaciju jedne točke u prostoru.

Definicija 4.12. *Skup* $\Sigma_2 = \{s = s_0 s_1 s_2 ... : s_n \in 0, 1, n \in \mathbb{N}_0\}$ *zovemo* prostor nizova dva simbola 0 *i* 1.

Općenito, možemo promatrati prostor Σ_n koji se sastoji od beskonačnih nizova cijelih brojeva između 0 i $n-1$. Elementi od Σ_2 su beskonačni stringovi nula i jedinica, npr. 000..., 0101.... Za dva niza $s = s_0 s_1 s_2 ...$ i $t = t_0 t_1 t_2 ...$ definiramo udaljenost između njih sa

$$d[s, t] := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Budući da je $|s_i - t_i|$ jednako 0 ili 1, red je dominiran s geometrijskim redom $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ te stoga konvergira.

Propozicija 4.13. *d je metrika na* Σ_2*.*

Dokaz. $d[s, t] \geq 0$ za sve $t, s \in \Sigma_2$ jer za sve $i \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $|s_i - t_i| \in 0, 1$. $d[s, t] = 0$ ako i samo ako vrijedi $s_i = t_i$ za sve $i \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako $s = t$. Jer $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$, slijedi da je $d[s, t] = d[t, s]$. Ako su $r, s, t \in \Sigma_2$, onda je $|r_i - s_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i|$. QED

S metrikom d možemo odrediti koji podskupovi od Σ_2 su otvoreni te koji su nizovi blizu (daleko) jedan drugome.

Propozicija 4.14. *Neka su* $s, t \in \Sigma_2$ *i pretpostavimo* $s_i = t_i$ *za* $i = 0, 1, ..., n$*. Tada* $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$*. Obrnuto, ako je* $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$*, onda* $s_i = t_i$ *za* $i \leq n$*.*

Dokaz. Ako je $s_i = t_i$ za $i \leq n$, onda je

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

S druge strane, ako je $s_j \neq t_j$ za neki $j \leq n$, onda

$$d[s,t] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

Posljedično, ako $d[s,t] < \frac{1}{2}$, onda $s_i = t_i$ za $i \leq n$. QED

Važnost ovog rezultata je u tome što nam omogućava brzu odluku jesu li dva niza blizu jedan drugome. Intuitivno, ovaj rezultat govori da su dva niza u Σ_2 blizu ako se njihovih prvih nekoliko simbola podudara. Sljedeće definiramo najvažniji sastojak simboličke dinamike - funkciju pomak na Σ_2.

Definicija 4.15. *Definiramo funkciju* $\sigma\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *sa* $\sigma(s_0 s_1 s_2 ... s_n ...) = s_1 s_2 ... s_n ...$ *te je zovemo* pomak.

Funkcija pomak jednostavno "zaboravi" prvi simbol u nizu te pomakne sve druge simbole za jedno mjesto ulijevo.

Propozicija 4.16. *σ je neprekidna funkcija.*

Dokaz. Neka su $\epsilon > 0$ i $s = s_0 s_1 s_2 ...$ proizvoljni. Odaberimo n takav da $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Neka je $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. Ako $t = t_0 t_1 t_2 ...$ zadovoljava $d[s,t] < \delta$, onda po propoziciji 4.16 imamo $s_i = t_i$ za $i \leq n + 1$. Stoga se $\sigma(s)$ i $\sigma(t)$ podudaraju na i-toj koordinati za $i \leq n$. Slijedi $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. QED

Još ćemo pokazati da možemo u potpunosti razumjeti dinamiku pomaka σ. Na primjer, periodične točke odgovaraju periodičnim nizovima oblika $s = s_0 ... s_{n-1} s_0 ... s_{n-1} s_0 ... s_{n-1} ...$. Stoga postoji 2^n periodičnih točaka perioda n za σ, svaka generirana jednim od 2^n konačnih nizova nula i jedinica duljine n. Završno periodične točke su jednakobrojne te također lako prepoznatljive. Svaki niz oblika $s_0 ... s_{m-1} s_m ... s_{m+n-1} s_m ... s_{m+n-1} s_m ... s_{m+n-1} ...$ je reprezentacija završno periodične točke za σ.

Propozicija 4.17. *Skup svih periodičnih točaka od σ, $Per(\sigma)$, je gust podskup od* Σ_2

Dokaz. Po definiciji gustog podskupa trebamo pokazati da je $Cl(Per(\sigma)) = \Sigma_2$. Kako bismo to dokazali, neka je $s = s_0 s_1 s_2 ... \in \Sigma_2$ proizvoljan niz te neka je $\tau_n = s_0 ... s_n s_0 ... s_n ...$, tj. τ_n je ponavljajući niz koji se podudara sa s do n-tog simbola. Po propoziciji 4.14 je $d[\tau_n, s] \leq \frac{1}{2^n}$ pa $\tau_n \to s$. QED

Ne samo da možemo zapisati sve periodične i završno periodične točke za σ, nego možemo eksplicitno zapisati točku iz Σ_2 čija je orbita gusta u Σ_2. s^* je takva točka:

$$s^* = (01|00011011|000001...|...)$$

Niz s^* je konstruiran uzastopnim navođenjem svih mogućih blokova nula i jedinica duljine jedan, dva, tri, itd., također, zagrade i okomite crte u nizu su samo radi preglednosti. Jasno, primjenom neke iteracije od σ na s^* dobivamo niz koji se podudara s bilo kojim nizom u proizvoljno mnogo inicijalnih simbola, tj. za dani $t = t_0t_1t_2... \in \Sigma_2$, možemo naći k takav da niz $\sigma^k(s^*)$ počinje sa $t_0...t_ns_{n+1}s_{n+2}...$ pa $d(\sigma^k(s^*), t) \leq \frac{1}{2^n}$. Stoga orbita od s^* dolazi proizvoljno blizu svakoj točki iz Σ_2. Time smo pokazali da je orbita od s^* pod σ gusta u Σ_2 (pa je σ topološki tranzitivna). Primjetimo da možemo konstruirati još mnoštvo drugih točaka s gustom orbitom u Σ_2 tako što ćemo samo preurediti blokove u nizu s^*. Zato smo ranije naveli da je dinamika od σ u potpunosti razumljiva. Funkcija pomak je osjetljiva na početne uvjete. Uistinu, možemo odabrati 2 za konstantu osjetljivosti, što je najveća moguća udaljenost između dvije točke u Σ_2. Razlog tom odabiru je sljedeći: neka je $s = s_0s_1s_2... \in \Sigma_2$ te neka je $\hat{s}_j$ oznaka za "ne s_j" (ako $s_j = 0$, onda $\hat{s}_j = 1$ ili ako $s_j = 1$, onda $\hat{s}_j = 0$), tada točka $s' = s_0s_1s_2...s_n\hat{s_{n+1}}\hat{s_{n+2}}...$ zadovoljava: $d[s, s'] = \frac{1}{2^n}$, ali $d[\sigma^n(s), \sigma^n(s')] = 2$. Posljedično smo pokazali da je funkcija σ kaotična na Σ_2.

4.3 Topološka konjugacija

Cilj ovog potpoglavlja nam je povezati funkciju pomak, σ, i kvadratnu funkciju F_μ za dovoljno velik μ. Također želimo povezati i kvadratnu funkciju F_4 sa šatorskom funkcijom. Sve točke iz $\mathbb{R}$ teže u $-\infty$ pod iteracijama od F_μ, izuzev točaka iz Cantorovog skupa Λ. Zato ćemo se sada baviti restrikcijom od F_μ na Λ. Sjetimo se, $\Lambda \subset I_0 \cup I_1$. Ako je $x \in \Lambda$, onda se sve točke iz orbite od x nalaze u Λ, stoga i u jednom od intervala I_0 ili I_1. Zato možemo ugrubo dobiti ideju o ponašanju te orbite iz toga u koji od ta dva intervala, I_0 ili I_1, različite iteracije pod funkcijom F_μ od x upadaju.

Definicija 4.18. *Neka su $f: X \to X$ i $g: Y \to Y$ dvije funkcije. Kažemo da su f i g* topološki konjugirane *ako postoji homeomorfizam $h: X \to Y$ takav da je $h \circ f = g \circ h$. Taj homeomorfizam zovemo* topološka konjugacija.

Preslikavanja koja su topološki konjugirana su potpuno ekvivalentna u smislu njihovih dinamika. Na primjer, ako su f i g topološki konjugirane preko h i ako je p fiksna točka za f, onda je $h(p)$ fiksna točka za g, jer je $h(p) = h(f(p)) = g(h(p))$. Topološke konjugacije su nam za ovaj rad posebno važne jer preslikavaju jedan kaotičan sustav u drugi kaotičan sustav. Time se bavi sljedeća propozicija čiji iskaz i dokaz možemo naći u [5].

Propozicija 4.19. *Neka su $f: I \to I$ i $g: J \to J$ topološki konjugirane preko h, gdje su $I, J \subset \mathbb{R}$ segmenti. Ako je f kaotična na I, onda je g kaotična na J.*

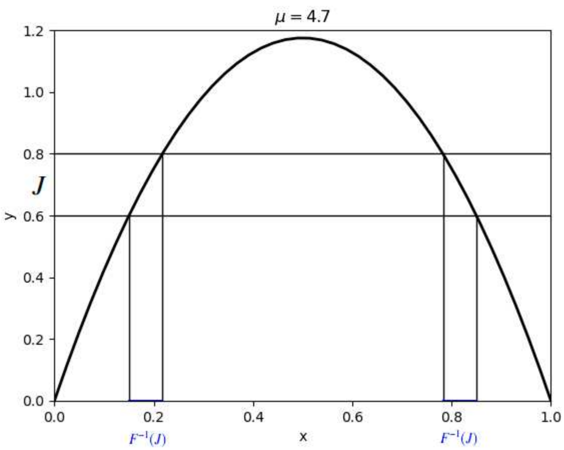
Dokaz. Neka je U otvoren podinterval od J. Promotrimo $h^{-1}(U) \subset I$. Budući da su periodične točke za f guste u I, postoji periodična točka $x \in h^{-1}(U)$ za f. Pretpostavimo da je x perioda n. Tada $g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$ po jednadžbi konjugacije. Dakle, $h(x)$ je periodička točka za g perioda n koja se nalazi u U. Time smo pokazali da h preslikava periodičnu orbitu perioda n u periodičnu orbitu perioda n i da su periodičke točke za g guste u J. Neka su sada U i V otvoreni podintervali od J, tada su $h^{-1}(U)$ i $h^{-1}(V)$ otvoreni intervali u I. Po topološkoj tranzitivnosti od f, postoji $x_1 \in h^{-1}(U)$ takav da $f^m(x_1) \in h^{-1}(V)$ za neki m. No, onda $h(x_1) \in U$ te imamo $g^m(h(x_1)) = h(f^m(x_1)) \in V$ pa je g također topološki tranzitivna. Za kraj dokažimo osjetljivost na početne uvjete. Pretpostavimo da f ima konstantu osjetljivosti β. Neka je $I = [\alpha_0, \alpha_1]$, gdje $\beta < \alpha_1 - \alpha_0$. Za proizvoljni $x \in [\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$, promotrimo funkciju $|h(x + \beta) - h(x)|$. To je neprekidna funkcija na $[\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$ koja je pozitivna pa ima minimalnu vrijednost β'. Slijedi da h preslikava intervale duljine β iz I u intervale duljine β' iz J. Tada je lako provjeriti da je β' konstanta osjetljivosti za g. QED

Definicija 4.20. Itinerer *od x je niz $S(x) = s_0 s_1 s_2 ...$ gdje je*

$$s_j = \begin{cases} 0, & F_\mu^j(x) \in I_0 \\ 1, & F_\mu^j(x) \in I_1 \end{cases} \tag{4.2}$$

za $j \in \mathbb{N}_0$.

Dakle, itinerer od x je beskonačni niz nula i jedinica pa je $S(x)$ točka iz prostora Σ_2. O S razmišljamo kao o funkciji sa Λ na Σ_2.



Slika 4.12: Prasliku segmenta J čine dva segmenta, jedan je podskup od I_0, dok je drugi podskup od I_1.

Teorem 4.21. *Ako je $\mu > 2 + \sqrt{5}$, onda je $S : \Lambda \to \Sigma_2$ homeomorfizam.*

Dokaz. Prvo pokažimo da je S injekcija. Pretpostavimo suprotno, tj. neka su $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$ te neka je $S(x) = S(y)$. Slijedi da $F_\mu^n(x)$ i $F_\mu^n(y)$ leže s iste strane od $\frac{1}{2}$, tj. $F_\mu^n(x), F_\mu^n(y) \in I_0$ ili $F_\mu^n(x), F_\mu^n(y) \in I_1$. To implicira da je F_μ monotona između $F_\mu^n(x)$ i $F_\mu^n(y)$ (jer je F_μ monotona na I_0, odnosno I_1). Posljedično, sve točke u tom intervalu ostaju u $I_0 \cup I_1$. To je u kontradikciji s činjenicom da je Λ potpuno nepovezan. Kako bismo vidjeli da je S surjekcija, prvo uvedimo sljedeću notaciju. Neka je $J \subseteq I$ segment te neka je

$$F_\mu^{-n}(J) = \left\{x \in I | F_\mu^n(x) \in J\right\}.$$

Konkretno, $F_\mu^{-1}(J)$ je praslika od J. Primjetimo da ako je $J \subseteq I$ segment, onda $F_\mu^{-1}(J)$ čine dva podintervala, jedan u I_0 i jedan u I_1. Pogledajmo sliku 4.12 Sada neka je $s = s_0 s_1 s_2 ....$ Želimo dobiti $x \in \Lambda$ iz $S(x) = s$. Zato definiramo

$$I_{s_0 s_1 ... s_n} := \left\{x \in I | x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, ..., F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\right\} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap ... \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

. Tvrdimo da $I_{s_0 s_1 ... s_n}$ čine ugnježđeni niz nepraznih segmenata kako $n \to +\infty$, tj. $(I_{s_0 s_1 ... s_n})_{\mathbb{N}_0}$ je ugnježđeni niz nepraznih segmenata. Primjetimo da je $I_{s_0 s_1 ... s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 ... s_n})$. Po indukciji možemo pretpostaviti da je $I_{s_1 ... s_n}$ neprazni podinterval takav da se $F_\mu^{-1}(I_{s_1 ... s_n})$ sastoji od dva zatvorena intervala, jednog u I_0 i jednog u I_1. Stoga, $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 ... s_n})$ je segment. Ti intervali su ugnježđeni jer $I_{s_0 ... s_n} = I_{s_0 ... s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 ... s_{n-1}}$. Zaključujemo da je $\bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0 s_1 ... s_n}$ neprazan. Primjetimo da ako je $x \in \bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0 s_1 ... s_n}$, onda je $x \in I_{s_0}$, $F_\mu(x) \in I_{s_1}$, itd. pa je $S(x) = s_0 s_1 ....$ Dakle, S je surjekcija. Primjetimo da iz injektivnosti od S slijedi da se $\bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0 s_1 ... s_n}$ sastoji od jedne točke. Zato $diam I_{s_0 s_1 ... s_n} \to 0$ kako $n \to +\infty$. Kako bismo dokazali neprekidnost od S, neka su $x \in \Lambda$, $S(x) = s_0 s_1 ...$ i $\epsilon > 0$. Odaberimo n takav da $\frac{1}{2^n}$. Promotrimo segmente $I_{t_0 t_1 ... t_n}$ za sve moguće kombinacije $t_0 t_1 ... t_n$. Ti podintervali su disjunktni te je Λ sadržan u njihovoj uniji. Postoji 2^{n+1} takvih podintervala te je $I_{s_0 s_1 ... s_n}$ jedan od njih. Stoga možemo odabrati $\delta > 0$ takav da vrijedi $|x - y| < \delta$ i $y \in \Lambda$ implicira da je $y \in I_{s_0 s_1 ... s_n}$. Zato se $S(y)$ podudara sa $S(x)$ u prvih $(n + 1)$ simbola pa je, po propoziciji 4.14, $d[S(x), S(y)] < \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Ovime smo dokazali neprekidnost od S. Slično se vidi da je i S^{-1} također neprekidna. Zaključujemo da je S homeomorfizam. QED

Teorem 4.22. *Itinerer $S : \Lambda \to \Sigma_2$ je topološka konjugacija između F_μ i pomaka σ.*

Dokaz. U prethodnom teoremu smo pokazali da je S homeomorfizam tako da je dovoljno pokazati da vrijedi $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$. Neka je $x \in \Lambda$. Tu točku možemo jedinstveno prikazati kao ugnježđeni niz segmenata $\bigcap_{n=0}^\infty I_{s_0 s_1 ... s_n}$ određen itinererom $S(x)$. Vrijedi $I_{s_0 s_1 ... s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap ... \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n})$. Promotrimo $F_\mu(I_{s_0 s_1 ... s_n})$. Općenito za dva segmenta, $I \subset \mathbb{R}$ i $J \subset \mathbb{R}$, te funkciju f vrijedi $f(I \cap J) \subseteq f(I) \cap f(J)$ i obrnuta inkluzija ne mora vrijediti (na primjer, za $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$, $f_4(x) = 4x(1 - x)$, i $I = [0.2, 0.3]$, $J = [0.7, 0.8]$ vrijedi

$f(I \cap J) = \emptyset \subset [0.64, 0.84] = f(I) \cap f(J))$. No ako je $f(I) \supseteq f(J)$ i $f(I \cap f(J)) = f(J)$, onda je očigledno $f(I \cap J) = f(I) \cap f(J)$. Zato induktivno možemo pokazati da je

$$F_\mu(I_{s_0 s_1 \ldots s_n}) = I_{s_1} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \ldots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1 \ldots s_n}$$

(primjetimo da je $F_\mu(I_{s_0}) = I$). Promotrimo sada $F_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n})$. Jer je $(I_{s_0 s_1 \ldots s_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ugnježđeni niz nepraznih segmenata čiji je presjek jedna točka i F_μ je neprekidna funkcija, vrijedi

$$F_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_\mu(I_{s_0 s_1 \ldots s_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \ldots s_n}.$$

Zato je

$$S(F_\mu(x)) = S(F_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \ldots s_n})) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 s_2 \ldots s_n}) = s_1 s_2 \ldots = \sigma(S(x)).$$

QED

4.4 Kaotičnost kvadratne funkcije

Teorem 4.23. *Kvadratna funkcija $F_\mu \colon \Lambda \to \Lambda$ je kaotična na Λ za $\mu > 2 + \sqrt{5}$.*

Napomena 4.24. *Tvrdnja teorema vrijedi za $\mu > 4$, no dokaz ovog teorema se poziva na 4.21 kojeg smo dokazali za $\mu > 2 + \sqrt{5}$, iako vrijedi i za $\mu > 4$ (što smo izostavili dokaz).*

Dokaz. Jer je funkcija pomak σ kaotična na Σ_2 (što smo pokazali na kraju prethodnog odjeljka 4.2) te jer postoji topološka konjugacija, itinerer S, između kvadratne funkcije $F_\mu \colon \Lambda \to \Lambda$ i funkcije pomak $\sigma \colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$, slijedi da je kvadratna funkcija F_μ kaotična na Λ. QED

Za kraj dokažimo da je funkcija $F_4 \colon [0, 1] \to [0, 1]$ kaotična na $[0, 1]$ tako što ćemo pokazati da postoji topološka konjugacija između nje i šatorske funkcije $T \colon [0, 1] \to [0, 1]$ za koju smo prije pokazali da je kaotična na $[0, 1]$.

Propozicija 4.25. *Kvadratna funkcija $F_4 \colon [0, 1] \to [0, 1]$, $F_4(x) = 4x(1 - x)$, je topološki konjugirana sa šatorskom funkcijom $T \colon [0, 1] \to [0, 1]$,*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -2x + 2, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Dokaz. Tvrdimo da je homeomorfizam $h\colon [0,1] \to [0,1]$ definiran sa $h(x) = sin^2(\frac{\pi}{2}x)$ takav da vrijedi $h \circ T = F_4 \circ h$. Funkcija h je neprekidna bijekcija na $[0,1]$ kao kompozicija neprekidnih bijekcija na $[0,1]$. Njezin inverz $h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} arcsin(\sqrt{x})$ je neprekidna funkcija na $[0,1]$ kao kompozicija neprekidnih funkcija na $[0,1]$. Dakle, h je homeomorfizam.

$$(F_4 \circ h)(x) = F_4(h(x)) = F_4(sin^2(\frac{\pi x}{2})) = 4sin^2(\frac{\pi x}{2})(1 - sin^2(\frac{\pi x}{2}))$$

$$= 4sin^2(\frac{\pi x}{2})cos^2(\frac{\pi x}{2}) = (2sin(\frac{\pi x}{2})cos(\frac{\pi x}{2}))^2 = sin^2(\pi x)$$

Nadalje, ako je $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, onda je $(h \circ T)(x) = h(2x) = sin^2(\pi x)$. Dok ako je $\frac{1}{2} < x \leq 1$, onda je $(h \circ T)(x) = h(2 - 2x) = (sin\frac{\pi}{2}(2 - 2x))^2 = (sin(\pi - \pi x))^2 = sin^2(\pi x)$. Dakle, $(h \circ T)(x) = (F_4 \circ h)(x)$, za $0 \leq x \leq 1$, pa je $h \circ T = F_4 \circ h$. QED

Bibliografija

[1] Wadia Faid Hassan Al-Shameri i Mohammed Abdulkawi Mahiub, *Some dynamical properties of the family of tent maps*, Int J Math Anal **7** (2013), 1433–1449.

[2] John Banks, Jeffrey Brooks, Grant Cairns, Gary Davis i Peter Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, The American mathematical monthly **99** (1992), 332–334.

[3] Robert Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, CRC press, 2018.

[4] Denny Gulick, *Encounters with chaos and fractals*, CRC Press, 2012.

[5] Morris W Hirsch, Stephen Smale i Robert L Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic press, 2012.

[6] Clark Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC press, 1998.

[7] Michel Vellekoop i Raoul Berglund, *On intervals, transitivity= chaos*, The American Mathematical Monthly **101** (1994), 353–355.

[8] Arild Wikan, *Discrete dynamical systems with an introduction to discrete optimization problems*, Bookboon. com, London, UK (2013).

Sažetak

U ovom radu proučavamo teoriju kaosa iz teorije dinamičkih sustava u najjednostavnijem okruženju. Sukladno tome, svi dinamički sustavi kojima se bavimo su jednodimenzionalni.

U prvom poglavlju navodimo osnovne definicije koje kasnije koristimo u radu. Neki od pojmova koje definiramo su orbita, fiksna točka, (završno) periodična točka.

U drugom poglavlju proučavamo središnji pojam ovog rada - kaos, točnije kaos u jednodimenzionalnoj dinamici. Navodimo Devaneyjevu definiciju kaotične funkcije. Prije toga definiramo neke koncepte koje koristi, odnosno topološku tranzitivnost i osjetljivost na početne uvjete. Dokazujemo i dva važna rezultata. Prvi ukazuje kako je za neprekidnu funkciju na metričkom prostoru uvjet osjetljivosti na početne uvjete u definiciji kaotične funkcije suvišan. Drugi rezultat tvrdi da kako bismo pokazali da je neprekidna funkcija definirana na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ kaotična, dovoljno je pokazati da je topološki tranzitivna. Također imamo kontraprimjere koji dokazuju da se kod neprekidne funkcije svi uvjeti koji trebaju biti zadovoljeni za kaotičnost međusobno ne impliciraju. Na kraju poglavlja dajemo primjer kaotične funkcije.

U trećem poglavlju se bavimo familijom šatorskih funkcija. Prvo analiziramo članove familije šatorskih funkcija za različite μ. Zatim gledamo koliko fiksnih točaka imaju iteracije šatorske funkcije T_μ, odnosno gledamo kardinalnost (broj elemenata) skupa fiksnih točaka funkcije T_μ^n za $n \in \mathbb{N}$. Nakon toga se bavimo karakterizacijom (završno) periodičnih točaka šatorske funkcije T_1. Poglavlje završavamo dokazima da šatorska funkcija $T_1\colon [0,1] \to [0,1]$ zadovoljava uvjete kaotičnosti iz Devaneyjeve definicije, pa je kaotična na domeni.

U zadnjem poglavlju se bavimo još jednim primjerom - familijom kvadratnih funkcija. Prvo pokazujemo zašto promatramo kvadratnu funkciju na intervalu $[0,1]$. Zatim se bavimo njezinim fiksnim i periodičnim točkama. Konstruiramo Cantorov skup Λ te pokazujemo da je F_μ (za odgovarajuće μ) na njemu kaotična. Zato uvodimo simboličku dinamiku te definiramo funkciju pomak za koju pokazujemo da je kaotična. Zatim povezujemo funkciju pomak i kvadratnu funkciju definiranu na Λ (za odgovarajuće vrijednosti parametra μ). Povezujemo ih preko topološke konjugacije itinerera S. Topološku konjugaciju i itinerer S također definiramo u ovom poglavlju, u odjeljku Topološka konjugacija. Za kraj dokazujemo da je kvadratna funkcija za parametar $\mu = 4$ definirana na $[0,1]$ topološki

konjugirana sa šatorskom funkcijom T_1.

Za izradu grafova smo koristili programski jezik Python u Visual Studio Codeu uz Jupyter ekstenziju.

Summary

In this paper, we study the theory of chaos in one-dimensional dynamics.

In the first chapter, we state definitions that we use later in the paper. Some notions that we define are orbit, fixed point, (eventually) periodic point.

In the second chapter, we tackle the central idea of this paper - chaos, or to be more precise, chaos in one-dimensional dynamics. We state Devaney's definition of chaotic function. Before that, we define some notions used in the definition, i.e., topological transitivity and sensitive dependence on initial conditions. Next, we prove two important results. The first one shows that for a continuous function, the condition called sensitive dependence on initial conditions is redundant in the definition of chaotic function. The second result states that in order to prove that a continuous function defined on the interval $I \subseteq \mathbb{R}$ is chaotic, it is sufficient to prove that it is topologically transitive. Also, we have counterexamples that prove that not all conditions in the definition of chaotic functions imply each other. At the end of the chapter, we give an example of a chaotic function.

In the third chapter, we discuss the tent family. First, we analyze the tent family for different parameters μ. Then, we calculate the number of fixed points of the n-th iteration of a tent map, i.e., we look at the cardinal number (the number of elements) of the set that contains all the fixed points for a map T^n for $n \in \mathbb{N}$. After that, we characterize (eventually) periodic points of the tent map T_1. We end this chapter with proof that the function $T_1\colon [0,1] \to [0,1]$ satisfies conditions from Devaney's definition of chaos, so it is chaotic on $[0,1]$.

In the last chapter, we observe another example - the quadratic family. First, we show why we look at the quadratic map on the interval $I = [0,1]$. We observe its fixed and periodic points. Then we construct the Cantor set $\Lambda \subset I$ which is also very interesting to us as a domain of quadratic maps because F_μ, for μ sufficiently large, is chaotic on it (we give proof of that in the last section of this chapter). We introduce the symbolic dynamics and define the shift map for which we prove that it is chaotic. After that, we relate the shift map to the quadratic map F_μ defined on Λ when μ is sufficiently large. In order to do that, we use the topological conjugacy itinerary S. We also define topological conjugacy and itinerary in this chapter, in section Topological conjugacy. Lastly, we prove that the quadratic map F_4 is topologically conjugate to the tent map T_1.

To make graphs we used the Python and Jupyter extensions in Visual Studio Code.

Životopis

Dana 28. rujna 1996. Manuela Behtanić je rođena u Zarebu. Pohađa Osnovnu školu Ksavera Šandora Đalskog u Donjoj Zelini te XV. gimnaziju u Zagrebu. Godine 2015. upisuje Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. 2020. godine ga završava te tada upisuje Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.