Kombinatorika u nastavi matematike

Martinović, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Martinović

KOMBINATORIKA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, studeni 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji.

Hvala prof. dr. sc. Vedranu Krčadincu i dr. sc. Renati Vlahović Kruc.

Sadržaj

Uvod

Kombinatorika je grana matematike s bogatom poviješću i širokim spektrom primjene u raznim disciplinama. Kombinatorno razmišljanje važno je pri rješavanju zamršenih problema, donošenju odluka i optimizaciji različitih procesa. Nastavni sadržaj trećeg razreda srednje škole su principi prebrojavanja, permutacije, varijacije i kombinacije. Cilj ovog diplomskog rada je dati pregled teorije navedenog sadržaja, analizirati zadatke iz udžbenika i riješiti tipične primjere s kojima se učenici susreću na nastavi matematike.

U početnom poglavlju diplomskog rada odgovaram na pitanje što je kombinatorika i kako se razvijala kroz povijest. Kombinatorika kao grana matematike vuče svoje početke od razvoja prvih civilizacija i problema vezanih uz prebrojavanje i raspoređivanje religijskih simbola, naglasaka u stihovima i strateškim igrama. Povijesni pregled razvoja kombinatorike započinje navođenjem ranih oblika kombinatornog razmišljanja u Kini i Indiji, nastavlja se širenjem kombinatornih učenja s istoka na europski kontinent u Srednjem vijeku, te krajem Novog vijeka postaje zasebna grana matematike. Navedeni su neki od najpoznatijih i najznačajnijih kombinatornih problema.

Analiza nastavnog sadržaja predviđenog kurikulumom opisana je u drugom poglavlju. Učenici se s nazivom kombinatorika susreću u trećem razredu srednje škole, dok se u osnovoj školi pojavljuju jednostavni zadatci prebrojavanja. Navedeni su ishodi učenja koje učenici ostvaruju i razine usvajanja znanja. Kombinatorni zadatci pripadaju kategoriji problemskih zadataka i često su zadani pričom koju trebamo matematički modelirati. Navedeni su ciljevi i pozitivni doprinosi problemske nastave u podučavanju.

Nadalje, ovaj diplomski rad posvećuje se nastavnim sadržajima predviđenim kurikulumom za učenje na redovnoj nastavi. U trećem poglavlju rada opisani su principi prebrojavanja koje učenici susreću u srednjoškolskim zadatcima, definirani su pojmovi permutacije, varijacije i kombinacije bez i s ponavljanjem elemenata skupa. Navedeni sadržaj potkrijepljen je mnogim zadatcima iz srednjoškolskih udžbenika i nekim vlastitim primjerima. Posljednja cjelina poglavlja posvećena je zadatcima s natjecanja koji se mogu učenicima zadavati na dodatnoj nastavi matematike.

U posljednjem poglavlju opisuju se nastavne aktivnosti za osnovnu i srednju školu. Nastavna metoda koja se provodi u obje nastavne aktivnosti je metoda dijaloga i zaključivanja. Predstavljeni su zadatci koji su primjereni učeničkom uzrastu, te ih učenici rješavaju po Pólyjinim koracima. Cilj srednjoškolske nastavne aktivnosti navedene u ovom poglavlju je ukazati na važnost kreativnog razmišljanja u rješavanju problema.

Poglavlje 1

Što je kombinatorika?

1.1 Kombinatorika

„Kombinatorika (njem. *Kombinatorik*, prema kasnolat. *combinatio*: združivanje), je grana matematike koja se bavi problemima rasporeda, svrstavanja i prebrojavanja tj. prebrojavanjem elemenata konačnih skupova i načina da se ti elementi poredaju." [5]

Proučavanje kombinatornih uzoraka počelo je s prvim civilizacijama i razvijalo se u različitim kulturama usko povezano s religijom, duhovnim značajem i glazbom. Povijesni izvori upućuju na to da su ljudi već u prvom tisućljeću prije nove ere proučavali redanje uzoraka. U Indiji kombinatorni nizovi vezani su uz metriku vedskih pjesama, a u Kini kombinatorni uzorci heksagrama simboliziraju temeljne vrijednosti konfucijanizma. Problemi rasporeda najstariji su kombinatorni problemi [15].

Kada pomislimo na matematiku, prva asocijacija su brojevi. Brojevi su prvi pojam kojem nas roditelji i odgajatelji uče u kontekstu matematike. Kada djeca počinju usvajati pojam broja i učiti što znači „dva", a što „tri", postavljaju im se pitanja poput „Koliko imaš godina? Koliko je jabuka na stolu? Koliko bombona imaš u ruci?". Djeca tada broje koliko određenih predmeta vide, odnosno prebrojavaju objekte. Prebrojavanje elemenata konačnih skupova osnovno je područje interesa kombinatorike.

Kombinatorika je grana matematike koja se uz raspoređivanje i prebrojavanje bavi i odabirom predmeta na sustavan način. Problemi koji se u kombinatorici rješavaju uključuju diskretne, konačne strukture, gdje redoslijed i raspored elemenata mogu i ne moraju biti važni.

Metode kombinatorike primjenjuju se u različitim područjima matematike, primjerice u teoriji vjerojatnosti, teoriji igara, kriptografiji, statistici, raznim poljima računarstva, teoriji grafova i drugim srodnim disciplinama.

1.2 Povijesni pregled

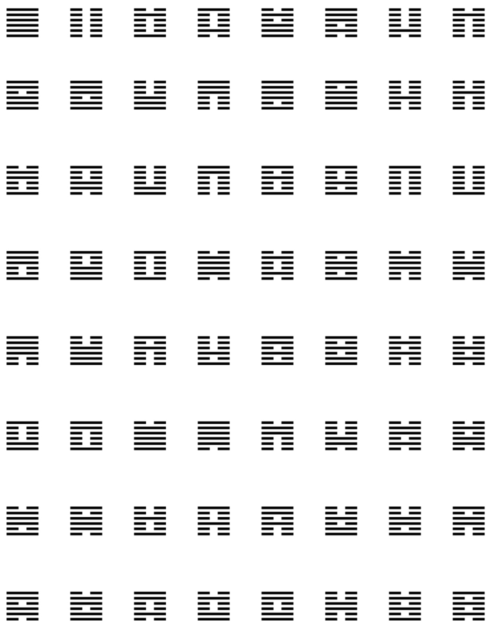
Kurikulumi nastavnih predmeta „Matematika za osnovne škole i gimnazije" i „Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2." među odgojno-obrazovnim ciljevima navode sljedeće:

„Učenici će temeljem usvojenih matematičkih znanja, vještina i procesa prepoznati povijesnu, kulturnu i estetsku vrijednost matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima kao i neizostavnu ulogu matematike u razvoju i dobrobiti društva." [21]

Povijesni pregled razvoja kombinatorike u matematičku disciplinu kakva je danas započinje razvojem prvih civilizacija. Povijesni zapisi upućuju da su ljudi u prvom tisućljeću prije nove ere kombinatorno promišljali o uzorcima i nizovima u poeziji, glazbi i religiji [15].

Najistaknutiji izvori koji upućuju na promatranje uzoraka i preslagivanje elemenata potječe iz Kine. I Ching ili Knjiga promjena od $2^6 = 64$ poglavlja drevna je knjiga proricanja i jedna od temeljnih knjiga konfucijanizma. Svakom poglavlju dodijeljen je heksagram kao simbol promjena opisanih u tom poglavlju. Heksagram čini šest linija koje su ili isprekidane (- -) ili pune linije (–) te simboliziraju sile yin i yang. Iako ne postoje sačuvani dokumenti koji bi upućivali na postojanje liste heksagrama prije 3. st. prije nove ere, zasluga raspoređivanja heksagrama kao na slici 1.1 tradicionalno se dodjeljuje kralju Wenu koji je živio u 12. st. prije nove ere. Kralj Wen, praotac dinastije Zhou, poredao je heksagrame u parove tako da nakon svakog heksagrama slijedi njegova zrcalna verzija, a one heksagrame koji su simetrični slijede njihovi komplementi. Leksikografske zapise heksagrama uveo je Shao Yung 1060. godine zbog čega je G. W. Leibniz, kada je otkrio njegove tekstove, zaključio da su kineski mislioci poznavali binarne nizove i aritmetiku.

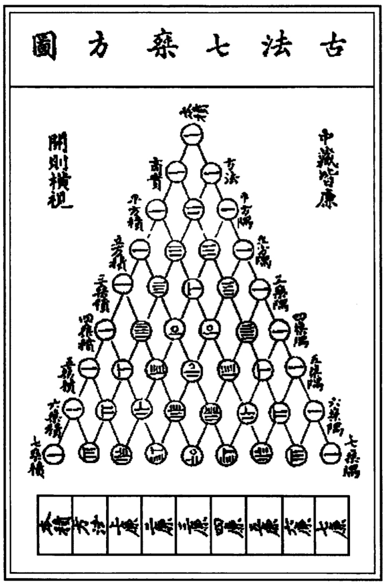
Kombinatorno razmišljanje u Kini nije vezano samo uz proricanje i filozofske tekstove. Postoje zapisi koji opisuju magične kvadrate i igre poput goa, šaha, domina, igri s kockama i kartaških igara te ukazuju na složenije matematičko promišljanje o kombinatornim problemima. Pascalov trokut nosi ime značajnog matematičara 17. st. Blaise Pascala, no Pascalov trokut bio je poznat i u Kini. Kineski matematičar Jia Xian u 11. st. osmislio je trokutastu reprezenciju binomnih koeficijenata koju je popularizirao Yang Hui u 13. st. te je sačuvana ilustracija iz knjige *Siyuan yujian* iz 1303. godine [6].



Slika 1.1: Heksagrami u *I Ching*, slika preuzeta iz [15].

Rani oblici kombinatornog razmišljanja primjenjivani su u indijskim zakonima, glazbi, medicini, farmakologiji, parfumeriji, a najveći doprinosi duguju se prozodiji. Vede, zbirke vjerskih himni, žrtvenih izreka i obrednih pjesama najstariji su sačuvani tekstovi indijske kulture pisani u stihovima. Pravilno naglašavanje stihova smatralo se ključnim za uspješno prinošenje žrtvi te su sačuvani tekstovi *pratisakhyas* u kojima su zapisani sustavni načini rasporeda dugih i kratkih slogova. Pingala je autor prozodijskih pravila *Chandahsutra* koja su bila temelj daljnjim proučavanjima rasporeda slogova. U njegovim tekstovima opisuje se metoda određivanja broja varijacija dugih i kratkih slogova u stihu od n slogova te je osmislio računsko pomagalo *meru*, indijsku inačicu Pascalovog trokuta.

Kombinatorna saznanja tek su stoljećima kasnije bila uvrštena u matematičko učenje tog dijela svijeta. Smatra se da je prvo korištenje kombinatornih pravila upotrijebio Brahmagupta u 7. st. u svojim astronomskim kalkulacijama. Zatim je u 9. st. Mahavira detaljno zapisao kombinatorna pravila računanja kombinacija s k od n objekata i dao poopćenje Pingalinog pravila za računanje r^n kada su r i n pozitivni cijeli brojevi. Bhaskara II u svom značajnom matematičkom djelu Lilavati iz 12. st. navodi svoju verziju računanja kombinacija k od n objekata i jasno navodi kako se može koristiti ne samo u metrici već i drugim područjima, primjerice u arhitekturi u odabiru rasporeda prozora. U posljednjem poglavlju knjige bavi se pitanjem kako odrediti koliko se brojeva može dobiti ako je zadan skup zna-



Slika 1.2: Prikaz Yang Huijevog aritmetičkog trokuta iz *Siyuan yujian*, slika preuzeta iz [15].

menaka (bez nule) koje je dozvoljeno koristiti. Indijski naziv ovog problema je *ankapasa*. Zapisao je pravila za računanje broja permutacija n objekata bez i s ponavljanjem, kako naći sumu svih permutacija ako su objekti znamenke, te broj varijacija m od n objekata bez ponavljanja. Posljednje značajno matematičko djelo prije britanske kolonizacije indijskog poluotoka i spajanja razvoja matematike sa zapadnim svijetom, *Ganitakaumudi* napisao je Narayana Pandita u 14. st. U knjizi dva poglavlja su posvećena primjeni kombinatornih pravila, jedno poglavlje posvećeno je *ankapasi*, a drugo magičnim kvadratima. Pitanje koliki je ukupni broj varijacija uglavnom je bilo vezano uz razmještaj znamenki od 1 do 9, ali u nekim primjerima spominje i nenumeričke objekte poput muzičkih nota.

Problemima prebrojavanja i redanja određenih objekata bavili su se i na području arapskog svijeta, što se nakon smrti proroka Muhameda počelo širiti na istok do Perzije, a kasnije i na zapad sve do Pirinejskog poluotoka. Kombinatorna promišljanja najviše su se primjenjivala u područjima lingvistike i astronomije. Krajem 12. st. matematičar Ibn Munim koristeći se metodom indukcije zapisao je numeričku tablicu kojom se određuju kombinacije k od n elemenata, odnosno konstruirao je Pascalov trokut kombinatornim pristupom.

Osnove kombinatornog razmišljanja u srednjovjekovnoj Europi proizašle su iz proučavanja igara na sreću, posebice igri s kockom, i filozofskog promišljanja o religiji. Značajniji doprinosi razvoju kombinatorike u Europi započinju u razdoblju renesanse. Kombinatorne operacije uglavnom su bile objašnjene na primjerima i bez dokaza, a teorija brojeva i teorija glazbe bile su najznačajnija područja na kojima su nova saznanja primjenjivana. Girolamo Cardano u svojim djelima je na primjerima opisao da je broj svih kombinacija nekog skupa, koje definira kao prave podskupove s barem dva elementa, jednak $2^n - 1 - n$, znao je računati broj kombinacija s određenim brojem elemenata po formuli

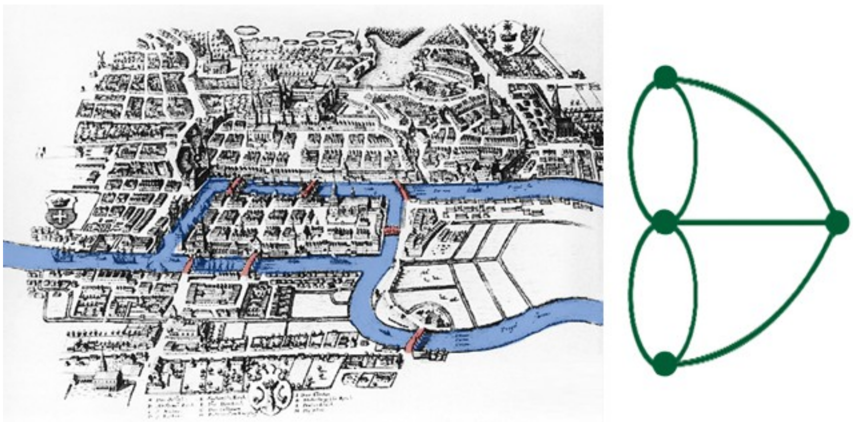
$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k},$$

na primjerima pokazao da vrijedi $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Marin Mersenne, najznačajniji je renesansni autor u povijesti kombinatorike prije G. W. Leibniza, bavio se s permutacijama, varijacijama s ponavljanjima i bez te kombinacijama bez ponavljanja. Svoja saznanja primjenjivao je u teoriji glazbe. Zanimljivo je da je zapisao 720 pjesama koje dobijemo preslagivanjem šest nota.

Slika 1.3: Mersennov zapis rasporeda četiri nota iz *Harmonicorum Libri*, slika preuzeta iz [15].

Pierre de Fermat i Blaise Pascal razmjenjivali su pisma o teorijskim problemima koji se javljaju u igrama na sreću. Jedan od problema Fermat je riješio kombinatornim pristupom koji je potaknuo Pascala na bavljenjem kombinatornim problemima. Njegovo djelo *Traktat o aritmetičkom trokutu* u kojem opisuje dosad poznata saznanja o aritmetičkom trokutu uz dokazivanje tvrdnji smatra se početkom moderne kombinatorike. Gottfried Leibniz napisao je *Dissertatio de arte combinatoria*, djelo u kojem je iznio dvanaest kombinatornih zadataka koji se bave permutacijama i kombinacijama bez ponavljanja. Prvi je odredio koliko je kombinacija određene veličine ili svih dozvoljenih veličina koje sadrže određeni podskup zadanog skupa.

Teorija grafova počela se razvijati sa zagonetkama poput vrlo poznatog problema Königsberških mostova. Rijeka Pregel dijeli grad Königsberg na četiri dijela koji su povezani sa sedam mostova. Građani su se pitali je li moguće prošetati od svoje kuće svakim mostom samo jednom i vratiti se kući. Ovaj problem riješio je Euler tako što je kartu grada zapisao kao graf u kojem su bridovi predstavljali mostove, a vrhovi dijelove grada. Euler je uočio da ako šetnja postoji onda svaki vrh mora imati paran broj bridova, jedan da bismo došli u vrh i drugi da bismo ga napustili. U ovom slučaju više je vrhova s neparnim brojem bridova i šetnja nije moguća.



Slika 1.4: Karta Königsberških mostova u 17. st. i Eulerov graf, slika preuzeta s [2].

U 18. i 19. st. u Europi su se razmatrali zadaci u kojima se treba odrediti je li moguće neki zadani lik nacrtati ne podižući olovku, te ako nije koliki je najmanji broj poteza dovoljan za crtež. Javljaju se i takozvani Hamiltonovi ciklusi koji prolaze kroz sve vrhove nekog geometrijskog lika ili tijela samo jednom. Rani primjer Hamiltonovog ciklusa je pitanje može li lovac na šahovskoj ploči stati na svako polje točno jednom i vratiti se na početno polje. Poznati kombinatorni problem iz područja teorije grafova je problem četiri boje. Problem je postavio Francis Guthrie uočivši da mu je za bojanje karti, tako da su susjedni dijelovi karte obojeni različitim bojama, dovoljno samo četiri boje. Problem je riješen 1976. godine korištenjem Kempeove tvrdnje i uz pomoć računala koje je ispitivalo tvrdnje na skoro dvije tisuće primjera te je rješenje problema postao prvi teorem dokazan računalno. Teorija grafova razvila se u zasebnu matematičku disciplinu tek drugom polovicom 20. st. kada je uočena primjenjivost grafova u radu računala. Thomas Kirkman u svom radu iz 1847. godine iznio je poznati problem Kirkmanovih školarki: „Petnaest školarki se šeta svakog dana u pet grupa po tri. Složite njihove šetnje u jednom tjednu tako da svaki par djevojčica šeta zajedno u grupi samo jednom." [9] Rješenje problema možemo smatrati početkom teorije dizajna, koja proučava kombinatorne konfiguracije s određenim zahtjevima.

Poglavlje 2

Kombinatorika u nastavi matematike

2.1 Kombinatorika u kurikulumu

Kurikulum nastavnog predmeta Matematika navodi kako se učenje i poučavanje nastavnoga predmeta ostvaruje povezivanjem matematičkih procesa i domena. Kombinatorika je uvrštena u domenu „Podatci, statistika i vjerojatnost". Učenjem kombinatorike razvijaju se svi matematički procesi: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije.

U osnovnoj školi sadržaji kombinatorike nisu eksplicitno istaknuti, no prisutni su već u razrednoj nastavi. Pri učenju pojma broja i prebrojavanju objekata primjenjuje se načelo jednakosti. Učenici se susreću s problemima poput ovog:

Primjer 2.1.1. *Zamislimo da su svi učenici u 1.a razredu obukli kravatu povodom proslave dana kravate. Ako znamo da je u 1.a razredu 24 učenika, koliko je ukupno kravata?*

Učenicima u toj dobi nije potrebno ukazivati na opće matematičke zakonitosti koje su u pozadini zadataka, oni vrlo prirodno uviđaju jednakost broja učenika i broja kravata. Također, učenici se susreću sa zadatcima koji se rješavaju po principu zbroja poput:

Primjer 2.1.2. *Ante ima 3 plava i 5 crvenih balona. Koliko balona ima Ante?*

Javljaju se i zadatci temeljeni na Dirichletovom principu:

Primjer 2.1.3. *U jednom razredu je 13 dječaka. Postoji li među njima dvoje dječaka koji slave rođendan u istom mjesecu?*

Postavljanje ovakvih pitanja korisno je jer postavlja temelje za složenije probleme u višim razredima. Nastavni sadržaj skupova koji pripada petom razredu osnovne škole usko je vezan uz kombinatoriku te se u predmetnom kurikulumu pod proširenim sadržajem navodi ispisivanje i prebrojavanje elemenata skupa u kombinatornim zadatcima. Na dodatnoj nastavi učenici koji se pripremaju za natjecanja uče Dirichletov princip i formulu uključivanja-isključivanja te načelo produkta.

Kombinatorika pripada nastavnom sadržaju koji se podučava u trećem razredu srednje škole. Odgojno-obrazovni ishodi koji se ostvaruju jednaki su za sve srednjoškolske programe osim za srednje stručne škole koje imaju 70 sati nastave matematike godišnje. Kombinatorika u nastavnom programu strukovnih škola sa 70 sati nastave matematike pripada proširenom sadržaju koji se obrađuje uz računanje vjerojatnosti.

Ishodi učenja koji se ostvaruju su:

- Prepoznaje i opisuje osnovne principe prebrojavanja, permutacije, kombinacije i varijacije.
- Objašnjava, računa i daje primjer permutacija, kombinacija i varijacija.
- Ilustrira i rješava problem rabeći kombinatoriku.

Ishod učenja proširenog sadržaja jest:

- Primjenjuje binomnu formulu.

U tablici su navedeni ishodi koji moraju biti zadovoljeni za određenu razinu usvojenosti.

Razina usvojenosti	**Odgojno-obrazovni ishod**
ZADOVOLJAVAJUĆA	Opisuje osnovne principe prebrojavanja na primjeru.
DOBRA	Rješava problem rabeći kombinacije i varijacije bez ponavljanja i permutacije.
VRLO DOBRA	Rješava problem rabeći kombinacije i varijacije s ponavljanjem.
IZNIMNA	Bira strategiju rabeći kombinatoriku.

2.2 Problemska nastava

Tradicionalno obrazovanje zasniva se na onome što danas u usporedbi s aktivnim pristupom nastavi zovemo pasivni pristup. Nastavnik predstavlja nastavni sadržaj koji učenici memoriraju te kasnije samostalno primjenjuju. Opsežan nastavni sadržaj i mnogo različitih tipova zadataka vremenski je najučinkovitije izvršiti kroz prezentiranje raznih algoritama koji vode do rješenja.

Trajnost i razina znanja učenika koje proizlaze od ovakvog načina poučavanja vrlo je kritizirana, no i dalje je tradicionalno zastupljena u nastavi. Uz reforme i suvremene trendove u nastavi te veliki trud nastavnika uvodi se osnovna postavka suvremenog sustava - problemska nastava [7].

Problemska nastava započinje problemom koji kod učenika budi interes i želju za učenjem, te kroz postupak rješavanja problema učenik svladava nove sadržaje. U takvoj nastavi učenici su aktivni, njihovo razmišljanje približava ih stjecanju novih znanja.

Projektom „Podrške provedbi Cjelovite kurikularne reforme (CKR)" i „Škole za život" od 2018. godine Ministarstvo znanosti i obrazovanja promiče promjene osuvremenjivanja obrazovnih procesa u osnovnim i srednjim školama. Iz „Strategije obrazovanja, znanosti i tehnologije" (2014) i mnogobrojnih programskih dokumenata Europske unije (ET 2020) proizlaze ciljevi kurikularne reforme koji se mogu sažeti u tri glavna cilja [20]:

1. pristup temeljen na odgojno-obrazovnim ishodima orijentiranim na rješavanje problema i kritičko mišljenje kako u predmetnim kurikulima, tako i u sedam međupredmetnih tema,

2. zadovoljni i kreativni učenici koji su rezultat uključive i motivirajuće okoline za učenje,

3. motivirani nastavnici koji prihvaćaju svoje kompetencije (znanje, vještine, samostalnost i odgovornost) i koriste se njima u cjeloživotnome učenju kako bi na inovativne načine odgovorili na izazove škole 21. stoljeća.

Istraživački usmjerena nastava zasniva se na znatiželji učenika kao pokretaču procesa učenja. Istraživačko učenje je proces u kojem učenici uče zajedno jedni od drugih rješavajući problem koji im je zadan, koristeći već usvojeno znanje. Rad u malim skupinama čini učenje zanimljivim i razvija suradničko učenje. Cilj ovog oblika nastave jest osamostaljenje učenika u procesu učenja [10].

Ideja problemskog podučavanja poznata je još iz antičkog razdoblja, smatralo se da učenici uz kratke upute mogu prema svojim sposobnostima samostalno raditi dalje [10]. Michel Eyquem de Montaigne u 16. st. piše da učenike treba staviti u situaciju promatranja, uspoređivanja, razlikovanja i razmišljanja o stvarima. Američki pedagozi i filozofi

William Heard Kilpatrick i John Dewey se početkom 20. st. zalažu za projektnu nastavu i uvode moderne metode s ciljem dokazivanja da je najučinkovitije ono učenje koje proizlazi iz iskustva u stvarnim praktičnim i životnim situacijama. Problemska nastava u nastavnoj teoriji i praksi ušla je u različite nastavne sustave pa su proizašle i razne preinake, no svima je zajednička ideja učenja rješavanjem problema. Didaktička važnost učenja putem rješavanja problema, kako navode Jovičić i Obradović [7], očituje se u više njenih doprinosa efikasnosti nastave:

- razvijanje interesa i motivacije učenika za učenje,
- odgajanje radoznalosti, ustrajnosti, upornosti, kritičnosti,
- razvijanje tehnika samostalnog usvajanja novih sadržaja,
- razvijanje apstraktnog mišljenja,
- razvijanje originalnog pristupa.

Prema Jovičiću i Obradoviću, većina didaktičara ističe sljedeće četiri razine problemskog izlaganja u nastavi poredane od najniže prema najvišoj:

- **problemski monolog** – Nastavnik postavlja pitanja i daje odgovore kroz faze rješavanja problema, te na taj način demonstrira kako promišljati o problemu. Ovaj oblik nastave primjenjiv je kao priprema učenika na novi oblik nastave i pri susretu s potpuno novim nastavnim sadržajem kada se učenici ne mogu osloniti na prethodno iskustvo. Ovo je najniža razina aktiviranosti učenika u problemskoj nastavi.
- **problemski dijalog** – Na ovoj razini nastavnik učenike usmjeruje prema samostalnom rješavanju problema. Nastava je zasnovana na dijalogu između učenika i nastavnika, tj. sokratovskoj tehnici vođenja razgovora kojom se učenike navodi da samostalno izvode zaključke i dolaze do novih spoznaja.
- **samostalno rješavanje problema** – Učenici na ovoj razini samostalno rješavaju dodijeljeni problem, a uloga nastavnika je korektivnog značaja.
- **učenici samostalno formuliraju i rješavaju probleme** – Ovo je najviša razina i ona se rijetko primjenjuje u školama. Učenici na temelju dobivenih materijala samostalno osmišljavaju problem. Nastavnici u provjeru učenikova rada moraju uložiti mnogo pažnje kako bi učenike pohvalili ili upozorili na moguće propuste.

Prednosti problemske nastave sastoje se od uključivanja učenika u stjecanje novog znanja. Učenik svojim mišljenjem, razmišljanjem i znanjem dolazi do novih spoznaja, postaje protagonist u procesu učenja. Kombinatorni i logičko-kombinatorni zadatci pogodni su za opisani oblik nastave. Kombinatorika uvodi relativno malo osnovnih pojmova na srednjoškolskoj razini, ali zadatci mogu biti vrlo različiti te ih učenici smatraju teškima i stoga je važno razumijevanje postavljenog problema u zadatku, a ne slijeđenje unaprijed usustavljenih postupaka rješavanja.

Problem

Mnogo zadataka iz kombinatorike koji se obrađuju na nastavi usko su vezani uz matematičku logiku te ih tada nazivamo logično-kombinatornim zadatcima koji ulaze u domenu problemskih zadataka. Problemskim zadatcima nazivaju se oni zadatci za koje ne znamo odrediti proceduru rješavanja. Oni uvelike ovise o pojedincu i njegovu iskustvu rješavanja zadataka. Ako započinjemo rješavati zadatak i pri čitanju uočimo da smo neki sličan zadatak već riješili i znamo koju proceduru rješavanja bismo trebali primijeniti, onda taj početni zadatak više ne smatramo problemskim zadatkom. Kombinatorika ne uvodi mnogo novih pojmova, ali ono što se u zadatcima traži nije odmah lako prepoznati.

Poznati matematičar i pedagog George Pólya uveo je četiri koraka za uspješno rješavanje matematičkih problema [12]:

1. korak: Razumijevanje zadatka
Pólya navodi kako je za uspješno rješavanje svakog problema potrebno prvo razumjeti problem. Također, napominje da je dužnost nastavnika na nastavi odabrati zadatke primjerene težine (ni preteški ni prelagani) koji zainteresiraju učenika i bude želju za rješavanjem. Provjeriti je li učenik razumio zadatak može se postavljanjem sljedećih pitanja: „Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet?”. Podatcima koji su u zadatku zadani i nepoznanicama potrebno je pridružiti odgovarajuće oznake. Ovisno o problemu, u ovom koraku trebalo bi nacrtati skicu i na njoj istaknuti nepoznanicu i zadane podatke. Posljednje, Pólya ističe korisnost postavljanja pitanja: „Je li moguće zadovoljiti uvjet?” kako bismo počeli rješavati zadatak sa slutnjom što bi moglo biti rješenje.

2. korak: Stvaranje plana
Ideja kako riješiti zadatak, odnosno postavljanje plana, može se pojaviti postepeno. Ponekad je u pronalasku točnog puta do rješenja potrebno koristiti metodu pokušaja i pogreške. Pólya iznosi pitanja i preporuke koje nastavnik može koristiti da bi pomogao učenicima doći do ideje: „Promotri nepoznanicu! Probaj se sjetiti nekog tebi poznatog zadatka koji sadrži istu ili sličnu nepoznanicu! Evo zadatka koji je srodan tvom, a već je riješen! Možeš

li ga upotrijebiti?" Ako se nismo uspjeli približiti ideji kako odrediti plan rješavanja, ponekad je potrebno razmišljati o tome može li se zadatak izraziti drugačije. Prisjetiti se definicija pojmova koji se spominju u zadatku također može biti od pomoći. Na kraju bitno je provjeriti jesmo li u zadatku iskoristili sve zadane podatke i čitav uvjet. Također, generalizacija posebnih slučajeva i sustavnost pri ispitivanju slučajeva dva su osnovna načina razmišljanja koja koristimo pri osmišljavanju plana. „Da bismo u tome (stvoriti plan) uspjeli, treba nam mnogo toga. Potrebna su ranije stečena znanja, disciplina duha, koncentracija na cilj i još nešto: sreća. [12]"

3. korak: Izvršavanje plana

Nakon što smo stvorili plan kako riješiti zadatak, za izvršavanje plana potrebno je „uglavnom samo strpljenje". Pri provedbi plana važno je ne zaboraviti ideju iz prethodnog koraka i provjeravati svaki korak rješavanja zadatka. Postavljamo pitanja: „Možeš li jasno vidjeti da je korak ispravan? Možeš li dokazati da je ispravan?". Ova faza rješavanja problema povezana je s prethodnom jer pri rješavanju zadatka može se dogoditi da uočimo da metoda koju smo izabrali ipak nije primjenjiva. Ako se to dogodi, ponovo se vraćamo na korak stvaranja plana. „Nekoliko neuspjelih pokušaja ne može značiti da je nešto zaista nemoguće" [1].

4. korak: Osvrt

Posljednji korak u rješavanju problemskih zadataka jest refleksija na rješenje. Provjerom i preispitivanjem dobivenog rezultata te analizom plana kojim smo došli do rješenja produbljujemo vlastito znanje o problemu. Pólya predlaže učenicima postaviti pitanje: „Možeš li rezultat ili metodu upotrijebiti na neki drugi zadatak?". Ovakvim osvrtom obogaćujemo vlastito iskustvo rješavanja problema, koje nam koristi pri razvoju matematičke logike i razmišljanja. Važnost ovog koraka je u generalizaciji rješenja i stvaranja novih spoznaja. Zanimljivo je provjeriti je li zadatak bilo moguće riješiti na drugačiji način i bi li taj način bio lakši.

Naznačiti ove korake učenicima vrlo je korisno u rješavanju kombinatornih zadataka. Pólyni koraci omogućuju putokaz u novim situacijama i daju odgovor na pitanje odakle početi rješavati zadatak.

Poglavlje 3

Osnovni principi prebrojavanja

U ovom poglavlju bavit ćemo se osnovnim problemom kombinatorike, a to je prebrojavanje. U svakodnevnom životu susreli smo se s prebrojavanjem već u ranoj životnoj dobi. Vjerojatno je svatko jednom morao prebrojati učenike u razredu kako bi odgovorio na pitanje nastavnika: „Koliko vas je u razredu? Zar samo njih troje nema na nastavi?”. Postavljanje ovog pitanja jednostavan je i zanimljiv način započinjanja uvodne diskusije na prvom nastavnom satu kada učenike upoznajemo s pojmom kombinatorike. Učenicima možemo postaviti neka od sljedećih pitanja: „Možete li se sjetiti koju ste metodu koristili pri prebrojavanju ili na koji ste način vršili prebrojavanje? Jeste li brojali učenike po redovima ili po stupcima, jeste li brojali od zadnje klupe prema prvoj ili obratno, prvo dječake zatim djevojčice?” Kombinatorika se bavi prebrojavanjem elemenata skupa, tj. određivanjem broja elemenata nekog konačnog skupa. Osnovne principe prebrojavanja bitno je dobro usvojiti jer će se kasnije koristiti na različite načine ovisno o problemu.

3.1 Princip umnoška

Princip umnoška često zovemo i princip uzastopnog prebrojavanja, što je najjednostavniji princip prebrojavanja konačnog skupa. Koristi se u situacijama kada nam je poredak objekata važan. Kada se učenici na nastavi prvi put susreću s novim sadržajem potrebno je kroz prvi primjer zainteresirati učenike. Sljedeći primjer primjeren je rješavanju u osnovnoj školi, no ovaj jednostavni motivacijski primjer zorno prikazuje da će se od učenika u trećem razredu srednje škole očekivati složenije matematičko razmišljanje. Motivacijski primjer nije nužno jednostavan primjer, ponekad težinom ne mora biti primjeren učeničkom predznanju. Osnovna svrha motivacijskog primjera je pobuditi radoznalost kod učenika.

Primjer 3.1.1. *Troje učenika utrkuje se na sto metara. Koliko je mogućih ishoda utrke?*

Rješenje. Ovo je prvi put da se učenici u srednjoj školi susreću s ovakvim zadatkom. Učenike pozovimo na korištenje Pólyinih koraka. Prvo treba razumjeti problem. U ovom zadatku imamo troje učenika koji se utrkuju, te nas zanima koliko može biti različitih ishoda dolaska na cilj. Tko je došao prvi i osvojio prvo mjesto, tko drugo, a tko treće? Kako bismo lakše razmišljali možemo imenovati učenike u zadatku, odnosno pridružiti im oznake. Recimo učenicima pridružimo slova A, B i C.

Kada razumijemo problem prelazimo na drugi korak „smišljanje plana". Možemo li riješiti dio problema? Jedan mogući ishod je da je prvo mjesto osvojio je učenik A, drugo mjesto učenik B, a treće mjesto učenik C:

$$ABC.$$

Ima li još koji mogući ishod? Recimo, prvo mjesto osvojio je učenik A, drugo mjesto učenik C, a treće mjesto učenik B:

$$ACB.$$

Sada uočavamo da bismo mogli riješiti zadatak raspisivanjem svih slučajeva. Pri provedbi plana treba paziti da se neki od slučajeva ne preskoči. Ishode treba ispisivati sistematično, primjerice ispisati sve slučajeve u kojima je na prvom mjestu učenik A, zatim učenik B te učenik C. Uočimo da je mogućih ishoda 6:

$$\begin{array}{cc} ABC & ACB \\ BAC & BCA \\ CAB & CBA \end{array}$$

□

Možemo li ovaj rezultat generalizirati? Kako bismo riješili zadatak kada bi se natjecala četvorica učenika? Ako krenemo istom metodom ispisivanja svih ishoda, bit će potrebno više vremena jer je više mogućnosti. Za prvo mjesto imamo 4 moguća odabira učenika, zatim za drugo mjesto nam preostaje odabrati 3 učenika (jednom učeniku je već dodijeljeno prvo mjesto), za treće mjesto imamo dva učenika koja možemo izabrati i naposljetku na četvrtom mjestu nalazi se učenik kojem nije ranije dodijeljeno nijedno mjesto. Stoga zaključujemo, mogućih ishoda ima

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Riješili smo dva zadatka koja se razlikuju u broju natjecatelja na dva različita načina. Prvi način bio je ispisivanje slučajeva, a u drugom načinu koristili smo princip kojeg nazivamo principom uzastopnog prebrojavanja ili princip umnoška.

Zadatak 3.1.1. *Jedan razred ima 25 učenika. U matičnoj učionici tog razreda nalazi se 28 sjedećih mjesta. Na koliko različitih načina razrednik može složiti raspored sjedenja učenika u učionici?*

Rješenje. U zadatku je zadan broj učenika nekog razreda i broj stolaca na koje ih treba rasporediti. Svaki stolac nalazi se na drugom mjestu, raspored stolaca je bitan. Zanima nas na koliko načina možemo 25 učenika rasporediti na 28 stolaca, odnosno na koliko načina možemo povezati učenika s jednim stolcem. Uočimo da ispisivanje svih slučajeva u ovom zadatku nije dobar pristup rješavanja jer je broj rasporeda prevelik. Možemo li zadatak riješiti na drugi način, poznajemo li drugu metodu koja je primjerena rješavanju ovog zadatka? Uočimo da je zadatak sličan primjeru s utrkom. Primijenit ćemo princip umnoška. Razrednik može prvog učenika posjesti na jedno od 28 mjesta, te preostaje 27 praznih mjesta. Zatim drugom učeniku bira mjesto na 27 načina, preostaje 26 praznih mjesta. Postupak razrednik nastavlja redom za svakog sljedećeg učenika. Razredniku za zadnjeg učenika preostaje 4 moguća mjesta, a tri mjesta će ostati prazna. Ukupan broj različitih rasporeda sjedenja učenika je $28 \cdot 27 \cdot 26 \cdots 5 \cdot 4$. □

U udžbeniku [4] **princip umnoška** opisan je ovako:

> Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k)$ jednak $N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

Definicija 3.1.1. ***Kartezijev produkt*** *n skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$ za $n \in \mathbb{N}$ je skup $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ svih uređenih n-torki $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elemenata $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_2, \ldots, x_n \in S_n$, tj.*

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \ldots, x_n \in S_n\}.$$

Sljedeći teorem je formalni iskaz principa produkta. Dokaz teorema je izostavljen, a nalazi se u [8].

Teorem 3.1.2. *Neka su $S_1, ..S_n$ neprazni skupovi s konačno mnogo elemenata. Onda je*

$$|S_1 \times \cdots \times S_n| = |S_1| \ldots |S_n|$$

ili kraće

$$|\prod_{k=1}^{n} S_k| = \prod_{k=1}^{n} |S_k|.$$

Primjeri s kojima bi se mogli susresti u svakodnevnom životu zanimljivi su učenicima, te su važni da pobude interes na početku učenja. Sljedeći zadatak je iz udžbenika [11].

Zadatak 3.1.2. *Sandra rješava ispit u kojem pitanja imaju ponuđene odgovore: točno ili netočno. Koliko različitih načina postoji da se odgovori na osam pitanja?*

Rješenje. Zadatak kaže da imamo osam pitanja, za svako od tih pitanja odgovor može biti ili točno ili netočno. Za prvo pitanje biramo između dva ponuđena odgovora, za drugo pitanje isto, za treće i sva preostala pitanja također. Dakle,

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$$

je broj različitih načina da se odgovori na ispitu. □

Ovaj zadatak mogli bismo formalno promatrati kao preslikavanje s jednog skupa (pitanja na ispitu) na drugi skup (ponuđeni odgovori), a trebali bismo odrediti skup svih preslikavanja. Radi potpunosti navedimo sljedeći teorem iz [8].

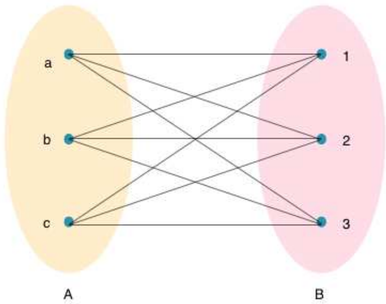
Teorem 3.1.3. *Neka su S i T konačni skupovi, tako da prvi ima n elemenata, a drugi m. Onda svih funkcija $f : S \to T$ ima ukupno m^n, tj vrijedi $|T^S| = m^n$.*

Dokaz. Bilo koja funkcija $f : S \to T$ može vrijednost $f(s_1)$ poprimiti na $|T| = m$ načina, $f(s_2)$ također, itd. do $f(s_n)$. Prema produktnom pravilu onda funkciju f možemo zadati na $m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$ načina, tj $|T^S| = m^n$. □

Sljedeći zadatak je iz udžbenika [4].

Zadatak 3.1.3. *Ekipni susreti u stolnom tenisu igraju se tako da svaki igrač jedne ekipe igra protiv svakog igrača druge ekipe. Ako se svaka ekipa sastoji od triju igrača, koliki je ukupni broj igara?*

Rješenje. Zadane su nam dvije ekipe od tri člana. Pojam ekipe možemo poistovjetiti sa skupom, a članovi ekipe izraženo matematičkim jezikom su elementi skupa. Neka je prva ekipa skup A i neka su članovi ekipe elementi a, b i c. Drugu ekipu možemo označiti skupom B, a elemente s 1, 2 i 3. Učenicima je pri prvim susretima s kombinatornim zadatcima vizualizacija podataka iz zadatka od velike pomoći u razumijevanju problema. Prikazat ćemo dvije vrste vizualizacije ovog zadatka. Slika 3.1 prikazuje dva skupa i elemente tih skupova. Igra se odvija između dva igrača, te je vizualno možemo prikazati kao spojnicu elementa jednog skupa s elementom drugog. Izaberemo jednog igrača (element) iz ekipe A (skupa) $a \in A$ koji će odigrati jednu igru s igračem 1, jednu igru s igračem 2 i jednu igru s igračem 3. Na slici su označene sve igre koje je igrao igrač a, primjećujemo da ih je 3. Zatim, označimo na slici sve igre igrača b, te igrača c. Pogledajmo što je s igrama

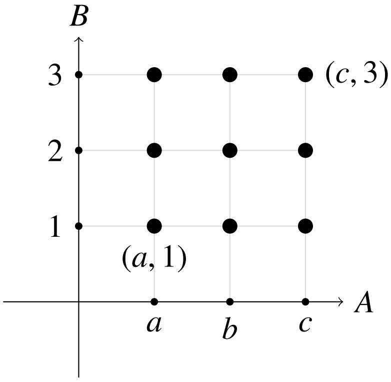


Slika 3.1: Shematski prikaz ekipnog susreta između dvije ekipe.

koje su igrali igrači skupa B. Uočimo da su njihove igre već označene. Rezultat dobivamo prebrojavanjem spojnica. Ukupno ih je 9.

Pogledajmo kako smo dobili 9 spojnica. Prvom igraču pridružili smo tri igre (svaku s jednim igračem suparničke ekipe), te smo postupak ponovili za ostala preostala dva igrača: $3 + 3 + 3 = 9$.

Ovaj zadatak mogli smo riješiti i pomoću principa umnoška. Igre možemo prikazati kao uređene parove i označiti ih u koordinatnom sustavu, poput (x, y). Na mjesto x biramo igrače prve ekipe, a na mjesto y igrače druge ekipe.

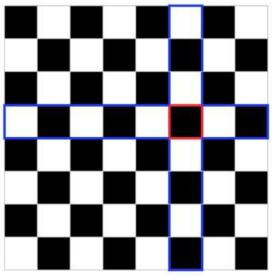


Dakle, imat ćemo $3 \cdot 3 = 9$ uređenih parova, odnosno 9 igara. □

U kombinatornim zadatcima često se pojavljuju zadatci s šahovskim poljima. Sljedeći zadatak iz udžbenika [4] je primjer takvog zadatka.

Zadatak 3.1.4. *Na koliko se načina može odabrati jedno crno i jedno bijelo polje na šahovskoj ploči ako ne smiju biti u istom retku ili stupcu?*

Rješenje. Kako je Pólya naveo prvi korak u rješavanju zadatka uvijek je provjera jesmo li zadatak razumijeli. Šahovska ploča sastoji se od 8×8 polja. Šahovska polja naizmjence su različite boje, dakle imamo 32 crna i 32 bijela polja. Nacrtajmo zadanu šahovsku ploču. U zadatku traži se da odredimo na koliko načina možemo izabrati jedno crno i jedno bijelo polje uz uvjet da izabrana polja nisu niti u istom retku niti u istom stupcu. Izaberimo jedno polje, nije važno jesmo li za prvo polje izabrali crno ili bijelo. Ako smo prvo izabrali bijelo drugo će morati biti crno i obratno. Prvo polje biramo na 32 načina, zatim biramo drugo polje uz uvjet da je ono suprotne boje te se ne nalazi u istom retku ni u istom stupcu. Svekupni broj polja suprotne boje je 32, no od tog broja moramo oduzeti polja suprotne boje od prvog izabranog polja iz istog retka i stupca kojih je 8. Dakle, broj načina na koji možemo izabrati drugo polje je $32 - 8 = 24$. Po principu umnoška slijedi da dva polja na šahovskoj ploči možemo izabrati na $32 \cdot 24 = 768$ načina. □

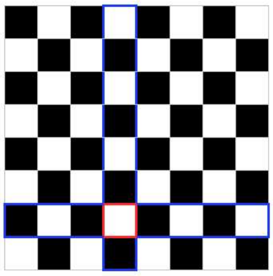


Slika 3.2: Odabrano proizvoljno crno polje.

Objasnimo još jednom na primjeru kako smo odredili broj načina na koji možemo izabrati drugo polje. Neka je prvo izabrano polje ono crne boje kao što je prikazano na slici 3.2. Sada odredimo na koliko načina možemo izabrati bijelo polje. Primjećujemo da se u retku odabranog crnog polja nalaze četiri polja bijele boje, te u stupcu također četiri polja bijele boje. Tih 8 bijelih polja ne smijemo izabrati te ih zato oduzimamo od ukupnog broja bijelih polja na šahovskoj ploči. Dakle, drugo polje biramo na 24 načina. Isto vrijedi i ako bismo izabrali prvo bijelo polje, kao na slici 3.3.

U ovom zadatku neki učenici neće uočiti simetričnost problema, već će odlučiti razlikovati dva slučaja: prvi slučaj kada prvo odabiremo bijelo polje i drugi slučaj kada prvo odabiremo crno polje. U prvom slučaju biramo prvo bijelo polje na 32 načina zatim crno polje na 24 načina, a u drugom slučaju biramo prvo crno polje na 32 načina, zatim bijelo na 24 načina. Dobivene slučajeve ćemo zbrojiti pa slijedi $32 \cdot 24 + 32 \cdot 24$, no to nije točno rješenje.

Pri samostalnom rješavanju ovakvih zadataka učenici se mogu osjećati vrlo nesigurno. Faza smišljanja plana rješavanja zadatka vrlo je važna. Učenike je potrebno potaknuti na istraživanje i traženje dobrog pristupa rješavanja kroz metodu pokušaja i pogrešaka. To je vrlo važna i korisna metoda. Svakim krivim pokušajem uviđamo novu informaciju i kako



Slika 3.3: Odabrano proizvoljno bijelo polje.

se približiti točnom pristupu rješavanja zadatka. Vizualizacija šahovske ploče u ovoj vrsti zadataka vrlo je važna jer pomaže predočiti problem i omogućuje matematički problem približiti kombinatorno-logičnoj mozgalici.

Sljedeći zadatak iz udžbenika [13] zanimljiv je primjer kako u stvarnom životu možemo naići na problem koji se svodi na prebrojavanje podskupova, odnosno binarnih nizova.

Zadatak 3.1.5. *U kongresnoj dvorani nalaze se 34 stropne svjetiljke. Na koliko načina dvorana može biti osvijetljena ako svaka svjetiljka može i ne mora gorjeti?*

Rješenje. Neka su svjetiljke u dvorani elementi skupa S. Svakoj svjetiljci, tj. elementu skupa možemo pridružiti broj 0 ili 1. Broj 0 znači da je svjetiljka ugašena, a broj 1 da svjetiljka gori. Tako možemo dobiti niz duljine 34 koji se sastoji od nula i jedinica, a opisuje izbor svjetiljki koje gore odnosno izbor podskupa. Dakle, broj podskupova jednak je broju nizova duljine 34 koji se sastoji od nula i jedinica. Svaku znamenku u tom nizu možemo izabrati na dva načina. Slijedi da je ukupan broj podskupova jednak 2^{34}. Dvorana može biti osvijetljena na 2^{34} načina. □

Navodim još jedan zadatak iz udžbenika [13].

Zadatak 3.1.6. *Lokot sa šifrom ima četiri koluta i na svakom kolutu 10 znamenaka. Na koliko se načina može izabrati šifru za lokot ?*

Rješenje. Šifru za lokot možemo zapisati kao četiri uzastopne znamenke. Prvu znamenku možemo izabrati na 10 načina, drugu isto na 10, treću i četvrtu također svaku na 10 načina. Dakle po principu umnoška imamo $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ načina za odabrati šifru. □

Napomenimo da je u idućem zadatku iz [1] važno pažljivo pročitati uvjete zadatka.

Zadatak 3.1.7. *Registarska oznaka se sastoji od tri dijela: prvi dio je oznaka grada, drugi dio je troznamenkasti broj, a treći dio se sastoji od dva slova. Na primjer: PŽ 314 RK*

Broj gradova koji imaju svoju oznaku je 36, znamenke mogu biti 0-9, a za posljednja dva slova se koristi 22 slova zajednička hrvatskoj i engleskoj abecedi. Odredi broj različitih registarskih oznaka.

Rješenje. Registracijska oznaka sastoji se od tri dijela. Zadatak ćemo riješiti tako da odredimo koliko načina postoji za odabir prvog, drugog i trećeg dijela. Prvi dio, oznake grada, možemo izabrati na 36 načina jer toliko ima gradova. Drugi dio je troznamenkasti broj. Na koliko načina možemo odabrati troznamenkasti broj? Ovaj dio zadatka mogao bi učenicima biti sličan prethodnom zadatku sa šifrom za sef, ali postoji jedna važna različitost. Troznamenkasti broj sastoji se od tri znamenke, no prva znamenka nije 0, nego je iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Dakle, troznamenkastih brojeva ima $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Neki učenici oslanjajući se na osobno iskustvo mogli bi zanemariti uvjet zadatka i računati broj mogućih nizova tri znamenki. Registracijska oznaka ZD 000 TR ne zadovoljava uvjete zadatka. Treći dio registracijskih oznaka sastoji se od dva slova, svako slovo može biti jedno od 22 dogovorena slova. Zaključujemo da dva slova možemo izabrati na $22 \cdot 22$ načina. Registracijskoj oznaci oznaku grada možemo izabrati na 36 načina, troznamenkasti broj na 900 načina, te dva slova na $22 \cdot 22$ načina. Proizlazi da je broj različitih registracijskih oznaka $36 \cdot 900 \cdot 22 \cdot 22 = 15681600$. □

3.2 Princip zbroja i formula uključivanja - isključivanja

Princip zbroja vrlo je važan princip prebrojavanja. Pojavljuje se u jednostavnim kombinatoričkim zadatcima, ali često se pojavljuje u problemima gdje imamo podjelu na slučajeve. Princip zbroja u udžbeniku navodi Sanja Varošanec [13], dok ostali udžbenici ovaj princip ili ne navode ili navode bez naziva. Na nastavniku je procjena hoće li učenicima kojima održava nastavu nazivlje i principi pomoći za bolje razumijevanje ili će odsustvo stroge klasifikacije koristiti pri razvijanju matematičke logike.

Varošanec u udžbeniku za program od tri do četiri sata nastave matematike tjedno načelo zbroja zapisuje ovako. Ako su S i T konačni skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata, tada je broj elemenata unije $S \cup T$ jednak zbroju broja elemenata skupa S i skupa T, tj. $|S \cup T| = |S| + |T|$.

U udžbeniku Školske knjige [11] princip zbroja je istaknut u općenitijoj formi za skupove koji ne moraju biti disjunktni, no nije imenovan. Općenitija forma obično se naziva formula uključivanja - isključivanja. Za skupove S i T vrijedi

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

Ako su skupovi disjunktni, tada je

$$|S \cup T| = |S| + |T|.$$

Općenito, ako se promatra kardinalni broj unije konačnog broja konačnih skupova koji nisu nužno međusobno disjunktni tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.2.1. ***Formula uključivanja - isključivanja.*** *Ako su $A_1, A_2, \cdots, A_n$ konačni skupovi, tada vrijedi*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Pogledajmo neke primjere zadataka u kojima se koristi princip zbroja. Prvi primjer je iz udžbenika [13].

Zadatak 3.2.1. *Jedan učenik u pernici ima 4 grafitne olovke, 3 kemijske olovke, 2 tehničke olovke i 8 olovaka u boji. Na koliko načina učenik može izabrati jednu olovku iz pernice?*

Rješenje. Pitamo se koliko imamo olovaka u pernici bez obzira na vrstu. Učenik može izabrati ili grafitnu ili kemijsku ili tehničku olovku ili olovku u boji. Skup olovaka iz kojeg učenik bira olovku jednak je uniji skupa grafitnih, kemijskih, tehničkih i olovaka u boji. Ti skupovi međusobno nemaju zajedničkih elemenata, oni su međusobno disjunktni. Prema principu sume veličina skupa olovaka je

$$4 + 3 + 2 + 8 = 17.$$

Dakle, olovku možemo izabrati na 17 načina. □

Sljedeći zadatak ili njemu slične dobro je koristiti kao primjer iz kojeg će učenici uočiti ranije navedeno pravilo za broj elemenata unije $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.

Zadatak 3.2.2. *Među 30 učenika jednog razreda,* 22 *učenika ide na sportske aktivnosti, a* 21 *ih pohađa neku umjetničku aktivnost poput dramske grupe, pjevanja ili slikanja u školi. Koliko učenika ide i na sportske i na umjetničke aktivnosti ako svaki učenik ide barem na jednu dodatnu aktivnost?*

Rješenje. Učenika u razredu jest 30. Ako bi svaki učenik na jedan popis upisao dodatne aktivnosti koje pohađa, na popisu bi ukupni broj aktivnosti bio $22 + 21 = 43$. Dakle, primjećujemo da je broj zapisanih dodatnih aktivnosti za 13 viši od broja učenika jer je $43 - 30 = 13$. Zaključujemo da je 13 učenika zapisalo da pohađa dvije aktivnosti. U razredu je 13 učenika koji idu na sportske i na umjetničke dodatne aktivnosti. □

Navedeni zadatak preuzet je iz udžbenika [11]. Pri rješavanju ovog zadatka važno je dobro razumjeti uvjete zadatka. U navedenom rješenju pretpostavljeno je da svaki učenik ide najviše na dvije aktivnosti od koji je jedna sportska, a druga umjetnička. Ovaj uvjet trebalo bi navesti u iskazu zadatka. Ako taj uvjet ne postoji, ne možemo odrediti koliko učenika ide i na sportsku i na umjetničku aktivnost jer neki učenik može ići primjerice na dvije umjetničke aktivnosti.

Idući zadatak preuzet je iz knjige [1] i primjer je zadatka u kojem skup treba podijeliti na slučajeve.

Zadatak 3.2.3. *Koliko je peteroznamenkastih brojeva u zapisu kojih se nalazi barem jedna znamenka 5?*

Rješenje. *R*azmislimo kako mogu izgledati brojevi koji sadrže barem jednu znamenku 5. Ispisivanje nekoliko brojeva pomaže kod smišljanja plana. Samostalno istraživanje nužno je pri razvijanju logičnog mišljenja i stjecanju iskustva rješavanja kombinatornih problema. Prebrojavanje peteroznamenkastih brojeva u zapisu kojih se nalazi barem jedna znamenka 5 podijelit ćemo na slučaje ovisno o tome kada se u broju prvi put pojavljuje znamenka 5. Važno je da u slučajevima prebrojavamo skupove koji su međusobno disjunktni kako ne bi neke elemente brojali više puta.
1. slučaj: Ako je prva znamenka 5 onda preostale četiri znamenke biramo na 10^4 načina. Ukupno ima 10^4 načina.
2. slučaj: Ako je druga znamenka 5 onda naredne tri znamenke biramo na 10^3 načina, a prvu znamenku biramo na 8 načina (ne smije biti 0 ni 5). Ukupno ima $8 \cdot 10^3$ načina.
3. slučaj: Ako je treća znamenka 5 onda naredne 2 znamenke biramo na 10^2 načina, prvu znamenku na 8 te drugu na 9 načina. Ukupno ima $8 \cdot 9 \cdot 10^2$ načina.
4. slučaj: Ako je četvrta znamenka 5 onda zadnju znamenku možemo izabrati na 10 načina, prvu na 8 te drugu i treću na 9 načina. Ukupno ima $8 \cdot 9^2 \cdot 10$ načina.
5. slučaj: Ako je zadnja znamenka 5, onda prvu možemo izabrati na 8 načina, a preostale na 9^3 načina. Ukupno ima $8 \cdot 9^3$ načina.
Na kraju ukupan broj traženih brojeva je zbroj po slučajevima, tj $10^4 + 8 \cdot 10^3 + 8 \cdot 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 9^2 \cdot 10 + 8 \cdot 9^3 = 37512$. □

3.3 Princip kvocijenta i razlike

Princip kvocijenta

Princip kvocijenta u udžbenicima se ne navodi kao princip, no pojavljuje se u zadatcima. Formalnost ovih principa učenicima nije potrebna, razumijevanje postupaka prebrojavanja mnogo je važnije. Ovaj princip u srednjoškolskim udžbenicima uvodi se uz pojam permutacije s ponavljanjem kao metoda kojom se računa ukupan broj permutacija s ponavljanjem. Naveden je ovdje jer je jedan od principa prebrojavanja i direktno slijedi iz principa zbroja. Princip kvocijenta vezan je uz prebrojavanje istih elemenata, odnosno onih elemenata koje ne razlikujemo. Primjerice ista slova, znamenke, isti objekti poput štapića ili kuglica [1].

Neka su $S_1, \dots, S_n$ u parovima disjunktni neprazni skupovi takvi da je $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. Ako svi ti skupovi imaju isti broj elemenata, tj. $|S_1| = \cdots = |S_n| = k$, onda je broj tih skupova jednak kvocijentu ukupnog broja elemenata skupa S s brojem k:

$$n = \frac{|S|}{k}.$$

Zadatak 3.3.1. *Odredi broj različitih riječi koje možemo napraviti od slova M, A, T, E, M, A, T, I, K, A.*

Rješenje. Neka je R skup svih rasporeda koje možemo sastaviti od zadanih slova pri čemu sva slova razlikujemo. Slova označimo sljedećim oznakama:

$$M_1, A_1, T_1, E, M_2, A_2, T_2, I, K, A_3,$$

tada je $|R| = 10!$. Skup možemo zapisati kao uniju

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$$

pri čemu se u poskupovima R_i nalaze svi rasporedi slova koje možemo dobiti zamjenom oznaka koje predstavljaju isto slovo. Na primjer

$$M_1, A_1, T_1, E, M_2, A_2, T_2, I, K, A_3$$

i

$$M_2, A_3, T_1, E, M_1, A_1, T_2, I, K, A_2$$

su unutar istog podskupa R_i. Možemo reći da svaki R_i predstavlja točno jednu riječ, a sadrži $3! \cdot 2! \cdot 2!$ elemenata, tj. rasporeda slova. Objasimo zašto. Slovo A nalazi se na tri pozicije u svakom rasporedu slova. Na svakoj od te tri pozicije možemo upisati oznake A_1, A_2 i A_3 na $3!$ načina. Analogno vrijedi da za slova M i T imamo $2!$ načina, pa prema principu kvocijenta slijedi da je traženi broj riječi jednak

$$m = \frac{|R|}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

□

Ovaj zadatak preuzet je iz [1]. Na nastavi se može uvesti kao nastavna aktivnost kojoj je cilj usvojiti princip kvocijenta pomoću samostalnog rada na rješavanju problemskog zadatka. Kako bismo učinili zadatak zanimljivim možemo se koristiti didaktičkim pomagalima, primjerice magnetima različitih boja u obliku slova koja se pojavljuju u zadatku. Na taj način učenici bi pomoću boja razlikovali sva slova.

Princip razlike

Pri rješavanju zadataka nekad možemo birati između dva principa prebrojavanja. Zadatak 3.2.3 iz prethodne cjeline riješili smo rastavljanjem na slučajeve i zatim principom sume odredili rješenje. Pri podjeli na slučajeve moramo paziti da smo sve moguće slučajeve ispisali, jer izostavljanje slučaja dovodi do krivog zaključka. Ovaj zadatak možemo riješiti na još jedan način.

Rješenje. Kao u prethodnom načinu rješavanja podijelit ćemo problem na slučajeve. Prvi slučaj bit će svi peteroznamenkasti brojevi, oni koji sadrže znamenku 5 i oni koji je ne sadrže. Njih je ukupno $9 \cdot 10^4$. Traženi broj je dio ovog skupa, treba mu oduzeti broj koji pripada dijelu koji ne želimo brojiti. To nas dovodi do drugog slučaja, skupa svih peteroznamenkastih brojeva koji ne sadrže znamenku 5. Takvih brojeva je ukupno $8 \cdot 9^4$. Slijedi da peteroznamenkastih brojeva koji sadrže barem jednu znamenku 5 ukupno ima $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37512$. □

Primjećujemo da je ovaj način jednostavniji i brži. Način razmišljanja u kojem od svih mogućih ishoda oduzimamo one koji ne zadovoljavaju uvjet zove se princip razlike ili komplementa, te ga navodimo u općem obliku [1].

Neka je A podskup skupa X, a $X \setminus A$ komplement skupa A unutar X, tj. podskup koji se sastoji od svih elemenata u X koji nisu u A. Tada je

$$|X \setminus A| = |X| - |A|.$$

Zadatak 3.3.2. *Iz snopa s 32 karte izvlačimo jednu kartu. Na koliko se načina može izvući karta različita od asa?*

Rješenje. U zadatku treba odrediti na koliko načina se može izvući karta različita od asa odnosno koji je kardinalitet skupa $A = \{\text{karta koja je različita od asa}\}$. Zadan je i skup svih karata kojeg ćemo zvati univerzalni skup i označiti slovom $U = \{\text{karta iz snopa}\}$. Kako bismo odredili $|A|$ trebali bismo prebrojati sve karte koje nisu asevi podjelom na slučajeve ili možemo koristiti komplement $A^c = \{\text{karta je as}\}$. Lako možemo odrediti da je $|A^c| = 4$, jer snop karata ima četiri boje i svaka boja ima asa. Prema načelu zbroja vrijedi $|U| = |A| + |A^c|$ pa je $|A| = |U| - |A^c| = 32 - 4 = 28$. □

3.4 Varijacije, permutacije i kombinacije

Varijacije bez ponavljanja

Definicija 3.4.1. *Kada imamo skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ s n elemenata, tada svaku uređenu r-torku različitih elemenata iz S zovemo varijacija bez ponavljanja r-tog razreda u skupu od n elemenata. Često se koristi i naziv r-permutacija n-članog skupa.*

Broj varijacija r-tog razreda bez ponavljanja označava se s V_n^r ili $V(n, r)$. Sljedeća propozicija iz [14] iznosi formulu kojom se računa broj varijacija r-tog reda bez ponavljanja, ali u nastavi je bitno da učenici zapamte način na koji se dolazi do tog broja. Ključno je razumjeti princip uzastopnog prebrojavanja.

Propozicija 3.4.2. *Broj varijacija r-tog razreda bez ponavljanja od n elemenata jednak je*

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

Dokaz. Promatramo uređene r-torke koje ima r komponenti i pitamo se na koliko načina možemo popuniti te uređene r-torke. Na prvo mjesto možemo odabrati bilo koji od n elemenata iz skupa. Zatim nakon što smo odabrali prvu komponentu, na drugo mjesto možemo odabrati bilo koji od preostalih $n-1$ elemenata iz S i tako dalje. Ukupno imamo prema pravilu produkta

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$$

mogućnosti. □

Zadatak 3.4.1. *Odredite broj načina na koji možemo razmjestiti šest osoba na četiri stolca.*

Rješenje. Zadan je skup od šest osoba. Tada tko će sjesti na prvi od četiri stolca možemo birati između 6 osoba, na drugi stolac između 5 osoba, na treći stolac između 4 osobe i na posljednji četvrti stolac između 3 osobe. Dakle, prema pravilu umnoška odgovor zadatka je $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = V_6^3$. □

Uočimo da u zadatku s početka poglavlja 3.1.1 zapravo određujemo broj varijacija 25-tog razreda bez ponavljanja, tj. rješenje zadatka je V_{28}^{25}.

Vratimo se na početni zadatak. Vidimo da nas $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ podsjeća na faktorijel broja 6, ali nedostaju zadnja dva faktora. Međutim, pomoću razlomka možemo zapisati

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

Poopćenjem primjera slijedi jednakost

$$V_n^r = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Sljedeći zadatak je iz udžbenika [13].

Zadatak 3.4.2. *Koliko se peteroznamenkastih brojeva s različitim znamenkama može napisati od znamenaka*
a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$
b) $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$*?*

Rješenje. a) Peteroznamenkasti broj ima 5 pozicija. Za zadani skup znamenaka $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ vrijedi $|A| = 8$. Raspored znamenki u broju je bitan jer 12345 nije isti broj kao 21345. Zaključujemo da se u zadatku traži broj 5-varijacija 8-članog skupa. Dakle, iz zadanog skupa može se zapisati $V_8^5 = \frac{8!}{3!}$ različitih peteroznamenkastih brojeva.
b) *Prvi način.* U ovom podzadatku zadan je skup $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, slijedi $|B| = 9$. Također se traži odrediti sve peteroznamenkaste brojeve koji se mogu zapisati s različitim znamenkama, no jedna od zadanih znamenki je 0. Znamenka 0 ne može biti prva znamenka broja jer tada ne bi bio peteroznamenkasti. Stoga, razmislimo koliko znamenki iz zadanog skupa može biti na prvoj poziciji. Slijedi da na prvoj poziciji može biti 8 znamenki. Na drugoj poziciji broja može biti također 8 znamenki zato što smo od ukupno 9 znamenki jednu već stavili na prvu poziciju. Za treću poziciju možemo birati 7 znamenki, za četvrtu 6 znamenki te za petu 5 znamenki. Dakle, odgovor je $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.
Drugi način. Zadatak smo mogli riješiti primjenom principa razlike tako da od broja svih poredaka 5 znamenki oduzmemo one koji nisu peteroznamenkasti brojevi, odnosno one kojima je na prvom mjestu znamenka 0. Navedene znamenke možemo razmjestiti u poredak od 5 znakova na V_9^5 načina, a poredaka kojima je na prvom mjestu 0 ima V_8^4. Slijedi da je ukupan broj peteroznamenkastih brojeva jednak $V_9^5 - V_8^4$.

□

Varijacije s ponavljanjem

Definicija 3.4.3. *Kad imamo skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ s n elemenata, tada svaku uređenu r-torku elemenata iz S zovemo varijacija s ponavljanja r-tog razreda u skupu od n elemenata. Dakle, varijacija s ponavljanjem je element Kartezijeva umnoška* $\underbrace{S \times S \times S \times \cdots \times S}_{r}$.

Definicija 3.4.3 se nalazi u udžbeniku [13]. Odrediti broj svih varijacija s ponavljanjem r-tog razreda u skupu od n elemenata dobar je zadatak u kojem učenici mogu koristiti dosadašnja znanja o varijacijama i principima prebrojavanja te doći do formule samostalno.

Zadatak 3.4.3. *Kako odrediti broj svih varijacija s ponavljanjem r-tog razreda u skupu od n elemenata?*

Rješenje. Varijacije r-tog razreda zapisujemo kao uređene r-torke. Na prvo mjesto možemo birati n elemenata, za drugo mjesto možemo opet birati n elemenata jer je ponavljanje dopušteno. Redom biramo elemente za preostala mjesta r-torke. Slijedi da uređenu r-torku možemo izabrati na n^r načina.

□

Pri rješavanju sljedećeg zadatak iz udžbenika [11] korisno je učenicima usmjeriti pažnju na razliku između varijacija bez ponavljanja i s ponavljanjem.

Zadatak 3.4.4. *U gradu se održava nagradna lutrija. Loptice s brojevima od 1 do 25 smještene su u kutiju. Četiri loptice izvlače se jedna za drugom, a izvučeni brojevi se bilježe. Pobjednički brojevi su četiri određena broja u onom poretku u kojem su izvučeni.*
a) Koliko je pobjedničkih brojeva moguće ako se loptice ne vraćaju u kutiju nakon izvlačenja?
b) Koliko je pobjedničkih brojeva moguće ako se loptice vraćaju u kutiju nakon izvlačenja?

Rješenje. Zadan je skup loptica od 1 do 25. Treba odrediti broj svih mogućih poredaka četiri izvučena broja. Dakle vidimo da se radi o varijaciji 4. razreda 25-članog skupa.
a) Izvučene loptice se ne vraćaju u kutiju, dakle određujemo broj varijacija bez ponavljanja. Prva loptica bira se na 25, druga na 24, treća na 23 i četvrta na 22 načina. Moguće je $V_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$ pobjedničkih brojeva.
b) Izvučene loptice se vraćaju u kutiju, dakle određujemo broj varijacija s ponavljanjem. Svaki put kada izvlačimo lopticu biramo je na 25 načina. Dakle, moguće je $25^4 = 390625$ pobjedničkih brojeva. □

Permutacije bez ponavljanja

Permutacije kao i varijacije su rasporedi elemenata iz skupa u kojima je bitan redoslijed elemenata.

Definicija 3.4.4. *Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skup s n elemenata. Svaka uređena n-torka različitih elemenata iz skupa S zove se permutacija skupa S. Kako bi se naglasila različitost elemenata u n-torki često se koristi naziv permutacija bez ponavljanja. Također možemo primijetiti kako je permutacija isto što i varijacija n-tog razreda n-članog skupa.*

Teorem 3.4.5. *Broj permutacija n-članog skupa je $n!$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je n-člani skup $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tada je permutacija uređena n-torka brojeva iz $\{1, \ldots, n\}$. Postoji n mogućnosti za izbor prvog elementa, $n - 1$ mogućnosti za izbor drugog elementa i tako redom do zadnjeg elementa za koji preostaje samo jedna mogućnost. □

Teorem 3.4.5 nalazi se u skripti [9]. Ilustrirajmo pojam na zadatku napisanom po sličnom primjeru iz udžbenika [4].

Zadatak 3.4.5. *Na kinoprojekciju je došlo šest parova. Na koliko načina oni mogu sjesti u isti red na 12 stolica ako:*
a) mogu sjesti u bilo kojem poretku,
b) svaki par sjedi zajedno?
Par čini blok od dvoje ljudi koje možemo rasporediti na dva načina, važno je tko sjedi kome s desne strane.

Rješenje. a) U zadatku se traži da odredimo ukupan broj načina na koji 12 osoba može sjesti na 12 stolica poredanih jedna do druge. Uočimo da šest parova iz zadatka možemo promatrati kao 12-člani skup, a njihov raspored sjedenja kao uređene 12-torke. Po definiciji zaključujemo da se ovdje radi o permutacijama skupa, tj. da se u zadatku traži broj permutacija 12-članog skupa. Možemo primijeniti formulu iz prethodnog teorema. Slijedi, broj mogućih poredaka 12 osoba na 12 mjesta je $12!$.
b) Ovdje treba odrediti na koliko načina 6 parova može sjediti na mjestima ako parovi sjede jedni do drugih. Dakle imamo skup od 6 parova, te tražimo broj permutacija tog skupa. Broj permutacija 6-članog skupa jednak je $6!$. Jesmo li ovime odredili sve rasporede sjedenja? Jedan par čini blok od dvije osobe, recimo osoba a i osoba b. Osobu a i osobu b možemo rasporediti na dva načina unutar para. Ako par poistovjetimo s uređenim parom znamo da (a, b) nije isto što i (b, a). Za svaki par, tj. blok, postoje dva rasporeda. Slijedi da je ukupan broj načina na koji 6 parova može sjediti na stolcima jednak

$$6! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6! \cdot 2^6 = 46080.$$

□

Često se u udžbenicima pojavljuju zadatci u kojem se treba odredit broj različitih rasporeda sjedenja oko okruglog stola. Idući zadatak preuzet je iz udžbenika [13].

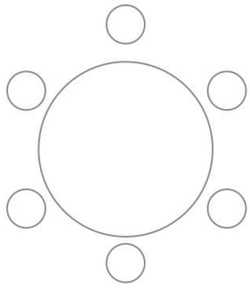
Zadatak 3.4.6. *U blagovaonici je okrugli stol sa 6 stolaca. Na koliko načina šestero ljudi mogu sjesti za okrugli stol? Ako se jedan način sjedenja može dobiti iz drugoga rotacijom, to se smatra istim poretkom.*

Do sada se u zadatcima nismo susreli s okruglim stolovima pa se preporučuje učenicima da nacrtaju skicu stola kako bi lakše vizualizirali problem. U zadatku je zadano 6 ljudi koje treba razmjestiti za stol. Dva razmještaja koje možemo dobiti rotacijom smatramo jednakima. Prikažimo na skici.

Kada učenici razumiju zadatak, prelaze na fazu smišljanja plana kako doći do rješenja. Korisno je za učenike da pokušaju samostalno doći do ideje kako riješiti zadatak. Zadani zadatak riješit ćemo na dva načina.

Rješenje. Prvi način. Ideja je zadani problem svesti na rješavanje dosad poznatih problema u kojima smo ljude trebali poredati u red. Ako bismo odredili jedno mjesto i pridružili ga jednoj osobi, onda bismo taj stol „fiksirali", tj. onemogućili rotacije. Tada preostalih 5 osoba možemo smjestiti za stol na $5!$ načina. Nije važno koju osobu smo izabrali da sjedi na fiksnom mjestu, jer ako bismo tu osobu postavili na neko drugo mjesto svi mogući rasporedi sjedenje već su izbrojani do na rotaciju.

Drugi način. Ideja ovog načina rješavanja je izbrojati sve rasporede sjedenje neovisno o rotaciji, a zatim umanjiti dobiveni rezultat za rasporede koji se ponavljaju rotacijama.



Slika 3.4: Shematski prikaz okruglog stola sa šestero ljudi.

Dakle, kada poretke dobivene rotacijom ne bismo smatrali istima imali bismo 6! načina na koji ljudi mogu sjediti za stolom. Neka je $A = \{\text{svi rasporedi 6 osoba na 6 stolaca}\}$, tada je $|A| = 6!$. Skup A želimo podijeliti na u parovima disjunktne neprazne skupove za koje vrijedi $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$. Skupovi A_i sadrže iste poretke, odnosno svi poretci koji se rotacijom mogu dobiti jedan iz drugoga nalaze se u istom skupu. Trebamo odrediti koliko je takvih skupova tj. treba odrediti m. Zaključujemo da svaki skup A_i ima točno 6 elemenata jer je toliko mogućih rotacija 6 stolaca oko okruglog stola. Primjenom principa kvocijenta slijedi da je

$$m = \frac{|A|}{6} = \frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5!}{6} = 5!$$

Dakle, imamo 5! načina. □

Permutacije s ponavljanjem

Navedena je definicija permutacije s ponavljanjem iz [11] definirana kao i u ostalim srednjoškolskim udžbenicima.

Definicija 3.4.6. *Ako se među n elementima koje permutiramo nalazi k_1 elemenata jedne vrste, k_2 elemenata druge vrste, ..., k_r elemenata r-te vrste, tada govorimo o permutacijama s ponavljanjem.*

Skupovi u kojima se elementi mogu ponavljati zovemo multiskupovima, pa se često u literaturi permutacija s ponavljanjem naziva permutacija multiskupa.

Teorem 3.4.7. *Broj permutacija n-tog reda r-članog skupa $a_1, a_2, \ldots, a_r$ u kojima se element a_i pojavljuje k_i puta, $i = 1, \ldots, k$, $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$, jednak je*

$$\frac{n!}{k_1! \ldots k_r!}.$$

Dokaz teorema može se naći u [8]. U nastavi je učenicima zašto navedena formula vrijedi najbolje pokazati na primjerima. U zadatku 3.3.1 zapravo smo prebrojali permutacije s ponavljanjem, a sljedeći zadatci su preuzeti iz udžbenika [13].

Zadatak 3.4.7. *Aranžer na ogradu stubišta treba poredati pet zastavica i to tri plave, jednu crvenu i jednu zelenu. Na koliko se načina može to učiniti ako plave zastavice međusobno ne razlikujemo?*

Rješenje. Naravno jedna od metoda bila bi sistematično ispisivati sve mogućnosti, no ovdje pomoću principa kvocijenta možemo do rješenja na sljedeći način. Kad bi se plave zastavice razlikovale, imali bismo skup $\{P_1, P_2, P_3, C, Z\}$ za koji postoji 5! permutacija. Međutim, permutacije (P_1, P_2, P_3, C, Z), (P_1, P_3, P_2, C, Z), (P_2, P_1, P_3, C, Z), (P_2, P_3, P_1, C, Z), (P_3, P_1, P_2, C, Z) i (P_3, P_2, P_1, C, Z) kad plave zastavice ne razlikujemo svode se na jednu permutaciju oblika (P, P, P, C, Z). Primjetimo da svakoj permutaciji iz situacije kad se plave zastavice ne razlikuju odgovara $6 = 3!$ permutacija iz situacije kad se plave razlikuju. Stoga, ukupan broj permutacija bez ponavljanja treba podijeliti brojem permutacija elemenata iste vrste, tj. $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$. □

Zadatak 3.4.8. *Imamo 6 jednakih bijelih i 4 jednake crne kuglice koje treba poslagati u niz.*
a) Na koliko se načina to može učiniti?
b) Na koliko se načina to može učiniti ako na prvom mjestu mora biti bijela kuglica?
c) Na koliko se načina to može učiniti ako na početku i na kraju niza mora biti barem jedna crna kuglica?
d) Na koliko se načina to može učiniti ako kuglice iste boje moraju ostati u skupini?

Rješenje. a) Primjetimo da ukupno imamo 10 kuglica koje trebamo poslagati u niz. Koristeći se pravilom računanja permutacija s ponavljanjem slijedi da ukupni broj permutacija bez ponavljanja trebamo podijeliti s brojem permutacija jedne i druge vrste, tj. boje. Dakle, dobivene kuglice možemo poslagati na $\frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$ načina.
b) Na prvo mjesto stavimo bijelu kuglicu, nije važno koju jer sve bijele kuglice smatramo istima. Preostaje nam 9 kuglica koje trebamo poslagati, od kojih je 5 bijele boje, a 4 crne. Ponovo koristeći se pravilom računanja permutacija s ponavljanjem dolazimo do rješenja. Imamo $\frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$ načina da kuglice poslažemo tako da na prvom mjestu bude bijela kuglica.
c) Postavimo jednu crnu kuglicu na početak, a jednu na kraj niza. Sada imamo 8 kuglica koje nam preostaju, među njima je 6 bijelih kuglica i 2 crne. Slijedi da imamo $\frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$ načina za poslagati kuglice u niz kojem je na početku i na kraju barem jedna crna kuglica
d) Ako kuglice iste boje moraju ostati u skupini onda imamo dvije skupine koje možemo posložiti na $2! = 2$ načina. □

Kombinacije bez ponavljanja

Do sada smo se bavili prebrojavanjem različitih razmještaja u kojima je poredak objekata bitan. U ovoj cjelini pokazat ćemo kako prebrojiti moguće izbore objekata kada redoslijed nije bitan. Varijacije i permutacije promatrali smo kao uređene n-torke, a kombinacije ćemo poistovjetiti sa skupovima. Za prijelaz s permutacija na kombinacije korisno je učenicima predstaviti primjer na kojem mogu uočiti razliku između dvije vrste problema, kad je poredak elemenata bitan i kad nije. Takav zadatak može biti primijenjen u kontekstu istraživačke nastave.

Zadatak 3.4.9. *U 3.a razredu je 25 učenika. Na koliko načina mogu izabrati troje učenika koji će*
a) biti predsjednik, zamjenik predsjednika i tajnik razreda?
b) sudjelovati na učeničkom vijeću?

Rješenje. U prvom podzadatku pretpostavimo da prvo biramo predsjednika, zatim zamjenika predsjednika i posljednje tajnika. Ovdje je poredak bitan, jer prvi učenik kojeg razred odabere bit će predsjednik, drugi učenik bit će zamjenik predsjednika, a treći tajnik. Poredak biranja zaduženja je mogao biti i drugačiji, ali tada bi i zaduženje koje pripadne prvom izabranom učeniku odgovaralo dogovorenom poretku biranja. Dakle, uočavamo da se zadatak svodi na određivanje broja varijacija 3 elementa 25-članog skupa, tj.

$$V_{25}^{3} = 25 \cdot 24 \cdot 23.$$

Drugi podzadatak malo je drugačiji. Biramo učenike koji će predstavljati razred na učeničkom vijeću. Ako „prvog” možemo izabrati na 25, „drugog” na 24 i „trećeg” 23 načina, onda je broj mogućih izbora $25 \cdot 24 \cdot 23 = \frac{25!}{22!}$. Možemo uočiti da će „prvi” izabrani učenik i drugo dvoje imati isto zaduženje. Je li važno koji učenik je prvi izabran? Recimo da su redom izabrani učenici Anita, Borna i Cvjetko. Što ako je poredak bio drugačiji, pa su redom izabrani Borna, Anita i Cvjetko? Razlikuje li se odabir učenika koji će sudjelovati na učeničkom vijeću u navedena dva slučajeva? Zaključujemo da se odabiri ne razlikuju jer poredak biranja nije bitan. Koliko smo uređenih trojki prebrojali koje daju isti izbor učenika? Zaključujemo da se taj problem svodi na pitanje koliki je broj permutacija troje učenika. Broj permutacija tročlanog skupa jednak je 3!. Svaki izbor od troje učenika smo izbrojali 3! puta. Dakle, ukupni broj uređenih trojki trebamo podijeliti s brojem permutacija:

$$\frac{\frac{25!}{22!}}{3!} = \frac{25!}{22!3!}.$$

□

Ovaj problem sveli smo na određivanje svih tročlanih podskupova skupa učenika 3.a razreda. Navodim definiciju kombinacija bez ponavljanja iz [8].

Definicija 3.4.8. *Kombinacija bez ponavljanja reda k n-članog skupa* $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *je bilo koji njegov k-člani poskup.*

Dakle, kombinacije bez ponavljanja drugi su naziv za podskupove s određenim brojem elemenata nekog skupa.

U sljedećem zadatku demonstrirana je metoda kojom se određivanje k-kombinacija n-članog skupa svodi na određivanje broja permutacija s ponavljanjem. Sljedeći zadatak je iz udžbenika [4].

Zadatak 3.4.10. *Na koliko načina možemo odabrati dva elementa iz skupa* $S = \{a, b, c, d\}$*?*

Rješenje. Problem svodimo na određivanje niza jedinica i nula duljine $n = 4$. Jedinica znači da je element skupa odabran, a nula znači da element skupa nije odabran. Dakle nizovi koji sadrže dvije jedinice su oni koje trebamo izbrojiti. Ako su dva od četiri elementa jedinice, onda su preostala dva elementa nule. U tablici 3.1 su ispisani svi takvi nizovi i njima odgovarajući odabir elemenata skupa. Broj nizova duljine $n = 4$ s $k = 2$ jedinica i $n - k = 2$ nula jednak je broju permutacija s ponavljanjem:

$$\frac{4!}{2!2!}.$$

□

1,1,0,0	a, b
1,0,1,0	a, c
1,0,0,1	a, d
0,1,1,0	b, c
0,1,0,1	b, d
0,0,1,1	c, d

Tablica 3.1: Dvočlani podskupovi

Definicija 3.4.9. *Neka su n i k prirodni brojevi ili nula i neka je* $n \geq k$*. Tada binomni koeficijent* $\binom{n}{k}$ *(čitaj: n povrh k) definiramo ovako:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Teorem 3.4.10. *Broj k-članih podskupova n-članog skupa, tj. broj kombinacija bez ponavljanja reda k jednak je*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz teorema se nalazi u [8]. Sljedeći zadatak je iz udžbenika [13].

Zadatak 3.4.11. *Na sastanku upravnog odbora tvrtke sudjeluje 7 osoba. Na početku sastanka svi su se međusobno rukovali. Koliko je bilo rukovanja?*

Rješenje. Trebamo izbrojiti broj rukovanja, pa se pitamo kako možemo objasniti rukovanje. U jednom rukovanju sudjeluju dvije osobe koje se međusobno rukuju, dakle poredak nije bitan. Zaključujemo da je broj rukovanja isto što i broj podskupova od dvije osobe. Dvije osobe od sedam možemo izabrani na $\binom{7}{2}$ načina. Dakle, ukupno je bilo 21 rukovanje na početku sastanka. □

Sljedeći zadatak je iz udžbenika [4].

Zadatak 3.4.12. *Na koliko se načina mogu oformiti 4 mješovita plesna para od 10 plesača i 6 plesačica?*

Rješenje. Prvi način. Plesni par čini jedan plesač i jedna plesačica. Kako bismo oformili plesne parove moramo izabrati četiri plesača i četiri plesačice. Četiri plesača možemo izabrati na $\binom{10}{4}$ načina, a plesačice na $\binom{6}{4}$ načina. Sada su izabrane osobe koje će biti u parovima, trebamo još odrediti koliko je načina sparivanja četiri plesača s plesačicama. Kako izbrojati koliko je mogućih parova? Neka su parovi određeni s plesačem, a plesačice u četiri para može se rasporediti na 4! načina. Prvi plesač može biti sparen s bilo kojom od četiri izabrane plesačice, drugi s jednom od tri i tako dalje. Ukupan broj načina formiranja parova je $\binom{10}{4}\binom{6}{4}4!$. Važno je napomenuti da je parove potrebno odrediti s pojedinim plesačima (ili plesačicama), te računamo permutacije plesačica.
Drugi način. Alternativno mogli smo do rješenja doći na sljedeći način:

$$\frac{V_{10}^4 \cdot V_6^4}{4!}.$$

Jednostavnim računom dokazaju se je rezultat jednak prethodno navedem rješenju, no objasnimo kombinatorno zašto to vrijedi. Plesni par zamislimo kao dvije pozicije, jedna muška, a druga ženska pozicija. Na muške pozicije u četiri para možemo izabrati plesača na $V_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ načina, a na ženske pozicije možemo na $V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Pa principom produkta slijedi $V_{10}^4 \cdot V_4^6$. Međutim u zadatku nije važno koji smo par izabrali „prvi", a koji „drugi". U tablici 3.2 su prikazana su dva primjera parova koje smatramo jednakim odabirom. Dakle, primjenjujemo princip kvocijenta i dobiveni izaz $V_{10}^4 \cdot V_6^4$ dijelimo s brojem načina rasporeda parova kojih ima 4! te dobivamo rješenje.

□

Rješavanje zadatka na dva načina korisna je nastavna aktivnost za učenike kojoj je cilj kombinatorno dokazati jednakost algebarskih izraza.

Marko i Marija	Ante i Ana	Petar i Paula	Luka i Lucija
Ante i Ana	Marko i Marija	Petar i Paula	Luka i Lucija

Tablica 3.2: Dva ista odabira parova

Zadatak 3.4.13. *U sastavu Hrvatske nogometne reprezentacije su 3 vratara, 8 braniča, 7 veznih igrača, 6 napadača. Koliko se postava može sastaviti ako postavu čine jedan vratar, četiri braniča, četiri vezna igrača i dva napadača?*

Rješenje. Ukupan broj prema principu o uzastopnom prebrojavanju dobivamo množenjem broja izbora pojedinih igrača. Odredimo broj pojedinih izbora igrača. Jednog od tri vratara možemo odabrati na $\binom{3}{1}$ načina, četvoricu od osmorice braniča možemo odabrati na $\binom{8}{4}$ načina, zatim vezne igrače možemo odabrati na $\binom{7}{4}$ načina i napadače možemo odabrati na $\binom{6}{2}$ načina. Slijedi da je ukupan broj mogućih postava jednak 110250. □

Kombinacije s ponavljanjem

U ovoj cjelini učenici će se susresti s problemima u kojima poredak objekata nije važan i dozvoljeno je izabrati više istih objekata iz neke skupine.

Definicija 3.4.11. *Neka je A skup od n elemenata. Kombinacije s ponavljanjem k-tog razreda skupa A je k-torka $a_1, a_2, \dots, a_k$ ne nužno međusobno različitih elemenata od A.*

U ovoj definiciji zapisanoj u udžbeniku [11] se koristi izraz "k-torke" za opis kombinacije što može dovesti do krivog zaključivanja da je poredak elemenata k-torke važan. Ponekad se uz izraz koristi pridjev "neuređena" kako bi se naglasilo da ne govorimo o uređenoj k-torci. Varošanec u udžbeniku [13] zapisuje sljedeće: „Odgovor na pitanje na koliko načina možemo odabrati r-elemenata iz skupa od n elemenata pri čemu poredak izabranih elemenata nije važan, a ponavljanja su dopuštena glasi $\binom{n+r-1}{r}$. Ovakvi odabiri zovu se kombinacije s ponavljanjem r-tog razreda u skupu od n elemenata."

Teorem 3.4.12. *Broj kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda n-članog skupa jednak je*

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

Prvi dokaz. Stavimo da su elementi n-članog skupa prirodni brojevi $\{1, \dots, n\}$. Sada svakom podskupu od r elemenata koji se mogu ponavljati i posloženi su po veličini, oblika

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$$

pridružimo podskup od r elemenata oblika

$$a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \ldots, a_r + r - 1.$$

Može se provjeriti da smo dobili podskupove od r elemenata koji se ne ponavljaju u skupu od $n + r - 1$ elemenata. Takvih podskupova ima

$$\binom{n + r - 1}{r}.$$

Kao primjer, možemo pogledati slučaj kada je $n = 2$ i $k = 3$. Tada su sve kombinacije s ponavljanjem

$$1, 1, 1; \quad 1, 1, 2; \quad 1, 2, 2; \quad 2, 2, 2$$

i njima odgovaraju kombinacije bez ponavljanja

$$1, 2, 3; \quad 1, 2, 4; \quad 1, 3, 4; \quad 2, 3, 4$$

skupa od 4 elementa. □

Drugi dokaz. Svaki element kombinacije s ponavljanjem označit ćemo zvjezdicom, a pregrade ćemo koristiti u svrhu određivanja o kojem elementu skupa je riječ. Ako elemente biramo iz $\{1, \ldots, n\}$ možemo ih odrediti pomoću $n - 1$ pregrade između kojih ćemo stavljati zvjezdice. Odaberimo r zvjezdica i $n - 1$ pregradu, dakle ukupno $r + n - 1$ mjesta. Na primjer, kombinacija $1, 1, 2, 4, 4, 4$ je jednoznačno određena s

$$* * *| * || * * * .$$

Broj ponavljanja zvjezdica odijeljenih susjednim pregradama odgovara kratnosti pripadnog elementa. Razmještaj r zvjezdica na bilo koje od $r + (n - 1)$ mjesta (preostala mjesta su za pregrade) može se obaviti na $\binom{r+n-1}{r}$ načina, jer toliko ima r-članih podskupova $(r + n - 1)$-članog skupa. □

Učenicima na nastavi dokaze ovog teorema možemo pokazati na odgovarajućim primjerima. Autori udžbenika Školske knjige [11] postupak određivanja broja kombinacija s ponavljanjem demonstrirali su pomoću ideje koja se koristila u prvom dokazu teorema. Pogledajmo jedan primjer zadatka.

Zadatak 3.4.14. *U slastičarnici postoje četiri okusa sladoleda: jabuka, borovnice, ananas i kivi. Na koliko načina možemo izabrati dvije kuglice sladoleda?*

Rješenje. U zadatku je zadan skup sladoleda i zanima nas koliko je 2-kombinacija s ponavljanjem elemenata tog 4-članog skupa. Označimo svaki okus sladoleda prirodnim brojem počevši od 1, tada je zadani skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Ispišimo sada sve 2-kombinacije kao dvoznamenkaste brojeve počevši od najmanjeg broja prema najvećem:

$$11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44.$$

U svakoj kombinaciji broj koji se nalazi na drugom mjestu povećamo za 1 i dobivamo:

$$12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45.$$

Uočimo da je broj kombinacija ostao isti, ali kombinacije više ne sadrže iste elemente. Ovim postupkom skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$ postao je u skup $A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sveli smo problem na određivanje broja 2-kombinacija bez ponavljanja elemenata iz skupa A'. Postoji $\binom{5}{2}$ načina za odabir dvije kuglice sladoleda. □

U udžbeniku [11] zapisan je sljedeći postupak za određivanje broja kombinacija s ponavljanjem r-tog razreda skupa A.

1. Elemente skupa A u nekom poretku zamijenimo brojevima $1, 2, \ldots, n$.
2. Ispišimo r-kombinacije kao r-znamenkaste brojeve poredane od manjeg prema većem.
3. U svakoj kombinaciji broj koji se nalazi na drugom mjestu povećamo za 1, na trećem mjestu povećamo za 2 i tako redom do broja koji se nalazi na r-tom mjestu kojeg povećamo za $r - 1$.

Pojam kombinacije s ponavljanjem ne navodi se u udžbeniku [4], već se navode problemi razdiobe predmeta koji se rješavaju idejom primijenjenom u drugom dokazu teorema.

Zadatak 3.4.15. *Na koliko se načina deset jednakih kuglica može podijeliti na četiri osobe? (Moguće je da neka osoba ne dobije niti jednu kuglicu.)*

Rješenje. U zadatku je potrebno rasporediti 10 kuglica na 4 osobe. Svakom od deset predmeta pridružena je osoba kojoj je taj predmet dodijeljen. Kuglice možemo označiti zvjezdicom. Pregradama je označeno koliko kuglica pripada kojoj osobi. Jednu moguću podjelu kuglica možemo opisati ovako:

$$| * * * | * * | * * * * * \,,$$

što znači da prva osoba nije dobila niti jednu kuglicu, druga osoba dobila je tri, treća dvije, a četvrta pet kuglica.

Uočimo da jedna podjela ima $10 + (4 - 1)$ mjesta. Zvjezdice koje se nalaze ispred prve pregrade pripadaju „prvoj" osobi, ispred druge „drugoj osobi" i tako redom. Kako možemo odrediti raspored zvjezdica i pregrada? Ako od 13 mjesta izaberemo 10 mjesta na koja ćemo upisati zvjezdice, na preostala mjesta upisat ćemo pregrade. Dakle, broj načina na koji se 10 kuglica može podijeliti na četiri osobe jednak je $\binom{13}{10}$. U ovom zadatku tražio se broj kombinacija 10-og razreda s ponavljanjem elemenata 4-članog skupa. Zadatak smo mogli riješiti i tako da izračunamo na koliko načina možemo postaviti pregrade. Pregrada je u ovom primjeru $4 - 1 = 3$, a mogućih rasporeda tih pregrada je $\binom{13}{3}$. □

Primjetimo svojstvo simetričnosti binomnih koeficijenata koje kaže da je

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Učenicima je ovu jednakost vrlo jednostavno objasniti na primjeru poput ovog:

Primjer 3.4.1. *Na koliko načina možemo izabrati* 12 *od* 20 *učenika iz razreda koji će ići na izlet?*

Rješenje. Primjećujemo da je odrediti koji će učenici ići na izlet je isto što i odrediti koji učenici neće ići na izlet. Tada do odgovora na pitanje možemo doći računajući $\binom{20}{12}$ ili $\binom{20}{8}$. □

3.5 Zadatci s natjecanja

Kao što smo do sada već primijetili kombinatorni zadatci uvijek su zadani kroz priču u kojoj trebamo prebrojati objekte. Sljedeći zadatci s natjecanja ukazuju na važnost prepoznavanja skupova i operacija koji dobro opisuju zadane objekte. Proces u kojem priču zapisujemo matematički zovemo matematičko modeliranje. To je vrlo važan i često najteži korak pri rješavanju zadataka [3].

Zadatak 3.5.1. ***(Školsko / gradsko 2022., 3. razred, A razina [17])*** *Na koliko načina se u tablicu* 3×3 *mogu upisati brojevi od* 1 *do* 9 *tako da zbrojevi brojeva u svakom retku, u svakom stupcu i na svakoj drugoj dijagonali budu djeljivi s* 3*?*

Rješenje. U tablicu je potrebno upisati brojeve od 1 do 9 uz uvjet da je zbroj u svakom retku, svakom stupcu i svakoj drugoj dijagonali djeljiv s 3. Djeljivost zbroja s 3 ovisi o ostatku dijeljenja pribrojnika s 3. Promišljanjem o djeljivosti s brojem 3 dolazimo do ideje da bi trebali promatrati ostatke koje brojevi $0, 1, \dots, 9$ daju s 3. Dakle, umjesto brojeva $0, 1, \dots, 9$ u tablicu ćemo upisivati ostatke tih brojeva dijeljenim s 3, tj. tri broja 0, tri broja 1 i tri broja 2 poštivajući uvjet. Takve tablice nazovimo *novim tablicama*.

Pokažimo da je prebrojavanje u zadatku opisanih tablica jednako prebrojavanju *novih tablica*. Svaki ostatak iz skupa $\{0, 1, 2\}$ pojavljuje se tri puta u tablici i prezentira jedan od tri broja iz $\{0, 1, \ldots 9\}$. Broj 1 u *novim tablicama* prezentira brojeve $1, 4$ i 7 jer pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1. Analognim razmišljanjem slijedi da broj 2 u *novim tablicama* prezentira brojeve $2, 5$ i 8, a broj 0 u *novim tablicama* prezentira brojeve $3, 6$ i 9. Odaberimo proizvoljnu *novu tablicu* 3.3 koja zadovoljava uvjet te odredimo koliko tablica opisanih u zadatku ona predstavlja. Broj 0 u gornjem retku možemo zamijeniti na 3 načina, u retku ispod na 2 načina te u posljednjem retku preostaje jedan način. Isto vrijedi za brojeve 1 i 2. Zaključujemo da svaki od tri ostataka možemo zamijeniti odgovarajućim brojem iz skupa $\{0, 1, \ldots 9\}$ na 6 načina. Prema principu produkta slijedi da je broj tablica opisanih u zadatku jednak broju novih tablica pomnožen s 6^3.

0	1	2
0	1	2
0	1	2

Tablica 3.3: Proizvoljna *nova tablica*

Odredimo koliki je broj *novih tablica*. Ponovo krenimo od uvjeta zadatka. Kako bi suma svakog retka, stupca i dijagonale bila djeljiva s 3, onda u svakom retku, stupcu i dijagonali moraju biti upisani ili tri različita broja ili tri ista broja iz $\{0, 1, 2\}$.

Krenimo od *novih tablica* koje u prvom retku imaju različite brojeve. Ukupno imamo 6 načina na koje možemo odabrati prvi redak. Na prvom mjestu drugog retka možemo upisati bilo koji od brojeva iz $\{0, 1, 2\}$, te ćemo tako odrediti koji broj piše u trećem retku prvog stupca. Broj u trećem retku prvog stupca i broj u prvom retku trećeg stupca određuju broj koji se nalazi u sredini tablice te su dalje određeni brojevi u drugom retku trećeg stupca i u trećem retku drugog stupca. Time je određeno i posljednje prazno polje u tablici. Dakle, prema principu umnoška *novih tablica* kojima su u prvom retku različiti brojevi ima ukupno $6 \cdot 3 = 18$.

Zatim prebrojimo *nove tablice* u kojima su u prvom retku svi isti brojevi. U prvi redak možemo upisati neki od tri broja iz $\{0, 1, 2\}$, tj. imamo tri načina izbora broja koji će se ponavljati. Zatim na prvom mjestu drugog retka možemo upisati broj na dva načina. Ostala mjesta određena su tim brojevim. Prema principu umnoška ukupan broj *novih tablica* u kojima se u prvom retku nalaze tri ista broja jednak je $3 \cdot 2 = 6$

Ukupan broj *novih tablica* prema principu zbroja jednak je $6 + 18 = 24$, pa je ukupan broj tablica traženih u zadatku jednak $24 \cdot 6^3 = 5184$.

□

U ovom zadatku bilo je bitno doći do ideje da tablicu popunjavamo brojevima koje dobivamo kao ostatke pri djeljenju s tri. Pri određivanju metode prebrojavanja novih tablica nije očito da adatak rješavamo metodom razdvajanja na slučajeve. Za otkrivanju metode korisno je ispisati primjere koje ne zadovoljavaju uvjet i razmišljati kako takve tablice izbjeći. Primjerice mogli smo razmišljati na sljedeći način. Na prvo mjesto upišimo neki od tri broja iz $\{0, 1, 2\}$, na drugo mjesto u retku možemo upisati neki od preostala dva broja, a na treće mjesto jedini preostali broj. Zatim u drugi redak upisujemo brojeve istim načinom te dolazimo do situacije kao u tablici 3.4. Dakle, pri odabiru mjesta u drugom redu i drugom stupcu nije svejedno koji od preostala dva broja iz $\{0, 1, 2\}$ odaberemo. Vratimo se korak unatrag, promotrimo tablicu te uočimo da je tablica već određena kao što je navedeno u rješenju.

0	1	2
1	0	2
2		

Tablica 3.4: Tablica koja ne ispunjava uvjet zadatka

Zadatak 3.5.2. ***(Županijsko 2021., 4. razred, A razina [19])*** *U nogometnom klubu je n igrača koji imaju dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n. Na kraju sezone igrač s brojem 1 završava karijeru. Uprava bira jednog od ostalih igrača kojeg prodaje nekom drugom klubu, dok svih preostalih $n-2$ igrača dobiva dresove s međusobno različitim brojevima od 1 do n. Na koliko načina uprava može odabrati igrača za prodaju i preostalima dati brojeve tako da nijedan igrač nema veći broj od onog koji je imao ove sezone?*

Navodim službeno rješenje preuzeto s [19] u kojem se uvjeti zadatka interpetiraju na drugačiji način kako bi se primjenjući princip razlike došlo do rješenja.

Rješenje. Izrecimo uvjete zadatka na drugačiji, no ekvivalentan način. Umjesto da nekog igrača prodajemo, pretpostavimo da jednom igraču dajemo dres s brojem 0 za novu sezonu. To znači da će za novu sezonu svi igrači (osim igrača s brojem 1) dobiti novi dres s brojem koji nije veći od broja koji su imali ove sezone s time da jedan igrač mora dobiti broj 0. Označimo s A ukupan broj načina na koji igračima možemo podijeliti brojeve za novu sezonu uključujući broj 0 u odabiru, bez da namećemo uvjet da neki igrač mora dobiti dres s brojem 0. Označimo s B ukupan broj načina na koji igračima možemo podijeliti brojeve za novu sezonu tako da nijedan igrač ne dobije dres s brojem 0. Budući da znamo da jedan igrač mora dobiti broj 0 traženi broj načina na koji možemo podijeliti brojeve za novu sezonu je

$$A - B.$$

Odredimo prvo A. Igrač s brojem 2 može u novoj sezoni dobiti broj $0, 1$ ili 2. Igraču s brojem i ($i = 2, \dots, n$) možemo u novoj sezoni izabrati jedan od $i + 1$ brojeva $(0, 1, \dots, i)$, ali ne može biti isti broj kao neki od njegovih $i-2$ prethodnika, pa ima $i+1-(i-2)=3$ načina za odabir. Igrača je ukupno $n-1$, pa je $A=3^{n-1}$. Odredimo sada B. Igrač s brojem 2 može u novoj sezoni dobiti broj 1 ili 2. Igraču s brojem i ($i=2,\dots,n$) možemo u novoj sezoni izabrati jedan od i brojeva $(1,\dots,i)$, ali ne može biti isti broj kao neki od njegovih $i-2$ prethodnika, pa ima $i-(i-2)=2$ načina za odabir. Igrača je ukupno $n-1$, pa je $B=2^{n-1}$. Dakle, ukupan broj načina na koji možemo igračima podijeliti brojeve za novu sezonu je

$$3^{n-1}-2^{n-1}.$$

□

Zadatak 3.5.3. ***(Županijsko 2019., 4. razred, A razina [18])*** *Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?*

Rješenje. Prvi način. Promatrajmo standardnu (dakle, onu kojoj nisu odstranjena kutna polja) ploču dimenzija $n \times n$. Dva nasuprotna kutna polja koja bi trebala biti odstranjena obojimo crnom, a sva ostala polja bijelom bojom. *Dobar raspored* je raspored n figura na standardnoj ploči u kojem nikoje dvije figure nisu u istom retku ili stupcu. Trebamo odrediti broj različitih *dobrih rasporeda* takvih da nikoja figura nije na crnom polju. Najprije, svih *dobrih rasporeda* ima $n!$ jer u svakom od n redaka moramo izabrati jedinstven stupac u kojem se nalazi figura. *Dobrih rasporeda* u kojem je jedna figura na jednom crnom polju je naprosto $(n-1)!$ jer je ta figura u kutu, a sve ostale razmještamo na ostatak ploče, što je standardna ploča dimenzija $(n-1)\times(n-1)$. Broj *dobrih rasporeda* u kojima su oba crna polja zauzeta je (istom logikom kao u prethodnom slučaju) $(n-2)!$. Konačno, formula uključivanja i isključivanja nam daje rezultat

$$n!+(n-2)!-2\cdot(n-1)!=(n^2-3n+3)(n-2)!.$$

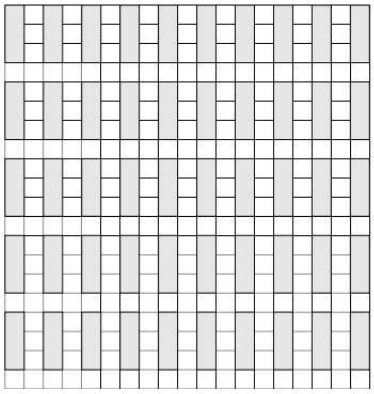
Drugi način. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da smo odstranili prvo polje u prvom retku i zadnje polje u zadnjem retku. Promotrimo prvi redak ploče. Razlikujemo dva slučaja ovisno o tome nalazi li se figura na zadnjem polju. Ako u njemu figura stoji na zadnjem polju, onda ostale figure možemo razmjestiti na točno $(n-1)!$ načina, što je naprosto standardna ploča $(n-1)\times(n-1)$ (kao i u prvom rješenju). Ako figura u prvom retku nije na zadnjem mjestu, onda ona može stajati na nekom od $n-2$ mjesta (ono koje nije prvo ni zadnje). Nadalje, figura u zadnjem stupcu može stajati na nekom od $n-2$ mjesta (bilo gdje osim u prvom i zadnjem retku). Preostalih $n-2$ figura moramo razmjestiti u $n-2$ redaka (ne mogu biti u prvom retku ili u retku gdje se nalazi druga već postavljena figura) te u $n-2$ stupaca (ne mogu biti u zadnjem stupcu ili u stupcu gdje se nalazi prva postavljena figura). To možemo napraviti na $(n-2)!$ načina. Konačno, ukupno imamo

$$(n-1)!+(n-2)\cdot(n-2)\cdot(n-2)!=(n^2-3n+3)(n-2)!.$$

□

Zadatak 3.5.4. ***(Državno 2019., 3. razred, A razina [?])*** *Na ploču dimenzija* 20×19 *postavljene su pločice dimenzija* 3×1 *tako da prekrivaju točno tri polja ploče, a međusobno se ne preklapaju i ne dodiruju, čak ni u vrhovima. Odredi najveći mogući broj pločica* 3×1 *na toj ploči.*

Rješenje. Promatramo vrhove jediničnih kvadrata. Svaki pravokutnik 3×1 prekriva točno 8 vrhova. Primijetimo da, kako god bio okrenut, pravokutnik 3×1 prekriva paran broj vrhova u svakom vertikalnom nizu. Budući da je u svakom vertikalnom nizu 21 vrh, moguće je pokriti najviše 20 vrhova. Vertikalnih nizova vrhova ima 20, pa ćemo ukupno moći pokriti najviše $20 \cdot 20 = 400$ vrhova. To znači da na ploču možemo postaviti najviše $\frac{400}{8} = 50$ pravokutnika 3×1.



Slika 3.5: Primjer 50 pločica postavljenih na ploču 20×19, slika preuzeta s [?].

□

Poglavlje 4

Primjeri nastavnih aktivnosti

4.1 Osnovna škola

Sljedeća nastavna aktivnost prilagođena je stvarnom kontekstu i grafičkom prikazu dok se originalni zadatak nalazi u udžbeniku Školske knjige [11].

Cilj nastavne aktivnosti: opisati princip produkta.

Nastavni oblik: individualan rad.

Nastavna metoda: metoda dijaloga, metoda zaključivanja, metoda pismenih i grafičkih radova.

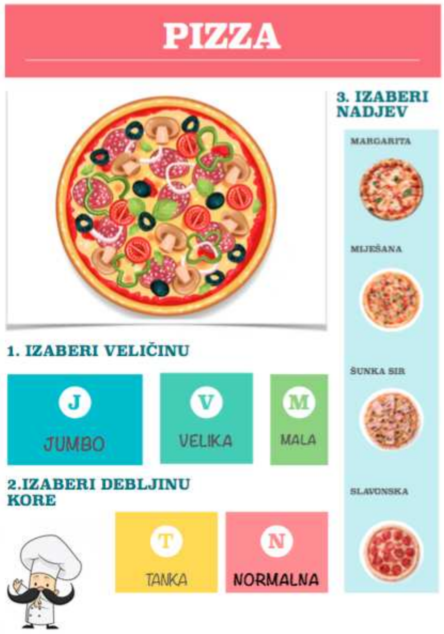
Potreban materijal: Vizualni prikaz zadatka na nastavnom listiću ili u digitalnom obliku.

Učenicima dodijelimo zadatak uz vizualni prikaz zadatka koji se nalazi na slici 4.1.

Zadatak 4.1.1. *Pizzeria nudi pizze veličina jumbo, velika i mala, te se može izabrati želi li se debelo ili tanko tijesto. Od nadjeva u ponudi su margarita, miješana, šunka-sir i slavonska. Na koliko različitih načina kupac može naručiti pizzu?*

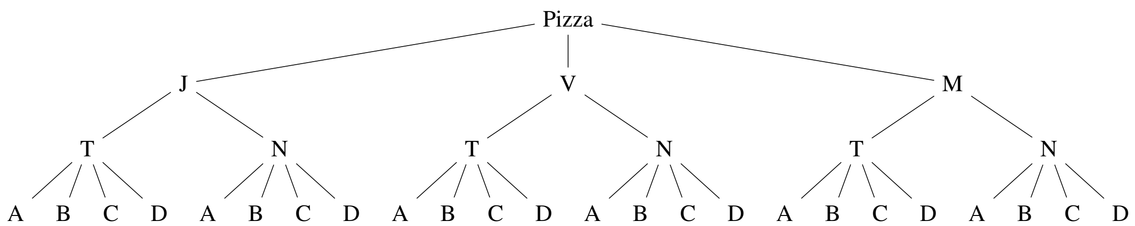
Rješenje. Učenici se s ovakvim zadatkom mogu susresti na dodatnoj nastavi. Ovakav zadatak smatramo problemskim zadatkom, te stoga možemo pristupit rješavanju zadatka pomoću Pólyjinih koraka.

Tražimo koliki je broj različitih pizza moguće naručiti u pizzeriji. Rješavati zadatak možemo započeti tako da odaberemo jednu pizzu koju znamo da pizzerija može napraviti i uvodimo oznake. Prvo biramo koju od ponuđenih veličine želimo naručiti, imamo 3 moguća izbora: jumbo, velika i mala. Označimo veličine pizza redom slovima J, V i M. Zatim, neovisno koju smo veličinu pizze izabrali, možemo izabrati debljinu kore. Tanko tijesto označimo slovom T, a tijesto normalne debljine slovom N. Za svaku izabranu veličinu imamo dva moguća izbora. Posljednje biramo koji od četiri ponuđena



Slika 4.1: Vizualni prikaz zadatka.

nadjeva želimo. Nadjevima dodijelimo redom slova A, B, C i D. Učenike navodimo da zadatak riješe grafičkom metodom. Plan rješavanja zadatka je pomoću stabla odrediti koliko je različitih načina na koje možemo naručiti pizzu. Krećemo od veličine pizze, pa zatim debljine tijesta i posljednje biramo nadjeve. Crtanjem dobivamo stablo prikazano ispod.



Broj načina na koji možemo naručiti pizzu dobijemo prebrojavanjem zadnjeg retka stabla i jednak je 24. Analizirajmo kako smo došli do tog rješenja. Pri odabiru veličine imali smo 3 mogućnosti, zatim smo svakoj od tih mogućnosti mogli pridružiti 2 odabira debljine tjesta. Dobili smo $3 \cdot 2 = 6$ mogućnosti izbora pizze. Svakom izboru pizze koji smo do sada odredili možemo pridružiti još jedan od četiri nadjeva pa je ukupno $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ različitih verzija pizze. Opisan princip naziva se principom produkta ili načelom umnoška. $\square$

4.2 Srednja škola

Sljedeći problemski zadatak i njegova rješenja preuzeti su iz [1], a zadatak je 2020. godine bio u testu županijske razine Natjecanja iz matematike za učenike 4. razreda srednje škole. Zadatak je zanimljiv jer se može riješti na četiri načina. Rješavanje problemskih zadataka na više različitih načina vrlo je korisno za učenike, jer osim što omogućava bolje razumijevanje matematičkih koncepata i razvija analitičko razmišljenje, razvija kreativno razmišljenje te jača samopouzdanje u rješavanju problema.

Cilj aktivnosti: prepoznati i rješavati kombinatorni problem.

Nastavni oblik: rad u paru.

Nastavna metoda: metoda dijaloga, metoda zaključivanja, metoda pismenih i grafičkih radova.

Potreban materijal: bilježnica.

Zadatak 4.2.1. *U prostoriji se nalazi sto kutija visina 1, 2, 3, . . . , 100 koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše* 1 *viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?*

Rješenje. Rješavanje zadatka počinje razumijevanjem problema. Reći ćemo da je raspored kutija *dobar* ako Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju. Uočimo da broj kutija ne ovisi o drugim uvjetima zadatka, stoga možemo započeti s proučavanjem dobrih rasporeda za mali broj kutija. Učenike uputimo da sustavno ispišu dobre rasporede kada imamo jednu, dvije, tri i četiri kutije. Na temelju tih primjera možemo uočiti nekoliko pravilnosti. Možemo postaviti hipotezu da za n kutija imamo 2^{n-1} dobrih rasporeda ili na temelju konkretnih primjera možemo uočiti strukturu dobrih rasporeda. Dobre rasporede za četiri kutije možemo zapisati ovako:

$$1234,$$

$$2341,$$

$$3412, 3421,$$

$$4123, 4231, 4312, 4321.$$

Ako razmišljamo kako sustavno ispisati brojeve vidimo da ih možemo sortirati kao brojeve, tj. podijeliti u grupe prema prvoj znamenki. Tako uočavamo da dobrih rasporeda koji počinju s 4 ima jednako mnogo kao dobrih rasporeda s tri kutije. Također uočavamo da tako dobivamo uzastopne brojeve. Ova opažanja će nam poslužiti da dokažemo našu hipotezu. Nakon što smo s učenicima provjerili razumijevanje problema i postavili hipotezu upućujemo ih na rješavanje zadatka određenim metodama.

Prvi način je rješavaje zadatak rekurzivnim opisivanjem dobrih rasporeda. Neka je a_n traženi broj dobrih rasporeda kutija za prirodni broj n. Za svaki dobar raspored n kutija uklanjanjem najviše kutije dobivamo dobar raspored $n-1$ kutija. Obratno, ako je dan dobar raspored kutija visina $1, 2, \ldots, n-1$, onda kutiju visine n možemo dodati na točno dva mjesta kako bismo i dalje dobili dobar raspored: možemo ju dodati na početak niza ili točno iza kutije visine $n-1$. Stoga je $a_n = 2a_{n-1}$. Iz toga slijedi da je

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} = \cdots = 2^{n-1} a_1.$$

Budući da je $a_1 = 1$, zaključujemo da je $a_n = 2^{n-1}$.

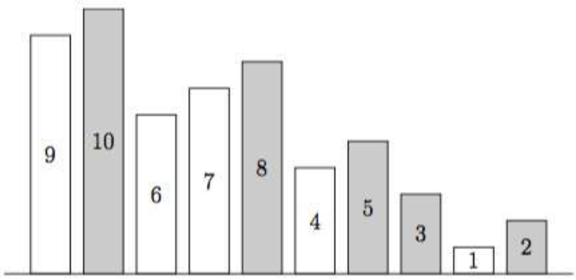
Drugi način rješavanja zadatka je podjelom na slučajeve prema položaju najviše kutije. Promotrimo dakle gdje sve možemo postaviti najvišu kutiju. Kutiju n uvijek možemo staviti na prvo mjesto, bez obzira na raspored preostalih kutija. Naime, Fiko s nje može skočiti na bilo koju drugu kutiju, budući da su sve ostale niže od n. Dakle, za svaki mogući dobri raspored $n-1$ kutija dobijemo jedan dobri raspored n kutija u kojemu je kutija n na prvom mjestu. Pretpostavimo da se kutija visine n nalazi na drugom mjestu. Primijetimo da tada na prvom mjestu mora biti kutija $n-1$; u suprotnom mačak Fiko nikako ne može s prve kutije skočiti na drugu. Dakle, za svaki mogući dobri raspored $n-2$ kutija dobijemo jedan dobri raspored n kutija u kojemu je kutija n na drugom mjestu. Analogno, ako se kutija n nalazi na k-tom mjestu, gdje je $k \in \{3, 4, \ldots, n\}$, onda se na mjestu $k-1$ mora nalaziti kutija $n-1$, na mjestu $k-2$ kutija $n-2$, itd. na mjestu 1 kutija $n-k+1$. Preostalih $n-k$ kutija možemo poredati u bilo koji od a_{n-k} dobrih rasporeda. Stoga vrijedi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots a_1 + 1$ Budući da je $a_1 = 1$, sada možemo računati $a_2 = 2$, $a_3 = 2 + 1 + 1 = 4$ i postavljamo slutnju da je $a_n = 2^{n-1}$. Tu tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom. Bazu već imamo, a ako pretpostavimo da je $a_k = 2^{k-1}$ za sve $k < n$, prema dobivenoj rekurzivnoj relaciji slijedi $a_n = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + \ldots 2^0 + 1$.

Treći način rješavanja zadatka je podjelom na slučajeve prema visini prve kutije. Pozivamo učenike da krenu redom promatrati kutije od najniže prema više. Ako kutiju visine 1 postavimo na prvo mjesto, onda nakon nje nužno slijedi kutija visine 2 i tako redom slijede ostale kutije. Ako je prva kutija visine 2, onda nakon nje ne možemo postaviti kutiju visine 1 jer mačak može skočiti samo na kutiju koja je najviše za 1 viša od one na kojoj se nalazi. Zaključujemo da nakon kutije 2 slijede redom kutije za 1 više od prethodne sve do kutije visine n, a na posljednje mjesto dolazi kutija visine 1. Ako je prva kutija visine 3 analognim razmišljanjem zaključujemo da nakon kutije visine n kao zadnje dvije kutije možemo rasporediti kutije 1 i 2 na a_2 načina. Općenito, ako je prva kutija visine k, nakon nje redom slijede kutije visine $k+1, \ldots, n$, te nakon toga moramo rasporediti kutije visina od 1 do

$k-1$, što možemo na a_{k-1} načina. Tako smo pokazali da je $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+\cdots+a_1+1$, te možemo dovršiti zadatak kao u drugom rješenju.

Četvrti način rješavanja zadatka je pomoću uočavanja bijekcije s binarnim nizovima. Hipoteza s početka da za n kutija ukupan broj dobrih rasporeda ima 2^{n-1} vodi ideji da to dokažemo uspostavljanjem bijekcije s binarnim nizovima duljine $n-1$, jer takvih nizova ima 2^{n-1}. Primijetimo da pozicija najviše kutije, tj. kutije n jedinstveno određuje raspored kutija lijevo od nje. Naime, ispred kutije n može biti jedino kutija $n-1$, a ispred nje onda jedino kutija $n-2$ itd. Za preostale kutije možemo razmišljati na isti način. Preciznije, neka se kutija n nalazi na poziciji $k \in 1, 2, \ldots, n$. To znači da točno znamo raspored kutija $n-1, n-2, \ldots, n-k+1$. Preostalih $n-k$ kutija se nalazi na pozicijama $k+1, k+2, \ldots, n$ i one su raspoređene po istom pravilu. Pridružimo svakom rasporedu n kutija n-znamenkasti binarni niz kojemu je na zadnjem mjestu uvijek 1. Svako mjesto s kojeg Fiko mora skočiti dolje označimo s 1, a svako gdje mora skočiti gore s 0. Vrijedi i obratno, svaki takav binarni niz odgovara točno jednom rasporedu kutija po kojima Fiko može skakati. Prva jedinica u tom nizu određuje poziciju kutije visine N. Kao što smo vidjeli, sve kutije lijevo od te pozicije su onda jedinstveno određene. Druga jedinica neka određuje mjesto najviše kutije od preostalih, i tako dalje. Na slici 4.2 je primjer koji odgovara binarnom nizu

$$0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1.$$



Slika 4.2: Raspored kutija, slika preuzeta iz [16].

Dakle, traženih rasporeda kutija ima jednako kao i binarnih nizova duljine n kojima je na zadnjem mjestu 1, odnosno ima ih 2^{n-1}. $\square$

Bibliografija

[1] M. Bašić, *Aha! Putovanje u središte problema*, Hrvatsko Matematičko društvo, Zagreb, 2020.

[2] Maths Careers, *Bridges of Königsberg and Graph Theory*, dostupno na: `https://www.mathscareers.org.uk/bridges-of-konigsberg-and-graph-theory/`, kolovoz 2023.

[3] M. Cvitković, *Kombinatorika: zbirka zadataka*, Element, 1994.

[4] B. Dakić i N. Elezović, *Matematika 3 udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola, 2. dio, 4 ili 5 sati nastave tjedno*, Element, 2020.

[5] Hrvatska enciklopedija (mrežno izdanje), *Kombinatorika*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, dostupno na: `http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=32549`, kolovoz 2023.

[6] W. L. Hosch, *Pascal's triangle*, Encyclopedia Britannica, dostupno na: `https://www.britannica.com/science/Pascals-triangle`, kolovoz 2023.

[7] D. Jovičević, *Elementi logike*, Gloden marketing – Tehnička knjiga, 2007.

[8] D. Kovačević i D. Žubrinić, *Uvod u diskretnu matematiku*, Element, 2014.

[9] I. Nakić, *Predavanja iz Diskretne matematike*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2011./12.

[10] L. Pecko, *Utjecaj problemske nastave na aktivnost učenika u nastavi prirode*, sv. 10, Sveučilište Jurja Dobrile u Puli, Odjel za obrazovanje učitelja i odgojitelja, 2015.

[11] A. Pletikosić, I. Matić, L. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec i Ž. Dijanić, *MATEMATIKA 3 - udžbenik matematike s dodatnim digitalnim sadržajima i zadatcima za rješavanje u trećem razredu srednje škole*, Školska knjiga, 2020.

[12] G. Pólya, *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, 1966.

[13] S. Varošanec, *Matematika 3, udžbenik za 3. razred gimnazija i strukovnih škola*, Element, Zagreb, 2020.

[14] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[15] R. Wilson i Watkins J. J., *Combinatorics: ancient & modern*, OUP Oxford, 2013.

[16] Agencija za odgoj i obrazovanje, *Testovi i rješenja sa školske i županijeske razine Natjecanja iz matematike 2020.*, dostupno na: `https://www.azoo.hr/natjecanja-i-smotre-arhiva/testovi-i-rjesenja-sa-skolske-i-zupanijske-razine-natjecanja-iz-matematike-2020/`, listopad 2023.

[17] ———, *Testovi i rješenja sa školske razine Natjecanja iz matematike 2022.*, dostupno na: `https://www.azoo.hr/natjecanja-i-smotre-arhiva/testovi-i-rjesenja-sa-skolske-razine-natjecanja-iz-matematike-2022/`, listopad 2023.

[18] ———, *Testovi i rješenja sa školske, županijske i državne razine Natjecanja iz matematike 2019.*, dostupno na: `https://www.azoo.hr/natjecanja-i-smotre-arhiva/testovi-i-rjesenja-sa-skolske-zupanijske-i-drzavne-razine-natjecanja-iz-matematike-2019/`, listopad 2023.

[19] ———, *Testovi i rješenja sa županijske razine Natjecanja iz matematike 2021.*, dostupno na: `https://www.azoo.hr/app/uploads/2021/04/zup2021_rjeA.pdf`, listopad 2023.

[20] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kratki prikaz rezultata inicijalne analize upitnika*, dostupno na: `https://skolazazivot.hr/kratki-prikaz-rezultata-inicijalne-analize-upitnika/`, kolovoz 2023.

[21] Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske, *Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne skole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne skole na razini 4.2.*, Zagreb, 2019., dostupno na: `https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf`, kolovoz 2023.

Sažetak

U diplomskom radu je izložen povijesni pregled razvoja kombinatorike u granu matematike. Povijesna i kulturna vrijednost matematike jedan je od odgojno-obrazovnih ciljeva navedenih u kurikulumu. Navedeni su ishodi učenja koji se ostvaruju usvajanjem nastavnih sadržaja iz područja kombinatorike. Principi prebrojavanja prvi su nastavni sadržaj koji je analiziran. Opisani su princip umnoška, princip zbroja, princip razlike i princip kvocijenta te su za svaki od navedenih principa dani primjeri zadataka iz udžbenika srednjih škola. Definirani su pojmovi permutacije, varijacije i kombinacije s ponavljanjima i bez uz primjere zadataka koji zorno predočuju pojmove. Osim zadataka iz udžbenika navedeni su i primjeri zadataka s nacionalnih matematičkih natjecanja. Na kraju su dani primjeri nastavnih aktivnosti. Prva nastavna aktivnost vizualnim materijalima je prilagođena osnovnoškolskom uzrastu te je cilj aktivnosti opisati princip produkta. Zadatak sa županijske razine nacionalnog matematičkog natjecanja odabran je za nastavnu aktivnost u srednjoj školi. Cilj nastavne aktivnosti je prepoznati različite metode rješavanja zadatka i riješiti ga na četiri različita načina.

Summary

This thesis presents a comprehensive overview of the historical evolution of combinatorics into a separate branch of mathematics. Within the educational framework, the appreciation for the historical and cultural dimensions of mathematics stands as a prominent goal. Listed within are also the learning outcomes derived from the integration of combinatorial principles into teaching methodologies. The initial focus centers on the foundational topic of counting principles, with subsequent analyses delving into the principles of multiplication, sum, difference, and quotient. Each principle is explicated through illustrative problems sourced from high school textbooks, enhancing clarity and comprehension. Extending beyond the basics, the thesis defines the concepts of permutations, variations, and combinations, considering both repetitions and non-repetitions. Accompanying these definitions are practical examples showcasing the application of these concepts. Additionally, a compilation of problems from national mathematics competitions enriches the illustrative repertoire. Towards the conclusion, the thesis provides examples of teaching activities. The first activity, tailored for elementary school students and employing visual aids, aims to describe the multiplication principle. For high school students, a challenging problem from the county level of the national mathematics competition is incorporated into one of the teaching activities, fostering the recognition and application of diverse problem-solving methodologies through four distinct approaches.

Životopis

Rođena sam 4. travnja 1997. u Zagrebu. Školovanje započinjem u Osnovnoj školi Ivana Gundulića, te nastavljam u Klasičnoj gimnaziji u Zagrebu. Po završetku gimnazije 2015. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Diplomski studij Matematike; smjer: nastavnički upisujem 2019. godine na istom fakultetu. Za vrijeme studija radila sam na snimanjima TV serija i filmova u sektoru režije i sektoru produkcije: Nestali (HRT), Nestali 2 (HRT), SAS: Rough Heroes (MP film, BBC), Božji gnjev (Eurofilm), Bosanski lonac (Telefilm), The Guests (MP film, Blumhouse), The Wolf, the Fox and the Leopard (Nukleus film, Lemming film). Školske godine 2022./2023. radila sam kao nastavnica matematike u Nadbiskupskoj klasičnoj gimnaziji u Zagrebu.