Problemi vizualizacije u teoriji grafova

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Viktorija Trupina

PROBLEMI VIZUALIZACIJE U TEORIJI GRAFOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Sonja Žunar

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija grafova jedna je od grana diskretne matematike koja proučava matematičke strukture jednostavno nazvane grafovi. Grafovima možemo modelirati i prikazati složene probleme na jednostavniji način. Stoga se pojavljuju u raznim znanostima, ali i u svakodnevnim situacijama. Mnoge pojave možemo prikazati točkama i njihovim spojnicama, odnosno objektima i njihovim odnosima koji sačinjavaju graf. Graf može predstavljati cestovne, zrakoplovne, željezničke veze, električne mreže, komunikacijske centre, razne računarske dijagrame ili strukture podataka, kemijske veze među atomima i molekulama, evolucijska i rodbinska stabla u biologiji, rasporede i poslove u gospodarskim projektima, socijalne veze među ljudima itd. U ovom radu proučit ćemo neke od poznatih problema vizualizacije koji su postavili temelje ove matematičke discipline. Slijedi pregled rada po poglavljima.

U prvom poglavlju ćemo navesti definicije osnovnih pojmova i vizualne prikaze istih koji će nam biti potrebni za opisivanje problema u narednim poglavljima.

U drugom poglavlju proučavamo problem predočavanja grafa u ravnini što je često potrebno u raznim znanostima koje se služe teorijom grafova. U tom poglavlju obrađujemo slavnu Eulerovu formulu. Ona ima mnoštvo važnih posljedica, od kojih ćeme detaljnije opisati one vezane uz Platonova tijela.

U trećem poglavlju obrađujemo problem bojenja vrhova grafova te uvodimo pojmove pravilnog bojenja vrhova i kromatskog broja grafa. Određujemo kromatske brojeve nekih od najpoznatijih grafova te dokazujemo neke opće rezultate o kromatskom broju. Na koncu poglavlja opisujemo neke algoritme za pronalazak pravilnog bojenja konačnih jednostavnih grafova.

U četvrtom poglavlju izlažemo slavni Teorem četiri boje te pokušaje njegovog dokazivanja kroz povijest. Dokazujemo Teorem pet boja i detaljno opisujemo jedan od najslavnijih pogrešnih dokaza u povijesti matematike, koji naizgled dokazuje Teorem četiri boje koristeći Kempeove lance.

U petom, posljednjem, poglavlju proučavamo najstariji problem teorije grafova, problem sedam mostova. Ovaj problem je vezan za obilazak tadašnjeg grada Königsberga. Odgovor na pitanje postoji li šetnja tim gradom preko svih sedam postojećih mostova tako da se svaki most prijeđe točno jednom te se šetač na kraju nađe na početnoj poziciji daje matematičar Leonhard Euler čime postavlja temelje teoriji grafova. Kao poopćenje ovog problema, opisujemo i problem kineskog poštara.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi teorije grafova

Definicija 1.1. ***Graf*** *je uređeni par $G = (V, E)$, gdje je $\emptyset \neq V = V(G)$ skup* ***vrhova*** *(eng. vertex), $E = E(G)$ multiskup jednočlanih i dvočlanih podskupova od V koje zovemo bridovima (eng. edge). Kažemo da brid $e = \{u, v\} \in E$ spaja vrhove u i v koji se zovu krajevi od e. Kažemo još da su tada vrhovi u i v incidentni s e, a vrhovi u i v susjedni i pišemo $e = uv$. Graf sa samo jednim vrhom zove se trivijalan, a graf s barem dva vrha netrivijalan. Graf G je* ***konačan*** *ako su V i E konačni skupovi, a inače je* ***beskonačan****.*

Definicija 1.2. *Za grafove $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ kažemo da su* ***izomorfni*** *ako postoji bijekcija $\phi : V \to V'$ takva da za sve vrhove $u, v \in V$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\phi(u), \phi(v)\} \in E'.$$

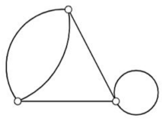
Definicija 1.3. *Neka je $G = (V, E)$ graf. Brid $e \in E$ koji je jednočlani podskup od V zove se* ***petlja****, a brid koji je dvočlani podskup od V zove se* ***pravi brid*** *ili karika. Brid $e = \{u, v\}$ koji se u multiskupu E pojavljuje barem dvaput zove se* ***višestruki brid****.*

Definicija 1.4. *Graf G je* ***jednostavan*** *ako nema ni petlja ni višestrukih bridova. G je* ***prazan*** *graf ako je $E(G) = \emptyset$.*

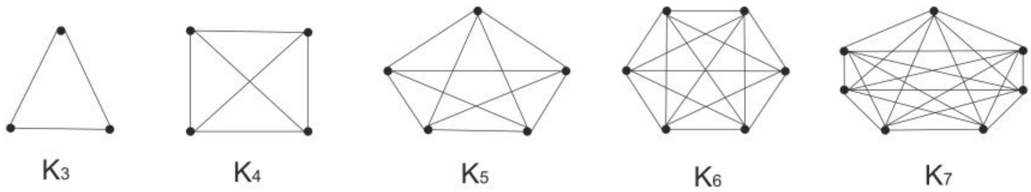
Svaki graf zamišljamo geometrijski kao strukturu s točkama i linijama na način da vrhove grafa identificiramo s točkama ravnine ili prostora, a bridove s neprekidnim krivuljama koje spajaju točke pridružene njihovim krajevima.

Na slici 1.1 vidimo primjer grafa koji ima i petlju i višestruki brid.

Definicija 1.5. *Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom naziva se* ***potpun graf****. Do na izomorfizam postoji jedinstveni potpuni graf s n vrhova i $\binom{n}{2}$ bridova koji označavamo K_n. Označimo s $|V|$ broj vrhova, a s $|E|$ broj bridova grafa $G = (V, E)$.*

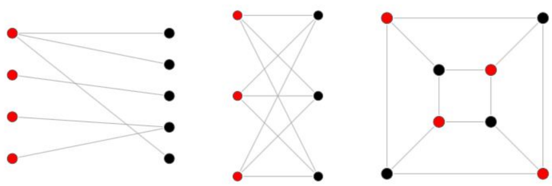


Slika 1.1: Graf koji nije jednostavan. Slika je preuzeta iz [12], str. 19.



Slika 1.2: Potpuni grafovi K_n za $n = 3, 4, 5, 6, 7$. Slika je preuzeta iz [12], str. 30.

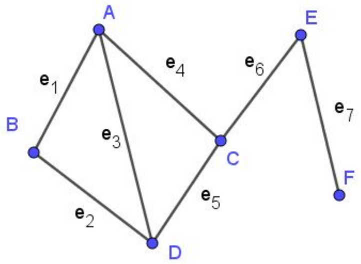
Definicija 1.6. *Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je* ***bipartitan*** *ili dvodijelan graf ako se skup V može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid iz E spaja vrh iz X s vrhom iz Y. Particija (X, Y) zove se tada* ***biparticija*** *grafa G.*



Slika 1.3: Primjeri bipartitnih grafova

Definicija 1.7. ***Potpun bipartitni*** *graf jednostavan je graf s particijom (X,Y) u kojem je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom iz Y. Ako je $|X| = m$ i $|Y| = n$, takav je graf jedinstven do na izomorfizam i označava se $K_{m,n}$.*

Definicija 1.8. ***Šetnja*** *u grafu G je netrivijalan konačan niz $W = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ čiji su članovi naizmjence vrhovi $v_i \in V(G)$ i bridovi $e_i \in E(G)$ za svako $0 \leq i \leq k$. Kažemo još da je W* ***šetnja*** *od vrha v_0 do vrha v_k ili (v_0, v_k) - šetnja. Vrhovi v_0 i v_k nazivaju se redom* ***početak i kraj*** *šetnje W, a $v_1, v_2, ..., v_{k-1}$* ***unutarnji*** *vrhovi šetnje W. Broj k zove se* ***duljina šetnje*** *W. Šetnja W je* ***zatvorena*** *ako je $v_0 = v_k$.*



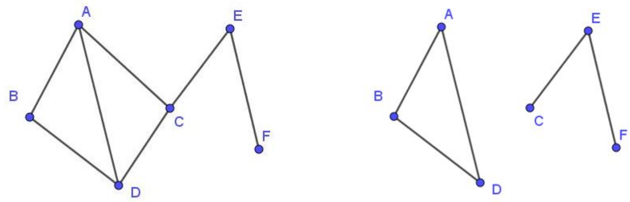
Slika 1.4: Graf s označenim vrhovima i bridovima

Definicija 1.9. *Šetnja u kojoj su svi bridovi međusobno različiti naziva se* ***staza****.*
Ako se šetnja W sastoji od međusobno različitih vrhova (samim time i bridova), onda je nazivamo ***put****. Zatvorena šetnja u kojoj su svi unutarnji vrhovi međusobno različiti zove se* ***ciklus****.*

Definicija 1.10. ***Udaljenost*** *dvaju vrhova nekog grafa je duljina najkraćeg puta među njima.*

Primjer 1.0.1. *Pogledajmo graf prikazan na slici 1.4.*
Primjer jedne šetnje od vrha A do vrha F u tom grafu je: $Ae_3De_2Be_1Ae_3De_5Ce_6Ee_7F$.
Primjer jedne staze od vrha A do vrha F u tom grafu je: $Ae_1Be_2De_3Ae_4Ce_6Ee_7F$.
Primjer jednog puta od vrha A do vrha F u tom grafu je: $Ae_4Ce_6Ee_7F$.

Definicija 1.11. *Za graf kažemo da je* ***povezan*** *ako za bilo koja dva vrha tog grafa postoji put koji ih povezuje. U suprotnom, graf nazivamo nepovezanim.*



Slika 1.5: Primjer povezanog i nepovezanog grafa s vrhovima A, B, C, D, E, F i G

Primjer 1.0.2. *Na slici 1.5 desno vidimo nepovezani graf G s vrhovima A, B, C, D, E i F čiji se skup vrhova može prikazati kao unija skupova vrhova* $\{A, B, D\}$ *i* $\{C, E, F\}$*, a skup* *bridova kao unija skupova bridova $\{AB, AD, BD\}$ i $\{CE, CF\}$. Drugim riječima možemo ga prikazati kao uniju dvaju povezanih grafova koje zovemo* ***komponentama povezanosti*** *grafa G.*

Definicija 1.12. *Povezan graf bez ciklusa nazivamo* ***stablo*** *ili drvo.*

Teorem 1.1. *(**karakterizacija stabla**)*
Neka je $G = (V, E)$ jednstavan graf. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1. *Graf G je stablo;*
2. *Za svaka dva vrha $u, v \in V$ postoji jedinstveni put u grafu koji ih povezuje;*
3. *Graf G je povezan, a za svaki $e \in G$, graf $G - e$ je nepovezan;*
4. *Vrijedi $|V(G)| = |E(G)| + 1$.*

Definicija 1.13. ***Stupanj*** *vrha grafa je broj bridova koji su incidentni s tim vrhom, pri čemu se petlje broje dva puta.*

Primjer 1.0.3. *Na grafovima sa slike 1.5 očito je da je stupanj vrha B u oba slučaja 2. Stupanj vrha A je u prvom grafu 3, a u drugom 2.*

Definicija 1.14. *Neka je G graf sa skupom vrhova V(G) i skupom bridova E(G) i neka je G_1 graf sa skupom vrhova $V(G_1)$ i skupom bridova $E(G_1)$. Tada je G_1* ***podgraf*** *grafa G ako je $V(G_1) \subseteq V(G)$ i $E(G_1) \subseteq E(G)$ i pišemo $G_1 \subseteq G$. Ako je $G_1 \subseteq G$ i $G_1 \neq G$, pišemo $G_1 \subset G$ i tada G_1 nazivamo* ***pravi podgraf*** *grafa G.*

Definicija 1.15. ***Minora*** *grafa G je bilo koji graf dobiven iz G nizom elementarnih operacija, a to su odstranjivanje vrha, odstranjivanje brida i kontrakcija brida.*

Slika 1.6: Graf, podgraf i minora

U definiciji 1.12 pod kontrakcijom nekog brida *e* iz grafa podrazumijevamo njegovo uklanjanje te identificiranje njegovih vrhova. Tako dobiveni graf označavamo sa *G/e*.
Na sljedećoj slici vidimo prvo kako od grafa uklanjanjem crvenog brida dolazimo do njegovog podgrafa, a zatim kako kontrakcijom crvenog brida dobijemo minoru grafa.

Poglavlje 2

Problem ravninskog prikaza grafa

2.1 Opis problema

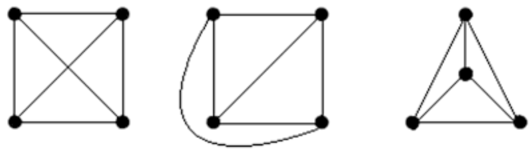
U ovom poglavlju proučavamo teoriju grafova s topološkog aspekta. Zbog raznih potreba želimo graf predočiti u ravnini. Neki grafovi se ne mogu nacrtati u ravnini tako da im se bridovi ne sijeku. Graf je **planaran** ako se može nacrtati (smjestiti) u ravnini $\mathbb{R}^2$ tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. U nastavku ćemo precizno definirati pojam planarnog grafa.

Definicija 2.1. *Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ neprekidna funkcija. Njenu sliku $C = f([0,1])$ zovemo **(neprekidnom) krivuljom** u $\mathbb{R}^2$ od točke $f(0)$ do točke $f(1)$. Ako je $f(0) = f(1)$, kažemo da je C **zatvorena krivulja**, a ako za sve $x, y \in [0,1]$ vrijedi $f(x) \neq f(y)$ osim što je možda $f(0) = f(1)$, govorimo o **jednostavnoj krivulji**. Jednostavna zatvorena krivulja zove se **Jordanova krivulja**.*

Definicija 2.2. *Označimo sa $J(\mathbb{R}^2)$ skup svih jednostavnih krivulja u $\mathbb{R}^2$. Graf $G = (V, E)$ je **planaran** ako postoji injekcija $f : V \cup E \to \mathbb{R}^2 \cup J(\mathbb{R}^2)$ koja svakom vrhu grafa G pridruži jednu točku ravnine $\mathbb{R}^2$, a svakom bridu $e = \{u, v\} \in E$ jednostavnu krivulju $f(e) \subset \mathbb{R}^2$ od točke $f(u)$ do točke $f(v)$ tako da se, za bridove $e_1, e_2 \in E$, $f(e_1)$ i $f(e_2)$ sijeku u točki T ako i samo ako je $T = f(v)$ za neki vrh $v \in V$ incidentan s e_1 i e_2 u grafu G. Takvu funkciju f, odnosno uniju $\bigcup_{e \in E} f(e)$, zovemo **smještanje** odnosno **smještenje grafa** G **u ravninu**. Graf koji nije planaran nazivamo **neplanaran graf**.*

Na slici 2.1 vidimo potpuni graf s 4 vrha koji se iz prvog prikaza u ravnini čini neplanarnim, no sljedeća dva prikaza smještenja u ravninu nam dokazuju suprotno.

Definicija 2.3. *Neka je f smještanje konačnog planarnog grafa $G = (V, E)$ u ravninu i neka je $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^2$ pripadno smještenje. Tada skup $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{G}$ ima jednu ili više komponenata*



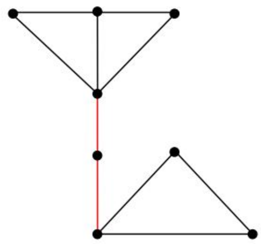
Slika 2.1: Planarni graf K_4 poznat i kao graf tetraedra. Slika preuzeta iz [12], str. 313.

povezanosti (u topološkom smislu), od kojih je jedna neomeđena. Zatvarače spomenutih komponenata povezanosti zovemo ***stranama*** *od $\mathcal{G}$.*

Kažemo da je brid $e \in E$ odnosno vrh $v \in V$ incidentan s nekom stranom od $\mathcal{G}$ ako je $f(v)$ odnosno $f(e)$ sadržan u toj strani. Kažemo da su dvije strane od $\mathcal{G}$ **susjedne** ako postoji brid $e \in E$ s kojim su obje incidentne. **Rub strane** je skup bridova koji su incidentni s tom stranom i još nekom drugom stranom, a brid koji je incidentan samo jednoj strani zovemo **rezni brid**. Odbacivanjem reznog brida graf se raspada na više komponenti povezanosti.
Spomenimo još sljedeću karakterizaciju reznih bridova:

Propozicija 2.1. *Brid e u konačnom planarnom grafu G je rezni ako i samo ako nije brid nijednog ciklusa iz G.*

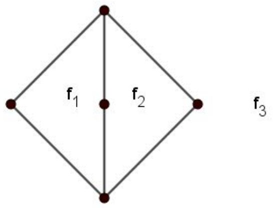
Dokaz propozicije 2.1 se može naći u knjizi [1] (Propozicija 7., str. 263.). Ta činjenica će nam poslužiti kasnije pri dokazivanju teorema.



Slika 2.2: Rezni bridovi

2.2 Eulerova karakteristika

Svako smještenje u ravninu $\mathcal{G}$ konačnog planarnog grafa G ima točno jednu neomeđenu stranu koju nazivamo **vanjština** ili **vanjska strana** od $\mathcal{G}$.



Slika 2.3: Smještenje jednog planarnog grafa s trima stranama. Slika je preuzeta iz [1], str. 311.

Na slici 2.3 je prikazano smještenje planarnog grafa u ravninu pri čemu imamo tri strane, a f_3 je vanjska strana.

Teorem koji slijedi povezuje broj vrhova, bridova i strana planarnog grafa te je jedina i najstarija formula takve vrste. Iz nje se dalje razvijala algebarska topologija u teoriji grafova, a prvi put je spomenuta u Eulerovom pismu 1752. godine, ali nije i dokazana tada. Njen prvi dokaz je izveo Cauchy 1813., a poopćio Poincare 1899. David Eppstein je uspio sakupiti 17 različitih dokaza Eulerove formule.

Euler je znao da je zbroj veličina unutarnjih kutova u konveksnom n-terokutu konstantan te formulu $(n-2)\cdot\pi$ kojom se taj zbroj računa pa je slutio da nešto nalik tome mora vrijediti i za poliedre. Zaključio je da zbroj veličina prostornih kutova uz bridove nije konstantan pa je nakon toga promatrao kutove među stranama i tako došao do zanimljivih zaključaka. Promišljao je o kocki, tetraedru, oktaedru, te spajao prizme i piramide sa sukladnim bazama i visinama. Pri tome je uspoređivao broj strana, vrhova, zbroj veličina odgovarajućih kutova, te razne odnose među navedenim svojstvima takvih poliedara. Kako je povećavao broj strana te došao do n-terostrane prizme, došao je i do jednakosti (iz koje će kasnije razviti poznatu Eulerovu formulu) koja glasi:

$$2\pi \mathrm{V} - \sum \alpha = 4\pi$$

pri čemu je s V označen broj vrhova poliedra, a s α veličina unutrašnjih kutova na stranama poliedra.
Nakon toga je proučavao zbroj broja bridova na svakoj strani poliedra te došao do zaključka da prilikom prebrojavanja svaki brid broji dva puta jer svake dvije susjedne strane imaju zajednički brid pa uvijek vrijedi

$$e_1 + e_2 + ... + e_F = 2E$$

gdje je e_i broj bridova i-te strane poliedra, F broj strana, a E ukupan broj bridova poliedra. Zatim je proučavao kutove te zbrajao njihove veličine na svakoj strani. Došao je do novog zaključka, a on se odnosi na ukupnu sumu veličina tih kutova:

$$\sum\alpha = \sum_{i=1}^{F} (e_i - 1)\,\pi.$$

Ukoliko u to uvrstimo prethodno otkrivene jednakosti i primijenimo svojstva sume, dolazimo do Eulerove poliedarske formule koju ćemo i dokazati u slavnom teoremu koji slijedi. Imamo:

$$\sum\alpha = \pi\sum_{i=1}^{F} e_i - 2F\pi = 2E\pi - 2F\pi = 2\pi(E - F)$$

odakle slijedi

$$2\pi V - 2\pi(E - F) = 4\pi,$$

a zatim i konačno

$$V - E + F = 2\,.$$

Teorem 2.1. ***(Eulerova formula***
Neka je G povezan konačan planarni graf te neka su $|V_G|$, $|E_G|$ i $|F_G|$ redom broj vrhova, bridova i strana grafa G. Tada je ***Eulerova karakteristika*** *od G*

$$|V_G| - |E_G| + |F_G| = 2\,.$$

U hrvatskoj literaturi se često ova formula pojavljuje s drukčijim oznakama, odnosno kao

$$V - B + S = 2$$

pri čemu V kao i u engleskom jeziku označava broj vrhova, B broj bridova, a S broj strana zadanog grafa. Postoje mnogi korektni dokazi Eulerovog teorema, a koriste potpuno različit pristup problemu. Moguće je promatrati ravninsku mrežu poliedara i njenu triangulaciju, razapinjuće stablo grafa koje u ovom radu nećemo koristiti kao ni dualni graf, a dokaz koji ćemo pokazati je matematičkom indukcijom po broju bridova $|E_G|$.

Dokaz. Neka je G povezan ravninski graf. Radi jednostavnosti označavanja, neka je v broj vrhova, e broj bridova i f broj strana tog grafa.
Ako je $e = 0$, onda taj graf ima samo jedan vrh te samo jednu stranu pa uvrštavanjem u formulu vrijedi $v - e + f = 1 - 0 + 1 = 2$ što znači da baza indukcije vrijedi.
Pretpostavimo da formula vrijedi za sve grafove s $e - 1$ bridova pri čemu je e prirodan broj. Želimo dokazati da ona tada vrijedi i za graf s e bridova. Postoje dva slučaja. U prvom

slučaju pretpostavimo da G nema ciklusa. Tada je taj graf stablo, a prema teoremu o karakterizaciji stabla vrijedi $v = e + 1$. Također, $f = 1$ jer graf koji je stablo ne dijeli ravninu na više omeđenih strana, nego imamo samo jednu neomeđenu. Uzmemo li to u obzir, prema formuli imamo v - $e + f = e + 1$ - $e + 1 = 1 + 1 = 2$ i ona opet vrijedi. Za drugi slučaj pretpostavimo da u grafu G postoji ciklus. Neka je b brid nekog ciklusa promatranog grafa. Tada on nije rezni brid i njegovim izbacivanjem graf G - b koji nastaje ostaje povezan. Tim postupkom smo broj bridova smanjili za jedan pa iznosi e - 1, broj vrhova ostaje isti, a broj strana se također smanjuje za jedan jer se dvije strane koje su bile incidentne s uklonjenim bridom b spoje u jednu stranu i vrijedi $f(G$ - $b) = f(G)$ - 1. Prema tome, Eulerova karakteristika grafa $G - b$ iznosi v - $(e$ - 1$)$ + $(f$ - 1$)$ = v - e + 1 + f - 1 = v - $e + f$. Dobili smo jednakost Eulerove karakteristike za graf s e - 1 i za graf G pa prema pretpostavci indukcije zaključujemo da formula vrijedi i u ovom slučaju.
Budući da smo proveli bazu indukcije te dokazali da iz pretpostavke indukcije slijedi da vrijedi i korak indukcije, prema osnovnim matematičkim aksiomima zaključujemo da je teorem dokazan. □

Brojne tvrdnje su posljedice Eulerove formule, ali prvo ćemo navesti neka opća svojstva planarnih grafova koja nam često koriste pri njihovom dokazivanju.

Propozicija 2.2. *a) Sva ravninska smještenja povezanog planarnog grafa imaju isti broj strana.*
b) Jednostavni planaran graf s $n \geq 3$ vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.
c) Jednostavan planaran graf ima vrh stupnja najviše 5.
d) Za smještenje konačnog planarnog grafa u ravninu, uz oznake kao u dokazu teorema 2.1, vrijedi $v - e + f = 1 + c$, gdje je c broj komponenti povezanosti tog grafa.
e) Za povezan jednostavni bipartitan graf koji je planaran vrijedi $e \leq 2 \cdot v - 4$.

Dokaz propozicije može se naći u knjizi [1] (Propozicija 21., str. 312.).

Kada govorimo o planarnosti grafova, važno je spomenuti i nešto o neplanarnim grafovima, a tu su najpoznatiji potpuni graf K_5 i potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$. Pomoću njih su se razvijale dalje teze i karakterizacije neplanarnih grafova.

Propozicija 2.3. *Grafovi K_5 i $K_{3,3}$ su neplanarni.*

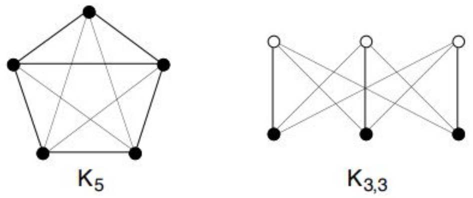
Dokaz. Pretpostavimo da je potpuni graf K_5 planaran. Tada bi prema prethodnoj propoziciji za njegovo ravninsko smještenje vrijedilo

$$10 = E_{K_5} \leq 3 \cdot V_{K_5} - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9\ ,$$

a to je kontradiktorno pa zaključujemo da nije planaran.
Na sličan način, za potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$ bi vrijedilo

$$9 = E_{K_{3,3}} \leq 2 \cdot V_{K_{3,3}} - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8\ ,$$

zbog čega zaključujemo da ni on nije planaran graf. □



Slika 2.4: Neplanarni grafovi K_5 i $K_{3,3}$. Slika je preuzeta iz [12], str. 304.

2.3 Teorem Kuratowskog

Sljedeći teorem je osnovna karakterizacija planarnih grafova. Da bismo razumijeli njegovo značenje, navedimo prvo dvije definicije.

Definicija 2.4. ***Subdivizija brida*** *$e = u, v$ grafa G je zamjena brida e s putom $P = u, w, v$ pri čemu je w novi vrh koji dodajemo grafu G.* ***Subdivizija grafa*** *G je graf G' dobiven iz grafa G rekurzivnim subdivizijama bridova.*

Definicija 2.5. *Kažemo da su dva grafa* ***homeomorfna*** *ako se jedan graf može dobiti iz drugoga subdivizijom bridova. Odnosno, jedan se može iz drugoga dobiti umetanjem jednog ili više vrhova stupnja 2.*

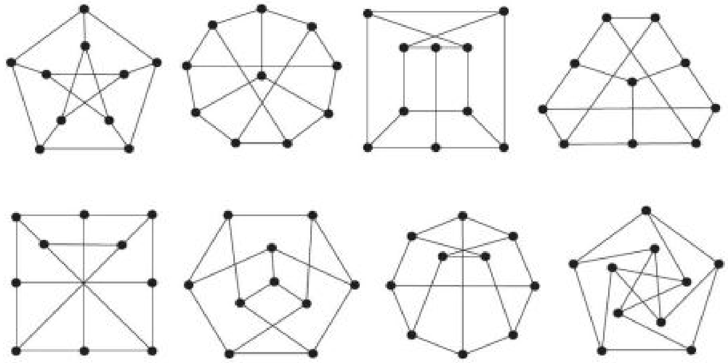
Teorem 2.2. ***(Kuratowski, 1930.)***
Graf G je planaran ako i samo ako nijedan njegov podgraf nije subdivizija od K_5 ni subdivizija od $K_{3,3}$. Ekvivalentno, graf je planaran ako i samo ako ne sadrži podgraf homeomorfan s nekim od tih dvaju grafova.

Teorem Kuratowskog je ekvivalentan sljedećem teoremu:

Teorem 2.3. ***(Wagner, 1937.)***
Graf G je planaran ako i samo ako mu ni K_5 ni $K_{3,3}$ nisu minore.

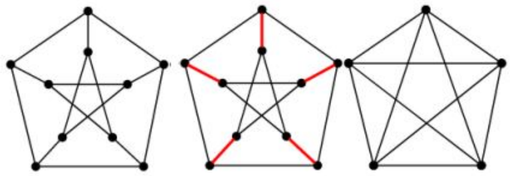
Najpoznatiji primjer neplanarnog grafa je Petersenov graf, koji je na slici 2.5 na osam različitih načina prikazan u ravnini. Petersenovu su grafu i potpuni graf K_5 i potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$ minore.

Od osam prikaza Petersonova grafa na slici 2.5, najpoznatiji je prvi. Upravo on, zbog svojih ekstremalnih svojstava, služi kao protuprimjer u raznim dokazima tvrdnji za koje



Slika 2.5: Prikazi Petersenovog grafa u ravnini. Slika je preuzeta sa [1].

se dugo vremena smatralo da su istinite. I danas ga možemo vidjeti na naslovnicama više matematičkih časopisa.



Slika 2.6: Kontrakcijom pet bridova Petersenov graf prelazi u minoru K_5.

I. Fary je dokazao da se svaki jednostavni planarni graf može nacrtati u ravnini tako da mu svi bridovi budu dužine:

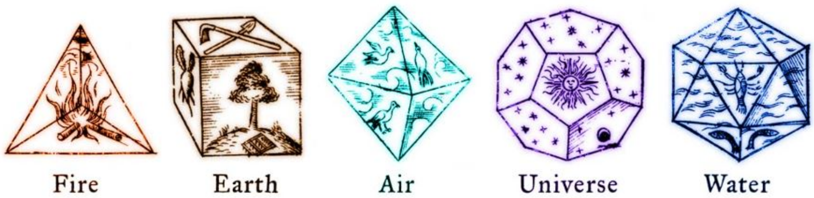
Teorem 2.4. ***(I.Fary, 1948.)***
Svaki jednostavan planarni graf $G = (V, E)$ ima smještenje f u ravninu takvo da je za svaki brid $e \in E$ krivulja $f(e)$ dužina.

Ovaj teorem je važna posljedica Koebovog teorema iz 1936. koji se tiče problema pakiranja sukladnih krugova u ravnini, no o tome nećemo detaljnije pisati jer izlazi iz okvira ovog rada.

[1] https://hrcak.srce.hr/file/212654

2.4 Platonova tijela

Jedna od najstarijih i najpoznatijih primjena Eulerove formule odnosi se na klasifikaciju pravilnih (konveksnih) poliedara. Euler je oko 1752. uveo osnovne pojmove teorije grafova (vrh, brid, strana) te došao do slavne formule upravo promatrajući poliedre.
Pravilnim poliedrima su sve strane sukladni pravilni mnogokuti. Nazivamo ih **Platonova tijela** po matematičaru Platonu koji se njima bavio u svom dijalogu Timej (*Timaeus*). Platon je pisao u obliku dijaloga čiji je česti sugovornik Sokrat pa je zbog toga nejasno koja razmišljanja pripadaju Sokratu, a koja Platonu. U dijalogu Platon razvija svoju filozofiju atoma po kojoj je svijet građen od sitnih čestica četiriju temeljnih elemenata koje imaju oblik pravilnih poliedara. To su vatra, zemlja, zrak i voda. Čestica vatre ima oblik tetraedra jer je on "oštar", čestica zemlje ima oblik kocke jer je ona "najstabilnija" od svih poliedara. Oktaedar je "prozračan" pa taj oblik ima čestica zraka, a čestica vode ima oblik ikosaedra jer je on "najobliji". Prema Platonu oblik dodekaedra ima svemir. Kasnije je Johannes Kepler, njemački astronom, podržao takvu teoriju te ilustrirao Platonove čestice. Istraživao je njihovu ulogu u svemiru i povezao ih s planetima.



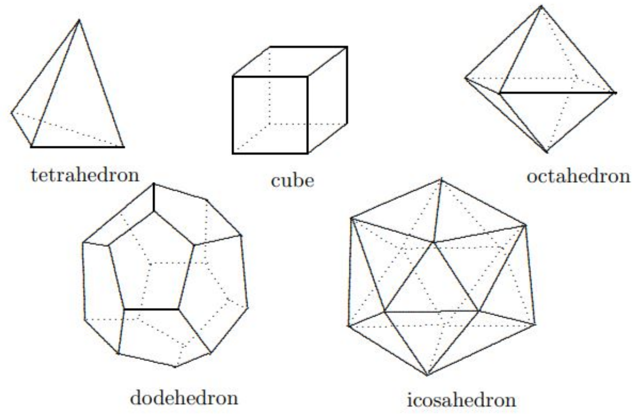
Slika 2.7: Ilustracija iz Keplerove knjige "Harmonices Mundi" 1619. godine. Slika je preuzeta sa [2]

Za njihovo postojanje se znalo i prije Platonovog doba, a među matematičarima su bili česta tema. Platonov suvremenik Teetet iz Atene matematički je definirao pojam pravilnog poliedra te je dao prvi poznati dokaz da ih ima točno pet. Točnije, do na izomorfizam (tj. izomorfizam pripadnih grafova) postoji točno pet Platonovih tijela (pravilnih poliedara) i grafovi koje njihovi vrhovi i bridovi definiraju su planarni. To su redom: tetraedar, kocka, oktaedar, ikozaedar i dodekaedar.

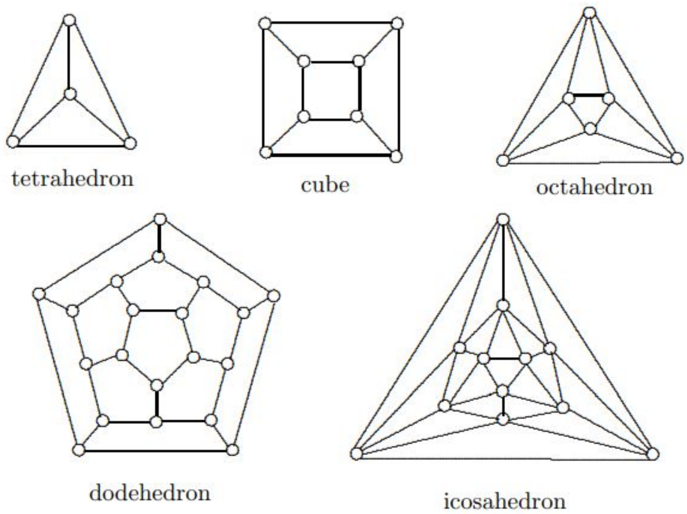
Platonovim tijelima se bavio i Euklid u svojim *Euklidovim elementima*, Pitagora kojem je pripisana prva konstrukcija pravilnih poliedara, ilustrirao ih je i Leonardo da Vinci, a posljednja večera Salvadora Dalija je smještena u unutrašnjosti dodekaedra. Zanimljivo je da svakom pravilnom poliedru možemo pridružiti tri sfere. Prva od njih je opisana sfera, a

[2] `https://mathigon.org/step/polyhedra/platonic-elements`

na njoj leže vrhovi pravilnog poliedra. Druga je upisana sfera, na njoj leže središta stranica pravilnog poliedra. Treća sfera je sfera na kojoj leže polovišta bridova pravilnih poliedara.



Slika 2.8: Platonova tijela. Slika je preuzeta iz [16], str. 110.



Slika 2.9: Smještenja grafova određenih vrhovima i bridovima Platonovih tijela u ravninu. Slika je preuzeta iz [16], str. 111.

Provjerimo vrijedi li Eulerova formula za svaki od pravilnih poliedara. Računamo tako da od broja vrhova oduzmemo broj bridova te potom dodamo broj strana.

Tetraedar: $4 - 6 + 4 = 2$.
Kocka: $8 - 12 + 6 = 2$.
Oktaedar: $6 - 12 + 8 = 2$.
Dodekaedar: $20 - 30 + 12 = 2$.
Ikozaedar: $12 - 30 + 20 = 2$.

Pri dokazivanju propozicije koja nam govori da je točno pet pravilnih poliedara, koristimo sljedeću tvrdnju:

Propozicija 2.4. *Graf je planaran ako i samo ako se može smjestiti na sferu S^2.*

Dokaz propozicije 2.4. nije trivijalan, a možemo ga pronaći u knjizi [1] (Propozicija 19., str. 309.). Iz njega slijedi da su grafovi pravilnih poliedara planarni jer ih možemo smjestiti na sferu S^2.

Propozicija 2.5. *Do na izomorfizam pripadnih grafova, postoji točno pet pravilnih poliedara (Platonovih tijela).*

Dokaz. Označimo sa V broj vrhova, sa B broj bridova i sa S broj strana nekog pravilnog poliedra. Neka je n broj svih bridova na pojedinoj strani i m broj svih bridova koji se sastaju u jednom vrhu pravilnog poliedra. Budući da je svaki brid zajednički dvjema stranicama te svaki brid spaja dva vrha, zaključujemo da vrijedi:

$$n \cdot S = 2 \cdot B \quad \text{i} \quad m \cdot V = 2 \cdot B.$$

Iz tih jednakosti izrazimo S i V pa imamo

$$S = \frac{2B}{n} \quad \text{i} \quad V = \frac{2B}{m}.$$

Uvrstimo li dobivene izraze u Eulerovu formulu, za koju smo provjerili da vrijedi za sve pravilne poliedre, dobijemo redom:

$$\begin{aligned} \frac{2B}{m} - B + \frac{2B}{n} &= 2, \\ \frac{2Bn - Bmn + 2Bm}{mn} &= 2, \\ B \cdot (2n - mn + 2m) &= 2mn, \\ B &= \frac{2mn}{2n - mn + 2m}. \end{aligned}$$

Uvažimo li zadnju jednakost, S i V sada možemo izraziti na sljedeći način:

$$S = \frac{4m}{2n - mn + 2m} \quad \text{i} \quad V = \frac{4n}{2n - mn + 2m}.$$

Dakle, ukoliko su nam poznati m i n, lako možemo izračunati S, V i B.
Budući da je B pozitivan broj, mora vrijediti

$$2n - mn + 2m > 0,$$

tj.

$$2(n + m) > mn.$$

Osim toga, mora biti $n \geq 3$, $m \geq 3$ i $n \leq 5$. Uvrstimo li $n = 3$ u zadnju dobivenu nejednakost, dolazimo, redom, do sljedećih zaključaka:

$$\begin{gathered} 2(3 + m) > 3m, \\ 6 + 2m > 3m, \\ m < 6. \end{gathered}$$

Dakle, za $n = 3$ moguća rješenja za m su 3, 4 ili 5.
Uzimjaući u obzir da uvrštavanjem u gornju formulu za B trebamo dobiti cijeli broj, analogno u nejednakost možemo uvrstiti $n = 4$ i $n = 5$, čime kao kandidate za (m, n) dobivamo uređene parove $(4, 3)$ i $(5, 3)$.
Konačno, zaključujemo da su jedine mogućnosti za rješenja uređeni parovi:

$$(n, m) \in \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)\}.$$

Svakom dobivenom uređenom paru odgovara jedan pravilni poliedar, a to se može provjeriti konstrukcijom. Ukoliko te parove uvrstimo u gore izražene jednakosti, lako izračunamo V, B i S da bismo nabrojali poliedre.
Ovime smo dokazali da, do na izomorfizam pripadnih grafova, postoji točno pet pravilnih poliedara, čime je dokaz gotov. □

Poglavlje 3

Problem bojenja vrhova

U prethodnom poglavlju smo proučavali bojenje strana planarnog grafa, dok ćemo se u ovom poglavlju baviti bojenjem vrhova grafa.

3.1 Uvod u problem

Definicija 3.1. *Neka je G graf, a $k \in \mathbb{N}$ zadani broj. Tada je* ***k-bojenje vrhova*** *od G funkcija $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ (ili c: V(G) → C, gdje je $|C| = k$). Ako je c(v)=i, kažemo da je vrh v* ***obojen*** *bojom i.*

k-bojenje vrhova grafa možemo shvatiti kao označavanje u kojem oznake mogu biti iz zadanog k-članog skupa.

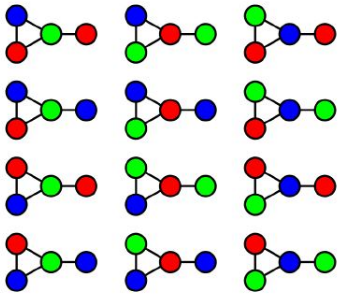
Ukoliko imamo graf s malo vrhova, obično koristimo prave boje (crvena, plava, žuta,...), no u matematičkim terminima boje češće predstavljamo skupom prirodnih brojeva $\{1, 2, \ldots, k\}$ koji nam i olakšava brojanje upotrijebljenih boja.

Definicija 3.2. *Bojenje grafa je* ***pravilno*** *ako su susjedni vrhovi obojeni različitim bojama, tj. ako za funkciju c:V(G)→ $\mathbb{N}$ vrijedi c(u)≠c(v) za susjedne vrhove u i v.*

Iz same definicije je jasno da graf koji ima petlje ne dopušta pravilno bojenje pa takve grafove u daljnjem tekstu ne razmatramo. Pod terminom bojenje, ukoliko nije naglašeno drukčije, podrazumijevat ćemo pravilno bojenje.

Napomenimo i da graf općenito ne mora biti povezan, ali za pravilno bojenje grafa koji nije povezan dovoljno je pravilno obojiti sve njegove komponente. Zato grafove koji nisu povezani u nastavku nećemo promatrati.

Definicija 3.3. *Graf G je* ***k-obojiv*** *ako i samo ako postoji pravilno k-bojenje vrhova od G.*



Slika 3.1: Pravilno obojen graf. Slika je preuzeta sa [1]

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Graf s n vrhova očito je *n-obojiv* (ukoliko nema petlji) jer svaki vrh možemo obojiti drugom bojom.

3.2 Kromatski broj

Bojenje vrhova postaje zanimljivo kada uvedemo ograničenja. Postavlja se pitanje o **najmanjem** broju potrebnih boja za pravilno bojenje nekog jednostavnog povezanog grafa. Pokušamo pri tome zamisliti graf sa jako velikim brojem vrhova (npr. svi semafori nekog glavnog grada) da bismo si osvijestili kako je ovaj problem sve samo ne jednostavan.

Definicija 3.4. ***Kromatski broj*** *grafa G je najmanji broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je graf G k-obojiv i označavamo ga s $\gamma(G)$. $\gamma(G)$-bojenje vrhova grafa G zove se optimalno bojenje vrhova grafa G.*

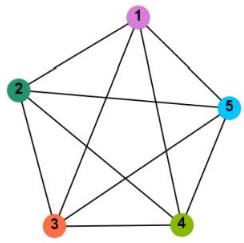
Graf G je 1-obojiv ako i samo ako je prazan (tj. $E(G)=\emptyset$), a 2-obojiv ako i samo ako je bipartitan.

Definicija 3.5. *Graf je* ***k-kromatski*** *ako je k-obojiv, ali nije* $(k-1)$***-obojiv***.

Kromatski broj grafa G je očito neki prirodan broj između 1 i n, gdje je n broj vrhova grafa G. Skup vrhova grafa G koji su obojeni istom bojom nadalje ćemo zvati *klasom boje*.

Navedimo neke napoznatije grafove i njihove kromatske brojeve.
U potpunom su grafu svaka dva vrha povezani bridom pa im zbog toga moramo dodijeliti različite boje. Stoga vrijedi da je $\gamma(K_n)=n$.

[1]`https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring`



Slika 3.2: Bojenje potpunog grafa K_5. Slika je preuzeta sa [1].

Bipartitnom grafu skup vrhova možemo podijeliti na dva skupa tako da ne postoji brid koji spaja vrhove istog skupa. Zbog toga su nam za pravilno bojenje dovoljne samo dvije boje. Dakle, ako su oba spomenuta skupa neprazna, vrijedi $\gamma(G)$=*2*.

Slika 3.3: Bojenje bipartitnog grafa. Slika je preuzeta sa [1]

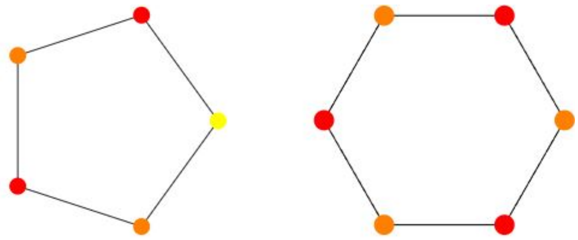
Definicija 3.6. *Povezan graf kojem su svi vrhovi stupnja 2 nazivamo* ***ciklički graf*** *ili kraće* ***ciklus****. Ciklus s $n \in \mathbb{N}$ vrhova označavamo s C_n.*

Cikličkom grafu C_n, gdje je $n \neq 2$ prirodan broj, kromatski broj može biti 2 ili 3, a to ovisi o parnosti broja vrhova. Ukoliko je n paran broj, vrijedi $\gamma(C_n)$=2. U suprotnom, n je neparan broj i vrijedi $\gamma(C_n)$=3.

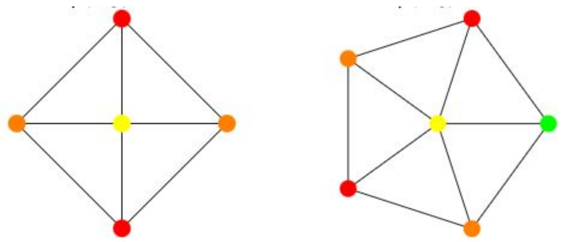
Kotač s oznakom W_n, gdje je $n \geq 3$ prirodan broj, jest graf koji dobijemo tako da cikličkom grafu C_{n-1} dodamo još jedan vrh koji potom spojimo bridom sa svim ostalim vrhovima. Njegov kromatski broj također ovisi o parnosti broja vrhova. Ukoliko je n paran broj, vrijedi $\gamma(W_n)$=4. U suprotnom, n je neparan broj i vrijedi $\gamma(W_n)$=3.

Zvijezda s oznakom S_n, gdje je $n \geq 2$ prirodan broj, jest povezani graf s n vrhova takav da je jedan vrh stupnja $n-1$, odnosno povezan je sa svim ostalim vrhovima, a svi ostali vrhovi su stupnja 1, odnosno povezani su samo sa tim jednim "centralnim" vrhom.

[1] `https://mathworld.wolfram.com/ChromaticNumber.html`

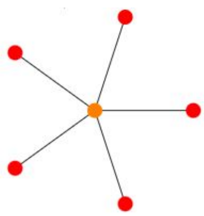


Slika 3.4: Bojenje cikličkog grafa C_5 i C_6. Slika je preuzeta sa [1].



Slika 3.5: Bojenje kotača za W_5 i W_6. Slika je preuzeta sa [1].

Kromatski broj takvog grafa je 2 bez obzira na broj vrhova. Planaran graf prema Teoremu



Slika 3.6: Bojenje zvijezde S_6. Slika je preuzeta sa [1].

četiri boje dopušta 4-bojenje. Drugim riječima,svaku stranu nekog planarnog grafa G' shvatimo kao vrh novog grafa G, a svaki brid grafa G' koji spaja dvije susjedne strane shvatimo kao brid u grafu G čiji su vrhovi te dvije strane, dobijemo pripadni graf G čiji je kromatski broj γ(G)≤4.

Za navedene grafove je jednostavno odrediti optimalno bojenje i njihov kromatski broj. Međutim, to je inače vrlo kompleksan proces kod grafova koji imaju veliki broj vrhova, a ne pripadaju nekoj od prethodniih klasa grafova. Problem je to kojim su se mnogi bavili

[1] `https://mathworld.wolfram.com/ChromaticNumber.html`

jer je primjena bojenja vrhova grafa jako široka – od izrade kvalitetnog rasporeda ispita i predavanja, preko prometa (usklađivanje semafora), usklađivanja frekvencija radiostanica, organizacije skladištenja kemikalija do velike primjene u računarstvu. Navest ćemo sada neke najvažnije teoreme kojima se koristimo u teoriji bojenja vrhova grafa.

Teorem 3.1. *Ako je H podgraf grafa G, onda je $\gamma(H) \leq \gamma(G)$.*

Dokaz. Bilo kakvo pravilno bojenje grafa G osigurava pravilno bojenje i podgrafa H, tako što jednostavno dodijelimo iste boje vrhovima od H kao što je to kod grafa G. To znači da je za bojenje podgrafa H potrebno najviše $\gamma(G)$ boja ili manje, što teorem i tvrdi. □

Teorem 3.2. *Za svaki graf G vrijedi $\gamma(G) \leq \Delta + 1$, gdje je Δ najveći stupanj vrha grafa G.*

Dokaz. Izaberimo proizvoljan vrh grafa G i obojimo ga jednom od $\Delta + 1$ boja. Nakon toga izaberimo neki od neobojenih vrhova i obojimo ga bojom različitom od boja njemu susjednih vrhova. Ponavljamo postupak sve dok u potpunosti ne obojimo graf. Budući da je bilo koji vrh incidentan s najviše Δ drugih vrhova, najviše Δ različitih boja je iskorišteno za bojenje njemu susjednih vrhova, pa će za bojenje takvog vrha uvijek biti dostupna bar jedna boja, čime je dokaz završen. □

Točno računanje kromatskog broja je često teško, no postoje načini određivanja relativno dobrih donjih i gornjih međa. Gornja međa γ (G) $\leq \Delta$(G) + 1 iz prethodnog teorema katkad je jako loša, kao primjerice za bipartitni graf u kojem je γ(G) = 2, a Δ može biti po volji velik. S druge strane, znamo da je za potpuni graf i za neparni ciklus $\gamma = \Delta + 1$. Sljedeći teorem nam kaže da su to i jedini takvi grafovi. Sam dokaz tog teorema je malo duži, ali nije jako zahtjevan i izvodi se matematičkom indukcijom.

Teorem 3.3. ***(R. Brooks, 1941.)***
Za svaki graf G vrijedi $\gamma(G) \leq \Delta + 1$. Ako je $\Delta(G) = 2$, onda vrijedi jednakost ako i samo ako je neka komponenta od G potpun graf na $\Delta(G) + 1$ vrhova.
Ekvivalentno: za jednostavni povezani graf G koji nije potpun niti je neparni ciklus vrijedi $\gamma(G) \leq \Delta$.

Kod malog broja vrhova nam nije teško "ručno" pronaći kromatski broj, međutim rijetko kada nam takvo što treba kod grafova s malenim brojem vrhova. Za grafove koji imaju velik broj vrhova, a nemaju neku od pravilnih struktura, određivanje kromatskog broja i pronalazak optimalnog bojenja je izrazito kompleksan zadatak. Naime, bojenje grafova je *NP-potpun problem* što znači da ne postoji algoritam koji, za svaki konačan jednostavan graf, pronalazi optimalno bojenje u vremenu koje polinomijalno ovisi o broju vrhova. U praksi nije uvijek nužno pronaći optimalno bojenje, obično je prihvatljivo neko pravilno bojenje pa je dosta napora uloženo u razvoj algoritama koji u razumnom vremenu generiraju dovoljno dobro (s obzirom na prirodu promatranog problema), ali ne nužno i optimalno bojenje. Zbog toga se služimo algoritmima za pronalaženje ne nužno optimalnog bojenja grafa. U nastavku opisujemo neke od najpoznatijih.

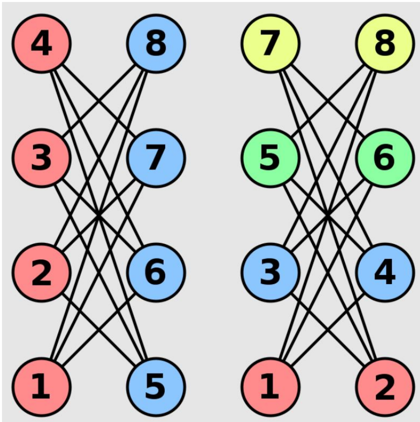
3.3 Pohlepni algoritam

Pohlepni algoritam (engl. **greedy algorithm**) je jedan od konceptualno najjednostavnijih algoritama za bojenje konačnih jednostavnih grafova. Nedostatak mu je da ne generira uvijek optimalno bojenje. Algoritmu je na početku potrebno predati redoslijed kojim će obilaziti vrhove. On će uvijek pronaći pravilno bojenje, ali broj boja koje se koriste u tom bojenju može značajno varirati ovisno o redoslijedu kojim se obilaze vrhovi. Za neki graf G s n vrhova, ako vrhove grafa G poredamo nekim redoslijedom, na primjer $v_1, v_2, \dots, v_n$, algoritam se izvršava na sljedeći način:
1. korak: Vrhu v_1 pridruži boju 1.
2. korak: Sljedećem vrhu u nizu pridruži boju koja je najmanji prirodan broj koji nije pridružen njegovim susjedima.
3. korak: Ponavljaj dok svi vrhovi ne budu obojeni.

Teorem 3.4. *Za svaki graf G postoji raspored obilaska vrhova takav da se korištenjem pohlepnog algoritma dobije graf obojen točno s $\gamma(G)$ boja.*

Dokaz. Po definiciji kromatskog broja znamo da bar jedno takvo bojenje postoji. Dodijelimo proizvoljan redoslijed bojama. Promatramo skup svih načina da se oboji graf G i od njih odabiremo one koji koriste kromatski broj boja $\gamma(G)$. Od njih dalje biramo one u kojima je prva boja iz palete zastupljena maksimalan broj puta, zatim iz tako smanjenog skupa dalje biramo one u kojima je druga boja iz palete zastupljena maksimalan broj puta i tako dalje. Ovim postupkom doći ćemo do jednog odgovorajućeg bojenja grafa. Sada treba naći redoslijed vrhova koji je potrebno koristiti da bi se dobio tako obojen graf. Znamo da su svi vrhovi obojeni drugom bojom u trenutku bojenja morali imati bar jedan susjedan vrh obojen prvom bojom (inače bi i oni bili obojeni prvom bojom). Ovaj zaključak vrijedi i za preostale boje. Zbog toga, redoslijed vrhova biramo tako da prvo biramo vrhove obojene prvom bojom, zatim vrhove obojene drugom itd. (Redamo vrhove po prioritetu boja kojim su obojeni, od najvećeg prioriteta ka najmanjem). Kada smo rasporedili sve, primjenjujući algoritam pohlepnog bojenja dobijamo bojenje grafa od kojeg smo krenuli, što znači da je moguće izabrati takav raspored vrhova da algoritam pohlepnog bojenja koristi kromatski broj boja zadanog grafa, što je i trebalo pokazati. □

Na slici 3.7 prikazana su dva "pohlepna bojenja" istog potpunog bipartitnog grafa koristeći različite redoslijede vrhova. Prvi primjer uzima 2 boje za pravilno bojenje n vrhova, a drugi primjer pohlepnog bojenja troši čak $n/2$ boja za isti broj vrhova. Očito je da je redoslijed kojim pohlepni algoritam obilazi vrhove grafa ključan za optimalnost bojenja,



Slika 3.7: Dva načina bojenja bipartitnog grafa $K_{4,4}$ pohlepnim algoritmom. Slika je preuzeta sa [2].

stoga je pronalazak optimalnog obilaska jednako kompleksan zadatak kao i pronalaženje kromatskog broja odnosno optimalnog bojenja.

3.4 Kempeov algoritam

U ovom potpoglavlju slijedimo izlaganje dano u prezentaciji [7] koje je lijepo pojašnjenje 17. poglavlja u knjizi Andrewa W. Appela o mnogim temeljnim softverskim algoritmima.

Alfred B. Kempe je 1879. pokušao dokazati Teorem četiri boje (o kojem ćemo pisati više u sljedećem poglavlju), no njegov je dokaz imao pogrešku. U procesu dokazivanja tog teorema uspješno je dokazao Teorem pet boja, a i osmislio algoritam za pravilno bojenje grafova koji se koristi i danas zbog svoje ispravnosti i jednostavnosti.

Najprije je razvio algoritam za bojenje vrhova planarnog grafa pomoću 6 boja, a njegovi koraci su:

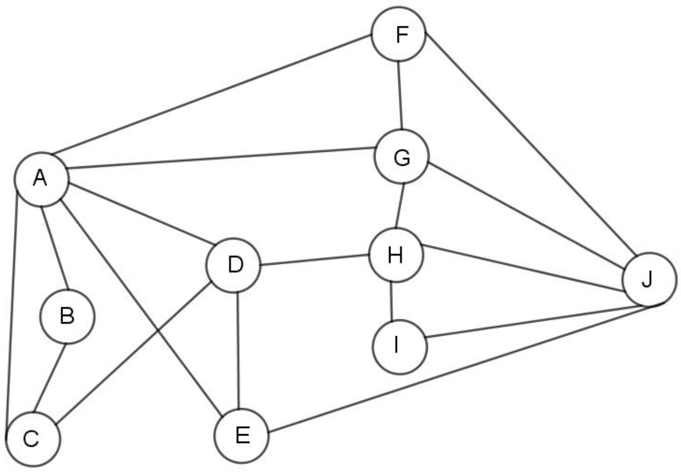
1. Prema teoremu 4.2 svaki planaran graf ima barem jedan vrh stupnja ≤ 5.
2. Ukloni takav vrh.
3. Oboji novonastali graf rekurzivno Kempeovim algoritmom.
4. Vrati nazad uklonjeni vrh. On je susjedan s najviše pet susjeda za čije pravilno bojenje je korišteno najviše pet boja. Upotrijebi nekorištenu šestu boju za bojenje tog vrha.

Nakon ovog algoritma, razvija novi algoritam za pravilno bojenje planarnih grafova pomoću 5 boja, a on glasi:

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring`

1. Prema teoremu 4.2 svaki planaran graf ima barem jedan vrh stupnja ≤ 5.
2. Ukloni takav vrh.
3. Oboji novonastali graf rekurzivno Kempeovim algoritmom.
4. Vrati nazad uklonjeni vrh. On je susjedan s najviše pet susjeda. Koliko različitih boja je iskorišteno za njihovo bojenje? Ako je četiri ili manje, vraćeni vrh oboji petom nekorištenom bojom. Ukoliko je pet boja iskorišteno, upotrijebi metodu Kempeovih lanaca (metoda je opisana u 4. poglavlju).

Potom poopćava svoj algoritam za pravilno bojenje grafa pomoću k boja, neovisno o tome je li graf planaran ili nije. Kao primjer takvog algoritma, obojit ćemo graf sa slike 3.8 pomoću tri boje. Proces bojenja ćemo odviti u dvije faze. U prvoj fazi uklanjamo jedan po jedan vrh iz grafa i pamtimo redoslijed njihovog uklanjanja, a u drugoj fazi bojimo vrhove obrnutim redoslijedom. Zbog toga se ovaj postupak naziva "dvofazni" algoritam.



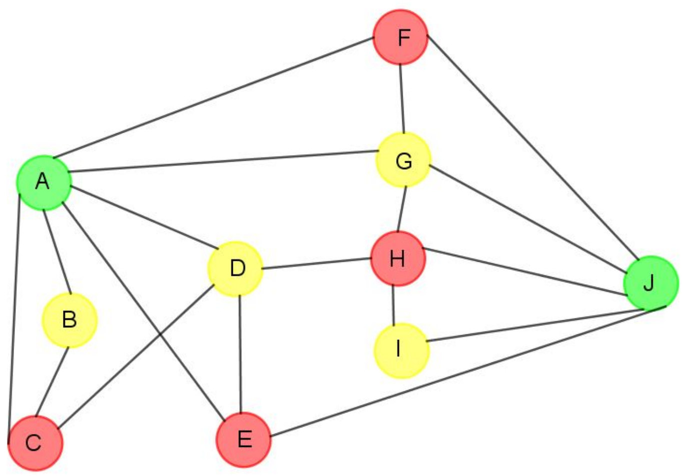
Slika 3.8: Graf koji trebamo obojiti.

Ovom grafu prvo moramo odrediti redoslijed uklanjanja vrhova, a da bismo to napravili odredimo stupanj svakog vrha.

Vrhovi B i I su stupnja 2, vrhovi C, E i F stupnja 3, vrhovi D, G i H stupnja 4, vrh J je stupnja 5, a vrh A je stupnja 6. Budući da želimo obojati graf pomoću 3 boje, tražimo vrhove koji su stupnja < 3 te ćemo njih prve izbaciti iz grafa. To su vrhovi B i I čijim izbacivanjem za jedan smanjujemo stupanj vrhovima A, C, H i J.
Pamtimo redoslijed izbacivanja: B, I. U novonastalom grafu samo vrh C ima stupanj manji od 3 pa njega sljedećeg izbacujemo čime za jedan smanjujemo stupnjeve vrhovima A i D.
Pamtimo redoslijed izbacivanja: B, I, C. U novonastalom grafu više nijedan vrh nije stup-

nja manjeg od 3 pa proizvoljno izbacujemo jedan od preostalih vrhova. Neka je to vrh A. Njegovim izbacivanjem za jedan smanjujemo stupanj vrhovima D, E, F i G.
Pamtimo redoslijed izbacivanja: B, I, C, A. Sada u grafu imamo više vrhova stupnja 2, a to su D, E i F. Njihovim izbacivanjem za jedan smanjujemo stupanj svim preostalim vrhovima.
Pamtimo redoslijed izbacivanja: B, I, C, A, D, E, F. Nakon ovog koraka, vrhovi G i H su stupnja 2 pa njih sljedeće izbacimo, a potom nam kao posljednji vrh preostane vrh J. Potpuni redoslijed kojim smo izbacivali vrhove iz grafa glasi: B, I, C, A, D, E, F, G, H, J.

Sljedeći korak je bojenje vrhova prema obrnutom redoslijedu, a za to ćemo koristiti samo 3 boje. Neka su to crvena, žuta i zelena. Proizvoljnom bojom bojimo prvo vrh J, odaberimo zelenu. Pazeći da susjedne vrhove obojimo različitim bojama, nakon njega bojimo redom vrh H crvenom bojom, G žutom, F crvenom, E crvenom, D žutom, A zelenom, C crvenom, I i B žutom bojom. Primijetimo da smo uspješno obojili vrh A kada je za to došlo vrijeme iako je on jedini vrh kojeg smo izbacili iz grafa, a da mu stupanj nije bio < 3. Ovaj algoritam ne garantira da će to biti moguće svaki put. Time je bojenje ovog grafa Kempeovim algoritmom pomoću 3 boje gotovo.



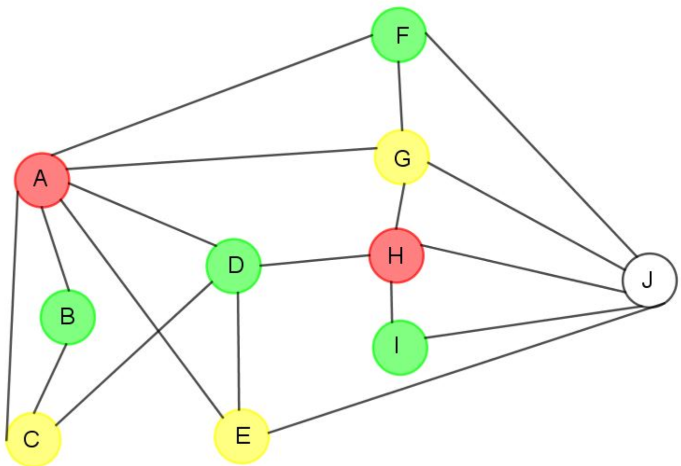
Slika 3.9: Graf pravilno obojen s 3 boje.

Postavlja se pitanje bismo li mogli pravilno obojiti isti graf koristeći neki nasumični redoslijed bojenja vrhova umjesto da promatramo stupnjeve vrhova, a da su nam dovoljne 3 boje.

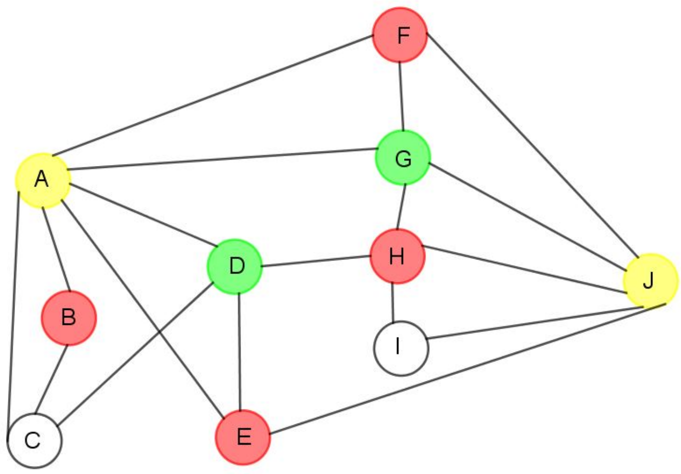
Uzmimo recimo poredak vrhova po abecedi. Na slici 3.10 je prikazano jedno od mogućih bojenja vrhova abecednim redom. Primijetimo da u slučaju sa slike za bojenje zadnjeg vrha J nemamo raspoloživih boja jer je vrh J susjedan vrhovima koji su već obojeni trima bojama. Također je zanimljivo da smo pri bojenju vrha F mogli odabrati žutu boju umjesto zelene. Da smo žutom obojili vrh F, zelenom bismo obojili vrh G, žutom H, zelenom I pa bi nam crvena boja ostala na raspolaganju za obojati vrh J. Zaključujemo da izvedivost pravilnog bojenja sa 3 boje ovisi o nekim izborima koje napravimo u toku bojenja.

Uzmimo još jedan proizvoljan redoslijed bojenja vrhova, npr: $H, J, F, A, G, E, D, B, C, I$. Na slici 3.11. vidimo jedno od bojenja tim redoslijedom. Tokom bojenja smo opet u nekim koracima imali mogućnost izbora više od jedne boje, a kod ovakvog odabira boja ostanemo bez raspoloživih boja za bojenje vrha C. Zbog toga na slici nije obojen ni zadnji vrh I.

Zaključujemo da je Kempeov algoritam bolji izbor od nasumičnog redoslijeda bojenja vrhova jer on uvažava stupnjeve vrhova. Kempeov algoritam pri bojenju daje prednost vrhovima koji imaju viši stupanj, a kao zadnji za bojenje nam ostanu oni najmanjeg stupnja koji nisu "problematični". Uvažavanjem broja susjeda pojedinog vrha, algoritam smanjuje vjerojatnost situacija u kojima za bojenje nekog vrha imamo na raspolaganju više boja. Ukoliko je manje takvih proizvoljnih odabira, veća je vjerojatnost da ćemo moći pravilno obojiti cijeli graf.



Slika 3.10: Bojenje vrhova abecednim redom.



Slika 3.11: Bojenje vrhova u poretku: $H, J, F, A, G, E, D, B, C, I$.

Poglavlje 4

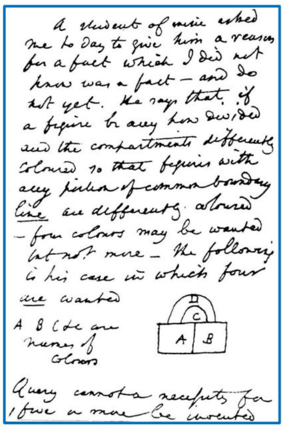
Problem četiri boje

4.1 Povijest problema

Bojenje u teoriji grafova počelo se proučavati davne 1852. godine kada je Francis Guthrie, tada student u Londonu, formulirao slavni problem četiri boje. On je kartu engleskih pokrajina pokušao obojiti sa što je manje moguće različitih boja tako da nikoje dvije susjedne pokrajine nisu obojene istom bojom. Kada pričamo o susjednim pokrajinama, mislimo na one koje dijele granicu, odnosno, u terminima grafova, one strane koje imaju zajednički brid. Pri tome vrijedi da, ako dvije države imaju samo jednu točku zajedničku (vrh grafa), one se smiju obojati istom bojom.

Zaključio je da su mu dovoljne samo četiri boje. Nakon toga je pokušavao pronaći geografsku kartu za koju bi mu bilo potrebno više boja za taj proces, ali to nije uspio. Za pomoć oko navedenog problema je upitao svog profesora De Morgana koji je pitanje proslijedio kolegi sir Williamu Hamiltonu.

Nakon što nekoliko godina nije bilo napretka u rješavanju problema četiri boje, taj je problem 1860. anonimno objavljen u književnom časopisu Athenaeum. Unatoč tome, nakon nekog vremena činilo se da je ovaj problem pao u zaborav, ali britanski mateomatičar Arthur Cayley 1878. objavljuje da je dokazao Teorem o četiri boje, odnosno činjenicu da su četiri boje dovoljne za pravilno bojenje karte. Nakon toga, tek u 1890. godini, matematičar P. J. Heawood pronalazi grešku u dokazu te vrlo jednostavno dokazuje Teorem o pet boja. Međutim, dokaz Teorema o četiri boje, uz sav trud brojnih matematičara, ostaje bez formalnog dokaza sve do pojave računala. Tek 1976. godine su dva matematičara uz pomoć računala objavili dokaz na 100 stranica, a 1997. su četvorica, također uz pomoć računala, objavili nešto jednostavniji dokaz na 40 stranica. Gledajući iz današnje perspektive, problem četiri boje je postao jedan od najpoznatijih problema u cijeloj povijesti matematike, ali i onaj koji je izazvao veliku pažnju šire javnosti. Pitanje je to koje je naizgled vrlo jednostavno, no zadavalo je muke svima dugih 150 godina. Problem četiri boje

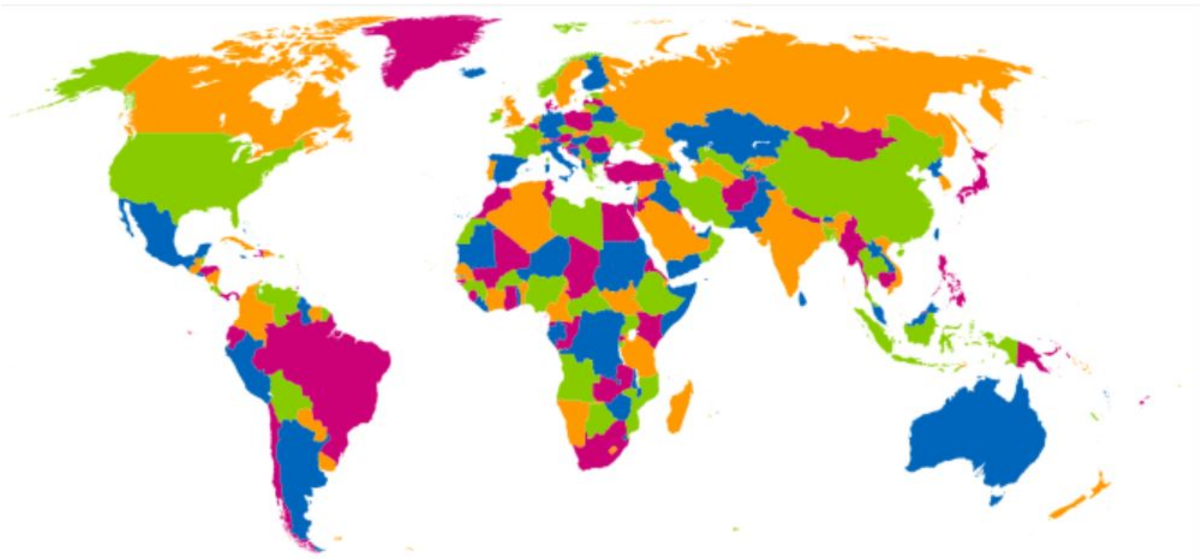

A student of mine asked
me to day to give him a reason
for a fact which I did not
know was a fact — and do
not yet. He says that if
a figure be any how divided
and the compartments differently
coloured so that figures with
any portion of common boundary
line are differently coloured
— four colours may be wanted
but not more — the following
is his case in which four
are wanted

A B C D are
names of
colours

Query cannot a necessity for
five or more be invented

Slika 4.1: Pismo De Morgana za Hamiltona. Slika je preuzeta iz [13].

je zapravo pitanje pravilnog bojenja strana planarnog grafa. Možemo i strane zamijeniti vrhovima, pri čemu svake dvije susjedne povežemo bridovima pa ovaj problem gledati kao problem bojenja vrhova u grafu.



Slika 4.2: Karta svijeta obojena s 4 boje. Slika je preuzeta sa [1].

[1] https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:World_map_with_four_colours.svg

4.2 Teorem pet boja

Heawood je 1890. dokazao da se svaka karta može obojiti najviše s pet boja tako da su susjedne države obojene različitim bojama. Precizno formuliran, taj je rezultat dan sljedećim teoremom.

Teorem 4.1. ***Teorem 5 boja; Heawood, 1890.***
Svaki je planarni graf 5-obojiv.

Dokaz. Pri dokazivanju ovog teorema koristimo pomoćni teorem koji kaže:

Teorem 4.2. *U planarnom grafu postoji barem jedan vrh stupnja strogo manjeg od šest.*

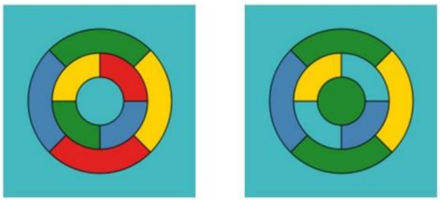
Dokaz teorema [4.1] provodimo matematičkom indukcijom po broju vrhova.
Baza indukcije:
Za grafove s malim brojem vrhova teorem se dokaže direktno na trivijalan način.
Pretpostavka indukcije:
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove koji imaju najviše $n-1$ vrhova.
Korak indukcije:
Promatrajmo planaran graf G s n vrhova. Prema teoremu [4.2] graf sadrži barem jedan vrh koji je stupnja manjeg od ili jedakog pet. Neka je to vrh v.
Razlikujemo dva slučaja:
1. Ako je vrh v stupnja strogo manjeg od pet, na trenutak izbacimo njega i njemu incidentne bridove iz grafa G. Tako dobiveni graf je prema pretpostavci indukcije 5-obojiv. Potom vratimo vrh v nazad u graf. Za pravilno bojenje njemu susjednih vrhova trebamo najviše četiri boje, a vrh v obojimo jednom od preostalih pet boja. Time smo dokazali prvi slučaj.
2. Sada promatramo slučaj kada je v vrh stupnja točno pet.
Neka su a, b, c, d, e tih pet vrhova koji su susjedni vrhu v. Prema Wagnerovom teoremu iz prethodnog poglavlja znamo da vrhovi a, b, c, d, e ne tvore potpuni graf K_5 jer tada graf G ne bi bio planaran. Dakle, barem jedan par ovih vrhova nije povezan bridom. Neka su to, bez smanjenja općenitosti, vrhovi a i b. Kontrakcijom bridova av i bv dobijemo graf iz kojeg smo uklonili vrhove a i b pa on ima $n-2$ vrhova te je prema pretpostavci indukcije 5-obojiv. Nakon pravilnog bojenja tako nastalog grafa, kontrahirane bridove opet rastegnemo pri čemu vrhovi a i b ostaju obojeni istom bojom kojom je obojen vrh v. Sada su susjedni vrhovi vrha v obojeni četirima različitim bojama pa vrh v obojimo petom bojom.
Budući da smo dokazali bazu indukcije i činjenicu da, ako tvrdnja vrijedi za grafove s $n-1$ vrhova, onda vrijedi i za grafove s n vrhova, prema aksiomu matematičke indukcije, zaključujemo da je teorem dokazan. □

4.3 Teorem četiri boje

Već u pismu u kojem De Morgan traži pomoć od Hamiltona skiciran je primjer grafa kojem su četiri boje **nužne** da se pravilno oboji. No, pitanje je jesu li četiri boje uvijek **dovoljne**? Ukoliko nisu, potrebno je naći protuprimjer, neku kartu za koju je potrebno najmanje pet različitih boja. Ukoliko jesu, tvrdnju je potrebno dokazati za svaku kartu, bila ona izmišljena ili stvarna.
Slavni Teorem četiri boje koji je zadavao toliko muke matematičarima formuliran glasi:

Teorem 4.3. ***Teorem četiri boje***
Svaki je planaran graf 4-obojiv.

Drugim riječima, svaka karta može se obojiti najviše četirima bojama tako da su susjedne države različito obojene. Teorem četiri boje matematičari su dugo pokušavali opovrgnuti kontraprimjerom. Jedan od čestih neveljanih kontraprimjera prikazan je na slici 4.3. Pokušavala se nerijetko nacrtati strana koja dodiruje sve ostale. Tada bismo sve



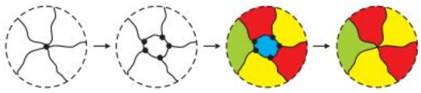
Slika 4.3: Nevaljani kontraprimjer. Slika je preuzeta sa [2] .

strane osim te morali obojit trima bojama. Sada znamo da je to moguće jer je Teorem četiri boje točan. Pri crtanju su autori bili koncentrirani na jednu veliku stranu toliko da bi im promaknula činjenica da preostale mogu obojiti s tri boje. Osim togakrivo se koristio protuprimjer u kojem se ne dopušta dodjeljivanje iste boje stranama koje imaju samo jednu zajedničku točku.

U ostatku ovog poglavlja slijedimo izlaganje dano u [13]. Nakon De Morganove smrti 1871. godine ovaj problem pomalo biva zaboravljen, a napredak na njemu prvi objavljuje Cayley 1878. godine. On se zbilja zainteresirao za ovaj zadatak, a u to doba je bio najmlađi profesor sveučilišta u Cambridgeu. U geografskom časopisu objavljuje članak bez formalnog dokaza, ali s nekim važnim zaključcima. Dokazuje tvrdnju: *Ako je prizvoljna karta s n država obojena s* 4 *boje i ako toj karti dodamo jednu novu državu, tada se i nova karta s* $n + 1$ *državom može obojiti s* 4 *boje.*

[2] https://simple.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

Cayley je promatrao takozvane "kubne karte", a to su one kod kojih se u svakom vrhu dodiruju točno 3 države. Ukoliko se u nekom vrhu dodiruje više od triju država, to je riješio na sljedeći način: na taj vrh se postavi kružna "zakrpa" odnosno nova država, tako dobivena karta se oboji, a zatim se ta dodana država ukloni. Tako je zaključio da je dovoljno promatrati karte. Osim navedenog, dokazao je da se svaka karta može obojiti tako su nam

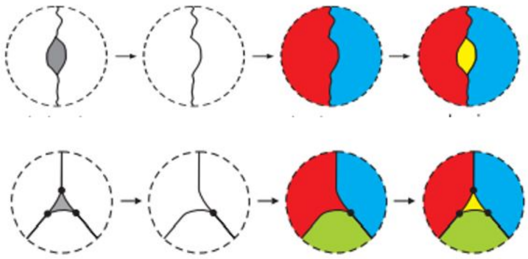


Slika 4.4: Cayleyeva "zakrpa". Slika je preuzeta iz [13].

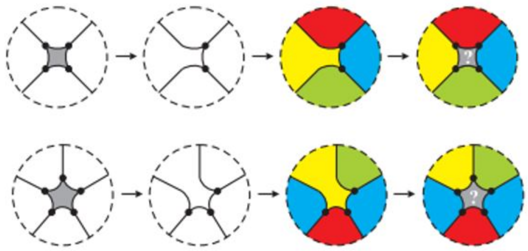
dovoljne 3 boje za bojanje država koje leže uz rub karte, ukoliko je naravno Teorem četiri boje valjan.
Pomoću gore navedenih dokazanih tvrdnji, sam je pokušao dokazati matematičkom indukcijom. Baza indukcije je trivijalna, pretpostavka je da se sve karte s n država mogu obojiti s 4 boje, a korak da to vrijedi i za kartu s $n + 1$ državom. Bilo je vrlo teško naći općeniti način za dodavanje jedne države, jer njeno bojenje može uzrokovati promjenu boja mnogih već obojenih država s ciljem korištenja minimalnog broja potrebnih boja. Stoga je pokušao metodom kontradikcije na sljedeći način:
Pretpostavimo da teorem ne vrijedi te da je za bojenje nekih karata potrebno 5 ili više boja. Takve karte nazovimo **uljezima**, a **minimalnim uljezima** nazovimo one karte među njima koje imaju najmanji broj država.
Tako dolazimo do tvrdnje: *Najmanji uljezi ne mogu se obojiti s 4 boje, ali sve se karte s manjim brojem država mogu.* Sada mora dokazati da takvi najmanji uljezi zapravo ne postoje pa bi time dokazao i početni teorem.

Dokazao je najprije da najmanji uljez ne sadrži dvokut, a to je država sa samo dva susjeda. Ako bi takva država postojala, uklanjajući joj jedan brid dobili bismo kartu s državom manje koja bi se tada mogla obojiti s 4 boje. Kada želimo vratiti nazad uklonjeni brid, novonastalu državu lako obojimo s jednom od dvije boje kojima nisu obojena njena dva susjeda. Na isti način dokazuje da ni trokut nije sadržan u najmanjem uljezu (država s tri susjeda). Naime, kada ga "vraćamo" na kartu, imamo jednu od četiri boje na raspolaganju. Na slici 4.5 je prikazan ovaj postupak.

Nažalost, ovakav postupak već u sljedećem koraku nije znao izvesti pa je na državama s 4 ili više susjeda došao do problema. Tu je stala priča o Cayleyjevom napretku, no iako nije dokazao Teorem četiri boje, njegova otkrića i tvrdnje su poslužile pri daljnjem razvijanju ove teorije. Ona se dalje razvijala, i to uz pomoć Eulera i njegovog proučavanja poliedara, preciznije pomoću Eulerove formule iz teorema [2.1]. U ovom kontekstu ona umjestu $V - E + F = 2$ glasi



Slika 4.5: Cayleyjevo bojenje u okolini dvokuta odnosno trokuta. Slika je preuzeta iz [13].



Slika 4.6: Pokušaj bojenja, analogno Cayleyjevoj metodi za dvokute i trokute, države s 4 ili više susjeda. Slika je preuzeta iz [13].

$$\text{broj čvorova (vrhova)} - \text{broj bridova (granica)} + \text{broj država} = 2.$$

Iz te formule kao posljedica se razvila formula prebrojavanja na kartama: $4d_2 + 3d_3 + 2d_4 + d_5 - d_7 - d_8 - 3d_9 - ... = 12$ u kojoj je s d_i označen broj država koje imaju točno i susjednih država. Nakon što se primjenila na prebrojavanje ukupnog broja država, bridova i vrhova te ponovno uvrstila u Eulerovu formulu, sređivanjem se dobio izraz koji kao teorem glasi:

Teorem 4.4. ***Teorem o najviše 5 susjeda***
Svaka kubna karta ima barem jednu državu s 5 *ili manje susjeda.*

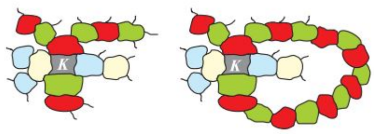
Pomoću zaključaka o minimalnom uljezu do kojih je Cayley došao, sada se mogao dokazati slabiji teorem.

Teorem 4.5. ***Teorem šest boja***
Svaki je planaran graf 6 *- obojiv.*

Kempeovi lanci

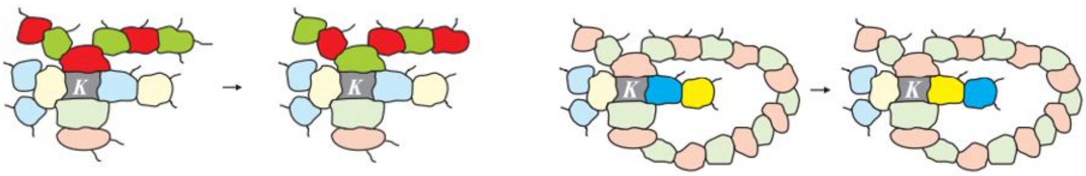
Sljedeći koji stupa na scenu bavljenja problemom četiri boje je Alfred Bray Kempe. Nastavio je pomoću Cayleyevih zaključaka dalje, a problem na kojem je Cayley zastao riješio slavnim **Kempeovim lancima**. Kempeovi lanci su niz država naizmjenično obojenih dvijema bojama. Ovom metodom Kempe je naizgled dokazao Teorem četiri boje, ali taj dokaz nije bio točan te je jedan od najpoznatijih pogrešnih dokaza u povijesti matematike. Dugih 11 godina je bilo potrebno da netko uoči pogrešku. Za početak Kempe je bilo kakvu kartu bojio na ovakav način: pronađi državu s 5 ili manje susjeda, pokrij je zakrpom sličnog oblika, a zatim sve granice koje zakrpu dodiruju produlji tako da se sastaju na zakrpi u istoj točki. Na taj način se broj država smanjio za jedan. Ponavljaj ovaj proces dok ne dođeš do karte s točno jednom državom. Oboji je nekom od 4 boje, a zatim, obrnutim procesom, skidaj zakrpe i novu državu boji tako da se razlikuje od susjeda. Ponavljaj dok ne dođeš natrag do početne karte.
Pitanje koje se javi jest možemo li uvijek obojiti vraćenu državu te što ako ona ima 4 ili 5 susjeda. On je na to pitanje doskočio **Kempeovim lancima.**

Pretpostavimo da država K koju vraćamo ima 4 susjeda, neka je "kvadratnog" oblika. Odaberemo njoj dvije susjedne države koje se ne diraju, neka su obojene crvenom i zelenom bojom. Svaka od njih tada započinje jedan ili više lanaca država obojenih naizmjenično crveno-zeleno. Možemo doći do dva slučaja. U prvom slučaju, nijedan lanac koji



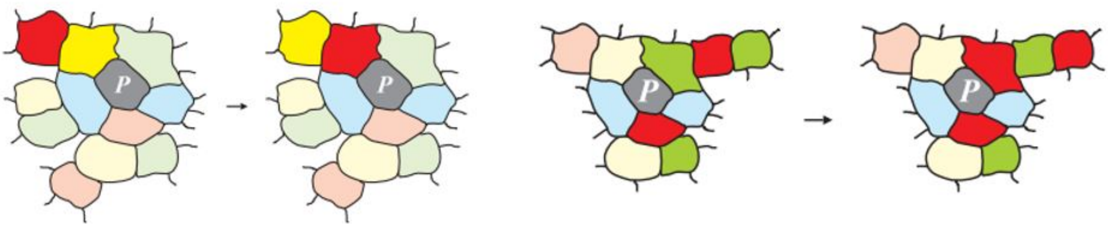
Slika 4.7: Dva moguća slučaja. Slika je preuzeta iz [13].

počinje spomenutom crvenom državom nije povezan sa zelenom državom koja je također susjedna od K. Tada se i crveni i zeleni susjed od K mogu obojiti zelenom bojom, a sve države u lancu prvotno crvenog susjeda mogu zamijeniti boje. Državu K tada možemo obojiti crvenom bojom.
U drugom slučaju, lancem su povezani crveni i zeleni susjed države K. Tada promatramo druga dva susjeda države K, neka su to žuti i plavi. Budući da imamo zatvoreni lanac crveno-zelenih područja, nije moguće da se bilo koji žuto-plavi lanci nadovežu jedan na drugog. Zaključujemo da možemo postupiti kao i u prvom slučaju pa obojimo plavog susjeda od K žutom bojom te i u ostatku njegova lanca zamijenimo boje. Tada plavom bojom obojimo obojimo državu K. Na taj način smo završili bojenje karte kada vraćena država ima 4 susjedne. Drugim riječima, nastavio se Cayleyjev niz zaključkom da najmanji uljez ne sadrži kvadrat.



Slika 4.8: Bojenje u okolini kvadrata K u prvom i u drugom slučaju. Slika je preuzeta iz [13].

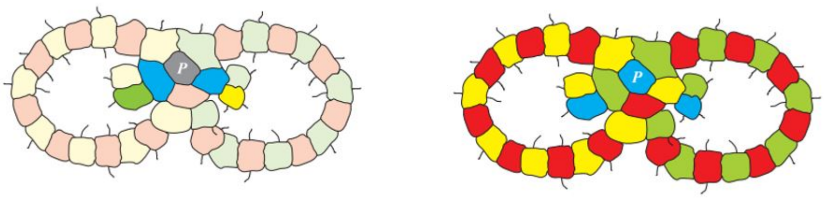
Sljedeće što je trebalo proučiti je pitanje što ako je vraćena država peterokut (s oznakom P), preciznije ako ima 5 susjeda već obojenih četirima bojama. Kao i u prethodnom slučaju, odaberemo 2 susjeda od P koji se ne dodiruju, neka su to žuti i crveni susjed. Ako njihovi lanci nisu povezani ni na koji način, zamijenimo boju žutog susjeda tako da postane crveni pa žutom smijemo obojiti državu P. Ako se, pak, žuto-crveni lanci na neki način



Slika 4.9: Bojenje okolini peterokuta P u prvom slučaju. Slika je preuzeta iz [13].

spajaju, tada promatramo nekog drugog susjeda od P, na primjer zelenoga i njegov odnos s crvenim. Ako pripadni zeleno-crveni lanci nisu međusobno povezani, tog zelenog susjeda od P smijemo obojiti crvenom bojom pa nam za P na raspolaganju ostaje zelena boja. Ukoliko su ti lanci povezani, tada imamo dvije petlje zbog kojih, kao i u slučaju s kvadratom, smijemo zaključiti da dva žuto-plava lanca koja određena žutim i plavim susjedom od P nisu međusobno povezani pa smijemo u jednom od njih izmjeniti boje. Ako postoji još jedan plavi susjed od P, u njegovom plavo-zelenom lancu zamijenimo boje. Nakon što obavimo obje izmjene, država P ima susjede crvene, žute i zelene boje pa nju možemo obojiti plavom bojom. Na taj smo način završili bojenje karte u koju je vraćen peterokut, čime je Kempe dokazao da najmanji uljez ne sadrži peterokut. To je u kontradikciji s Teoremom o najviše 5 susjeda, dakle Teorem četiri boje je naizgled dokazan!

Profesor matematike Percy John Heawood u lipnju 1890. pokazuje da je Kempe po-



Slika 4.10: Bojenje peterokuta P u drugom slučaju. Slika je preuzeta iz [13].

griješio pri dokazivanju i to na samom kraju. Naime, postoje karte kod kojih nije moguće izvesti obje zamjene boja istovremeno u dvama različitim lancima. Za to je dao i konkretan primjer karte, nakon čega je Kempe javno priznao da je pogriješio. No nijedan od njih nije znao kako dokaz popraviti. Heawood je tada dokazao Teorem o 5 boja, ali je postalo jasno da će onaj o 4 boje opet ostati bez dokaza. Nakon toga su matematičari na ovaj problem gledali kroz dva različita aspekta, jedni su tražili **neizbježne skupove**, a drugi **reducibilne konfiguracije**. Prema teoremu [4.4] svaka kubna karta mora sadržavati barem jednu od najvedenih država pa za takav skup država kažemo da je neizbježan. Onaj skup država koji se ne može pojaviti u najmanjem uljezu nazivamo reducibilna konfiguracija.

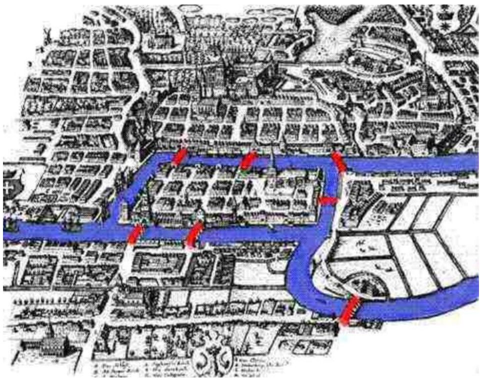
Do sredine 20. stoljeća konstruirali su tisuće konfiguracija neizbježnih skupova. Na koncu, trojica matematičara Appel, Haken i Koch 1977. objavljuju dokaz do kojeg ne bi uspjeli doći bez računalnog programa na kojem su dugo radili. Dokaz je objavljen u dva dijela, a uz tekst je priložen materijal na mikrofilmu s 450 stranica raznih dijagrama i detaljnih objašnjenja!

Poglavlje 5

Problem sedam mostova

5.1 Opis problema

Problem sedam mostova vezan je za tadašnji glavni pruski grad Königsberg koji je smješten uz rijeku Pregel. Danas nosi ime Kalinjingrad po prezimenu sovjetskog vođe, a nalazi se u Rusiji. Grad se proteže s obiju strana rijeke Pregel i preko dvaju riječnih otoka. Sva područja grada su povezana s čak sedam mostova.



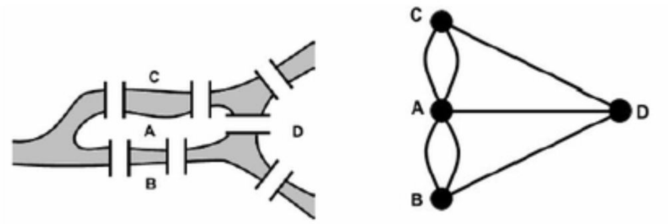
Slika 5.1: Kalinjingrad. Slika je preuzeta sa [1].

Građani i posjetitelji voljeli su šetnje i razgledavanje po gradu preko mostova, no neke je ljutilo to što nisu mogli naći način kako prošetati gradom tako da prijeđu svaki most samo jednom i vrate se na početnu poziciju. Postavilo se pitanje postoji li uopće mogućnost takvog obilaska grada.

[1] `https://www.geogebra.org/m/wPXz2GYJ`

Odgovor na to pitanje 1735. godine daje jedan od najpoznatijih matematičara, švicarac Leonhard Euler. On je pokazao da takav obilazak grada ne postoji i svojim zaključcima postavio temelje teorije grafova. Upravo iz ovog problema se cijelo matematičko polje dalje razvijalo, a neki pojmovi dobili ime po ovom, možda i najproduktivnijem, slavnom znanstveniku. On je problem sedam mostova prikazao kao ekvivalentan problem obilaska cijelog grafa (svih vrhova), ali tako da krenemo iz jednog vrha i svaki brid prijeđemo samo jednom. Takva staza u grafu nosi njegovo ime: Eulerova staza.

5.2 Eulerovo rješenje



Slika 5.2: Grafički prikaz problema sedam mostova. Slika je preuzeta iz [4].

Definicija 5.1. ***Eulerova staza*** *je staza u grafu koja sadrži svaki brid. Ukoliko je ona zatvorena, nazivamo je* ***Eulerova tura****.*

Definicija 5.2. *Graf je* ***Eulerov*** *ako dopušta Eulerovu turu.*

Jedan od širokoj populaciji poznatijih primjera Eulerovog grafa jest crtanje "kućice" na papiru bez podizanja olovke s papira.

Teorem 5.1. *Povezani graf G je Eulerov ako i samo ako mu je svaki vrh parnog stupnja.*

Dokaz. Teorem dokazujemo u dva smjera.

Prvo pretpostavimo da je graf G Eulerov. Tada postoji neka Eulerova tura na grafu, nazovimo je T. Neka je vrh V njen početak i kraj. Svaki unutarnji vrh te ture (svaki osim vrha V) incidentan je s dvama bridovima, jednim koji "ulazi" i jednim koji "izlazi" iz tog vrha. Zaključujemo da su svi takvi vrhovi parnog stupnja. Isto vrijedi i za vrh V jer tu tura počinje i završava. Dakle, svi vrhovi grafa G imaju paran stupanj.

Obratno, neka je u grafu G svaki vrh parnog stupnja. Trebamo dokazati da je on tada Eulerov. Promatrat ćemo najdužu moguću stazu u njemu i dokazati da je ona Eulerova tura, a time i da je G Eulerov.

Neka je T=(v_0,e_1,v_1,e_1,...,e_m,v_m) najduža staza u grafu. Dovoljno je dokazati da je staza zatvorena i da sadrži sve bridove tog grafa, odnosno da vrijedi v_0=v_m i $E(G)=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Pretpostavimo da je $v_0 \neq v_m$. Tada je v_0 incidentan s neparnim brojem bridova u stazi T. Kako je svaki vrh, pa tako i v_0, parnog stupnja prema pretpostavci, postoji neki brid grafa G koji nije u promatranoj stazi T kojim bismo mogli produžiti stazu, a to je u kontradikciji s izborom staze T kao najdulje moguće. Time smo dokazali da je v_0=v_m.

Dalje dokazujemo da staza T sadrži sve bridove grafa G.
Pretpostavimo suprotno. Budući da je graf G povezan, odmah slijedi da postoji brid e koji spaja neki vrh $v \in V(G)$ koji ne pripada stazi T s vrhom v_k za neki $k \in \{1, \ldots, m\}$. Tada postoji staza

$$T'=(v,e,v_k,e_{k+1},v_{k+1},...,v_{m-1},v_0,e_1,v_1...,e_k,v_k)$$

čija je duljina m+1, a to je kontradikcija s izborom staze T kao najdulje.
Ukoliko je $V(T)$=$V(G)$, a $E(T) \neq E(G)$, onda postoji brid e koji pripada grafu G, ali ne i stazi T. Tada je e=$v_k v_l$ za neke vrhove v_k i v_l pa postoji staza

$$T''=(v_k,e_{k+1},v_{k+1},...,v_{m-1},e_m,v_0,e_1,v_1...,e_k,v_k,e,v_l)$$

duljine m+1 i opet nailazimo na istu kontradikciju. Zaključujemo da je graf G Eulerov i time je dokaz gotov. □

Korolar 5.1. *Povezan graf G ima Eulerovu stazu ako i samo ako su mu najviše dva vrha neparnog stupnja.*

Dokaz. Dokaz opet provodimo u dva smjera.

Ako graf G ima Eulerovu stazu, onda kao u prethodnom teoremu svaki vrh koji nije početak ni kraj te staze ima parni stupanj.
Obratno, neka graf G ima najviše dva vrha neparnog stupnja, točnije njih 0, 1 ili 2. Promotrimo svaki od ta tri slučaja.

Ako graf G ima 0 vrhova neparnog stupnja, onda su mu svi vrhovi parnog stupnja pa je prema prethodnom teoremu Eulerov odnosno ima Eulerovu stazu.

Ako graf G ima 1 vrh neparnog stupnja, dolazimo do kontradikcije jer znamo da je u svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja paran broj (Lema o rukovanju).

Ako graf G uopće ima točno dva vrha neparnog stupnja, nazovimo ih a i b. Neka je $e = ab$ novi brid i promotrimo graf G+e dobiven dodavanjem grafu G brida e. U tom grafu su svi vrhovi parnog stupnja pa prema prethodnom teoremu on ima Eulerovu turu, nazovimo je T. Tada staza T-e sadrži svaki brid grafa G pa je ona Eulerova staza u grafu G. Time je teorem dokazan. □

Vratimo li se na početni problem königsberških mostova, upravo nam ovaj korolar dokazuje da ne postoji traženi način obilaska sedam mostova. Naime, Euler je jednostavno zaključio da, svaki put kad dođe na neku obalu (od koje nije krenuo i koja nije kraj šetnje), mora s nje i otići. Zato svaka takva obala mora imati dolazni i odlazni most. Odnosno, svakom "ulazećem" mostu mora odgovarati jedan "izlazeći" most. Svaka obala koja je s drugima povezana neparnim brojem mostova mora biti ili početak ili kraj šetnje. U slučaju Königsberga svaka obala ima neparan broj mostova kojima je incidentna pa zaključujemo da ne postoji Eulerova staza, odnosno šetnju kakvu stanovnici priželjkuju nije moguće ostvariti.

5.3 Problem kineskog poštara

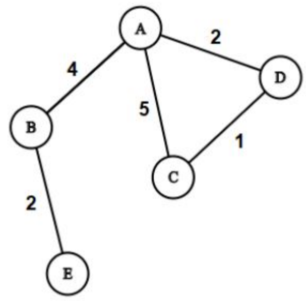
Problem sedam mostova ima primjenu na mnoge probleme iz teorije grafova. Jedan od poznatijih je problem **kineskog poštara** koji se može riješiti pomoću **Fleuryjevog algoritma**. Taj problem spada u poopćenje problema sedam mostova.

Prvi koji se bavio ovim problemom je kineski matematičar Kuan 1962. pa odatle i naziv problem kineskog poštara. Kineski poštar treba uzeti pisma u poštanskom uredu, dostaviti pisma svim ulicama i na kraju se vratiti u poštanski ured. Pri tome posao treba obaviti sa što manje hodanja kako bi uštedio trud i vrijeme, ali svaku ulicu mora prijeći barem jednom. Dakle, problem kineskog poštara je primjer u kojem pokušavamo naći šetnju kojom prolazimo kroz svaki brid na grafu barem jednom i to činimo na najkraći mogući način. Primijetimo da se problem kineskog poštara razlikuje od problema sedam mostova u tome što problem kineskog poštara zahtijeva da se vratimo u početnu točku i da prilikom putovanja pronađemo najkraći put. Prevedeno na jezik teorije grafova, problem je ekvivalentan tome da se u povezanom **težinskom** grafu *(G, w)*, gdje su $w(e) \geq 0$ težine bridova $e \in E(G)$ koje će u našem slučaju označavati **duljine** ulica, nađe Eulerova tura najmanje težine, takozvana **optimalna tura**. Uvedimo ove pojmove precizno.

Definicija 5.3. ***Težinski graf*** *je uređeni par (G, w) gdje je G graf, a $w : E(G) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ funkcija koja svakom bridu e grafa G pridružuje nenegativni broj $w(e)$. Vrijednost $w(e)$ nazivamo* ***težina brida*** *e.*

Težine bridova težinskog grafa mogu predstavljati udaljenost, masu, brzinu, vrijeme, visinu nekih troškova i slično.

Definicija 5.4. ***Poštarova tura*** *u grafu G je zatvorena šetnja koja uključuje svaki brid grafa G najmanje jednom. U težinskom grafu (G, w)* ***optimalna poštarova tura*** *je ona poštarova tura čiji je zbroj težina bridova minimalan.*



Slika 5.3: Primjer težinskog grafa

Ako je G Eulerov graf, onda je svaka Eulerova tura u tom grafu optimalna poštarova tura jer se njome svaki brid prijeđe točno jednom. U tom slučaju problem lako rješava Fleuryjev algoritam koji konstruira Eulerovu turu tako da počne u nekom vrhu te u svakom sljedećem koraku bira rezni brid neprijeđenog dijela grafa samo ako nema drugog izbora. Za graf koji nije Eulerov postoji također algoritam koji rješava problem kineskog poštara, ali je dosta složeniji od Fleuryjevog.
Sam Fleuryjev algoritam je jednostavan, ali jako spor, a djeluje na sljedeći način:
1. POČETAK Ulaz: Eulerov graf G.
2. Proizvoljno izabrati neki vrh $v \in V(G)$ kao početak. Postaviti v za tekući vrh i dodati ga kao početak stazi C.
3. Označiti proizvoljni brid e koji je incidentan s tekućim vrhom i nije rezni brid te ga dodati na kraj staze C. Samo ako nema drugih mogućnosti, za e uzeti rezni brid. Postaviti za tekući vrh drugi kraj brida e.
4. Izbrisati označeni brid iz G. Ako nema preostalih bridova: KRAJ; u suprotnom: povratak na korak 3.
5. KRAJ Izlaz: Eulerova tura C u grafu G.

Kao i problem sedam mostova, tako je i problem kineskog poštara postao jako poznat u vrlo kratkom vremenu pa su na osnovu njega nastale razne varijacije problema. Takav model je poslužio za rješavanje brojnih optimizacijskih problema, a neki najpoznatiji su:

- čišćenje ulica New Yorka
  U ovom problemu potrebno je optimizirati rutu za čišćenje grada koji je predstavljen mrežom jednosmjernih ulica. Težina usmjerenog brida grafa označava potrebno vrijeme za čišćenje te ulice. Optimalno čišćenje mora biti takvo da zahtijeva minimalno ukupno vrijeme te da čišćenje počinje i završava na istom mjestu.

- problem ruralnog poštara
  Ovaj problem je inspiriran praksom dostave pošte u ruralnim sredinama. Moguće je da u nekoj ulici nijedan stanar ne prima poštu, ali je ta ulica potrebna poveznica među drugim ulicama koje treba prijeći. Potrebno je istražiti težinski graf i podskup skupa bridova koji predstavlja ulice koje je obavezno prijeći. Cilj je pronaći zatvorenu stazu minimalne težine koja sadrži sve obavezne bridove.

- problem vjetrovitog poštara
  Kao i u prethodnom problemu, potrebno je pronaći zatvorenu stazu minimalne težine koja sadrži sve obavezne bridove. No, u ovom slučaju težina brida ovisi o smjeru kojim ga prelazimo pa se tako razlikuju težine ”vjetar u leđa” i ”protiv vjetra”.

- hijerarhijski kineski poštar
  Ovaj problem promatra povezani težinski graf takav da mu je skup bridova podijeljen u više klasa među kojima postoji odnos ”biti u prednosti”. Ukoliko prva klasa bridova ima veću prednost od druge, onda svi bridovi iz prve klase moraju biti prijeđeni prije bridova iz druge klase. Cilj je, uz poštovanje odnosa prednosti, pronaći zatvorenu šetnju minimalne težine, a koja sadrži sve bridove tog grafa.

Bibliografija

[1] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

[2] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb 1989.

[3] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, PMF–MO, Zagreb, poveznica `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf`, 2011.

[4] A. Golemac, A. Mimica i T. Vučićić, *Od Konigsberških mostova do kineskog poštara*, poveznica `http://e.math.hr/math_e_article/br21/golemac2`, 2012.

[5] N. Hartsfield, G. Ringel *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, 1990.

[6] K. Appel, W. Haken, J. Koch *Every planar map is four colorable*, Illinois J. Math, 1977.

[7] A. W. Appel, *Kempe's Graph Coloring Algorithm*, Princeton University, 2016.

[8] R. J. Wilson, *Introductions to Graph Theory*, Longman Iac, 1985.

[9] Mea Bombardeli, *Eulerova formula*, Časopis Miš, broj 19, 2003.

[10] M. Fošner, T. Kramberger, *Teorija grafova i logistika*, poveznica `https://hrcak.srce.hr/file/65788`

[11] S. Skiena, *Coloring Bipartite Graphs*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

[12] J. Gross, J.Yellen, *Graph Theory And Its Applications*, CRC Press, London, 1999.

[13] R. J, Willson *Four Colors Suffice*, Penguin Books, 2002.

[14] A. S. Claude, *The Journey of the Four Colour Theorem Through Time*, The New Zealand Mathematics Magazine, 2001. Zealand Mathematics Magazine, 2001

[15] G. Chartrand, P. Zhang, *Chromatic Graph Theory*, CRC Press, 2008.

[16] R. M. R. Lewis, *A Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications*, Springer, 2016.

[17] H. Thimbleby, *The directed Chinese Postman Problem*, Software Practice Exp., 2003.

[18] D. Guichard, *An Introduction to Combinatorics and Graph Theory*, section 5.10., Whitman Colledge, poveznica https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/book/section05.10.html

[19] E. L. Johnson, *Chinese Postman and Euler Tour Problems in Bi-Directed Graphs*, Springer, 2013.

[20] D. Eppstein, *Twenty-one Proofs of Euler's Formula*, University of California, Irvine, poveznica https://ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/

[21] J. A. Bondy, U. S. R. Murty *Graph Theory With Applications*, North-Holland, 1984.

Sažetak

U ovom radu proučavamo probleme vizualizacije u teoriji grafova, kao što su problem sedam mostova, problem ravninskog prikaza grafa, problem pravilnog bojenja vrhova grafa te potraga za dokazom Teorema četiri boje.

Summary

In this thesis, we study visualization problems in graph theory, such as the Königsberg bridge problem, the problem of existence of a planar graph representation, the problem of finding an optimal proper vertex coloring of a graph, and the search for a proof of four color theorem.

Životopis

Zovem se Viktorija Trupina, a djevojačko prezime mi je Stupalo. Rođena sam u Splitu 14. srpnja 1990. godine. U rodnom sam gradu završila osnovnu školu "Brda" te nakon toga Prirodoslovno-matematičku gimnaziju. Potom sam upisala preddiplomski studij matematika i informatika na PMF-u u Splitu. Nakon završetka studija sam upisala i diplomski studij istog smjera. Paralelno sa studiranjem sam radila kao učiteljica matematike u osnovnoj školi. Preselila sam se u Zagreb 2019. godine gdje sam upisala isti diplomski studij koji u Splitu nisam privela kraju, a to ću, nadam se, ovim radom ostvariti.