SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivo Brnčić

PRIMJENE VEKTORSKE I KOORDINATNE METODE U DOKAZIVANJU GEOMETRIJSKIH TVRDNJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, studeni, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala obitelji na podršci tijekom studiranja.
Hvala mentorici doc. dr. sc. Ani Prlić.

Sadržaj

Uvod

U nastavi matematike vektori se po prvi put spominju u 7. razredu osnovne škole kada se uči definicija vektora, svojstva vektora i operacije zbrajanja i oduzimanja vektora. U 3. razredu srednje škole učenici proširuju znanje o vektorima učeći množenje vektora realnim brojem i skalarni umnožak vektora te dokazuju geometrijske tvrdnje. Učenici se u nastavi matematike upoznaju s koordinatnim sustavom u ravnini u 5. razredu osnovne škole i tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja nadograđuju svoje znanje. Rene Descartes je zadužio matematiku otkrićem Kartezijevog koordinatnog sustava i njegovom zaslugom se geometrijske tvrdnje mogu dokazati primjenom koordinantne metode. U ovom radu ćemo prikazati primjenu vektorske i koordinatne metode u dokazivanju geometrijskih tvrdnji s posebnim naglaskom na korištenje navedenih metoda u zadacima s matematičkih natjecanja. U prvom poglavlju govorit ćemo o vektorskoj metodi. Prvo poglavlje podijeljeno je na četiri potpoglavlja. U prvom potpoglavlju definirat ćemo vektor i navesti osnovna svojstva vektora. U drugom potpoglavlju definirat ćemo skalarni produkt i navesti svojstva skalarnog produkta. Primijenit ćemo vektorsku metodu u primjerima i dokazat ćemo poznate geometrijske tvrdnje: teorem o težištu, teorem o ortocentru, relaciju paralelograma. U trećem potpoglavlju navest ćemo definiciju vektorskog produkta te iskazati propozije i teoreme o vektorskom produktu. Pokazat ćemo kako možemo dokazati poznate poučke, kao što su poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta i sinusov poučak, koristeći vektore. U četvrtom potpoglavlju saznat ćemo kako vektorsku metodu možemo koristiti u zadacima s matematičkih natjecanja. Zadaci su s različitih natjecanja županijske i državne razine. U drugom poglavlju govorit ćemo o koordinatnoj metodi. Drugo poglavlje podijeljeno je na tri dijela. U prvom potpoglavlju opisat ćemo koordinatnu metodu. U drugom potpoglavlju upoznat ćemo se s metodom kroz primjere. Dokazat ćemo geometrijske tvrdnje, primjerice da su dijagonale romba ABCD međusobno okomite, da je zbroj kvadrata udaljenosti proizvoljne točke kružnice od vrhova jednakostraničnog trokuta upisanog u kružnicu konstantna veličina. U trećem potpoglavlju primijenit ćemo koordinatnu metodu u rješavanju zadataka s natjecanja. Sve slike u ovome radu izrađene su u programu dinamične geometrije geogebri.

Poglavlje 1

Vektorska metoda

1.1 Uvod u vektore

U ovom poglavlju ćemo definirati vektore i navesti njihova osnovna svojstva.

Definicija 1.1.1. *Usmjerena ili orijentirana dužina je uređen par točaka* (A, B), $A, B \in E^3$. *Točka A naziva se početna točka, a točka B završna točka. Tu usmjerenu dužinu označavamo* $\overrightarrow{AB}$, *točku A nazivamo početnom točkom, a točku B završnom točkom.*

Definicija 1.1.2. *Za usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ *kažemo da su ekvivalentne ako dužine* $\overline{\mathrm{A}C}$ *i* $\overline{\mathrm{B}D}$ *imaju zajedničko polovište. Pišemo* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Propozicija 1.1.3. *Relacija* $\sim$ *je relacija ekvivalencije na skupu* $E^3 \times E^3$.

Definicija 1.1.4. *Vektor je klasa ekvivalencije po relaciji* $\sim$ *na skupu svih usmjerenih dužina* $E^3 \times E^3$. *Skup svih vektora označavamo s* V^3.

Klasu ekvivalencije određenu usmjerenom dužinom $\overrightarrow{AB}$ označavat ćemo s $[\overrightarrow{AB}]$. Dakle vrijedi

$$[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} \in E^3 \times E^3 \mid \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

Vrijedi $\overrightarrow{AB} \in [\overrightarrow{AB}]$ pa kažemo da je usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ predstavnik ili reprezentant vektora $[\overrightarrow{AB}]$.

Definicija 1.1.5. *Neka je* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$. *Modul ili duljina vektora* $\overrightarrow{a}$ *je duljina dužine* $\overline{\mathrm{A}B}$. *Modul označavamo* $|\overrightarrow{a}|$, *dakle* $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{AB}|$.

Definicija 1.1.6. *Neka su A, B i O kolinearne točke. Vektori $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ imaju istu orijentaciju ako se točke A i B nalaze s iste strane točke O, a suprotnu orijentaciju ako se nalaze s različite strane točke O.*

Ako dva vektora leže na paralelnim pravcima, za njih kažemo da imaju isti smjer ili da su kolinearni. Dogovorom je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom.

Definicija 1.1.7. *Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$. Zbroj vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ je vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ određen predstavnikom $\overrightarrow{AC}$. Kažemo da smo zbrojili vektore po pravilu trokuta.*

Definicija 1.1.8. *Množenje vektora skalarom je operacija $\mathbb{R} \times V^3 \to V^3$ koja uređenom paru $(\alpha, \overrightarrow{a})$ za $\alpha \in \mathbb{R}$ pridružuje vektor u oznaci $\alpha\overrightarrow{a}$ kojemu je*

1. *modul: $|\alpha\overrightarrow{a}| = |\alpha||\overrightarrow{a}|$*
2. *smjer: isti smjer kao $\overrightarrow{a}$ ako je $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, $\alpha \neq 0$,*
3. *orijentacija: jednaka kao orijentacija vektora $\overrightarrow{a}$ ako je $\alpha > 0$ i suprotna od nje ako je $\alpha < 0$.*

Ako je $\alpha = 0$ ili $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, tada definiramo $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Teorem 1.1.9. *Ako su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ po volji odabrani vektori iz V^3, α, β realni brojevi, tada vrijedi*

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in V^3$
2. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$, *asocijativnost*
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{0}$ *je neutralni element za zbrajanje*
4. $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{-a}) = (\overrightarrow{-a}) + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, $-\overrightarrow{a}$ *je suprotni element za zbrajanje*
5. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$, *komutativnost*
6. $\alpha\overrightarrow{a} \in V^3$
7. $\alpha(\beta\overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}$, *kvaziasocijativnost*
8. $\alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \alpha\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$
9. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$

10. $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Drugim riječima $(V^3, +, \cdot)$ je realni vektorski prostor.

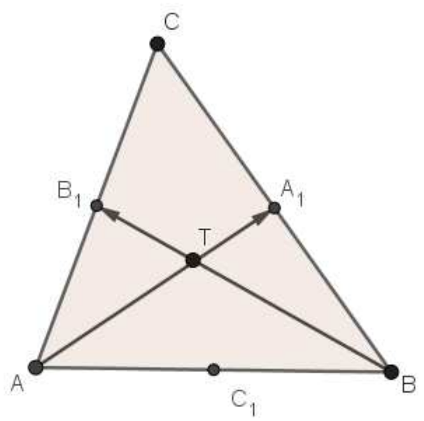
Definicija 1.1.10. *Za skup vektora* $\{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_k}\}$ *kažemo da je linearno nezavisan ako*

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + \alpha_k\overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}$$

povlači $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. *U suprotnom kažemo da je skup linearno zavisan.*

U sljedećim primjerima ćemo vidjeti kako se neke bitne planimetrijske činjenice mogu elegantno dokazati vektorskom metodom. Primjer koji slijedi je preuzet iz [6, str. 9].

Primjer 1.1.11. *Dokažite poučak o težištu trokuta: težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki-težištu. Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 (mjereći od vrha trokuta).*



Slika 1.1: Poučak o težištu trokuta

Rješenje: Neka su u trokutu ABC točke A_1, B_1, C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$. Označimo $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{b}$. Neka je T točka presjeka težišnica $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$. Tada vrijedi:

$$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{AA_1}$$

za neki $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, odnosno

$$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CA} + \alpha\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$$
$$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{a} + \alpha\left(-\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) = (1-\alpha)\overrightarrow{a} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{b}$$

Na isti način se pokaže da je

$$\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CB} + \beta\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)$$

za neki $\beta \in \langle 0, 1\rangle$, odnosno

$$\overrightarrow{CT} = (1-\beta)\overrightarrow{b} + \frac{\beta}{2}\overrightarrow{a}.$$

Vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su linearno nezavisni pa je $1-\alpha = \frac{\beta}{2}$, $\frac{\alpha}{2} = 1-\beta$, a odatle $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$. Budući da je $\frac{2}{3} \in \langle 0, 1\rangle$ težišnice AA_1 i BB_1 se sijeku unutar trokuta. Da dokažemo da se težišnice trokuta sijeku u jednoj točki, dovoljno je pokazati da su vektori $\overrightarrow{CT}$ i $\overrightarrow{CC_1}$ linearno zavisni tj. da postoji γ takav da je $\overrightarrow{CT} = \gamma\overrightarrow{CC_1}$. Kako je $\alpha = \frac{2}{3}$, imamo

$$\overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}.$$

Nadalje vrijedi

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$$

pa je

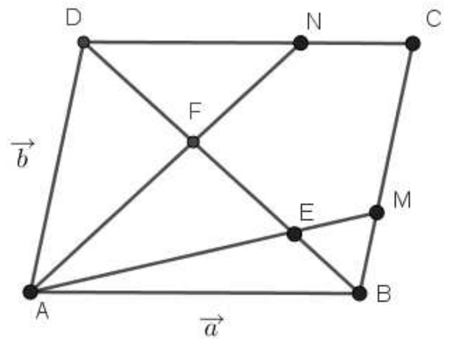
$$\overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$$

tj. $\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$, odakle slijedi da su točke C, T i C_1 kolinearne. Zaključujemo da se težišnice sijeku u jednoj točki-težištu trokuta. Iz $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3}$ zaključujemo da težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2:1 (mjereći od vrha trokuta).

Slijede primjeri kolokvijskih zadataka iz kolegija Elementarna matematika 2 [1].

Primjer 1.1.12. *Zadan je paralelogram ABCD i točke M i N takve da je* $\overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN} = \beta\overrightarrow{CD}$ *za realne brojeve* $\alpha, \beta \in \langle 0, 1\rangle$. *Neka pravci AM i AN sijeku BD redom u točkama E i F. Odredite za koje parametre* α *i* β *vrijedi* $|BE| = |EF| = |FD|$.

Rješenje:



Slika 1.2: paralelogram ABCD

Izrazimo vektore $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AF}$ i $\overrightarrow{AE}$ preko vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Imamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} - \beta\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + (1-\beta)\overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{b} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a}, \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{b}. \end{aligned}$$

Budući da su točke A, F i N kolinearne, postoji skalar $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{AN} = \mu\overrightarrow{AF}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{b} + (1-\beta)\overrightarrow{a} &= \mu\overrightarrow{AF} \\ \overrightarrow{b} + (1-\beta)\overrightarrow{a} &= \mu\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{a}\right), \end{aligned}$$

odakle slijedi $(1-\beta-\frac{1}{3}\mu)\overrightarrow{a}+(1-\frac{2}{3}\mu)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$. Kako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ linearno nezavisni, mora vrijediti $1-\beta-\frac{1}{3}\mu=0$ i $1-\frac{2}{3}\mu=0$, odakle dobijemo

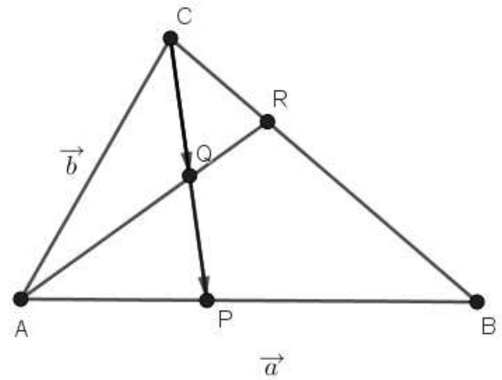
$$\beta=\frac{1}{2} \text{ i } \mu=\frac{3}{2}.$$

Trebamo još odrediti parametar α. Budući da su točke A, E i M kolinearne, postoji skalar $\lambda\in\mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AE}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\\ \lambda\cdot\overrightarrow{AE}&=\overrightarrow{a}+\alpha\overrightarrow{BC}\\ \lambda\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{a}\right)&=\overrightarrow{a}+\alpha\overrightarrow{b},\end{aligned}$$

odakle slijedi $(1-\frac{2}{3}\lambda)\overrightarrow{a}+(\alpha-\frac{1}{3}\lambda)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$. Kako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ linearno nezavisni, mora vrijediti $1-\frac{2}{3}\lambda=0$ i $\alpha-\frac{1}{3}\lambda=0$, odakle slijedi $\lambda=\frac{3}{2}$ i $\alpha=\frac{1}{2}$.

Primjer 1.1.13. *Zadan je trokut ABC i točke R, P takve da je $\overrightarrow{CR}=\alpha\cdot\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{AP}=\beta\cdot\overrightarrow{AB}$ za realne brojeve $\alpha,\beta\in\langle 0,1\rangle$. Označimo s Q sjecište pravaca AR i CP. Izrazite vektor $\overrightarrow{CQ}$ pomoću vektora $\overrightarrow{CP}$ i parametara α i β.*



Slika 1.3: trokut ABC

Uvedimo oznake $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{b}=\overrightarrow{AC}$. Tada vrijedi $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$. Izrazimo vektor $\overrightarrow{AR}$ pomoću vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ i parametra α. Imamo

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{b}+\alpha\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{b}+\alpha(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=(1-\alpha)\overrightarrow{b}+\alpha\overrightarrow{a}.$$

Izrazimo vektor $\overrightarrow{CP}$ pomoću vektora $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}$ i parametra β. Imamo

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{a}.$$

Pošto su točke C, Q i P kolinearne, postoji skalar $\mu \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\overrightarrow{CQ} = \mu\overrightarrow{CP}$, odakle slijedi $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP} = (1-\mu)\overrightarrow{CP}$. Budući da su točke A, Q i R kolinearne, postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\overrightarrow{AQ} = \lambda\overrightarrow{AR}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{AR} + (1-\mu)\overrightarrow{CP} \\ \overrightarrow{AP} &= \beta\overrightarrow{a}, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} \lambda((1-\alpha)\overrightarrow{b} + \alpha\overrightarrow{a}) + (1-\mu)(-\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{a}) &= \beta\overrightarrow{a} \\ (\alpha\lambda - \mu\beta)\overrightarrow{a} + (\lambda - \alpha\lambda - 1 + \mu)\overrightarrow{b} &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Kako su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ linearno nezavisni, mora vrijediti $\alpha\lambda - \mu\beta = 0$ i $\lambda - \alpha\lambda - 1 + \mu = 0$. Rješavanjem tog sustava dobivamo $\mu = \frac{\alpha}{\beta - \alpha\beta + \alpha}$ i $\lambda = \frac{\beta}{\beta - \alpha\beta + \alpha}$, iz čega slijedi

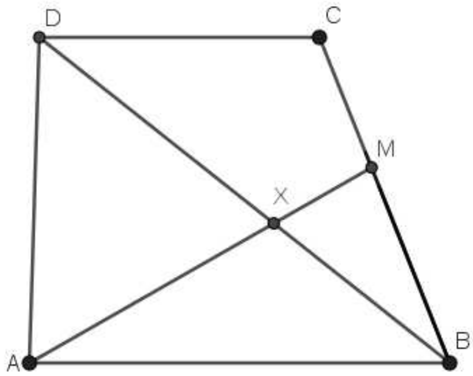
$$\overrightarrow{CQ} = \mu\overrightarrow{CP} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha\beta + \alpha}\overrightarrow{CP}.$$

Primjer 1.1.14. *Zadan je četverokut ABCD takav da je* $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. *Na stranici* $\overline{BC}$ *leži točka M takva da je* $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$. *Pravci AM i BD sijeku se u točki X.*

1. *Izrazite* $\overrightarrow{AM}$ *i* $\overrightarrow{BD}$ *pomoću* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AD}$.

2. *U kojem omjeru X dijeli dužinu* $\overline{\mathrm{AM}}$, *a u kojem omjeru dijagonalu* $\overline{\mathrm{BD}}$.

Rješenje:



Slika 1.4: četverokut ABCD

1. Izrazimo $\overrightarrow{AM}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BM}$. Imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Izrazimo $\overrightarrow{BD}$ pomoću vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{AD}$. Vrijedi $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

2. Budući da su točke A, X i M i B, X i D kolinearne, postoje skalari λ i μ takvi da je $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BX} = \mu\overrightarrow{BD}$. Sada imamo

$$\lambda\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \mu(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}),$$

odakle slijedi

$$\left(\frac{4}{5}\lambda - 1 + \mu\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{3}{5}\lambda - \mu\right)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}.$$

Kako su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ linearno nezavisni mora vrijediti $\frac{4}{5}\lambda - 1 + \mu = 0$ i $\frac{3}{5}\lambda - \mu = 0$, odakle slijedi $\lambda = \frac{5}{7}$ i $\mu = \frac{3}{7}$. Dakle, točka X dijeli dužinu $\overline{\text{AM}}$ u omjeru $5 : 2$, a dijagonalu $\overline{\text{BD}}$ u omjeru $3 : 4$.

1.2 Skalarni produkt vektora

U ovom poglavlju ćemo odrediti mjeru kuta dvaju vektora i definirati skalarni produkt vektora. Navest ćemo svojstva skalarnog produkta i riješiti nekoliko primjera koristeći skalarni produkt.

Na početku ćemo odrediti kako mjerimo kut među vektorima. Mjera kuta dva nenul vektora je mjera (veličina) manjeg od dva kuta polupravaca koji su određeni tim vektorima. Sukladno tome, mjera kuta dva vektora iznosi između 0 i π, pišemo $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in [0, \pi]$. Ako je jedan od vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nulvektor, tada se mjera kuta između njih ne definira. Također vrijedi $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$. Za vektore $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kažemo da su okomiti ako vrijedi $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{2}$, pišemo $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Definicija 1.2.1. *Skalarno množenje vektora je operacija $\cdot : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ koja vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ različitim od nulvektora pridružuje skalar*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

Ako je neki od vektora $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nulvektor, tada definiramo $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. Vrijednost $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}$ nazivamo skalarnim umnoškom ili skalarnim produktom vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Pomoću skalarnog produkta možemo karakterizirati okomitost vektora. Naime, iz definicije lagano slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.2.2. *Neka su $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \in V^3$. Vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su okomiti ako i samo ako je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.*

Skalarno množenje ima sljedeća svojstva:

Teorem 1.2.3. *Za sve $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geq 0$,
2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0$ *ako i samo ako je* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$,
3. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$, *komutativnost*
4. $(\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$, *kvaziasocijativnost*
5. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$, *distributivnost množenja prema zbrajanju*

Dokaz.

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geq 0.$

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$, dakle ako i samo ako $\vec{a} = \vec{0}$.

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos \angle(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$

4. Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$, tvrdnja vrijedi. Uzmimo zato $\lambda \neq 0, \vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$. Ako je $\lambda > 0$, tada je $|\lambda \vec{a}| = \lambda |\vec{a}|$ i $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ pa je

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Ako je $\lambda < 0$, tada je $|\lambda \vec{a}| = -\lambda |\vec{a}|$ i $\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$ pa je

$$(\lambda \vec{a}) \vec{b} = |\lambda \vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = -\lambda |\vec{a}||\vec{b}|(-\cos \angle(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda(\vec{a} \vec{b}).$$

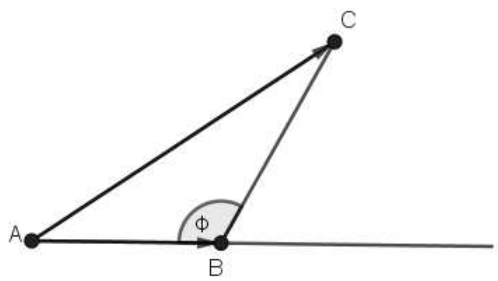
Za dokaz 5. tvrdnje potrebna je lema:

Lema 1.2.4. *Za sve $\vec{a}$ i $\vec{b} \in V^3$ vrijedi:*

1. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$

2. $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$

Dokaz. 1. Uzmimo da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$. Tada je $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$.



Slika 1.5: Trokut ABC

Primjenom kosinusovog poučka na trokut $\triangle$ ABC dobivamo

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{c}^{\,2} = |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\phi) \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b}.\end{aligned}$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori iste orijentacije, $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$, $\vec{a}+\vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$, tada je

$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{c}^{\,2} = |\vec{c}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(0) = \vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$
Analogno se pokaže ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni vektori suprotne orijentacije.

2. Koristimo $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}+(-\vec{b}))^2$ te dalje tvrdnju 1.

□

Dokaz. Dokazujemo petu tvrdnju teorema 1.2.3.

$$\begin{aligned}4\cdot(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= ((\vec{a}+\vec{b})+2\vec{c})^2 - (\vec{a}+\vec{b})^2 - 4\vec{c}^{\,2} \\ &= ((\vec{a}+\vec{b})+2\vec{c})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 - 2\vec{a}^{\,2} - 2\vec{b}^{\,2} - 4\vec{c}^{\,2} \\ &= ((\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c}))^2 + ((\vec{a}+\vec{c})-(\vec{b}+\vec{c}))^2 - 2\vec{a}^{\,2} - 2\vec{b}^{\,2} - 4\vec{c}^{\,2} \\ &= 2(\vec{a}+\vec{c})^2 + 2(\vec{b}+\vec{c})^2 - 2\vec{a}^{\,2} - 2\vec{b}^{\,2} - 4\vec{c}^{\,2} \\ &= 4\vec{a}\cdot\vec{c} + 4\vec{b}\cdot\vec{c},\end{aligned}$$

□

odakle slijedi

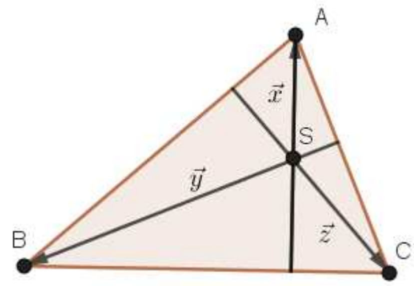
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$$

Korolar 1.2.5. *Za sve $\vec{a}$ i $\vec{b} \in V^3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi*

1. $\vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b})$
2. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$

U sljedećim primjerima ćemo vidjeti kako se skalarni produkt koristi pri dokazivanju nekih važnih planimetrijskih teorema [6, str. 9-24].

Primjer 1.2.6. *Dokažite poučak o visinama : visine trokuta sijeku se u jednoj točki (ortocentru trokuta).*



Slika 1.6: Poučak o visinama

Rješenje: Neka se visine trokuta ABC povučene iz vrhova A i B sijeku u točki S. Treba dokazati da visina iz vrha C također prolazi točkom S. Označimo

$$\vec{x} = \overrightarrow{SA}, \vec{y} = \overrightarrow{SB}, \vec{z} = \overrightarrow{SC}.$$

Tada je

$$\overrightarrow{BC} = \vec{z} - \vec{y}, \overrightarrow{CA} = \vec{x} - \vec{z}, \overrightarrow{AB} = \vec{y} - \vec{x}.$$

Kako je $\vec{x} \perp \overrightarrow{BC}, \vec{y} \perp \overrightarrow{CA}$ imamo $\vec{x} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \vec{y} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, a odatle je

$$\vec{x}(\vec{z} - \vec{y}) = 0, \quad \vec{y}(\vec{x} - \vec{z}) = 0,$$

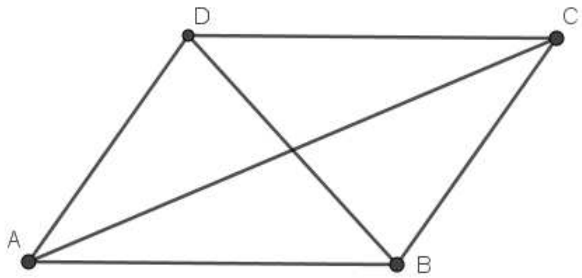
odnosno

$$\vec{x}\,\vec{z} - \vec{x}\,\vec{y} = 0, \quad \vec{x}\,\vec{y} - \vec{y}\,\vec{z} = 0.$$

Zbrajanjem posljednjih dviju jednakosti dobivamo $\vec{x}\,\vec{z} - \vec{y}\,\vec{z} = 0$. Iz posljednje jednakosti slijedi $\vec{z}(\vec{y} - \vec{x}) = 0$, odnosno $\vec{z} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, tj. $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, što znači da i visina iz vrha C prolazi točkom S.

Primjer 1.2.7. *Dokažite Eulerov poučak za paralelograme: zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina stranica paralelograma.*

Rješenje:



Slika 1.7: Eulerov poučak za paralelograme

Treba dokazati $|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|AB|^2 + |BC|^2)$. Vrijedi:

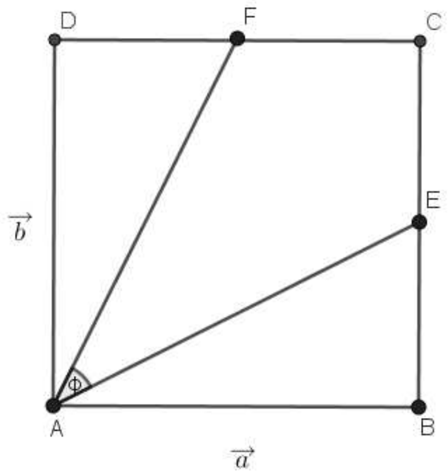
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB},$$

a odatle

$$\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2,$$

odnosno $|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|AB|^2 + |BC|^2)$, čime je tvrdnja dokazana.

Primjer 1.2.8. *U kvadratu ABCD točke E i F su polovišta stranica $\overline{\mathrm{BC}}$, odnosno $\overline{\mathrm{CD}}$. Izračunajte kut $\phi = \angle FAE$.*



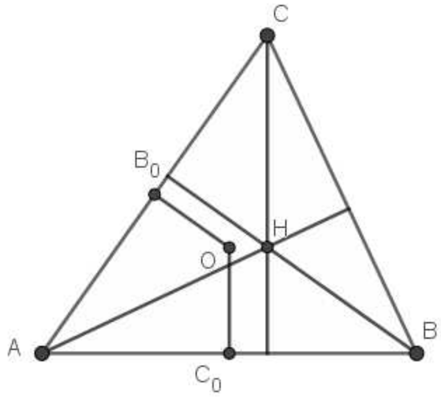
Slika 1.8: Kvadrat ABCD

Označimo li $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$, dobivamo $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|, \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. Dalje je $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, odakle dobivamo

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \left(\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2.$$

Nadalje imamo $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{(\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b})^2} = \sqrt{|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{b}|^2} = \sqrt{\frac{5}{4}|\overrightarrow{a}|^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{a}|$. Analogno, $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}|\overrightarrow{a}|^2 + |\overrightarrow{b}|^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{a}|$. Sada je $\cos\phi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|} = \frac{|\overrightarrow{a}|^2}{(\frac{\sqrt{5}}{2}|\overrightarrow{a}|)^2} = \frac{4}{5}$, odakle slijedi $\phi = 36°52'12''$.

Primjer 1.2.9. *(Hamiltonov poučak) U trokutu ABC središte opisane kružnice je O, a ortocentar H. Ako je $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, dokažite da je $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. .*



Slika 1.9: Hamiltonov poučak

Ako su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ točke C_0, odnosno B_0, tada je

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC_0}$$

i

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB_0}.$$

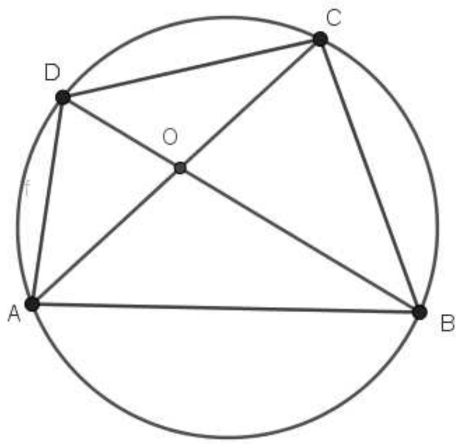
Tada vrijedi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}[(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})] = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC_0} = 0$, jer je vektor $\overrightarrow{AB}$ okomit i na $\overrightarrow{HC}$ i na $\overrightarrow{OC_0}$. Isto je tako

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}[(\overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})] = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB_0} = 0.$$

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ su različiti od $\overrightarrow{0}$ i linearno nezavisni pa ne mogu oba biti okomiti na $\overrightarrow{v}$. Zato je $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ moguće samo ako je $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, čime je tvrdnja poučka dokazana.

Primjer 1.2.10. *U tetivnom četverokutu ABCD dijagonala $\overline{BD}$ raspolavlja dijagonalu $\overline{AC}$. Dokažite da vrijedi:*

$$2|BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2.$$



Slika 1.10: Tetivni četverokut ABCD

Rješenje: Ako je O sjecište dijagonala četverokuta, tada je $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$. Također je: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$. Zbog toga je

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 \\
&= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})^2 \\
&= \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 \\
&+ \overrightarrow{OD}^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}^2 \\
&= 2|OB|^2 + 2|OA|^2 + 2|OC|^2 + 2|OD|^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \\
&+ 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} \\
&= 2|OB|^2 + 4|OA|^2 + 2|OD|^2.
\end{aligned}
$$

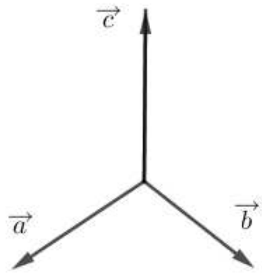
Budući da je $ABCD$ tetivan četverokut, znamo da vrijedi $|OA| \cdot |OC| = |OB| \cdot |OD|$ pa je posljednji izraz jednak $2(|OB|^2 + 2 \cdot |OB| \cdot |OD| + |OD|^2) = 2(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB})^2 = 2|BD|^2$, odnosno

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2|BD|^2.$$

1.3 Vektorski produkt

U ovom poglavlju definirat ćemo vektorski produkt, navesti svojstva vektorskog produkta te riješiti nekoliko primjera koristeći vektorski produkt.

Vektorski produkt vektora definiramo samo u vektorskom prostoru V^3. Vektorskim množenjem opet se dobije vektor kojeg opisujemo pomoću njegovog modula, smjera i orijentacije. Uvodimo pojam desno orijentirane baze prostora V^3 pomoću koje definiramo orijentaciju vektorskog produkta dva vektora. Za bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ od V^3 kažemo da je desno orijentirana ili desna ako promatrajući s vrha vektora $\overrightarrow{c}$ uočavamo obilazak od vektora $\overrightarrow{a}$ do vektora $\overrightarrow{b}$ kraćim putom kao obilazak u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (pozitivan obilazak). Za baze za koje je taj obilazak u smjeru kazaljke na satu, kažemo da su lijevo orijentirane (lijeve, negativno orijentirane). Tipičan primjer desne baze $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ prikazan je na slici



Slika 1.11: Desna baza

Je li baza desna ili lijeva možemo odrediti i pravilom desne ruke ili desnog vijka. Kod pravila desne ruke ispruženi palac pokazuje prvi vektor, ispruženi kažiprst pokazuje drugi vektor, a savijeni srednji prst treći vektor. Vektorsko množenje definiramo na sljedeći način:

Definicija 1.3.1. *Vektorsko množenje je operacija* $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$ *koja paru vektora* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ *pridružuje vektor* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *definiran na sljedeći način:*

1. *ako su vektori* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *kolinearni, tada je* $\overrightarrow{c} = 0$*;*

2. *ako su vektori* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *nekolinearni, tada je*

(a) modul $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$*,*

(b) smjer od $\overrightarrow{c}$ *je smjer okomit na smjer od* $\overrightarrow{a}$ *i na smjer od* $\overrightarrow{b}$*,*

(c) orijentacija od $\overrightarrow{c}$ *je takva da je uređena trojka* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ *desna baza od* V^3.

Sliku $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *vektora* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *nazivamo vektorskim umnoškom ili vektorskim produktom vektora* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$.

Propozicija 1.3.2. *Vrijedi* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ *ako i samo ako su vektori* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ *kolinearni.*

Dokaz. Ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni tada je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ po definiciji. Obratno, neka je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. Pretpostavimo da $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nisu kolinearni. Tada bi bilo

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\angle \sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = 0,$$

odakle slijedi $|\overrightarrow{a}| = 0$ ili $|\overrightarrow{b}| = 0$ ili $\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$. Iz prve jednakosti slijedi $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, iz druge $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, a iz treće $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in \{0, \pi\}$. Svaka od tih mogućnosti suprotna je pretpostavci da su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nekolinearni. □

Iz definicije direktno slijedi sljedeća propozicija.

Propozicija 1.3.3. *Za svaki* $\overrightarrow{a} \in V^3$ *vrijedi* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

Svojstva vektorskog produkta dana su sljedećim teoremom.

Teorem 1.3.4. *Za sve* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$*, antikomutativnost*

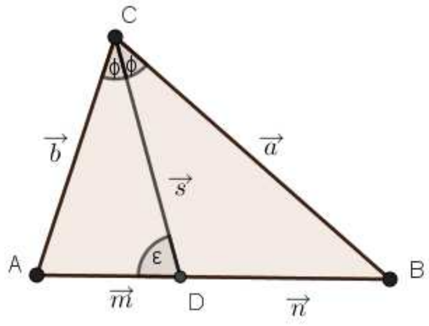
2. $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$*, kvaziasocijativnost*

3. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$*, distributivnost prema zbrajanju.*

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u skripti kolegija Analitička geometrija.

U sljedećim primjerima ćemo vidjeti kako se vektorski produkt spretno koristi pri dokazivanju nekih planimetrijskih tvrdnji [6, str. 27].

Primjer 1.3.5. *(Poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta) Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru duljina drugih dviju stranica trokuta.*



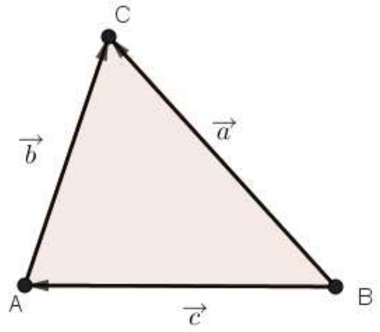
Slika 1.12: Poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta

Rješenje: Ako je CD simetrala kuta $\angle BCA$ trokuta ABC, tada je $\angle BCD = \angle DCA = \phi$. Označimo li $\angle ADC = \epsilon$, tada je $\angle CDB = \pi - \epsilon$. Neka je $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{s}$; treba dokazati da je $|\overrightarrow{m}| : |\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{b}| : |\overrightarrow{a}|$. Za površine P_1 i P_2 trokuta ADC i DBC vrijedi

$$2P_1 = |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{s}| = |\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{s}|, \quad 2P_2 = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{s}| = |\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{s}|,$$

odnosno $bs\sin\phi = ms\sin\epsilon$, $as\sin\phi = ns\sin(\pi - \epsilon)$, odakle slijedi $m = b \cdot \frac{sin\phi}{\sin\epsilon}$, $n = a \cdot \frac{sin\phi}{\sin\epsilon}$. Iz navedenog slijedi $m : n = b : a$.

Primjer 1.3.6. *(Sinusov poučak) Duljine stranica trokuta odnose se kao sinusi nasuprotnih unutarnjih kutova.*



Slika 1.13: Sinusov poučak

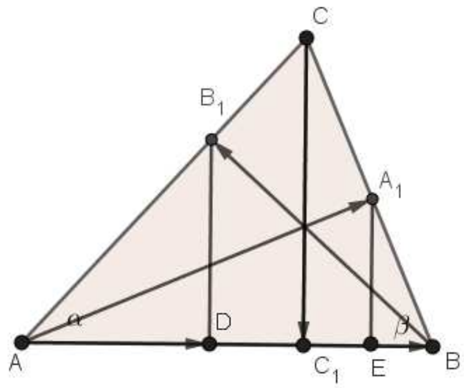
Rješenje: Uvedimo oznake $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{BA}$. Vrijedi $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ pa je $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$. Odatle je $|\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|$ tj. $|\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot sin\angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{c}| \cdot sin\angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$. Vrijedi $\angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}) = \gamma$, $\angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 180^\circ - \alpha$ pa zbog $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ slijedi $a\sin(\gamma) = c\sin\alpha$ ili $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$. Analogno se dokaže i za omjere $a : b$, $b : c$, odnosno vrijedi $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : sin\gamma$.

1.4 Zadaci s natjecanja

Slijede zadaci s natjecanja u kojima se primjenjuje vektorska metoda, kolinearnost i skalarni produkt [3]. U zadacima kolinearnost koristimo da bismo dokazali da je trokut jednakostraničan, a skalarni produkt da bi odredili površinu paralelograma i kut između vektora.

Primjer 1.4.1. *(Državno natjecanje 1998., 3. razred srednje škole) U trokutu ABC su dane visine AA_1, BB_1, CC_1, pri čemu je $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$. Dokažite da je trokut ABC jednakostraničan.*

Rješenje:



Slika 1.14: trokut ABC

Neka su D i E ortogonalne projekcije točaka B_1 i A_1 na pravac AB. Tada iz

$$\overrightarrow{C_1C} = -\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}$$

za projekciju ovog vektora na pravac AB dobije se

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}.$$

Kako je $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED}$ iz $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}$ slijedi $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{0}$ tj. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EB}$ i $|AD| = |EB|$. Iz pravokutnih trokuta ADB_1 i ABB_1 imamo

$$|AD| = |AB_1| \cos\alpha = |AB| \cos^2\alpha.$$

Analogno iz pravokutnih trokuta EBA_1 i ABA_1 dobivamo

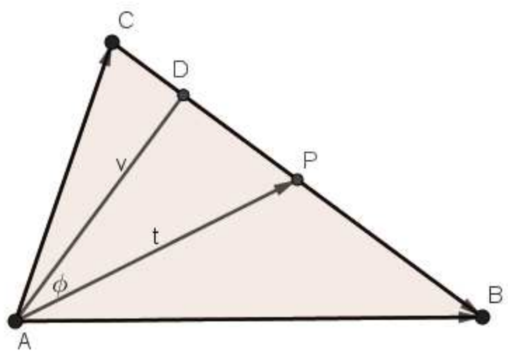
$$|EB| = |BA_1| \cos\beta = |AB| \cos^2\beta.$$

Kako je $|AD| = |EB|$, vrijedi $\cos^2\alpha = \cos^2\beta$. Analogno se dobije $\cos^2\alpha = \cos^2\gamma$, tj. $\cos^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\gamma$. Ako su svi kutovi trokuta šiljasti, onda je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ i on je jednakostraničan.

Ako bi jedan kut, npr. γ bio tupi kut, onda su α i β šiljasti, pa iz $\cos^2\alpha = \cos^2\beta$ slijedi $\alpha = \beta$. Tada iz jednakosti $\cos^2\gamma = \cos^2\alpha$ slijedi $\gamma = \pi - \alpha$. No, tada bi iz $\alpha + \alpha + (\pi - \alpha) = \pi$ slijedilo $\alpha = 0$ što nije moguće. Zato ovaj slučaj ne može nastupiti.

Primjer 1.4.2. *(Državno natjecanje 2019., 3. razred srednje škole) Vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *su jedinični vektori koji zatvaraju kut od 60 °. Ako je* $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ *i* $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$*, izračunajte kosinus kuta između visine i težišnice iz vrha A u trokutu ABC.*

Rješenje:



Slika 1.15: trokut ABC

Kako je $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ i $\overrightarrow{AC} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$, tada je

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (-\vec{a} + 4\vec{b}) - (-3\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = (-3\vec{a} + 2\vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}.$$

Izračunajmo duljine tih vektora, odnosno duljine stranica trokuta ABC i duljinu težišnice $\overline{AP}$. Kako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori jedinične duljine, slijedi $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60° = \frac{1}{2}$. Slijedi

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = (-3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 7,$$

$$|\overrightarrow{CB}|^2 = (2\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 4|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 + 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 12,$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = (-2\vec{a} + 3\vec{b})^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 7.$$

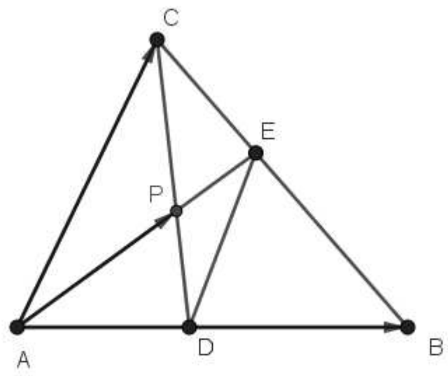
Dakle $|AC| = |AP| = \sqrt{7}$, $|CB| = 2\sqrt{3}$. Trokut APC je jednakokračan pa je

$$|AD|^2 = |AP|^2 - \left(\frac{1}{4}|BC|\right)^2 = 7 - \frac{12}{16} = \frac{25}{4},$$

iz čega slijedi $|AD| = \frac{5}{2}$. Vrijedi $\cos\phi = \frac{|AD|}{|AP|} = \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

Primjer 1.4.3. *(Državno natjecanje 2021., 3. razred srednje škole) U trokutu ABC točka D je na stranici $\overline{AB}$, a točka E na stranici $\overline{BC}$ tako da vrijedi $|AD| : |DB| = |CE| : |EB| = 3 : 4$. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki P. Vektor $\overrightarrow{AP}$ izrazite kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.*

Rješenje:



Slika 1.16: trokut ABC

Imamo $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, pri čemu je $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \frac{4}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$. Vektori $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AP}$ su kolinearni pa postoji skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AE} = \alpha\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right),$$

odnosno

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\alpha\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\alpha\overrightarrow{AC}$$

Izrazimo vektor $\overrightarrow{AP}$ na drugi način. Vrijedi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$, pri čemu je $\overrightarrow{CP} = \beta\overrightarrow{CD}$ za neki skalar $\beta \in \mathbb{R}$ i $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Uvrštavanjem dobijemo

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \beta\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right),$$

odnosno

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\beta\overrightarrow{AB} + (1-\beta)\overrightarrow{AC}.$$

Kako su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ linearno nezavisni, slijedi

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \\ \frac{4}{7}\alpha &= 1-\beta. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $\alpha = \beta = \frac{7}{11}$. Konačno, $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{11}\overrightarrow{AC}$.

Primjer 1.4.4. *(Državno natjecanje 2022., 3. razred srednje škole) Zadani su vektori $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{v} = 7\overrightarrow{m} - 5\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{m} - 4\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{z} = 7\overrightarrow{m} - 2\overrightarrow{n}$, pri čemu su $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. Ako su vektori $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ te $\overrightarrow{w}$ i $\overrightarrow{z}$ okomiti, odredite kut između vektora $\overrightarrow{m}$ i $\overrightarrow{n}$.*

Rješenje: Iz okomitosti vektora $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ slijedi

$$0 = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{m} + 3\overrightarrow{n})\cdot(7\overrightarrow{m} - 5\overrightarrow{n}) = 7|\overrightarrow{m}|^2 + 16\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} - 15|\overrightarrow{n}|^2,$$

odnosno

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} = \frac{15|\overrightarrow{n}|^2 - 7|\overrightarrow{m}|^2}{16}. \quad (*)$$

Iz okomitosti vektora $\overrightarrow{w}$ i $\overrightarrow{z}$ slijedi

$$0 = \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{z} = (\overrightarrow{m} - 4\overrightarrow{n})\cdot(7\overrightarrow{m} - 2\overrightarrow{n}) = 7|\overrightarrow{m}|^2 - 30\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} + 8|\overrightarrow{n}|^2,$$

odnosno

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} = \frac{8|\overrightarrow{n}|^2 + 7|\overrightarrow{m}|^2}{30}. \quad (**)$$

Izjednačavanjem jednakosti $(*)$ i $(**)$ slijedi

$$30\cdot(15|\overrightarrow{n}|^2 - 7|\overrightarrow{m}|^2) = 16\cdot(8|\overrightarrow{n}|^2 + 7|\overrightarrow{m}|^2).$$

Sređivanjem izraza dobije se $|\overrightarrow{m}| = |\overrightarrow{n}|$. Uvrštavanjem u jednakost $(*)$ dobijemo

$$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{n}|^2,$$

odakle iz definicije skalarnog produkta slijedi da je $\cos\angle(\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}) = \frac{1}{2}$, odnosno $\angle(\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}) = 60^\circ$.

Primjer 1.4.5. *(Županijsko natjecanje 2013., 4. razred srednje škole) Vektori* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ *i* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}$ *određuju paralelogram. Pri tome su* $\overrightarrow{m}$ *i* $\overrightarrow{n}$ *jedinični vektori, a mjera kuta kojeg* $\overrightarrow{m}$ *i* $\overrightarrow{n}$ *zatvaraju iznosi* $\frac{\pi}{3}$*. Odredite površinu paralelograma određenog vektorima* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$*.*

Rješenje: Površina paralelograma određenog vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ je $P = ab\sin\alpha$, gdje je $a = |\overrightarrow{a}|$, $b = |\overrightarrow{b}|$ i $\alpha = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Nadalje imamo, $\overrightarrow{m}^2 = |\overrightarrow{m}|^2 = 1$, $\overrightarrow{n} = |\overrightarrow{n}|^2 = 1$ i $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} = |\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{n}| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Koristeći definiciju skalarnog produkta dobivamo

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{a}|^2 &= \overrightarrow{a}^2 = (2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n})^2 = 4\overrightarrow{m}^2 + 4\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} + \overrightarrow{n}^2 = 4 + 2 + 1 = 7, \\
|\overrightarrow{b}|^2 &= \overrightarrow{b}^2 = (\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n})^2 = \overrightarrow{m}^2 - 2\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} + \overrightarrow{n}^2 = 1 - 1 + 1 = 1, \\
\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= (2\overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}) \cdot (\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}) = 2\overrightarrow{m}^2 - \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n} - \overrightarrow{n}^2 = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \\
\sin\alpha &= \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{28}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},
\end{aligned}$$

odnosno $P = ab\sin\alpha = \sqrt{7} \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Poglavlje 2

Koordinatna metoda

2.1 Uvod u koordinatnu metodu

U ovom poglavlju definirat ćemo koordinatnu metodu i opisati njezinu primjenu u dokazivanju geometrijskih tvrdnji te navesti činjenice iz analitičke geometrije ravnine koje su nam potrebne za rješavanje zadataka. Opisat ćemo primjene koordinatne metode u planimetriji. U koordinatnoj metodi glavno je pitanje kako što povoljnije postaviti koordinatni sustav. Naime, primjenom koordinatne metode želimo postići da određene točke geometrijskog lika dobiju što jednostavnije koordinate, što se povoljno odražava na jednadžbe pravaca, jednostavnije izračunavanje tražene veličine npr. površine ili brže opravdavanje tvrdnje zadatka. Postupak koordinatne metode glasi: za ishodište O koordinatnog sustava odaberemo neku izraženu točku lika (vrh, polovište stranice, polovište lika, težište lika, težišnicu, dijagonalu, promjer, tetivu, simetralu stranice, simetralu kuta, tangentu, os simetrije). Za barem jednu koordinatnu os odaberemo pravac na kojem leži neki istaknuti element lika (stranica, visina, težišnica, dijagonala, promjer, tetiva, simetrala stranice, simetrala kuta, tangenta, os simetrije) [5].

Prilikom rješavanja zadataka iz analitičke geometrije ravnine trebat će nam sljedeće činjenice [4]:

1. Udaljenost d točaka T_1 i T_2 jednaka je

$$d(T_1, T_2) = |T_1T_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

   gdje su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) koordinate točaka T_1 i T_2.

2. Ako točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ, tj. ako je $|AC| = \lambda|CB|$, onda su koordinate točke C dane s

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

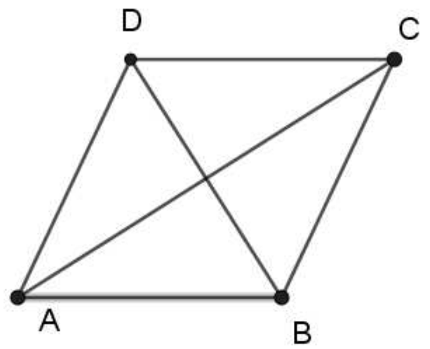
3. Ako je točka C polovište dužine $\overline{AB}$, tada su koordinate točke C dane s
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$
4. Koordinate težišta $T(x, y)$ trokuta ABC, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ iznose
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$
5. Eksplicitni oblik jednadžbe pravca je dan s
$$y = kx + l.$$
6. Implicitni oblik jednadžbe pravca je dan s
$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0$$
7. Jednadžba pravca koeficijenta k koji prolazi točkama $A_1(x_1, y_1)$ je dana s
$$y - y_1 = k(x - x_1).$$
8. Jednadžba pravca koji prolazi točkama $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ je dana s
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$
9. Uvjet okomitosti pravaca $p_1 = k_1x + l_1$ i $p_2 = k_2x + l_2$ je dan s
$$k_1k_2 = -1.$$
10. Udaljenost d točke $T(x_1, y_1)$ od pravca $Ax + By + C = 0$ jednaka je
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$
11. Jednadžba kružnice središta $S(x_0, y_0)$ i polumjera r je
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$
12. Površina trokuta s vrhovima $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ je dana s
$$P = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|.$$
13. Površina četverokuta s vrhovima $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ jednaka je
$$P = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)\right|.$$

2.2 Primjeri

U ovom poglavlju riješit ćemo nekoliko primjera koristeći koordinatnu metodu. Sljedeći primjeri preuzeti su iz [5].

Primjer 2.2.1. *Dokažimo da su dijagonale* $\overline{AC}$ *i* $\overline{BD}$ *romba* $ABCD$ *međusobno okomite.*

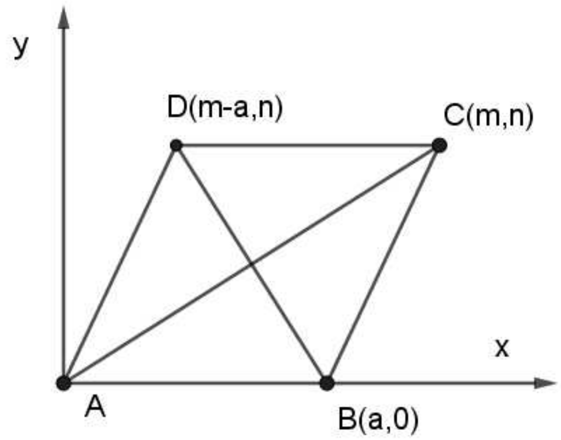
Rješenje:



Slika 2.1: Dijagonale romba

Neka je a duljina stranice romba $ABCD$, a koordinatni sustav postavimo ovako: vrh A neka je ishodište O, pravac AB neka je koordinatna os x, a pravac točkom A okomit na x neka je koordinatna os y. U tom koordinatnom sustavu poznate su koordinate vrhova A i B, a nepoznate su koordinate vrhova C i D. Označit ćemo koordinate vrhova

$$A(0,0),\ B(a,0),\ C(m,n),\ D(m-a,n)$$



Slika 2.2: Romb

Koristeći jednadžbu pravca kroz dvije točke dobijemo da su jednadžbe pravaca AC i BD na kojima leže dijagonale romba

$$y = \frac{n}{m}x, \quad y = \frac{n}{m-2a}(x-a)$$

iz čega slijedi da su koeficijenti smjerova tih pravaca

$$k_{AC} = \frac{n}{m}, \quad k_{BD} = \frac{n}{m-2a}.$$

S druge strane vrijedi jednakost $|AB| = |BC|$, odnosno u analitičkom smislu vrijedi jednakost

$$a = \sqrt{(m-a)^2 + n^2}.$$

Jednakost se nakon kvadriranja i pojednostavljivanja može zapisati u obliku

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m-2a} = -1.$$

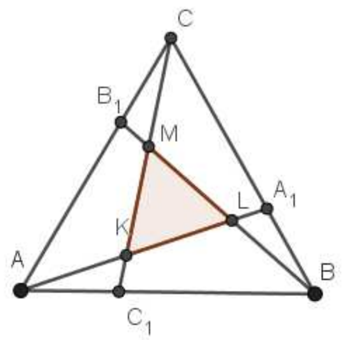
To je upravo uvjet okomitosti pravaca AC i BD, a to znači i dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ romba $ABCD$.

Primjer 2.2.2. *Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta ABC dane su točke A_1, B_1, C_1 takve da je*

$$|BA_1| = |CB_1| = |AC_1| = \frac{1}{3}|AB|.$$

U kojem su odnosu površina trokuta ABC i površina trokuta KLM, što ga određuju pravci AA_1, BB_1, CC_1.

Rješenje:



Slika 2.3: Trokut ABC

Koordinatni sustav postavimo da je vrh A ishodište, a stranica $\overline{AB}$ na x osi koordinatnog sustava i neka je $|AB| = 1$. Sa slike se lako vidi da su koordinate vrhova A, B i C i djelišnih točaka A_1, B_1 i C_1: $A(0,0), B(1,0)$ i $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), A_1(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}), B_1(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), C_1(\frac{1}{3}, 0)$. Jednadžbe pravaca AA_1, BB_1, CC_1 su nam potrebne za određivanje koordinata vrhova K, L, M:

$$AA_1 \ldots y = \frac{\sqrt{3}}{5}x, \quad BB_1 \ldots y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1), \quad CC_1 \ldots y = -3\sqrt{3}(x - \frac{1}{3}).$$

Određivanjem sjecišta parova pravaca dobivamo

$$M\left(\frac{3}{7}, \frac{2\sqrt{3}}{7}\right), K\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right), L\left(\frac{5}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right).$$

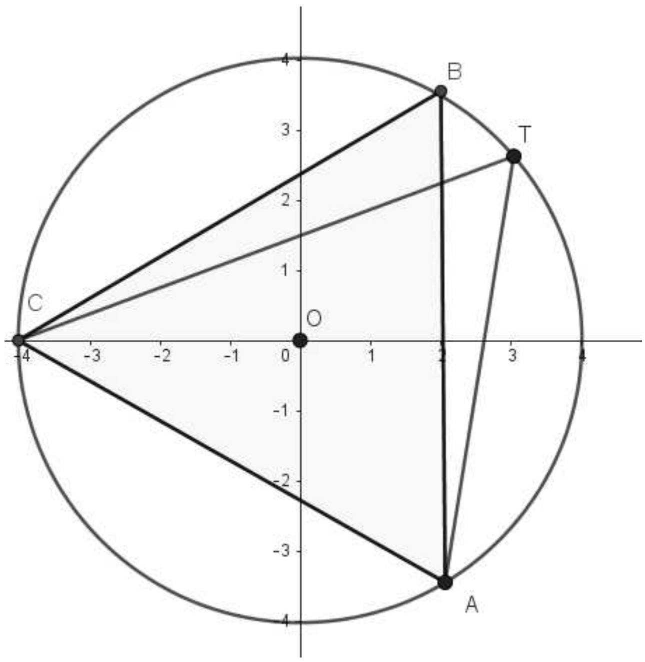
Koristeći formulu za površinu trokuta s vrhovima K, L, M nalazimo

$$\begin{aligned} P(KLM) &= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{28} = \frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{7} \cdot P(ABC). \end{aligned}$$

Sljedeći primjeri preuzeti su iz [4].

Primjer 2.2.3. *Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti proizvoljne točke kružnice od vrhova jednakostraničnog trokuta upisanog u tu kružnicu konstantna veličina.*

Rješenje:



Slika 2.4: Jednakostraničan trokut upisan u kružnicu

Koordinatni sustav postavimo tako da mu je ishodište u središtu kružnice k polumjera R, a na negativnom dijelu x-osi leži vrh C jednakostraničnog trokuta ABC upisanog u kružnicu k. Težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1 gledajući od vrha trokuta. Kako je $|CO| = R$, zaključujemo da je koordinata x točaka A i B jednaka $\frac{R}{2}$. Znamo $|OB| = R$ pa je $R^2 - (\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{4}R^2$, odnosno y koordinata točke B je $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Dakle vrhovi trokuta ABC imaju koordinate

$$A\left(\frac{R}{2}, -\frac{R\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right),\ C(-R, 0).$$

Za proizvoljnu točku T na kružnici koja ima koordinate (x, y) vrijedi

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Koristeći formulu za udaljenost dviju točaka dobivamo

$$\begin{aligned}
|TA|^2 &= \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= x^2 + y^2 - Rx + R\sqrt{3}y + R^2, \\
|TB|^2 &= \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= x^2 + y^2 - Rx - R\sqrt{3}y + R^2, \\
|TC|^2 &= (x + R)^2 + y^2 \\
&= x^2 + y^2 + 2Rx + R^2.
\end{aligned}$$

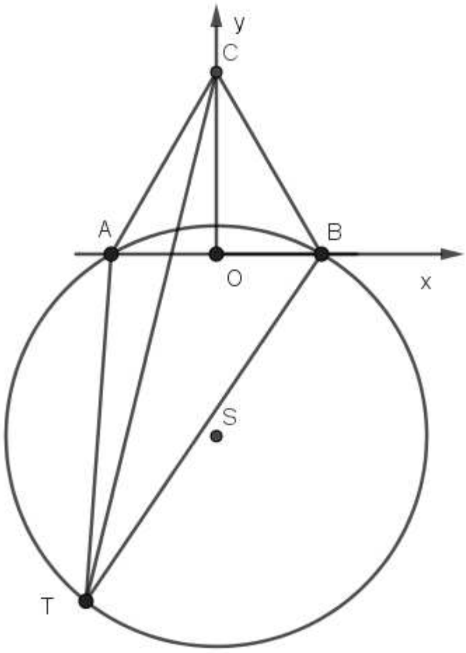
Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo

$$|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 = 3(x^2 + y^2) + 3R^2 = 3R^2 + 3R^2 = 6R^2.$$

Primjer 2.2.4. *Dan je jednakostraničan trokut ABC. Odredite skup svih točaka T ravnine za koje vrijedi*

$$|TA|^2 + |TB|^2 = |TC|^2.$$

Rješenje:



Slika 2.5: Jednakostraničan trokut ABC

Koordinatni sustav postavimo tako da je polovište osnovice $\overline{AB}$ ishodište koordinatnog sustava, a stranica $\overline{AB}$ na x-osi. Neka je a duljina stranice trokuta. Tada su koordinate vrhova

$$A\left(-\frac{a}{2}, 0\right), \quad B\left(\frac{a}{2}, 0\right), \quad C\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$$

Neka točka T koja zadovoljava dani uvjet ima koordinate (x, y). Tada imamo

$$
\begin{aligned}
|TA|^2 &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \\
&= x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2, \\
|TB|^2 &= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \\
&= x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2, \\
|TC|^2 &= x^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
&= x^2 + y^2 - a\sqrt{3}y + \frac{3a^2}{4}
\end{aligned}
$$

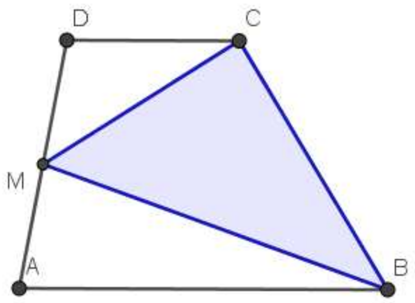
pa iz uvjeta $|TA|^2 + |TB|^2 = |TC|^2$ slijedi

$$x^2 + \left(y + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2.$$

Traženi skup točaka je kružnica sa središtem u $S\left(0, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, polumjera a.

Primjer 2.2.5. *Neka su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice trapeza $ABCD$ i neka je točka M polovište kraka $\overline{AD}$. Dokažite da je površina trokuta MBC jednaka polovini površine trapeza $ABCD$.*

Rješenje:



Slika 2.6: Trapez ABCD

Postavimo koordinatni sustav tako da je vrh A ishodište koordinatnog sustava, a osnovica $\overline{\mathrm{A}B}$ na x-osi. Tada je

$$A(0,0), \quad B(x_B,0), \quad C(x_C,y_C), \quad D(x_D,y_C), \quad M\left(\frac{1}{2}x_D, \frac{1}{2}y_C\right).$$

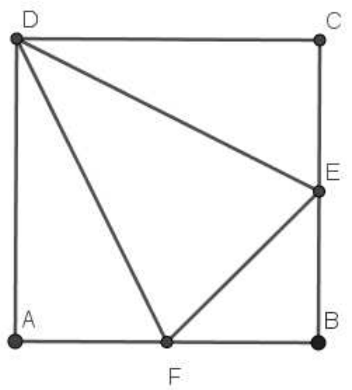
Koristeći formulu za površinu četverokuta s vrhovima A, B, C, D i formulu za površinu trokuta s vrhovima M, B, C dobivamo

$$\begin{aligned}
P(ABCD) &= \frac{1}{2}|0(0-y_C) + x_B(y_C-0) + x_C(y_C-0) + x_D(0-y_C)| \\
&= \frac{1}{2}|x_By_C + x_Cy_C - x_Dy_C|. \\
P(MBC) &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}x_D(0-y_C) + x_B\left(y_C - \frac{1}{2}y_C\right) + x_C\left(\frac{1}{2}y_C - 0\right)\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|x_By_C + x_Cy_C - x_Dy_C|.
\end{aligned}$$

Stoga je $P(MBC) = \frac{1}{2}P(ABCD)$.

Primjer 2.2.6. *Polovišta dviju susjednih stranica kvadrata i vrh kvadrata koji ne leži na tim stranicama su vrhovi trokuta. Dokažite da je površina tako dobivenog trokuta $\frac{3a^2}{8}$, gdje je a duljina stranice kvadrata.*

Rješenje:



Slika 2.7: Kvadrat ABCD

Neka su u pravokutnom koordinatnom sustavu točke $A(0,0), B(a,0), C(a,a)$ i $D(0,a)$ vrhovi kvadrata i neka su E i F redom polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ tog kvadrata. Kako je $E(a,\frac{a}{2})$ i $F(\frac{a}{2},0)$, to je

$$\begin{aligned} P(EDF) &= \frac{1}{2}\left|a\,(a-0) + 0\left(0-\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-a\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4} = \frac{3a^2}{8}. \end{aligned}$$

Primjer 2.2.7. *U kvadrat $ABCD$ upisana je kružnica. Dokažite da zbroj kvadrata udaljenosti točke kružnice od vrhova kvadrata ne ovisi o izboru točke na kružnici.*

Rješenje: Koordinatni sustav postavimo tako da je središte kvadrata $ABCD$ u ishodištu koordinatnog sustava, neka je stranica kvadrata duljine a i neka su stranice AB i CD paralelne s x osi. Tada su koordinate točaka A, B, C, D redom

$$A\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right), B\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right), C\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right), D\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$

i jednadžba kružnice je

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Za proizvoljnu točku $T(x, y)$ kružnice imamo

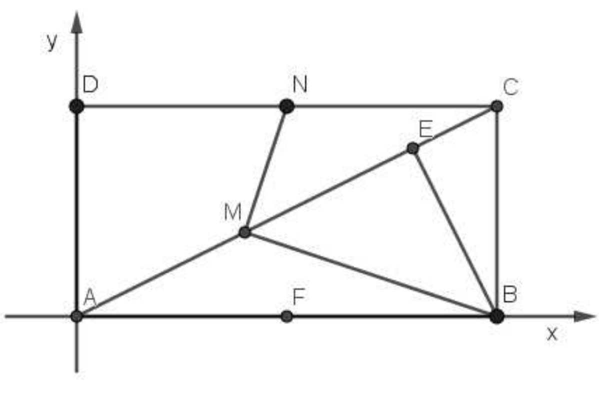
$$\begin{aligned}|TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 + |TD|^2 &= \left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2\right)\\ &+ \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2\right) + \left(\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2\right)\\ &= 4x^2 + 4y^2 + 8 \cdot \frac{a^2}{4} = 4(x^2 + y^2) + 2a^2\\ &= 4 \cdot \frac{a^2}{4} + 2a^2 = 3a^2.\end{aligned}$$

2.3 Zadaci s natjecanja

U ovom potpoglavlju ćemo vidjeti kako se koordinatna metoda može primijeniti u zadacima s natjecanja [3]. U jednom od zadataka ćemo smjestiti pravokutnik u koordinatni sustav tako da mu je jedan vrh u ishodištu, a stranice leže na x osi i y osi, kako bi dobili povoljnije jednadžbe pravaca i pokazali okomitost dvaju pravaca. U drugom zadatku ćemo kvadrat smjestiti na isti način u koordinatni sustav, kako bi odredili traženu veličinu, duljinu stranice kvadrata. Jednakostranični trokut ćemo smjestiti tako da mu je težište u ishodištu, a vrh leži na x osi.

Primjer 2.3.1. *(Županijsko natjecanje, 1999., 8. razred) U pravokutniku ABCD točka E je nožište okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$. Ako je točka M polovište dužine $\overline{AE}$, a točka N polovište stranice $\overline{CD}$, dokažite da je $\angle BMN = 90°$.*

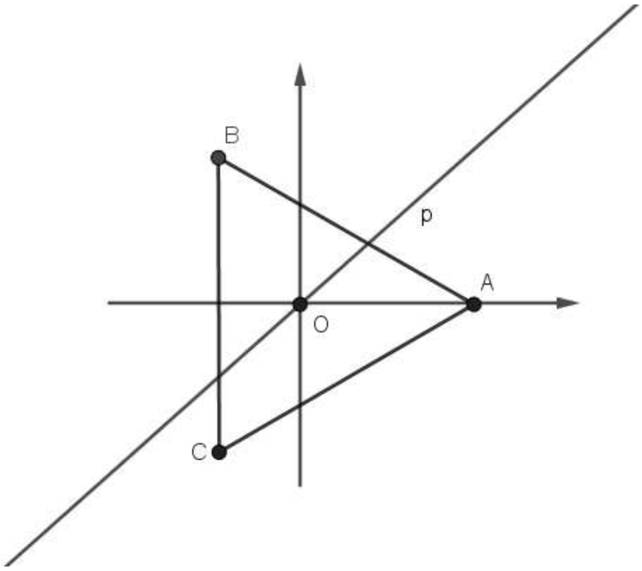
Rješenje:



Neka je $A(0,0), B(a,0), C(a,b), D(0,b)$. Tada je $N(\frac{a}{2}, b)$ pa koristeći jednadžbu pravca kroz dvije točke dobivamo

$$\begin{aligned}
AC \dots y - 0 &= \frac{b-0}{a-0}(x-0) = \frac{b}{a}x \Rightarrow k_{AC} = \frac{b}{a},\\
BE \perp AC \Rightarrow k_{BE} &= \frac{-1}{k_{AC}} = \frac{-a}{b} \Rightarrow BE \dots y = \frac{-a}{b}x + \frac{a^2}{b},\\
E = BE \cap AC &\Rightarrow E\left(\frac{a^3}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{a^3}{2(a^2+b^2)}, \frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}\right),\\
k_{MN} &= \frac{a^2+2b^2}{ab}, \quad k_{MB} = \frac{-ab}{a^2+2b^2} \Rightarrow k_{MN} \cdot k_{MB} = -1 \Rightarrow MN \perp MB
\end{aligned}$$

Primjer 2.3.2. *(Državno natjecanje, 2023., 4. razred srednje škole) Težištem jednakostraničnog trokuta stranice a prolazi proizvoljni pravac. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta do tog pravca konstantan, to jest ne ovisi o izboru pravca.*



Rješenje: Postavimo koordinatni sustav tako da je težište jednakostraničnog trokuta u ishodištu koordinatnog sustava, a na pozitivnom dijelu osi x leži vrh A. Težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1 gledajući od vrha trokuta, visina jednakostraničnog trokuta jednaka je $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ pa je $|OA| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, odnosno koordinate točke A su $A(\frac{a\sqrt{3}}{3}, 0)$. Koordinate točaka B i C su $B\left(\frac{-a\sqrt{3}}{6}, \frac{a}{2}\right)$ i $C\left(\frac{-a\sqrt{3}}{6}, -\frac{a}{2}\right)$. Kroz ishodište povucimo proizvoljni pravac kao na slici. Jednadžba tog pravca je $y = kx$, tj. $kx - y = 0$. Primjenom formule za udaljenost točke od pravca dobivamo da je traženi zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta od pravca p

jednak

$$d = \left(\frac{k \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{k^2+1}} \right)^2 + \left(\frac{-\frac{a}{2} - k \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{k^2+1}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{a}{2} - k \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{k^2+1}} \right)^2$$

Sređivanjem ovog izraza dobivamo

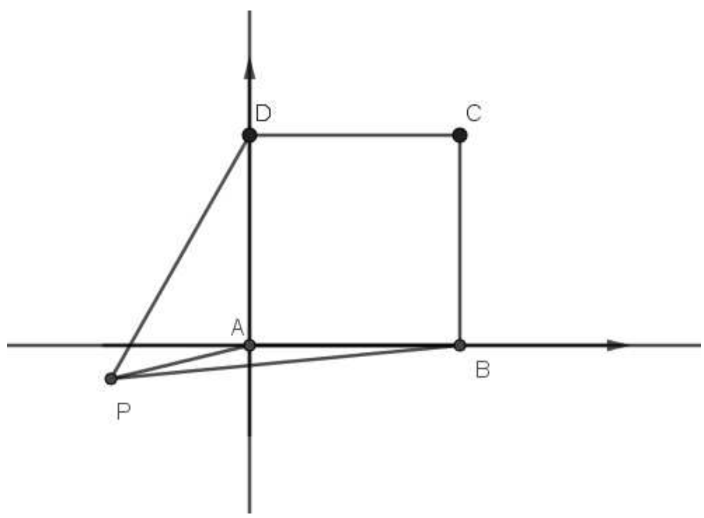
$$\begin{aligned} d &= \frac{\frac{1}{3}k^2a^2 + 2 \cdot \frac{1}{12}k^2a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4}}{k^2+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a^2 \cdot (k^2+1)}{k^2+1} \\ &= \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

Provjerimo tvrdnju iz zadatka i u slučaju da težištem prolazi pravac $x = 0$. U tom slučaju vrijedi

$$\begin{aligned} d &= \left|\frac{a\sqrt{3}}{3}\right|^2 + \left|-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right|^2 + \left|-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right|^2 \\ &= \frac{12a^2 + 3a^2 + 3a^2}{36} \\ &= \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

pa tvrdnja vrijedi za sve pravce koji prolaze težištem trokuta.

Primjer 2.3.3. *(Državno natjecanje, 2022., 3. razred srednje škole) U ravnini kvadrata $ABCD$, ali izvan njega, nalazi se točka P. Ako je $|PA| = \sqrt{5}$, $|PB| = \sqrt{26}$ i $|PD| = \sqrt{20}$, odredi duljinu stranice kvadrata.*



Rješenje: Postavimo koordinatni sustav tako da su vrhovi kvadrata $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a)$ i $D(0,a)$ i neka je $P(-x,-y)$. Primjenom formule za udaljenost dviju točaka iz uvjeta zadatka slijedi

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5, \\ x^2 + (y+a)^2 &= 20, \\ (x+a)^2 + y^2 &= 26. \end{aligned}$$

Prvu jednakost oduzmemo od druge i treće pa dobivamo

$$\begin{aligned} a^2 + 2ay &= 15, \\ a^2 + 2ax &= 21, \end{aligned}$$

a njihovim oduzimanjem $6 + 2ay = 2ax$. Ukoliko posljednju jednadžbu skratimo s 2 i kvadriramo, dobivamo

$$9 + 6ay + a^2y^2 = a^2x^2 = a^2(5 - y^2) = 5a^2 - a^2y^2.$$

U zadnju jednadžbu uvrstimo jednakost $a^2 = 15 - 2ay$. Uz supstituciju $t = ay$ dobivamo

$$9 + 6t + t^2 = 5(15 - 2t) - t^2 \Longrightarrow t^2 + 8t - 33 = 0,$$

čija su rješenja $t = 3$ i $t = -11$. Za $t = ay = -11$ iz $a^2 + 2ay = 15$ dobivamo $a = \sqrt{37}$. Iz jednadžbi $a^2 + 2ay = 15$ i $a^2 + 2ax = 21$ slijedi

$$x = -\frac{8}{\sqrt{37}}, \quad y = -\frac{11}{\sqrt{37}}$$

U ovom slučaju točka P nalazi se unutar kvadrata $ABCD$, što je kontradikciji s tim da se točka P nalazi izvan kvadrata. U slučaju $t = ay = 3$ analogno dobivamo $a = 3$, $x = 2$ i $y = 1$. Direktnom provjerom vidimo da ova konfiguracija zadovoljava uvjete zadatka. Dakle, duljina stranice kvadrata je jednaka 3.

Primjer 2.3.4. *(Državno natjecanje, 2020., 3. razred srednje škole) U kvadrat ABCD upisana je kružnica k. Iz točke T koja pripada kružnici k dijagonala* $\overline{AC}$ *vidi se pod kutom* α*, a dijagonala* $\overline{BD}$ *pod kutom* β*. Dokažite da je* $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta = 8$.

Rješenje: Neka je polumjer kružnice k jednak r i neka je ishodište koordinatnog sustava O njezino središte. Koordinate vrhova kvadrata su

$$A(-r,-r),\ B(r,-r),\ C(r,r),\ D(-r,r),$$

a koordinate točke T su (x, y). Udaljenost točke T od središta jednaka je r, dakle $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ pa je $x^2 + y^2 = r^2$. Kut α je kut između pravaca AT i CT, a kut β kut između pravaca BT i DT. Koristeći formulu za kut između dva pravca dobivamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT}k_{AT}},\\
\operatorname{tg}\beta &= \frac{k_{DT} - k_{BT}}{1 + k_{DT}k_{BT}}.
\end{aligned}$$

Nadalje je

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT}k_{AT}}\\
&= \frac{\dfrac{r-y}{r-x} - \dfrac{-r-y}{-r-x}}{1 + \dfrac{r-y}{r-x} \cdot \dfrac{-r-y}{-r-x}}\\
&= \frac{r - yr + x - r + yr - x}{r - xr + x + r - yr + y}\\
&= \frac{2rx - 2ry}{2r^2 - x^2 - y^2}.
\end{aligned}$$

Iz $x^2 + y^2 = r^2$ slijedi $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2rx - 2ry}{2r^2 - x^2 - y^2} = \dfrac{2(x-y)}{r}$. Nadalje je

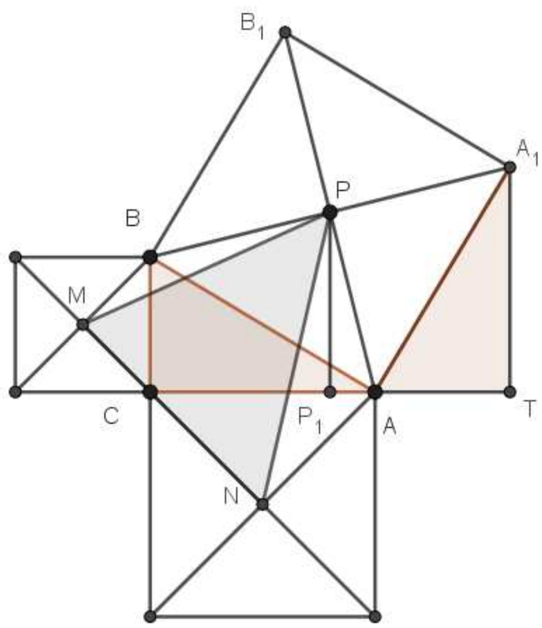
$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\beta &= \frac{\dfrac{r-y}{-r-x} - \dfrac{-r-y}{r-x}}{1 + \dfrac{r-y}{-r-x} \cdot \dfrac{-r-y}{r-x}}\\
&= \frac{r - yr - x - r + yr + x}{-r - xr - x + r - y - r - y}\\
&= \frac{-2rx - 2ry}{-r^2}\\
&= \frac{2(x+y)}{r}.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta &= \frac{4(x-y)^2}{r^2} + \frac{4(x+y)^2}{r^2} \\
&= \frac{4}{r^2}(x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2) \\
&= \frac{8}{r^2}(x^2 + y^2) \\
&= \frac{8}{r^2} \cdot r^2 \\
&= 8.
\end{aligned}$$

Primjer 2.3.5. *(Državno natjecanje, 2015., 3. razred srednje škole) Nad stranicama pravokutnog trokuta kojemu su a, b duljine kateta, konstruirani su prema van kvadrati. Izračunajte (u ovisnosti o a i b) površinu trokuta kojemu su vrhovi u središtima konstruiranih kvadrata.*

Rješenje:



Prvo primijetimo da su trokuti ATA_1 i BCA sukladni. Naime, $|AB| = |AA_1|$, $\angle A_1AT = \angle ABC$ i $\angle ATA_1 = \angle BCA$. Tada je $\overline{PP_1}$ srednjica trapeza CTA_1B i vrijedi $|PP_1| = \frac{a+b}{2}$. Postavimo koordinatni sustav tako da je ishodište koordinatnog sustava u vrhu C, vrh A na osi x, a vrh B na osi y. Za koordinate vrhova vrijedi

$$M\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \quad N\left(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Koristeći formulu za površinu trokuta s vrhovima M, N, P dobivamo

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{b}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{-a}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b}{2}\right) + \frac{a+b}{2}\left(-\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)\right| \\ &= \frac{1}{8} \cdot |2(a^2 + b^2 + 2ab)| \\ &= \frac{(a+b)^2}{4}. \end{aligned}$$

Bibliografija

[1] https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/em/em2/kolokviji.php.

[2] Bombardelli, M. i Milin Šipuš Ž.: *Analitička geometrija*. Matematički odjel, PMF, Zagreb, 2016./2017. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf.

[3] Horvatek, A.: *Natjecanja iz matematike*. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm.

[4] Ilišević, I.: *Dokazi nekih planimetrijskih činjenica koordinatnom metodom*. Osječki matematički list, Osijek, 12:41–59, 2012. https://hrcak.srce.hr/file/148122.

[5] Kurnik, Z.: *Metoda koordinata*. MIŠ, 43:100–104, 2008. https://mis.element.hr/fajli/769/43-02.pdf.

[6] Marić, A.: *Vektori*. Element, Zagreb, 1997.

Sažetak

U ovom diplomskom radu pokazali smo da vektorske i koordinatne metode mogu biti vrlo korisni alati u dokazivanju geometrijskih tvrdnji i zadataka s matematičkih natjecanja. U prvom poglavlju su obrađeni zadaci koji se rješavaju koristeći osnovna svojstva vektora te skalarni i vektorski produkt vektora. U drugom poglavlju bavili smo se problemima koji se rješavaju koordinatnom metodom.

Summary

In this thesis, we have shown that vector and coordinate methods can be very useful tools in proving geometric statements and problems from mathematical competitions. In the first chapter, problems are solved using the basic properties of vectors and also the scalar and vector product of vectors. In the second chapter, we dealt with problems that are solved using the coordinate method.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu 19. veljače 1994. godine. Školovanje sam započeo 2001. godine u Osnovnoj školi Petar Preradović u Zagrebu. Nakon toga sam 2009. godine upisao 7. gimnaziju u Zagrebu, a 2013. godine preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski sveučilišni studij Matematike: smjer nastavnički sam upisao 2017. godine. Nakon stjecanja titule univ. bacc. educ. math., 2019. godine upisao sam Diplomski sveučilišni studij matematike, smjer: nastavnički, također na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu.