SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Zrinko Franković

STATISTIČKA ANALIZA UTJECAJA PRIMJENE TEHNOLOGIJE NA UČENJE GEOMETRIJE U OSNOVNOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Voditelji rada:
dr. sc. Ivana Valentić
izv. prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, veljača, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Roditeljima

Sadržaj

Uvod

U suvremenoj nastavi naglašava se usmjerenost na učenike koje se pokušava potaknuti da postanu aktivni sudionici nastavnog procesa. Samim tim, učenje otkrivanjem kao proces stjecanja znanja putem aktivnog istraživanja, umjesto pasivnog primanja gotovih informacija, postalo je jedan od temelja današnjeg obrazovanja. Fokus nastave je na učenicima, dok se profesor povlači u drugi plan i navodi učenike na zaključke do kojih trebaju doći.

Prema [3], godinama se matematika poučavala pristupom usmjerenim na rješavanje problema; nastavnik predstavlja problem i rješenje, učenici vježbaju primjenu naučene vještine. Nažalost, ovaj pristup se nije pokazao najuspješnijim jer mnogoj djeci nije pomogao razumjeti ili zapamtiti matematičke koncepte. Poučavanje matematike kroz rješavanje problema obično znači da učenici rješavaju probleme kako bi naučili nove koncepte, a ne samo primjenjivali već naučene algoritme. Ovaj način poučavanja može se zamisliti inverznim u odnosu na tradicionalni pristup, jer se problem predstavlja na početku, a vještine i ideje proizlaze iz rada sa problemom.

Druga bitna odrednica moderne nastave je tehnologija. Njen napredak doveo je do velikih promjena u realizaciji nastave matematike, te danas većina nastavnika koristi neko od tehnoloških pomagala. Među njima se ističu alati dinamične geometrije, koji omogućuju učenicima da interaktivno istražuju i vizualiziraju razne modele iz svijeta geometrije. Prema [2], razmišljanje o tehnologiji kao dodatnoj opciji koju možemo koristiti u nastavi nije ispravno. Umjesto toga, tehnologiju treba promatrati kao sastavni dio nastavnikovog arsenala za podučavanje. Ona omogućuje proširenje sadržaja koje učenici mogu naučiti i raspona problema koje učenici mogu rješavati. To što alate dinamične geometrije osim nastavnika mogu koristiti i učenici, čini ih savršenim instrumentom za provođenje učenja otkrivanjem.

Upravo to je i bila motivacija za provođenje istraživanja čiji su tijek, analiza i zaključci obrađeni u ovom radu. Istraživanje je provedeno u šestom razredu osnovne škole. Učenici su bili podijeljeni u tri skupine, te je u svakoj od skupina nastavna jedninica "Površina trokuta" obrađena na drugi način, sa unaprijed pripremljenim materijalima. U prvoj skupini koristila se frontalna nastava bez primjene računala, u drugoj skupini se koristila tehnologija i frontalna nastava, dok se u trećoj skupini koristila informatička učionica u kojoj je svaki učenik imao pristup svom računalu. Usvojenost gradiva provjeravala se pisanom provjerom znanja dva puta; prvi put 4 dana nakon obrade gradiva i drugi put 40 dana nakon obrade gradiva. Test je bio koncipiran tako da provjerava i proceduralno i konceptualno znanje učenika. Podaci prikupljeni istraživanjem analizirani su opisnom statistikom, a cilj je bio testirati nultu hipotezu da različite metode ne dovode do značajne razlike u usvojenosti gradiva. Ovaj test proveo se korištenjem ANOVA (Analysis of Variance) metode. Na kraju rada je linearnom regresijom dana procjena ovisnosti broja bodova na testiranju i zaključne ocjene iz matematike za svakog učenika.

Poglavlje 1

Metode

1.1 Ispitanici

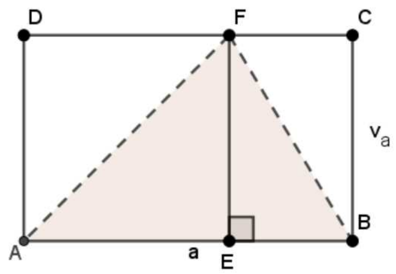
Ispitanici su bili učenici tri razredna odjela šestog razreda Osnovne škole Remete. Učenici su podijeljeni u skupine 1, 2 i 3, po tome kojemu razrednom odjelu pripadaju (6.a, 6.b, 6.d). Istraživanje je provedeno u ožujku, travnju i svibnju 2023. godine, a u njemu je sudjelovalo ukupno 57 učenika. Sva tri odjela imaju istu profesoricu iz matematike, koja je potvrdila da nijedan od njih ne odstupa značajno po matematičkom znanju od ostalih.

1.2 Nastavni sati

Aplet (eng. *Applet*) u Geogebri je unaprijed pripremljeni interaktivni vizualni materijal za korištenje na satu. Može biti osmišljen tako da je pogodan za samostalan rad učenika ili kao pomoć nastavniku kod prezentiranja sadržaja. U ovom istraživanju, svaki od apleta sastojao se od interaktivne slike, uputa za korištenje te gumbova za otkrivanje/sakrivanje tekstualnog rješenja (eng. *checkbox*).

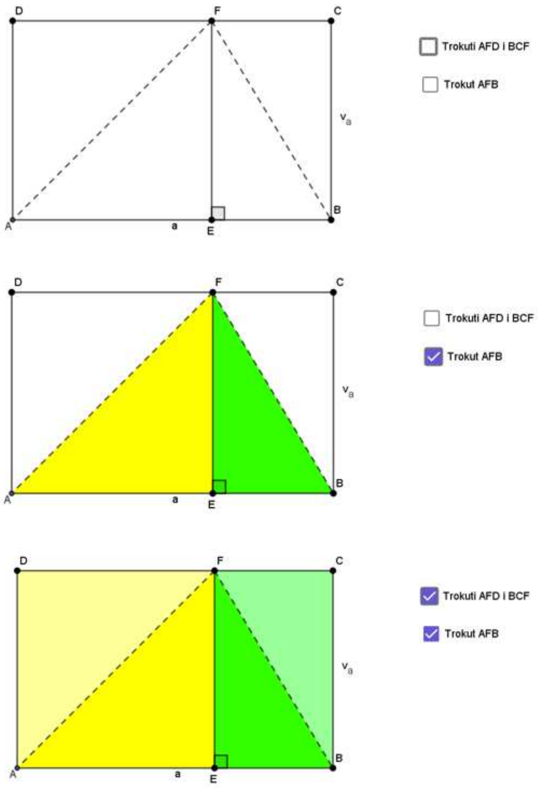
Za potrebe istraživanja u svakoj od tri skupine je nastavna jedinica "Površina trokuta" obrađena na drugi način. U prvoj skupini se koristila frontalna nastava bez primjene računala, uz nastavne listiće za otkrivanje te ploču. U drugoj skupini su se koristili nastavni listići i frontalna nastava uz primjenu računala, na način da je nastavnik na projektoru prikazivao unaprijed pripremljene interaktivne materijale u Geogebri. Nastavni sat za treću skupinu se održao u informatičkoj učionici u kojoj je svaki učenik imao pristup svom računalu sa spomenutim materijalima.

Sat u sve tri skupine počinje na isti način. Učenici se rješavanjem listića prisjećaju formule za površinu pravokutnika, a potom i za površinu pravokutnog trokuta (koristeći isti pravokutnik i njegovu dijagonalu). U svakoj od skupina bilo je nekoliko učenika koji su mislili da je formula za površinu pravokutnika $P = 2a + 2b$. Nakon toga otkrivaju opću formulu za površinu trokuta, skupine 1 i 2 koristeći nastavni listić te primjer prikazan na slici 1.1, a skupina 3 koristeći se apletom u Geogebri (slika 1.2), na kojem sami mogu mijenjati prikaz te uočavati sukladne trokute.



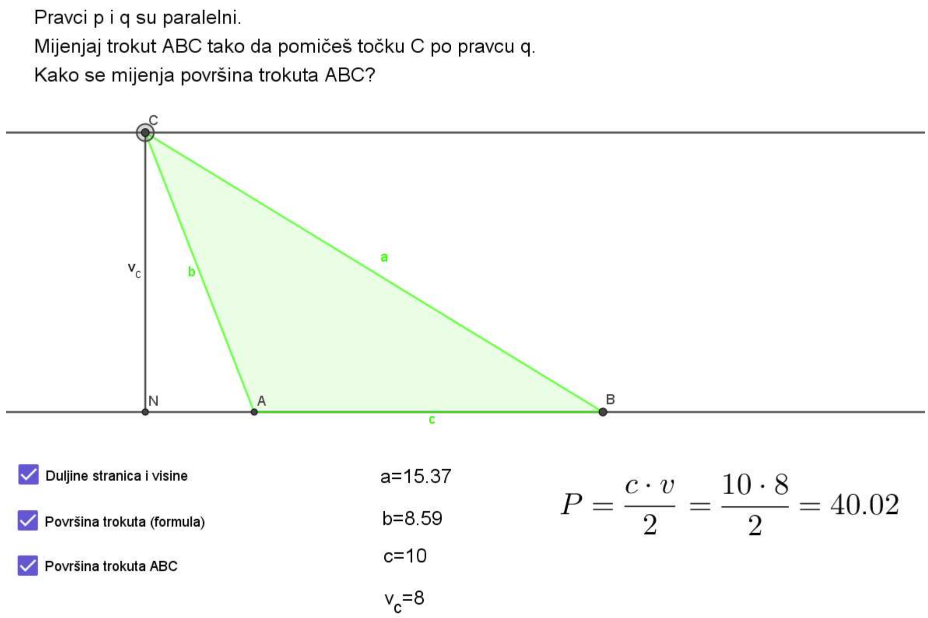
Slika 1.1: Slika sa nastavnog listića za skupine 1 i 2

Cilj je, u sve 3 skupine, da učenici sami uoče kako je zadani trokut podijeljen na 2 pravokutna trokuta ($\triangle AEF$ i $\triangle EBF$), čiju površinu znaju odrediti kao polovicu površine pravokutnika kojemu je dijagonala hipotenuza tog pravokutnog trokuta. Iz toga zaključuju da je površina $\triangle ABF$ jednaka polovici površine pravokutnika $ABCD$, odnosno dolaze do formule $P = \dfrac{a \cdot v_a}{2}$. Nakon rješavanja listića, skupini 1 nastavnik na ploči crta sliku 1.1, a skupinama 2 i 3 nastavnik na projektoru pokazuje aplet sa slike 1.2 te ukazuje na sukladne trokute.



Slika 1.2: Aplet za skupinu 3 - otkrivanje formule za površinu trokuta

Nastavak sata razlikuje se u svakoj od skupina. Učenici skupine 3 će dobiti 3 apleta, te će imati nekoliko minuta za istraživanje svakog od njih. Na prvom apletu se nalazi pravokutnik kao na slici 1.1 kojemu vrhovi nisu fiksirani. Učenici prate upute i pomiču vrhove pravokutnika, te uočavaju kako se povećanjem duljina stranica a i v_a povećava i površina pravokutnika $ABCD$, a samim tim i površina trokuta ABF. Drugi aplet (slika 1.3) prikazuje trokut i 2 paralelna pravca. Jedna stranica trokuta nalazi se na jednom pravcu, dok se preostali vrh trokuta nalazi na drugom pravcu. Učenici prate upute i pomiču taj vrh po pravcu, mijenjajući tako izgled trokuta, istovremeno pokušavajući otkriti kako će se mijenjati njegova površina. Na kraju aktivnosti, koristeći *checkbox*, učenici otkrivaju duljine stranica i visine trokuta, formulu za površinu, te konačno površinu trokuta. Uočavaju da površina ovisi o duljini stranice i njenoj visini, koji su u ovom primjeru konstantni, pa se ni površina trokuta ne mijenja.



Slika 1.3: Aplet 2

Treći aplet je kreiran slično kao i drugi, samo što ovaj puta učenici točku C pomiču vertikalno, a točke A i B horizontalno po pravcu na kojemu leže. Pomacima tih točaka mijenjaju se i duljine osnovice i visine na osnovicu, pa se tim mijenja i površina trokuta. Nakon što učenici završe svaku od aktivnosti sa apletima, nastavnik je prokomentira i uvjeri se da su učenici došli do ispravnih zaključaka. Nastavnik će u skupini 2 sve ove aplete pokazati na projektoru, te otkrivati jedan po jedan *checkbox*, kroz diskusiju navodeći učenike na točne zaključke. Isto to će napraviti i u skupini 3, samo ovaj puta skicirajući svaku od slika sa apleta na ploči. Na kraju sata će svaka skupina dobiti identične zadatke za uvježbavanje.

Zapažanja sa satova

Potrebno je odmah spomenuti da sa učenicima nijedne od skupina gradivo dosad nije obrađivano na ovaj način, pa je jasno kako su učenici druge i treće skupine bili puno zainteresiraniji za rad nego učenici prve skupine. Ipak, baš zbog te neuhodanosti, treća skupina je bila puno sporija od ostalih te sam konstantno morao obilaziti razred jer je uvijek netko imao problem; od problema sa paljenjem računala, otvaranjem Geogebre ili pojedinih apleta, preko zaigranosti pojedinih učenika kojima je bilo zanimljivo testirati mogu li se trokuti sa slika proširiti izvan prozora Geogebre ili suziti u jednu točku. Također, u par slučajeva učenici nisu uopće otvarali *checkboxove* korak po korak, nego sve odjednom, oduzevši tako sebi priliku da promatrajući promjene na slikama sami uoče zakonitosti, što i jest cilj ovih aktivnosti.

Za razliku od njih, u drugoj skupini sam ja sve aplete pokazivao na projektoru, pa su svi apleti bili obrađeni bez ikakvih šumova, u tempu i redosljedu kako su i zamišljeni. Učenici su bili izrazito aktivni, davali su svoje pretpostavke i obrazloženja za njih, uočavajući sami pogreške u svom razmišljanju pri otvaranju sljedećeg *checkboxa*.

Također, druga i treća skupina su dosta vremena potrošile na istraživanje apleta i različitih prikaza koje su mogli dobiti. Stoga je prva skupina imala najviše vremena za rješavanje zadataka na kraju sata, dok je trećoj skupini ostalo tek nekoliko minuta.

1.3 Test

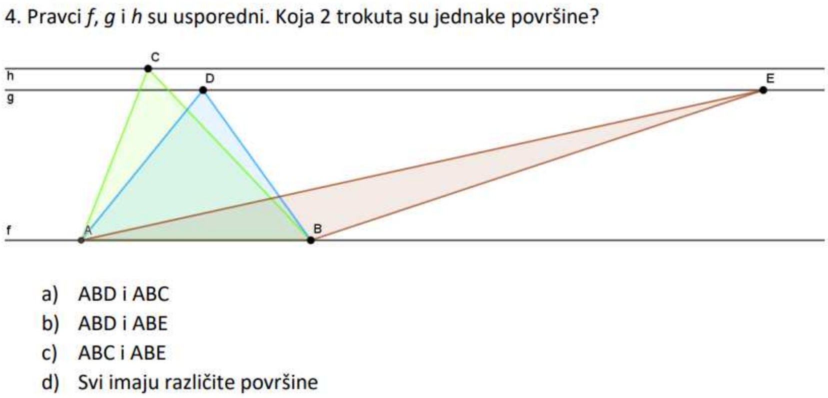
Struktura testa

Testom se istraživalo učeničko razumijevanje koncepta površine, te je proveden dva puta; prvi put 4 dana nakon obrade gradiva, a drugi put 40 dana nakon obrade gradiva. Test je bio isti oba puta, pisao se 15 minuta, te su ga pisali samo učenici koji su bili na nastavi na dan obrade gradiva. Sastojao se od 8 zadataka i ukupno je nosio 9 bodova. Svi zadaci, osim prvog, su bili zadaci izbora (na zaokruživanje). Također, budući da je ideja bila testirati konceptualno znanje učenika i njihov prostorni zor, svi zadaci, osim prvog i osmog, su zadaci sa slikom.

Opis zadataka

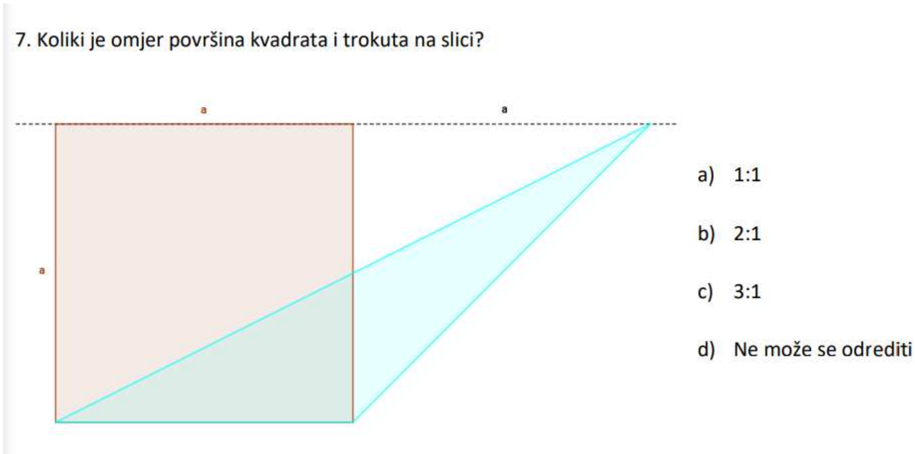
U prvom zadatku su zadani duljina stranice i duljina visine na tu stranicu, a traži se površina trokuta. Taj zadatak je trebao provjeriti proceduralno znanje učenika (jesu li naučili formulu). U drugom zadatku na skici trokuta naznačene su duljine dviju stranica i visine na jednu od njih. Ovdje se provjerava razumiju li učenici pojam ”visina na stranicu”. U trećem zadatku su učenici dobili skicu trokuta sa naznačenim duljinama jedne stranice i visine na neku drugu stranicu, a iz nje su trebali su zaključiti da se površina tog trokuta ne može odrediti.

Četvrti (prikazan na slici 1.4), peti i šesti zadatak su bili slični. U svakome od njih slika prikazuje nekoliko paralelnih pravaca i 3 trokuta, te je potrebno odrediti koji od trokuta ima najveću površinu. Razlikuju se po tome što su u petom zadatku trokuti raspoređeni tako da je osnovica svakoga na jednom od tri paralelna pravca, dok je visina jednog od trokuta bila dulja nego kod ostala dva. Budući da su osnovice sva 3 trokuta jednake duljine a, najveću površinu ima trokut sa najduljom visinom. U šestom zadatku su tri trokuta bila posložena tako da im je osnovica na jednom pravcu, a preostali vrh na njemu paralelnom pravcu. Učenici su trebali uočiti da jedan od trokuta ima dulju osnovicu od preostala dva,



Slika 1.4: 4. zadatak

pa će mu zbog toga i površina biti veća. U sedmom zadatku (slika 1.5) učenici su trebali uočiti da je površina kvadrata $a \cdot a$, dok je površina trokuta $\frac{a \cdot a}{2}$.



Slika 1.5: 7. zadatak

Posljednji, 8. zadatak je nosio 2 boda te je bilo potrebno zaokružiti sve točne tvrdnje:

a) Postoji tupokutan trokut kojemu su sve 3 visine jednake.
b) U svakom raznostraničnom trokutu sve 3 visine su različite.
c) U svakom jednakokračnom trokutu barem 2 visine su jednake.
d) Postoji jednakostraničan trokut kojemu su sve 3 visine različite.

Točni odgovori su *b*) i *c*), svaki točan odgovor je nosio 1 bod, a svaki netočan 1 negativni bod. Maksimalan broj bodova na ovom zadatku je bio 2, a minimalan 0 (nije moguće ostvariti negativne bodove). Prilog 1 - test sadržava cijeli test u njegovom izvornom obliku.

Poglavlje 2

Teorijski okvir

2.1 Vjerojatnost

Definicija 2.1.1. *Neka je* Ω *neprazan skup. Familija podskupova* $\mathcal{F}$ *od* Ω *zove se* σ*-algebra (ili* σ*-algebra događaja), ako vrijede sljedeća tri svojstva:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$, *onda je i* $A^c \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na komplement);*

(iii) Ako su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$, *onda je i* $\bigcup_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na prebrojive unije).*

Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ *zove se* izmjeriv prostor.

Definicija 2.1.2. *Neka je* Ω *neprazan skup i* $\mathcal{F}$ σ*-algebra dogadaja. Vjerojatnost na izmjerivom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F})$ *je funkcija* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *koja zadovoljava sljedeća tri svojstva:*

- *(A1) (nenegativnost) Za sve* $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$;
- *(A2) (normiranost)* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- *(A3) (*σ*-aditivnost) Za svaki niz* $\left(A_j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ *po parovima disjunktnih dogadaja*

  $A_j \in \mathcal{F} \left(A_i \cap A_j = \emptyset \text{ za } i \neq j\right)$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

Uredena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *zove se* vjerojatnosni prostor.

Definicija 2.1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. *Tada je slučajna varijabla na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *takva da vrijedi*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Definicija 2.1.4. Funkcija distribucije *slučajne varijable* X *je funkcija* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definirana formulom:*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

Definicija 2.1.5. *Slučajna varijabla* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je* apsolutno neprekidna *ako postoji* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *takva da za sve* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{2.3}$$

Funkcija f *se zove* funkcija gustoće *od* X.

Napomena 2.1.6. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *(Lebesgue integrabilna) funkcija za koju vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1. \tag{2.4}$$

Tada je f *funkcija gustoće neke apsolutno neprekidne slučajne varijable. Zaista, stavimo* $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(B) := \int_B f(t)dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *i* $X(\omega) := \omega$, $\omega \in \Omega$. *Tada vrijedi,*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Primjer 2.1.7. *Neka je*

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Želimo pokazati da je ϕ *funkcija gustoće neke slučajne varijable.*
Definirajmo

$$I := \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Tada imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} dsdt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Iz toga sljedi $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Konačno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \frac{2I}{\sqrt{2\pi}} = 1 \tag{2.5}$$

pa po (2.4) *slijedi da je* ϕ *funkcija gustoće neke slučajne varijable.*

Definicija 2.1.8. *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f. *Ako je* $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < \infty$, *onda postoji matematičko očekivanje od X definirano sa*

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

Primjer 2.1.9. *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* ϕ. *Tada je po 2.1.8*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \tag{2.6}$$

Definicija 2.1.10. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f *i očekivanjem* $\mathbb{E}(X)$. *Varijanca od X definira se kao*

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right]$$

Primjer 2.1.11. *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* ϕ. *Odredimo* $\mathrm{Var}(X)$.

Po (2.7) *znamo da očekivanje standardne normalne slučajne varijable iznosi 0. Sada računamo njenu varijancu:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \mathbb{P}(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \\
&= \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = xe^{-\frac{x^2}{2}} & v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{bmatrix} \\
&= \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}$$

Po (2.5) *već znamo da je vrijednost ovog integrala jednaka 1, pa stoga imamo*

$$\mathrm{Var}(X) = 1$$

Definicija 2.1.12. *Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće ϕ zove se* standardna normalna slučajna varijabla. *Oznaka je $X \sim N(0,1)$. Pripadnu funkciju distribucije označavamo s Φ. Nadalje, neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ te neka je*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Budući da zbog 2.5 vrijedi (zamjena varijabli $t = (x-\mu)/\sigma$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1,$$

f je funkcija gustoće neke slučajne varijable. Pripadna slučajna varijabla X zove se normalna slučajna varijabla s parametrima μ i σ^2. *Oznaka je $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$*

Primjer 2.1.13. *Neka je $X \sim N(0,1)$ i neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0$. Definirajmo $g(x) := \sigma x + \mu$. Tada je $Y := g(X)$ dobro definirana slučajna varijabla* i *pripadna funkcija gustoće je*

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Dakle, $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Vrijedi i obrat, ako je $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i ako X definiramo kao

$$X := \frac{Y-\mu}{\sigma}$$

tada je

$$X \sim N(0,1)$$

Također, iz toga slijedi da je

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}\,(\sigma X + \mu)$$

Napomena 2.1.14. *Ako je $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$, onda za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X).$$

Teorem 2.1.15. *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija (koja zadovoljava odredena svojstva, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida). Definirajmo $Y := g \circ X = g(X)$. Ako*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x)dx < \infty,$$

onda Y ima matematičko očekivanje i vrijedi

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx. \tag{2.7}$$

Primjer 2.1.16. *Neka je $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Pokažimo da je $\mathbb{E}(Y) = \mu$. Neka je $X \sim N(0,1)$. Budući da je $\sigma X + \mu \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, po* (2.7) *zaključujemo da je*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mu.$$

Za više detalja na ovu temu pogledati [4].

2.2 Statistika

Statističke testove koristimo kad želimo provjeriti neku hipotezu. Svaki postupak testiranja polazi od postavljanja nulte ili H_0 hipoteze i alternativne ili H_1 hipoteze. H_1 hipoteza je ono što želimo pokazati, dok je H_0 hipoteza onakvo stanje stvari kakvo bi bilo da nema nikakvog vanjskog utjecaja, ono što bi trebalo biti ispravno. Te dvije hipoteze su međusobno proturječne. Kao primjer, jedna od alternativnih hipoteza u ovom radu je *korištenje računala u obradi nastavne jedinice "Površina trokuta" utječe značajno na usvojenost gradiva*, dok je njoj odgovarajuća nulta hipoteza *korištenje računala u obradi nastavne jedinice "Površina trokuta" NE utječe značajno na usvojenost gradiva.* Nakon postavljanja hipoteza, pretpostavimo da je hipoteza H_0 istinita te provjeravamo koliko je u tom slučaju vjerojatno da smo dobili uzorak koji imamo. Ukoliko je to dosta vjerojatno, ne odbacujemo nultu hipotezu. Međutim, ukoliko je to malo vjerojatno, odbacujemo nultu hipotezu.

Recimo da je prosječni postotak riješenosti nekog testiranja iz gradiva "Površina trokuta" 60%, a učenici naše skupine, koji su isto gradivo obrađivali uz korištenje računala su na tom testiranju uspješno riješili 62% zadataka. Budući da smo pretpostavili da vrijedi H_0, tj. da način obrade gradiva ne utječe na usvojenost samog gradiva, sada se pitamo kolika je vjerojatnost da bi slučajno odabrani uzorak učenika ostvario uspjeh od 62%. Očito je da je vjerojatnost relativno velika, pa nemamo dovoljno razloga da bismo odbacili nultu hipotezu. Međutim, ukoliko su učenici naše skupine riješili testiranje sa točnošću od 88%, tada je, ponovno uz pretpostavku da među svim učenicima nema razlike u usvojenosti gradiva, pitanje koliko je vjerojatno da bi slučajno odabrana skupina učenika riješila testiranje sa točnošću od 88%. Jasno je da je u ovom slučaju ta vjerojatnost puno manja nego u prvom. Ukoliko procijenimo da je ona dovoljno mala, tada odbacujemo nultu hipotezu u korist alternativne.

Postavlja se pitanje što znači da je vjerojatnost za nešto *velika* ili *mala*. Ukoliko pomoću podataka iz testiranja uspijemo izračunati vjerojatnost da smo, uz to da vrijedi hipoteza H_0, dobili uzorak koji imamo (ili još radikalniji), tada taj broj predstavlja p-vrijednost. Ako smo za p-vrijednost dobili 0.5, to znači da je vjerojatnost da vrijedi nulta hipoteza i da smo dobili naš uzorak (ili ekstremniji) 50%, što sigurno nije dovoljno da odbacimo nultu hipotezu. Međutim, ukoliko smo za p-vrijednost dobili 0.001, to znači da je vjerojatnost da vrijedi nulta hipoteza i da smo dobili naš uzorak (ili ekstremniji) 0.1%, pa sa dosta velikom sigurnošću možemo zaključiti da H_0 ne vrijedi, te odbaciti nultu hipotezu. Ostalo je još samo odrediti koliko mala p-vrijednost treba biti kako bismo odbacili nultu hipotezu.

Precizan odgovor ne postoji, te se u statistici za tu granicu (*razinu značajnosti*) odabiru razne vrijednosti, najčešće 10, 5 ili 1%. Ukoliko je p-vrijednost koju smo dobili manja od prije provođenja testiranja odabrane razine značajnosti, odbacujemo nultu hipotezu, a u suprotnom je ne odbacujemo. Sve testove u ovom radu ćemo provoditi sa razinom značajnosti od 5%.

Definicija 2.2.1. Slučajni uzorak *duljine n za X je niz od n nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli*

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

kojima je distribucija jednaka (populacijskoj) razdiobi varijable X.

Definicija 2.2.2. *Realizaciju slučajnog uzorka (opažene vrijednosti x_i od $X_i, i = 1, \ldots, n$) zovemo* uzorkom.

Definicija 2.2.3. *Za uzorak $x_1, x_2, \ldots, x_n$* aritmetičku sredinu *definiramo kao*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Definicija 2.2.4. *Za uzorak $x_1, x_2, \ldots, x_n$* uzoračku varijancu *definiramo kao*

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

Napomena 2.2.5. *Hi-kvadrat razdioba označava se sa $\chi^2(n)$ i ovisi o parametru n koji zovemo* stupanj slobode.

- *Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne standardne normalne slučajne varijable onda je*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n).$$

- *Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable s $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ distribucijom onda je*

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_1 - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 .$$

Uočimo sljedeće: kada bi u gornjoj formuli umjesto $\bar{X}$ imali očekivanje μ tada bi slučajne varijable $\frac{X_1-\mu}{\sigma}, \frac{X_2-\mu}{\sigma}, \ldots, \frac{X_n-\mu}{\sigma}$ bile nezavisne standardne normalne pa bi suma *njihovih kvadrata imala $\chi^2(n)$ distribuciju. Kako nemamo pravo očekivanje već prosjek uzorka, to će se odraziti na našu distribuciju tako da ćemo imati jedan stupanj slobode manje, tj.*

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1). \tag{2.8}$$

Definicija 2.2.6. *Fisherova F-razdioba označava se sa $F(n,m)$ i ovisi o parametrima n i m koje zovemo stupnjevi slobode. Ako su $X \sim \chi^2(n)$ i $Y \sim \chi^2(m)$ nezavisne slučajne varijable onda je*

$$\frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \sim F(n,m). \tag{2.9}$$

Napomena 2.2.7. *Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable s $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ distribucijom i od njih nezavisne $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ nezavisne slučajne varijable s $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ distribucijom onda je iz* (2.8)

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1) \quad i \quad \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

pa imamo

$$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(n-1, m-1) \tag{2.10}$$

ANOVA test

ANOVA test (*Analysis of variance*) koristimo kada imamo više od dvije skupine, a želimo provjeriti jesu li očekivanja unutar skupina jednaka. Njime uspoređujemo odnose varijanci unutar pojedinih skupina u odnosu na ukupnu varijancu da vidimo dolazi li ukupna varijabilnost od razlike u očekivanjima između skupina ili od varijabilnosti unutar skupina.

Za k nezavisnih slučajnih uzoraka (ne nužno iste duljine), imamo:

$$\begin{aligned}
&X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right)\\
&X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right)\\
&\vdots\\
&X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn_k} \sim N\left(\mu_k, \sigma^2\right)
\end{aligned}$$

gdje je svaki od njih neke duljine n_i, te uvodimo oznaku $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Pretpostavljamo da slučajni uzorci dolaze iz normalnih distribucija i imaju iste varijance, a testiramo imaju li isto očekivanje. Stoga su statističke hipoteze

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$
$$H_1 : \text{ ne vrijedi } H_0 \text{ odnosno postoje } i, j \text{ takvi da je } \mu_i \neq \mu_j$$

Označimo ukupno kvadratno odstupanje od ukupnog prosjeka sa

$$s_0 := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2$$

gdje je $\bar{x}$ ukupni prosjek, odnosno $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$. Također, označimo ukupno kvadratno odstupanje od prosjeka unutar svake od skupina sa

$$SSE := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right)^2$$

gdje je $\bar{x}_{i\cdot}$ prosjek i-tog uzorka, odnosno $\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$. Ukoliko je hipoteza H_0 istinita tada će $\frac{s_0}{SSE}$ biti malen, što znači da će ukupna varijabilnost dolaziti od varijabilnosti unutar skupina. U slučaju da H_0 nije istina, tada će $\frac{s_0}{SSE}$ biti velik, jer će ukupnoj varijabilnosti doprinositi i razlike u očekivanju između skupina. Raspisom s_0 dobivamo

$$\begin{aligned}
s_0 &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} + \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}\right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left[\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right)^2 + (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 + 2 \cdot \left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right)(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})\right] = \\
&= SSE + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}) \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_{i.}\right)
\end{aligned}$$

Konačno, zbog $\sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot}\right) = 0$ slijedi

$$s_0 = SSE + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 = SSE + \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 .$$

Ovim smo pokazali da se ukupna varijabilnost može dobiti kao zbroj varijabilnosti unutar skupina i varijabilnosti prosjeka skupina od ukupnog prosjeka. Definirajmo sada SST kao

$$SST := \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 .$$

Budući da je $\frac{s_0}{SSE} = 1 + \frac{SST}{SSE}$ zaključujemo da će ukoliko je hipoteza H_0 istina $\frac{SST}{SSE}$ biti malen, a ako H_0 nije istina tada će $\frac{SST}{SSE}$ biti velik.

Naravno, ukoliko želimo precizno definirati što nam znači malen odnosno velik, moramo prvo nešto reći o distribuciji odgovarajućih statistika. Budući da je $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$ iz (2.8) znamo da je

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}\right)^2 \sim \chi^2 (n_i - 1).$$

Iz toga i nezavisnosti k slučajnih uzoraka slijedi da je

$$\frac{1}{\sigma^2} SSE = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}\right)^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - 1 \right) = \chi^2(n-k).$$

$$\frac{1}{\sigma^2} SSE = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}\right)^2 \sim \chi^2 \left(\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) \right) = \chi^2(n-k).$$

Nadalje, ako vrijedi H_0, može se pokazati da su SSE i SST nezavisni.
Kako je

$$\frac{1}{\sigma^2} SSE + \frac{1}{\sigma^2} SST = \frac{1}{\sigma^2} S_0 := \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \bar{X}\right)^2 \sim \chi^2(n-1),$$

gdje smo ponovno koristili pretpostavku H_0, zaključujemo da je

$$\frac{1}{\sigma^2} SST \sim \chi^2(n - 1 - (n-k)) = \chi^2(k-1).$$

Po (2.9) sada dobivamo da je

$$\frac{\frac{SST}{k-1}}{\frac{SSE}{n-k}} \sim F(k-1, n-k).$$

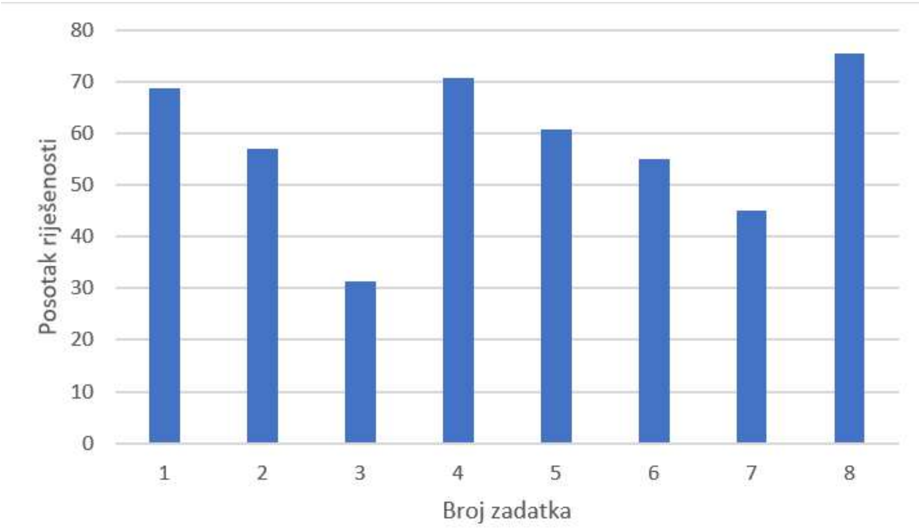
Za više detalja na ovu temu pogledati [1].

Poglavlje 3

Rezultati i diskusija

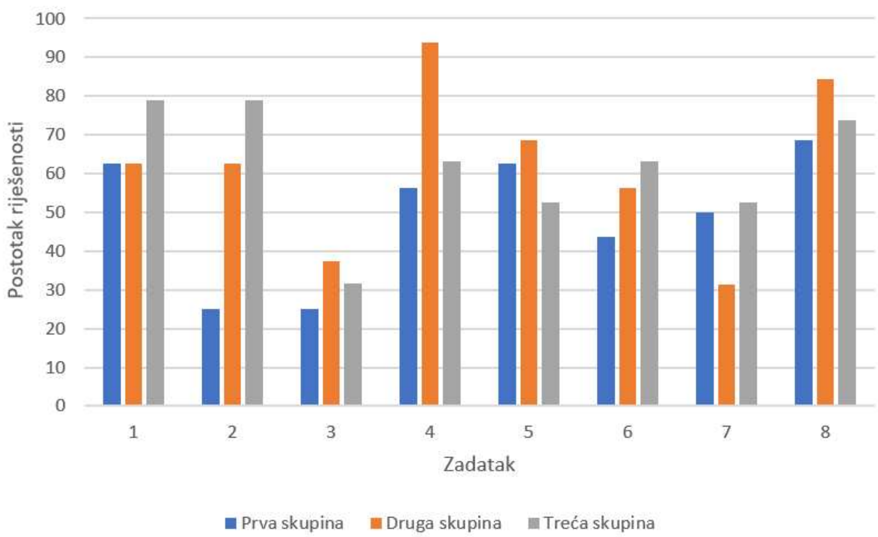
3.1 Prvo testiranje

Kako je već navedeno, prvo testiranje je provedeno 4 dana nakon obrade gradiva, na sljedećem satu matematike. Učenici nisu dobili domaću zadaću, kako bi se izbjeglo da oni revniji učenici kod kuće dodatno vježbaju. U 3 razreda testiranju je pristupio ukupno 51 učenik. Statistički testovi su napravljeni u R-u, dok su grafovi rađeni u Excelu. Na grafu na slici 3.1 prikazan je postotak riješenosti za svaki zadatak. Iz njega očitavamo da je riješenost svih zadataka bila između 30 i 75%, što sugerira da je test bio dobro zadan, to jest nijedan zadatak nije bio ni pretežak ni prelagan.



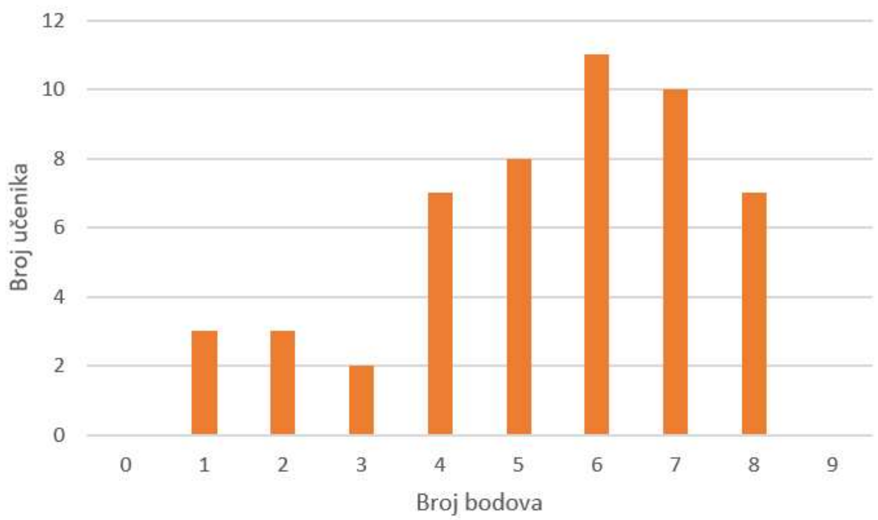
Slika 3.1: Postotak riješenosti po zadacima - prvi test

Također, negativno se ističe treći zadatak, u kojemu je bila zadana duljina jedne stranice i visina na drugu stranicu, a učenici su trebali zaključiti da se površina tog trokuta ne može odrediti. Potencijalni razlog bi mogao biti što učenici na nastavi matematike nisu navikli rješavati ovakve *thinking outside of the box* zadatke koji provjeravaju razumijevanje gradiva, već su naučeni uvrstiti brojeve u formulu i računati.



Slika 3.2: Postotak riješenosti zadataka po skupinama - prvo testiranje

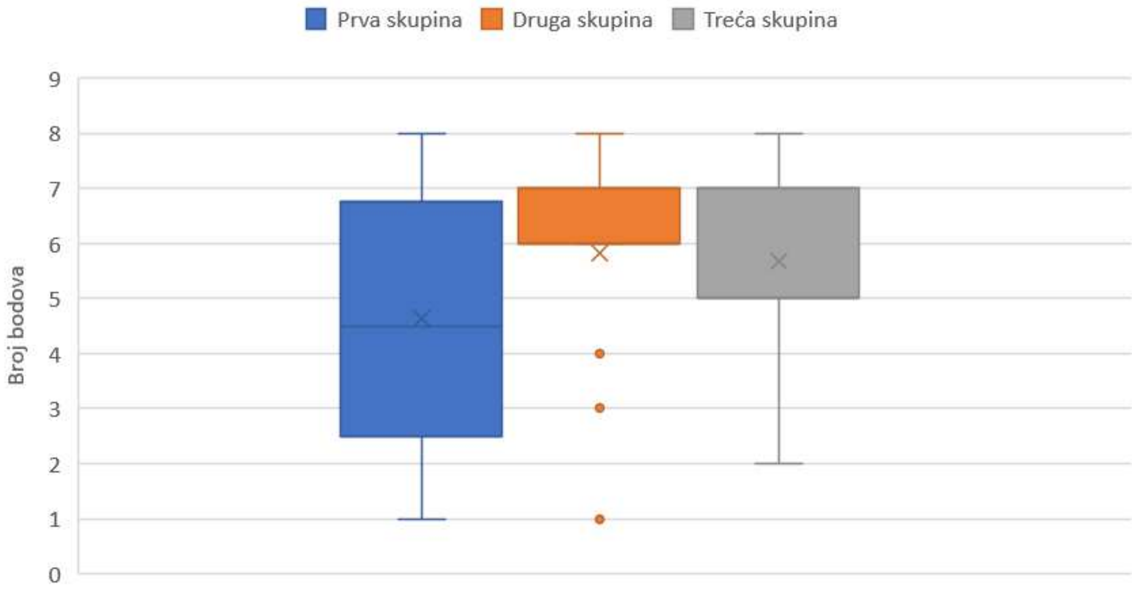
Slika 3.2 prikazuje graf sa postotkom riješenosti zadataka po skupinama. Na njemu vidimo da je razlika u riješenosti po skupinama za svaki zadatak unutar 20%, uz dvije iznimke; drugi zadatak je prva skupina riješila osjetno lošije, dok je četvrti zadatak druga skupina riješila osjetno bolje. Iako je pretpostavka da su učenici skupina 2 i 3 bolje rješavali zadatke 4, 5 i 6, vidimo da između učenika skupine 1 i 3 nema velike razlike. Međutim, osim četvrtog, druga skupina je neznatno bolje od ostalih riješila i peti zadatak, što sugerira da su možda bolje razumjeli što površina predstvalja grafički.



Slika 3.3: Raspodjela studenata po bodovima - prva skupina

Na grafu na slici 3.3 prikazana je raspodjela učenika po broju točno riješenih zadataka na prvom testiranju. Iz grafa vidimo da je većina učenika imala između 4 i 8 bodova, dok nijedan učenik nije imao minimalnih 0 ni maksimalnih 9. Ako nešto manji broj učenika koji su imali 3 boda pripišemo tome da je broj ispitanika bio relativno malen, možemo zaključiti da su rezultati rješavanja približno normalno distribuirani jer nas raspodjela na slici podsjeća na Gaussovu raspodjelu pomaknutu udesno.

Artimetička sredina broja bodova na prvom testiranju za sve ispitanike je 5.39, za prvu skupinu 4.63, drugu 5.81 i treću 5.68. Izračunavanjem medijana, gornjeg i donjeg kvartila te najmanjeg i najvećeg podatka u svakom od skupova, možemo nacrtati brkate kutije koje vidimo na slici 3.4. Iz njih vidimo da je najveći broj bodova ostvaren u svakoj od skupina jednak i iznosi 8. Najmanji broj bodova za prve dvije skupine je 1, dok je u trećoj skupini 2. Jedina "prava" brkata kutija je ona koja prikazuje podatke prve skupine. Na brkatim kutijama na drugu i treću skupinu donji kvartil i medijan imaju istu vrijednost, pa kutije izgledaju nepotpuno. Uočimo da je razlog tome to što je interkvartilni raspon malen (za drugu skupinu 1, za treću 2).



Slika 3.4: Brkate kutije - prvo testiranje

ANOVA testom ($F = 1.825$, $p = 0.172$) smo testirali ima li korištenje računala u nastavi značajnog utjecaja na rješavanje zadataka. Nulta hipoteza je bila da NE postoje značajne razlike u usvojenosti gradiva površine trokuta odmah nakon obrade gradiva između triju skupina: skupina koja je gradivo obradila bez korištenja računala (prva skupina), skupina koja je gradivo obradila na način da je nastavnik koristio računalo (druga skupina) i skupina koja je gradivo obradila na način da je svaki učenik koristio računalo (treća skupina). Alternativna hipoteza je bila da među navedenim skupinama postoji zmačajna razlika u usvojenosti gradiva. Dakle, imamo 3 nezavisna uzorka za koja pretpostavljamo da vrijedi

$$X_{1,1}, \dots, X_{1,16} \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$$
$$X_{1,1}, \dots, X_{1,16} \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$$
$$X_{1,1}, \dots, X_{1,19} \sim N\left(\mu_3, \sigma^2\right)$$

a testiramo imaju li jednaka očekivanja. Dakle, hipoteze su

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1 : \text{ ne vrijedi } H_0$$

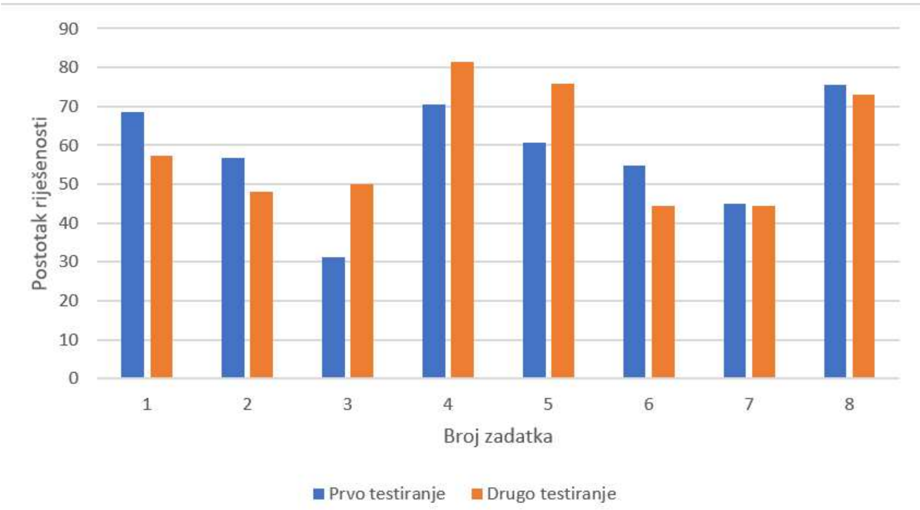
Rezultati ANOVA testa ($F = 1.825$, $p = 0.172$) pokazuju da je p-vrijednost značajno veća od 0.05, pa ne možemo odbaciti nultu hipotezu. Zaključujemo da nema statistički značajne razlike između bilo koje dvije skupine. Analiza je provedena pomoću sljedećeg R koda.

```
prva_skupina <- c(4,1,8,2,6,4,2,6,1,4,5,7,7,4,8,5)
druga_skupina <- c(6,6,7,6,6,6,3,6,6,7,8,7,7,4,7,1)
treca_skupina <- c(4,8,5,6,5,5,8,5,4,2,7,5,7,8,6,3,5,7,8)


svi <- c(prva_skupina, druga_skupina, treca_skupina)

n1 <- length(prva_skupina)
n2 <- length(druga_skupina)
n3 <- length(treca_skupina)

grupe<-c(rep(1,n1),rep(2,n2),rep(3,n3))
grupe<-factor(grupe)
podaci <- data.frame(grupe, svi)
rezultati <- aov(svi ~ grupe, data = podaci)
summary(rezultati)


            Df  Sum Sq   Mean Sq  F value  Pr(>F)
grupe        2  13.86    6.932    1.825    0.172
Residuals   48  182.29   3.798
```

3.2 Drugo testiranje

Nakon prvog testiranja, učenicima je omogućeno neko vrijeme da zaborave gradivo. U međuvremenu su obrađivali novu cjelinu, pa se drugim testiranjem provjeravalo hoće li biti razlika u učeničkom konceptualnom (prisjećanje formula) i konceptualnom (što predstavlja površina) znanju među skupinama. Pisao se 40 dana nakon obrade nastavne jedinice "Površina trokuta", a pristupilo mu je 54 učenika. Nakon pisanja prvog testa, učenici nisu dobili rezultate, točna rješenja niti test na uvid, tako da se drugi put pisao identičan test.

Na grafu na slici 3.5 vidimo postotak riješenosti za svaki zadatak, pri čemu plavi stupci odgovaraju postotku riješenosti zadataka u prvom testiranju (slika 3.1), a narančasti stupci postotku riješenosti zadataka u drugom testiranju.



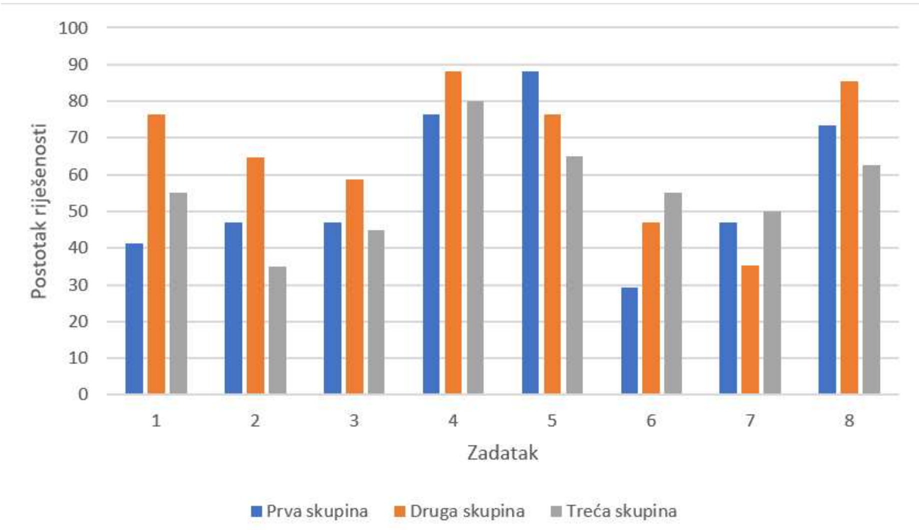
Slika 3.5: Postotak riješenosti po zadacima - oba testa

Najveća razlika u postotku riješenosti je u trećem zadatku, koji je u prvom testiranju bio daleko najlošije riješen, dok se u drugom testiranju nalazi malo ispod prosjeka (Prosječan postotak riješenosti zadatka u drugom testiranju je 59.38, dok je prosječan postotak riješenosti trećeg zadatka u drugom testiranju 50). To se može objasniti time da učenici prvi sat nisu uvidjeli da se površina računa kao umnožak duljine stranice i duljine visine na baš tu stranicu, ali su to naučili daljnom obradom gradiva kroz vježbu na satu, pisanje domaćih zadaća i pripremu za ispit.

Prvi i drugi zadatak, koji su provjeravali osnovne ishode učenja, te su samim tim bili najjednostavniji i najbazičniji, na drugom testiranju su riješeni malo lošije, dok su bolje riješeni četvrti i peti zadatak, koji su, uz šesti, provjeravali prostorno shvaćanje koncepta površine. Iz toga možemo naslutiti da su učenici s vremenom zaboravili formulu, ali su zapamtili što površina grafički predstavlja.

Na slici 3.6 vidimo graf sa postotkom riješenosti zadataka po skupinama za drugo testiranje. Usporedimo li ga sa pripradajućim grafom za prvo testiranje (slika 3.2), vidimo da su razlike u riješenosti zadataka među skupinama još manje. Svaka od skupina je najbolje riješila jedan od 3 zadataka fokusirana na shvaćanje vizualnog koncepta površine, a druga skupina se pozitivno ističe po visokom postotku riješenosti prva dva zadatka. Učenici prve skupine su pokazali zadovoljavajuće proceduralno znanje (formula za površinu), pa je ispravljena disproporcija u drugom zadatku.

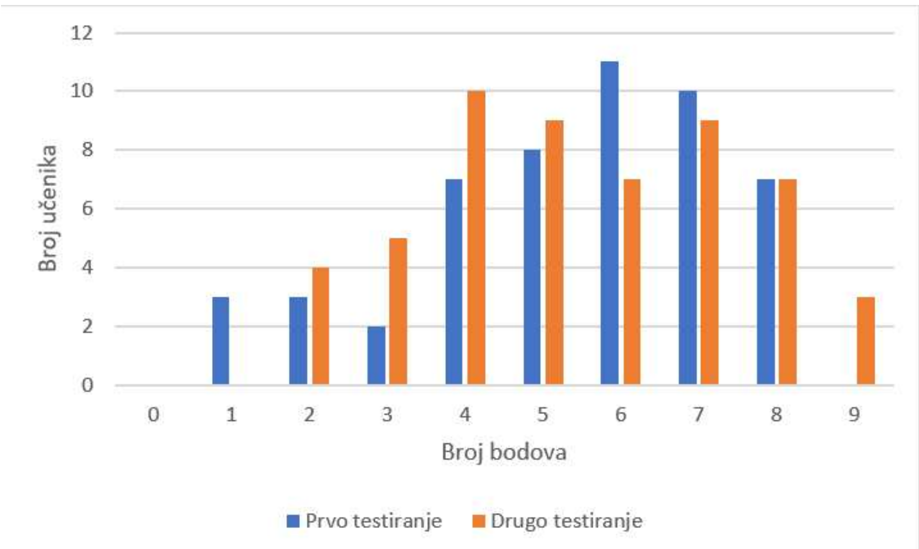
Na grafu na slici 3.7 je prikazana raspodjela učenika po broju točno riješenih zadataka na drugom testiranju. Nijedan učenik nije imao 0 bodova, kao ni na prvom testiranju, ali za razliku od prvog testiranja, na drugome nijedan učenik nije imao manje od 2 boda. Također, na drugom testiranju je čak troje učenika imalo stopostotnu riješenost testa, za



Slika 3.6: Postotak riješenosti zadataka po skupinama - drugo testiranje

razliku od prvog testiranja gdje je nabolji rezultat bio 8 bodova. Rezultati testiranja su ponovno približno normalno distribuirani i raspodjela na slici podsjeća na Gaussovu raspodjelu pomaknutu udesno.

Artimetička sredina broja bodova na drugom testiranju za sve ispitanike je 5.48, za prvu



Slika 3.7: Raspodjela studenata po bodovima - obje skupine

skupinu 5.24, za drugu 6.18, a za treću 5.1. Narctamo li brkate kutije (slika 3.8) za sve 3 skupine, vidimo da su učenici treće skupine na testiranju pokazali najlošije rezultate, dok je medijan druge skupine bio 7.

Slika 3.8: Brkate kutije - drugo testiranje

ANOVA testom smo testirali sljedeće hipoteze; nulta hipoteza je da NE postoje značajne razlike u usvojenosti gradiva površine trokuta 40 dana nakon obrade gradiva između triju skupina, dok je alternativna hipoteza da postoje značajne razlike. Dakle, opet imamo 3 nezavisna uzorka za koja pretpostavljamo da vrijedi

$$X_{1,1}, \ldots, X_{1,17} \sim N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$$
$$X_{1,1}, \ldots, X_{1,17} \sim N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$$
$$X_{1,1}, \ldots, X_{1,20} \sim N\left(\mu_3, \sigma^2\right)$$

a testiramo imaju li jednaka očekivanja. Dakle, hipoteze su

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
$$H_1 : \text{ ne vrijedi } H_0$$

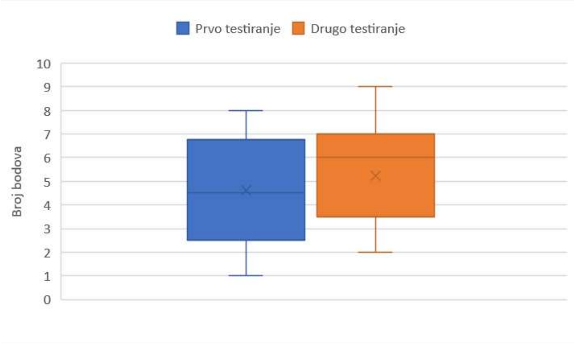
Rezultati testa ($F = 1.586$, $p = 0.215$) su pokazli da korištenje računala nema statistički značajnog utjecaja na rješavanje zadataka čak ni nakon prolaska određenog vremena. Analiza je provedena pomoću sljedećeg R koda.

```
prva_skupina <- c(2,5,7,2,6,7,5,3,4,7,2,6,6,7,4,7,9)
druga_skupina <- c(8,4,7,5,7,5,8,2,8,8,6,8,4,9,6,7,3)
treca_skupina <- c(4,8,4,4,4,6,4,8,3,5,3,6,5,5,9,5,3,4,7,5)


svi <- c(prva_skupina, druga_skupina, treca_skupina)

n1 <- length(prva_skupina)
n2 <- length(druga_skupina)
n3 <- length(treca_skupina)

grupe<-c(rep(1,n1),rep(2,n2),rep(3,n3))
grupe<-factor(grupe)
podaci <- data.frame(grupe, svi)
rezultati <- aov(svi ~ grupe, data = podaci)
summary(rezultati)
```

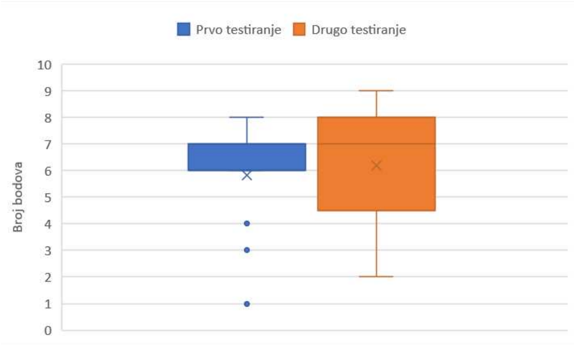
```
             Df  Sum Sq  Mean Sq  F value  Pr(>F)
grupe        2   12.15   6.076    1.586    0.215
Residuals    51  195.33  3.830
```

3.3 Usporedba po skupinama

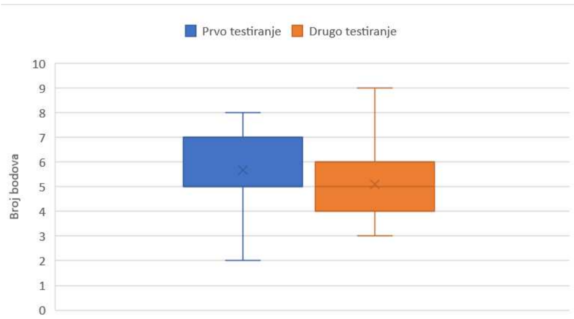
Zaključili smo da ni u prvom ni u drugom testiranju nije bilo značajne razlike među rezultatima triju skupina. Na slikama 3.9, 3.10 i 3.11 su brkate kutije koje prikazuju usporedbu rezulatata testiranja u svakoj skupini posebno. Prvo što uočavamo da su se u svakoj skupini najlošiji i najobolji rezultat poboljšali u drugom testiranju u odnosu na prvo. Također, u prvoj i drugoj skupini aritmetička sredina i medijan su nešto veći, ali u trećoj skupini je medijan ostao isti, dok je aritmetička sredina manja, te je čak polovica učenika imala između 3 i 5 bodova.



Slika 3.9: Brkate kutije - prva skupina

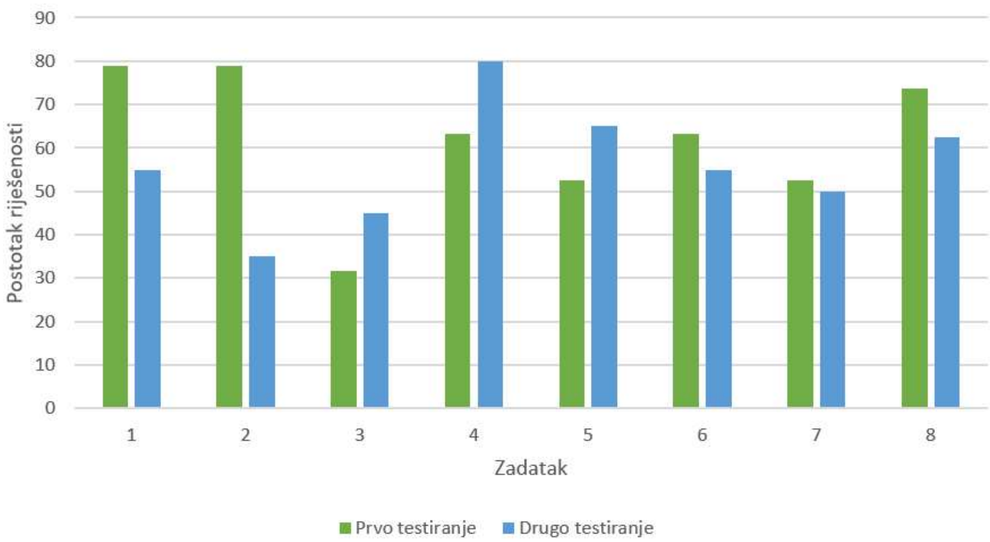


Slika 3.10: Brkate kutije - druga skupina



Slika 3.11: Brkate kutije - treća skupina

Pogledamo li graf na slici 3.12 koji prikazuje postotak riješenosti zadataka u trećoj skupini na prvom i drugom testiranju, uočavamo da su podjednako dobro riješeni svi zadaci, osim prva dva. Štoviše, prvi zadatak je riješen oko 25% lošije, dok je drugi riješen čak 45% lošije. Ova skupina se kod obrade gradiva koristila samo računalima, te je moguće da previše fokusa na vizualni aspekt nastave kod učenika ostavilo dojam da formula i račun nisu toliko bitni.

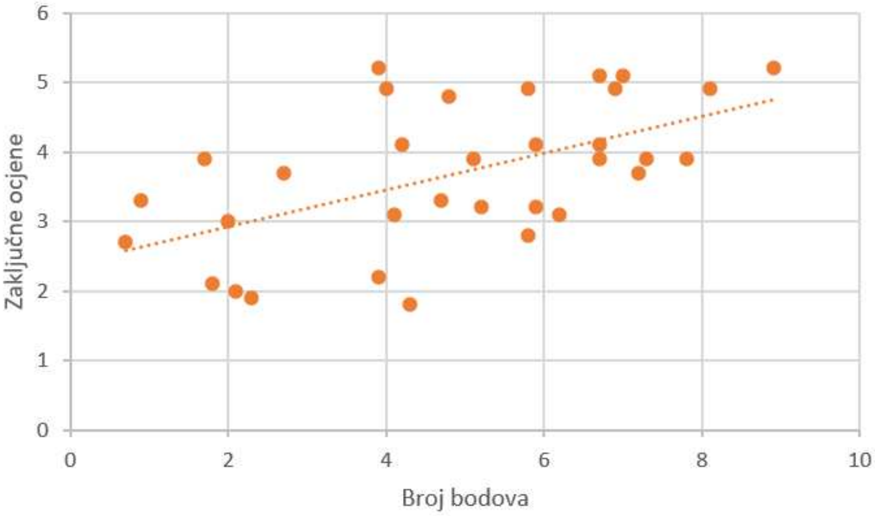


Slika 3.12: Postotak riješenosti po zadacima - treća skupina

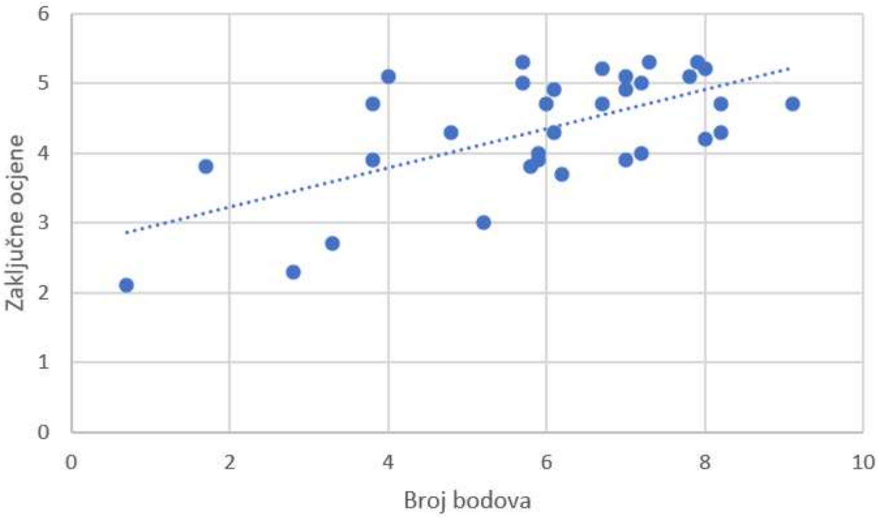
Dakle, usporedimo li testiranje provedeno odmah nakon obrade gradiva i ono provedeno nakon što su učenici dodatno vježbali, te potencijalno prolaskom vremena i zaboravili, najveću razliku vidimo u rezultatima testiranja treće skupine, a razlog tome su lošije riješena prva dva zadatka testa.

3.4 Usporedba rezultata testiranja i zaključnih ocjena

Iako ANOVA testom nismo uspjeli pokazati da korištenje računala značajno utječe na znanje učenika, ipak su učenici druge skupine su pokazali nešto bolje rezultate od učenika preostale dvije skupine i na prvom i na drugom testiranju (i medijan i aritmetička sredina druge skupine su u oba slučaja bili veći od medijana i aritmetičke sredine ostalih skupina). Međutim, budući da testiranje nije provedeno na istom uzorku (svaka skupina je zapravo jedan razredni odjel), postoji mogućnost da su učenicima druge skupine jednostavno bolje ide matematika, pa im je to bilo dovoljno da lakše usvoje znanje od drugih skupina, neovisno o načinu poučavanja. Stoga su u istraživanju (pazeći na poštivanje GDPR-a) prikupljene i zaključne ocjene učenika, kako bismo vidjeli postoji li korelacija između rezultata testiranja i zaključne ocjene iz matematike.

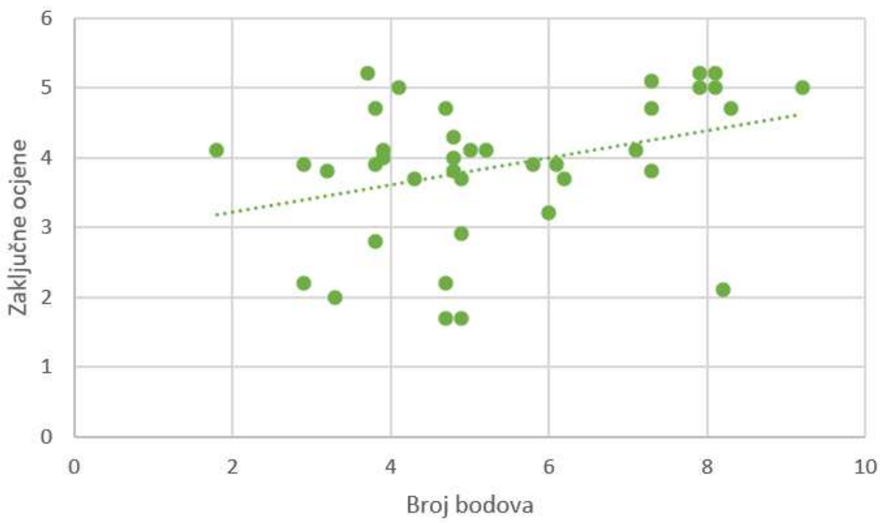


Slika 3.13: Točkasti grafikon - prva skupina



Slika 3.14: Točkasti grafikon - druga skupina

Na slikama 3.13, 3.14 i 3.15 vidimo točkaste grafikone za svaku od tri skupine. Svaka točka predstavlja jednog ispitanika, pri čemu je x koordinata broj bodova koji je ostvario na testiranju, dok je y koordinata njegova zaključna ocjena iz matematike. Na svaki od grafikona dodan je i pravac regresije, koji najbolje aproksimira vezu između dviju varijabli.



Slika 3.15: Točkasti grafikon - treća skupina

Primijetimo i kako jedna točka predstavlja jedan "pristup testiranju", a ne jednog učenika, jer je većina učenika pristupila i jednom i drugom testiranju.

Ono što je logično za pretpostaviti je da bi kod učenicima poznatijih pristupa odstupanja od pravca linearne regresije trebala biti manja, dok će kod novih metoda poučavanja bitnu ulogu u usvajanju gradiva igrati i sposobnost adaptacije učenika. Točno to možemo i uočiti pogledamo li grafove; podaci prve i druge skupine su dosta bliže pravcu linearne regresije od podataka treće skupine. U prijevodu, u trećoj skupini je bilo puno više ispitanika koji su imali višu zaključnu ocjenu i manji broj bodova na testiranju ili nižu zaključnu ocjenu, a veći broj bodova na testiranju. To se slaže s našom pretpostavkom da su se neki učenici kojima klasični način poučavanja ne odgovara dobro prilagodili, dok se neki, naviknuti na frontalnu nastavu, nisu baš najbolje snašli u situaciji kad se od njih zahtijevalo da sami otkrivaju.

Koristeći se R-om otkrit ćemo postoji li zaista veza između zaključnih ocjena i broja bodova na testiranju. Prvo što moramo odrediti su koeficijenti pravca $y = \alpha + \beta x$ koji najbolje odgovara našem uzorku. Zapravo, zanima nas samo nagib tog pravca. U slučaju da y koordinata točke nema veze sa njenom x koordinatom, tada će točke biti "razbacane" po grafu, pa će pravac koji ih najbolje opisuje biti usporedan sa x-osi, tj. nagib će mu biti nula. U slučaju da je x koordinata u korelaciji s y koordinatom, točke će pratiti neki pravac sa nagibom različitim od nula. Pretpostavljamo da nema korelacije između varijabli, pa su naše hipoteze:

$$H_0 : \beta = 0$$
$$H_1 : \beta \neq 0$$

U nastavku je naveden kod u R-u koji sadržava podatke za svaki od 3 uzorka i funkciju `lm()` za linearni model.

```
#prva skupina, oba testiranja
bodovi <- c(4,1,8,2,6,4,2,6,1,4,5,7,7,4,8,5,2,5,
7,2,6,7,5,3,4,7,2,6,6,7,4,7,9)
zakljucne <- c(2,3,4,2,3,4,3,4,3,2,4,4,5,5,5,5,2,
3,4,2,3,4,3,4,3,4,4,5,3,5,5,5,5)

#druga skupina, oba testiranja
bodovi <- c(6,6,7,6,6,6,3,6,6,7,8,7,7,4,7,1,8,
4,7,5,7,5,8,2,8,8,6,8,4,9,6,7,3)
zakljucne <- c(4,4,5,4,5,4,3,5,5,4,5,5,5,5,5,2,4,
4,5,4,4,3,5,4,5,4,4,5,5,5,5,5,2)

#treca skupina, oba testiranja
bodovi <- c(4,8,5,6,5,5,8,5,4,2,7,5,7,8,6,3,5,
7,8,4,8,4,4,4,6,4,8,3,5,3,6,5,5,9,5,3,4,7,5)
zakljucne <- c(5,5,3,3,5,4,5,4,4,4,4,2,4,5,4,2,4,
5,2,5,5,4,3,5,4,4,5,4,4,4,4,2,4,5,4,2,4,5,2)


model=lm(zakljucne~bodovi)

summary(model)

summary(lm(formula = zakljucne ~ bodovi))$sigma
```

Pomoću navedenog koda smo dobili sve podatke koji nas zanimaju, a nalaze se u tablici 3.1. Vrijednosti β za svaku od skupina potvrđuju ono što smo naslutili gledajući grafove; svaki od uzoraka je aproksimiran pravcem koji ima nagib različit od nula. Ističe se treća skupina, za koju je β nešto manji nego u prve dvije. P-vrijednosti također potvrđuju ono što smo naslutili; za svaku od 3 skupine ta vrijednost je manja od 0.05, pa u svim slučajevima odbacujemo nultu hipotezu u korist alternativne. *Adjusted R-squared* je mjera koliko dobro naš model (u ovom slučaju pravac sa nagibom β) opisuje varijacije u zavisnoj varijabli, uzimajući u obzir broj prediktora. U osnovi, što je ta vrijednost bliže 1, to znači da model bolje objašnjava varijabilnost u zavisnoj varijabli. Pogledamo li koje smo vrijednosti dobili u tablici, vidimo da se za treću skupinu samo 9% varijabilnosti u zavisnoj varijabli može objasniti modelom, dok su ti postotci za prvu i drugu skupinu znatno veći. Zanimljivo je pogledati i posljednji stupac tablice u kojemu su dane vrijednosti za standardnu devijaciju ostataka regresijskog modela. Tu vidimo koliko su podaci raspršeni, odnosno udaljeni od regresijskog pravca. Ono što možemo uočiti je da je raspršenost u prvoj skupini zapravo bliža onoj u trećoj, nego u drugoj, iako bi se pogledom na grafove reklo da se treći graf ističe po raspršenosti. U konačnici, ovim testiranjem smo pokazali da zaista postoji korelacija između broja bodova koje je učenik ostvario na testiranju i njegove zaključne ocjene iz matematike.

	β	**t-vrijednost**	**p-vrijednost**	**adjusted R-squared**	σ
PRVA SKUPINA	0.28	3.94	0.0004	0.31	0.87
DRUGA SKUPINA	0.29	4.64	0.00006	0.39	0.67
TREĆA SKUPINA	0.2	2.24	0.03	0.09	0.96

Tablica 3.1: Rezultati funkcije za linearni model

3.5 Zaključak i posljedice na nastavu

Usporedbom postotka riješenosti po zadacima (za sve učenike) za prvo i drugo testiranje, uočili smo da su prva dva zadatka kojima se provjerava usvojenost korištenja formule za računanje površine u drugom testiranju riješeni nešto lošije nego u prvom, dok su zadaci 4 i 5, koji provjeravaju dubinsku usvojenost koncepta površine riješeni bolje. To se može objasniti pretpostavkom da su učenici s vremenom (pogotovo jer su u međuvremenu obrađivali drugo gradivo) zaboravili formulu za površinu, ali su zapamtili što ona grafički predstavlja.

Ukoliko se fokusiramo na postotak riješenosti po zadacima za svaku skupinu, razlike nisu ekstremne. Sve skupine su podjednako dobro rješavale sve zadatke, s tim da se u prvom testiranju ističu drugi zadatak koji je lošije od ostalih riješila skupina 1 i četvrti zadatak koji je bolje od ostalih riješila skupina 2. U drugom testiranju je prva 3 zadatka nešto bolje od ostalih riješila skupina 2, dok je svaki od 3 zadaka fokusirana na proceduralno znanje najbolje riješila po jedna od skupina.

Budući da smo za ovo istraživanje pribavili i podatke o zaključnim ocjenama svakog od učenika koji je u njemu sudjelovao, napravili smo još jednu analizu u R-u u kojoj smo potvrdili kako za svaku od skupina postoji veza između zaključne ocjene i broja bodova na testiranju. Osim toga, iz analize se vidjelo da su kod noviog pristupa (skupina 3) odsupanja od pravca linearne regresije bila veća nego kod standardnijih pristupa frontalne nastave.

Iako smo iz brkatih kutija za oba testiranja mogli naslutiti da je skupina 2 pokazala bolje znanje, u konačnici ANOVA testom nismo uspjeli opovrgnuti početnu hipotezu da nema razlike u usvojenosti gradiva među skupinama. Ipak, treba uzeti u obzir kako je učenicima treće skupine ovo bio prvi susret sa ovakvim konceptom nastavnog sata, zbog čega je dio vremena potrošen na pokretanje računala i upoznavanje sa samim alatom dinamične geometrije, a dio učeničkog fokusa se izgubio jer su bili zaokupljeni novim načinom učenja. Međutim, važno je napomenuti i kako su učenici druge i treće skupine bili jako zainteresirani i za samu nastavnu temu koja se na satu obrađivala. Većina učenika je bila uključena u žustru raspravu o čemu ovisi površina trokuta, mijenja li se ona promjenom duljine, visine ili opsega. To što učenici na licu mjesta u alatu dinamične geometrije mogu vidjeti kako njihove pretpostavke vrijede ili padaju u vodu pokazuje da ova nastavna pomagala uz dobru pripremu imaju svoju primjenu u nastavi matematike, poglavito u geometrijskim temama.

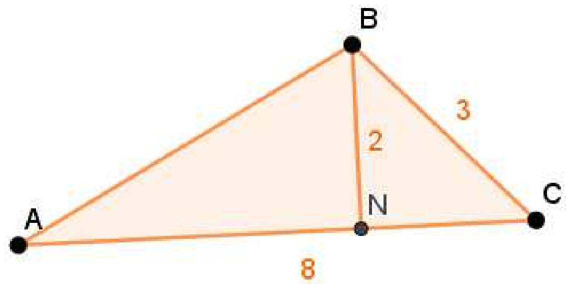
Poglavlje 4

Prilozi

4.1 Prilog 1 - test

1. Jedna stranica trokuta je 4cm, visina na tu stranicu je 2cm, kolika je površina trokuta?

2. Na skici trokuta zadane su dvije stranice i visina na jednu od te 2 stranice, kolika je površina trokuta ABC?



a) 3 cm^2

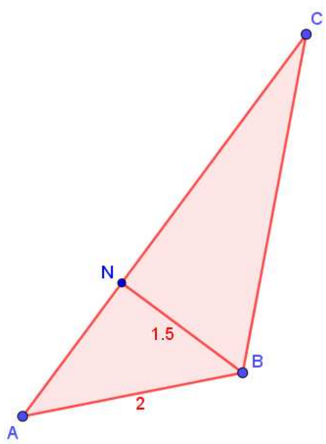
b) 8 cm^2

c) 16 cm^2

d) 12 cm^2

e) Ne može se odrediti

3. Na skici trokuta zadana je duljina jedne stranice i duljina jedne visine, kolika je površina trokuta ABC?



a) 1.5 cm^2

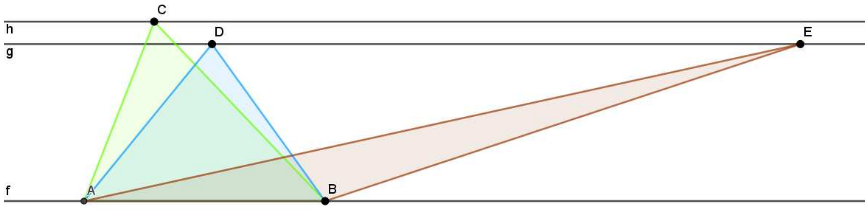
b) 3 cm^2

c) 4.5 cm^2

d) Ne može se odrediti

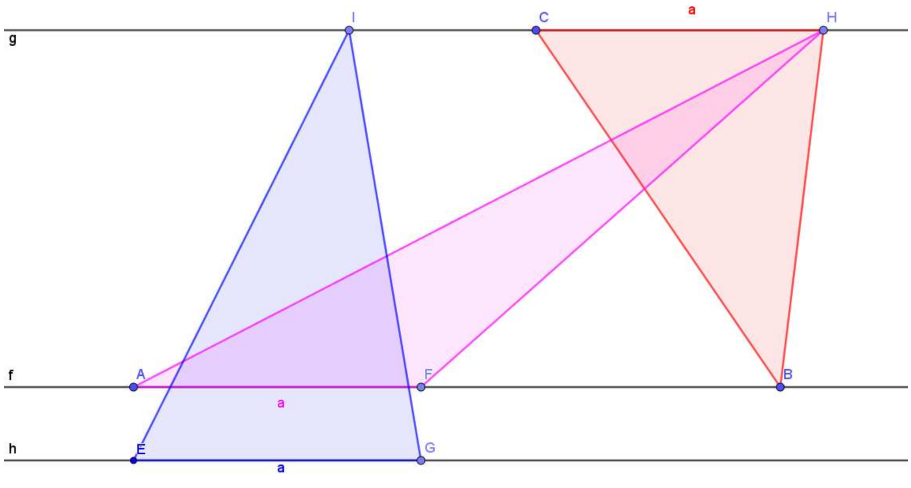
Slika 4.1: Prva strana testa

4. Pravci *f*, *g* i *h* su usporedni. Koja 2 trokuta su jednake površine?



a) ABD i ABC
b) ABD i ABE
c) ABC i ABE
d) Svi imaju različite površine

5. Pravci *g*, *f* i *h* su usporedni. Također, duljine stranica trokuta označene sa *a* su jednake. Koja 2 trokuta su jednake površine?

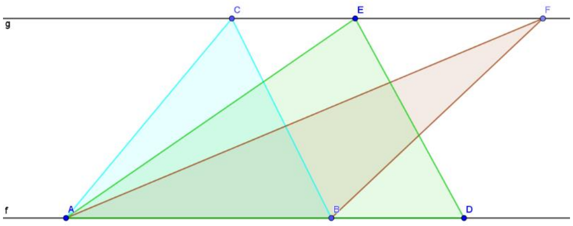


a) EGI i AFH
b) EGI i CBH
c) AFH i CBH

Slika 4.2: Druga strana testa

d) Svi imaju različite površine

6. Pravci f i g su usporedni. Koji trokut ima najveću površinu?



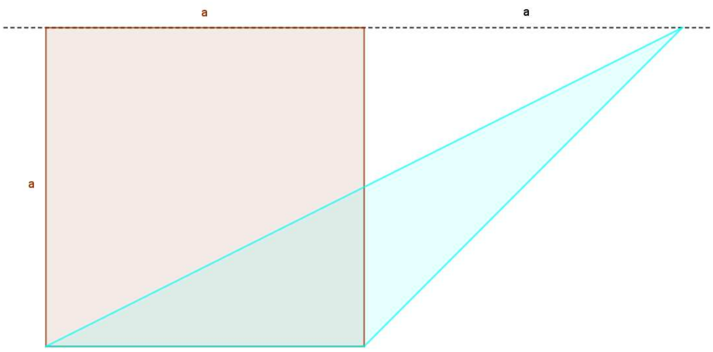
a) ABC

b) ABF

c) ADE

d) Svi imaju jednaku površinu

7. Koliki je omjer površina kvadrata i trokuta na slici?



a) 1:1

b) 2:1

c) 3:1

d) Ne može se odrediti

8. Zaokruži SVE točne tvrdnje:

a) Postoji tupokutan trokut kojemu su sve 3 visine su jednake.

b) U svakom raznostraničnom trokutu sve 3 visine su različite.

c) U svakom jednakokračnom trokutu barem 2 visine su jednake.

d) Postoji jednakostraničan trokut kojemu su sve 3 visine različite.

Slika 4.3: Treća strana testa

Bibliografija

[1] I. Valentić, *Statistika - vježbe*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2023.

[2] J. A. Van de Walle, K. S. Karp i J. M. Bay-Williams, *Elementary and Middle School Mathematics*, Boston: Allyn & Bacon, 2007.

[3] J. A. Van de Walle, L. A. H. Lovin, K. H. Karp i J. M. Bay-Williams, *Teaching Student-Centered Mathematics*, Essex: Pearson, 2014.

[4] N. Sandrić, Z. Vondraček, *Vjerojatnost*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2019.

Sažetak

Ideja ovog rada je bila statistički analizirati postoji li razlika u razini usvojenosti matematičkog sadržaja ako u nastavu uvedemo primjenu tehnologije. Rad je podijeljen na tri dijela.

U prvom dijelu je opisano istraživanje koje je provedeno na učenicima šestog razreda osnovne škole. Učenici su podijeljeni u tri skupine, te je u svakoj od skupina nastavna jedinica ”Površina trokuta” obrađena na drugi način; u prvoj skupini koristila se frontalna nastava bez primjene računala, u drugoj skupini se koristila tehnologija i frontalna nastava, dok se u trećoj skupini koristila informatička učionica u kojoj je svaki učenik imao pristup svom računalu. Nakon toga, opisano je testiranje koje je provedeno kako bi se provjerila usvojenost znanja.

U drugom dijelu, postavljena je teorijska podloga za statističku analizu koju ćemo provesti koristeći se rezultatima testiranja. Uvedeni su osnovni pojmovi iz statistike i vjerojatnosti, objašnjeni pojmovi statističkih hipoteza i p-vrijednosti te predstavljen ANOVA test.

U trećem dijelu rada provedena je statistička analiza te je testirana hipoteza da različite metode ne dovode do značajne razlike u usvojenosti gradiva. Rezultati su prikazali blage razlike u usvojenosti gradiva između skupina, s neznatnim oscilacijama u rješavanju zadataka. Analiza je sugerirala da su učenici s vremenom zaboravljali formule, ali su zadržali dublje razumijevanje koncepata. Iako je jedna od skupina koje su koristile tehnologiju (skupina 2) pokazala nešto bolje rezultate na testiranjima, u konačnici ANOVA testom nismo uspjeli osporiti nultu hipotezu. Na kraju smo proveli dodatnu analizu u R-u te smo koristeći se linearnom regresijom zaključili da postoji veza između zaključnih ocjena i rezultata na testiranju za svaku od ispitanih skupina.

Summary

The idea of this thesis was to statistically analyze whether there is a difference in the level of assimilation of mathematical content when introducing the use of technology in teaching. The paper is divided into three parts.

In the first part, the research conducted on sixth-grade students in elementary school is described. The students were divided into three groups, and the instructional unit "Triangle Area" was approached differently in each group. The first group used traditional frontal teaching without the use of computers, the second group utilized technology along with frontal teaching, while the third group used a computer lab where each student had access to their own computer. Subsequently, testing was described to assess the knowledge assimilation.

In the second part, a theoretical foundation for the statistical analysis using the test results was established. Basic concepts of statistics and probability were introduced, and explanations of statistical hypotheses and p-values were provided along with the presentation of the ANOVA test.

In the third part of the paper, a statistical analysis was conducted, testing the hypothesis that different methods do not lead to a significant difference in the assimilation of the material. The results showed slight differences in the assimilation of the material between groups, with negligible fluctuations in task solving. The analysis suggested that students tended to forget formulas over time but retained a deeper understanding of concepts. Although one of the technology-using groups (group 2) showed slightly better results in testing, ultimately, using the ANOVA test, the null hypothesis could not be rejected. Finally, an additional analysis was conducted in R, and using linear regression, it was concluded that there is a relationship between final grades and test results for each of the examined groups.

Životopis

Rođen sam 23.3.1997. godine u Dubrovniku. Nakon završene osnovne škole u Stonu, upisujem opći smjer Gimnazije Dubrovnik. Maturirao sam 2015. godine te iste godine upisao preddiplomski studij Matematike na PMF-u u Zagrebu. Godinu nakon toga upisao sam preddiplomski studij Matematika; smjer: nastavnički. Odmah nakon završetka studija upisao sam diplomski studij Matematika; smjer: nastavnički.