Izrada optimalnog portfelja uz rizik modeliran VaR-om

Gomerčić, Filip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Filip Gomerčić

IZRADA OPTIMALNOG PORTFELJA UZ RIZIK MODELIRAN VAR-OM

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, veljača, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svima koji su bili uz mene za vrijeme studija.
Hvala roditeljima i sestri na bezuvjetnoj podršci,
Ani na ohrabrenju i inspiraciji,
prijateljima što su olakšali svaki korak.

Sadržaj

Uvod

Prije utjecaja američkog ekonomista Harrya Markowitza investitori su se fokusirali ponajviše na maksimiziranje dobiti davajući malo važnosti kontroli rizika. Iako je pojam diverzifikacije poznat od davnina, u investicijskom je smislu tek Markowitz sredinom 20. stoljeća dao jasno ekonomsko, odnosno matematičko značenje.

Imajući na umu odgovorno i razumno investiranje, u ovom ćemo se radu posvetiti najprije izradi optimalnih portfelja, odnosno proučavanju efikasnih portfelja te jedne konkretne metode izvoda efikasnih portfelja. Nakon definicije te izvoda efikasnog portfelja, pažnju ćemo usmjeriti na kontrolu rizika povezanog s potencijalnim gubicima uzrokovanim tržišnim kretanjima cijena financijskih instrumenata u portfelju. Centralni element kontrole rizika bit će mjera rizika zvana rizična vrijednost ili VaR (eng. *Value-at-Risk*). Definirat ćemo te u primjeru izvesti VaR koristeći tri poznate metode: povijesnu metodu, metodu Monte Carlo simulacija te parametarsku metodu, od kojih svaka ima određene prednosti i nedostatke.

Poglavlje 1

Optimizacija portfelja - Markowitzev model

1.1 Biografija i motivacija

Harry Max Markowitz bio je američki ekonomist rođen 24. kolovoza 1927. koji je 1990. godine dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju za svoj rad na teoriji portfelja.

Djelo po kojem je vjerojatno najpoznatiji jest njegova "Moderna teorija portfelja" - model kojem je cilj postaviti optimalni odnos između rizika i očekivanog prinosa. Moderna teorija portfelja postavila je temelje za analizu rizika i povrata u upravljanju investicijskim portfeljem. Ona naglašava važnost diversifikacije investicija i kako odgovarajuća kombinacija aktiva kao što su dionice, obveznice te ostali financijski instrumenti može optimizirati ravnotežu između željenog povrata i povezanog rizika. Prava prekretnica u investiranju dogodila se kada su se brojni investitori vođeni Markowitzevim modelom prestali fokusirati na izradu portfelja imajući na umu jedino maksimalni prinos, nego su kombiniranjem različitih investicija pokušavali pronaći portfelj sa željenim prinosom uz što manji rizik.

Osnovni koncept moderne teorije portfelja jest efikasna granica koja predstavlja skup portfelja koji nudi najviši mogući povrat za određenu razinu rizika. Konačno, Markowitzova inovacija u području investiranja pružila je okvir za kvantitativno upravljanje rizikom u financijskim investicijama.

1.2 Pretpostavke Markowitzevog modela

Prije no što se počnemo detaljno baviti Markowitzovom modernom teorijom portfelja, napomenimo kako ona sadrži određene pretpostavke, između ostalog o ponašanju i očekivanju investitora te povratima. Jedna od najbitnijih pretpostavki na kojoj se temelji moderna teorija portfelja jest pretpostavka o racionalnosti investitora, nešto što se još naziva i investitorova nesklonost riziku. Tu pretpostavku možemo promatrati iz dvije perspektive po pogledu očekivanih prinosa i rizika. Najprije, uz pretpostavku istog rizika dva portfelja, racionalni će investitor odabrati portfelj koji ima veći očekivani prinos. S druge strane, ukoliko dva portfelja imaju jednak očekivani prinos, racionalni investitor uvijek odabire onaj portfelj s manjim rizikom. Portfelji kojima se mogao povećati povrat bez povećanja rizika te portfelji kojima se mogao smanjiti rizik bez rezultiranog smanjenja prinosa Markowitz je nazivao neefikasnima[1].

Konačno, Markowitz je pretpostavio normalnu distribuciju povrata, jednak pristup informacijama od strane svih investitora na tržištu, fiksnu kamatnu stopu na bezrizičnu imovinu te nedostatak transakcijskih troškova.

1.3 Diverzifikacija i koreliranost

U ovom poglavlju, ukratko ćemo objasniti te primjerima pokazati zašto Markowitz u svojoj modernoj teoriji portfelja naglasak stavlja na diverzifikaciju, odnosno preciznije, na portfelje koji su diverzificirani imovinama s negativnom korelacijom. Najprije, definirajmo glavne pojmove koji će nam biti potrebni u nastavku.

Definicija 1.3.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ naziva se diskretna slučajna varijabla ako postoji prebrojiv skup $D = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ takav da je*

(i) $X(\omega) \in D$ *za sve* $\omega \in \Omega$

(ii) $\{X = a_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_j\} \in \mathcal{F}$ *za sve* $j \in \mathbb{N}$

Definicija 1.3.2. *Neka je X slučajna varijabla koja poprima konačno mnogo vrijednosti $a_1, \ldots, a_n$ s vjerojatnostima $p_1, \ldots, p_n$, respektivno. Tada je matematičko očekivanje od X definirano kao*

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{j=1}^{n} a_j p_j.$$

Definicija 1.3.3. *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f i očekivanjem $\mathbb{E}(X)$. Varijanca od X definirana je kao*

$$Var(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right].$$

U nastavku rada često ćemo koristiti pojam varijance, no bitno je napomenuti kako iako su oznake veoma slične, ne treba miješati Var(X), odnosno varijancu slučajne varijable X te VaR portfelja (Value-at-Risk).

[1] Više u poglavlju 1.5 Efikasna granica.

Prije nego što možemo precizno definirati koeficijent korelacije najprije nam je potreban pojam kovarijance dvije diskretne slučajne varijable.

Definicija 1.3.4. *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je* $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ *i* $\mathbb{E}\left(Y^2\right) < \infty$. *Kovarijanca od X i Y definira se kao*

$$Cov(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Teorem 1.3.5. *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je* $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ *i* $\mathbb{E}\left(Y^2\right) < \infty$ *te neka su a, b, c, d* $\in$ *R. Tada vrijedi*

1. *Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y);*
2. *VaR(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y).*

Dokaz*:*

1. *Vrijedi,*

$$\begin{aligned} Cov(aX + b, cY + d) &= \mathbb{E}((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)(cY + d - c\mathbb{E}(Y) - d)) \\ &= ac\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= acCov(X, Y). \end{aligned}$$

2. *Vrijedi,*

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y - \mathbb{E}(X + Y))^2)) \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 + 2(x - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) + (Y - \mathbb{E}(Y))^2) \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y). \end{aligned}$$

□

Kovarijanca dviju slučajnih varijabli X i Y korisna je zato što je ona mjera njihove zavisnosti. Ipak, kovarijanca između X i Y ovisi o skali od X i Y. Tako na primjer ako umjesto X i Y promatramo aX, $a \in \mathbb{R}$ i Y, tada je $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$, dok je intuitivno gledano zavisnost ostala ista. Iz tog razloga, mjera zavisnosti koju ćemo mi koristiti biti će korelacija.

Definicija 1.3.6. *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je* $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ *i* $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. *Korelacija (ili koeficijent korelacije) od X i Y definira se kao*

$$\rho(X, Y) := \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

Teorem 1.3.7. *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je* $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ *i* $\mathbb{E}\left(Y^2\right) < \infty$ *te neka je* $\rho(X,Y)$ *njihov koeficijent korelacije. Tada vrijedi:*

1. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
2. *Ako su X i Y nezavisne, onda je* $\rho(X,Y) = 0$.

Dokaz: *Stavimo* $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ *te* $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$.

1.

$$\begin{aligned} 0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) &= \frac{Var(X)}{\sigma_X^2} + \frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2} + 2\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\ &= 2 + 2\rho(X,Y) = 2(1+\rho(X,Y)). \end{aligned}$$

Dakle, $\rho(X,Y) \geq -1$. *Sada analogno iz*

$$Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$$

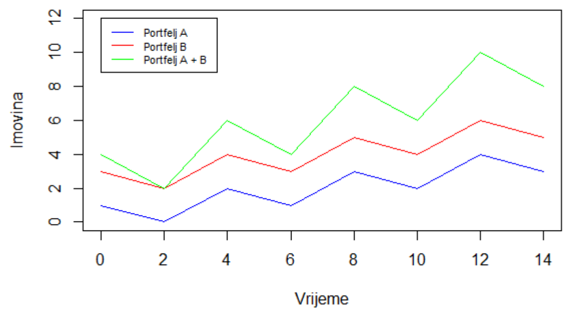
slijedi da je $\rho(X,Y) \leq 1$.

2. *Tvrdnja slijedi izravno iz definicije korelacije te činjenice da je tada* $Cov(X,Y) = 0$. □

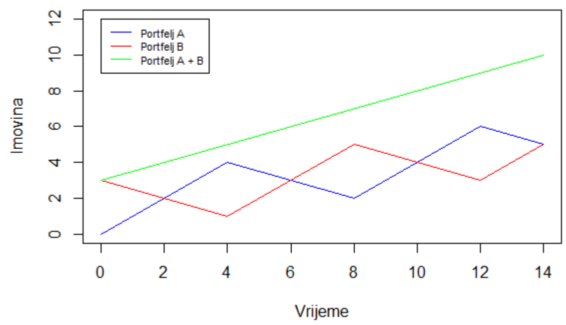
Kao što je već spomenuto, Markowitz je smatrao da je diverzifikacija koristan alat za efikasno upravljanje odnosom prinosa i rizika. Međutim, tvrdio je da je diverzifikacija učinkovita samo ako je koeficijent korelacije između relevantnih tržišta (odnosno odabranih financijskih instrumenata kao što su dionice) negativan. Na primjer, ako naš portfelj sadrži samo jednu dionicu, najbolju diversifikaciju postižemo odabirom druge dionice takve da je korelacija između cijena te dvije dionice što niža. Konačni učinak bio bi da bi cijeli portfelj (sastavljen od te dvije međusobno negativno korelirane dionice) imao manje varijacije u cijeni nego bilo koja od tih dionica zasebno.

Slika 1.1 prikazuje situaciju u kojoj su promatrana tri portfelja - portfelji A i B, o čijem sastavu ne pretpostavljamo ništa osim o međusobnoj korelaciji te portfelj A+B kao kombinacija tih dvaju portfelja. Kao što se vidi iz grafa, u ovom konkretnom primjeru koeficijent korelacije među portfeljima A i B iznosi $\rho = 1$. Ako zelenom bojom prikažemo portfelj koji je nastao kao kombinacija portfelja A i B, vidimo da će njegova varijanca u svakom trenutku biti veća ili jednaka varijanci individualnih portfelja. Razlog tome je pozitivna korelacija portfelja, $\rho = 1$.

S druge strane, ukoliko uzmemo portfelje A i B takve da je koeficijent korelacije negativan, tada će portfelj koji je dobiven kao kombinacija portfelja A i B imati manju varijancu.



Slika 1.1: Pozitivno korelirani portfelji



Slika 1.2: Negativno korelirani portfelji

Uočimo da je u donjem primjeru koeficijent korelacije upravo jednak $\rho = -1$ pa rezultirajući portfelj A+B ima varijancu jednaku nuli. Primjer takvih portfelja vidljiv je na Slici 1.2.

Dakle, možemo zaključiti kako Markowitz s pravom stavlja naglasak na korelaciju imovina u portfelju kao jedan od ključnih faktora za kontrolu rizika.

1.4 Moderna teorija portfelja

Jednom kada smo predstavili motivaciju za korištenje moderne teorije portfelja te uveli osnovne pretpostavke možemo krenuti u razradu same teorije kako ju je Markowitz i zamislio. Da bismo se efektivno mogli baviti upravljanjem portfelja najprije moramo definirati osnovne pojmove. Za potrebe ovog rada, o portfelju ćemo jednostavno razmišljati kao o skupu različitih investicija. Neki je $n \in \mathbb{N}$ broj različitih imovina u promatranom portfelju.

Glavna pretpostavka bilo kojeg ulaganja je varijabilnost vrijednosti tih imovina. Mi ćemo umjesto apsolutne vrijednosti imovine promatrati povrate na investiciju u svaku imovinu.

Definicija 1.4.1. *Definirajmo povrate $R_1, \dots, R_n$ na imovine $I_1, \dots, I_n$ kao*

$$R_j = \frac{\mathbb{V}(I_j) - \mathbb{V}(I_j)^0}{\mathbb{V}(I_j)^0}, \ j \in \mathbb{N}$$

gdje je $\mathbb{V}(I_j)$ finalna vrijednost imovine I_j, a $V(I_j)^0$ početna vrijednost imovine I_j. Uočimo, nismo strogo definirali funkciju $\mathbb{V}$, no to je funkcija koja svakoj imovini pridružuje njenu tržišnu vrijednost u nekom trenutku.

Dakle, u ovom slučaju o povratu razmišljamo jednostavno kao o razlici između početne i finalne vrijednosti određene imovine. Imovina pak predstavlja bilo kakav financijski instrument (dionica, obveznica, derivat) ili na primjer zlato, kriptovalute, itd. Budući da ćemo obično promatrati portfelj s više različitih imovina, moramo precizno definirati udio pojedinačne imovine u portfelju.

Definicija 1.4.2. *Udio imovine I_j u portfelju I označavat ćemo s ω_j te definirati kao vrijednost j-te imovine podijeljenom s vrijednosti cijelog portfelja na neki datum. Možemo pisati*

$$\omega_j := \frac{\mathbb{V}(I_j)}{\mathbb{V}(I)}.$$

Budući da ćemo mi promatrati portfelj u nekom (konačnom) periodu s konačno mnogo imovina koje poprimaju konačno mnogo vrijednosti, o povratima R_i ćemo upravo razmišljati kao o diskretnim slučajnim varijablama definiranim u prethodnom poglavlju. Drugim riječima, ukoliko promatramo portfelj s n imovina, tada je očekivani povrat na cijeli portfelj dan sa

$$\mathbb{E}_{port} = \sum_{j=1}^{n} \omega_i \mathbb{E}(R_i),$$

gdje je ω_i inicijalni udio imovine I_i u portfelju, a $\mathbb{E}(R_i)$ očekivani povrat na imovinu I_i. Odnosno očekivani povrat na portfelj jednak je sumi očekivanih povrata na pojedinačne imovine uzevši u obzir pripadne udjele imovina u cjelokupnom portfelju. Možemo uočiti da ukoliko su nam poznati udjeli imovina u portfelju te očekivani povrati za pojedinačne imovine vrlo lako određujemo očekivani povrat portfelja.

1.5 Efikasna granica

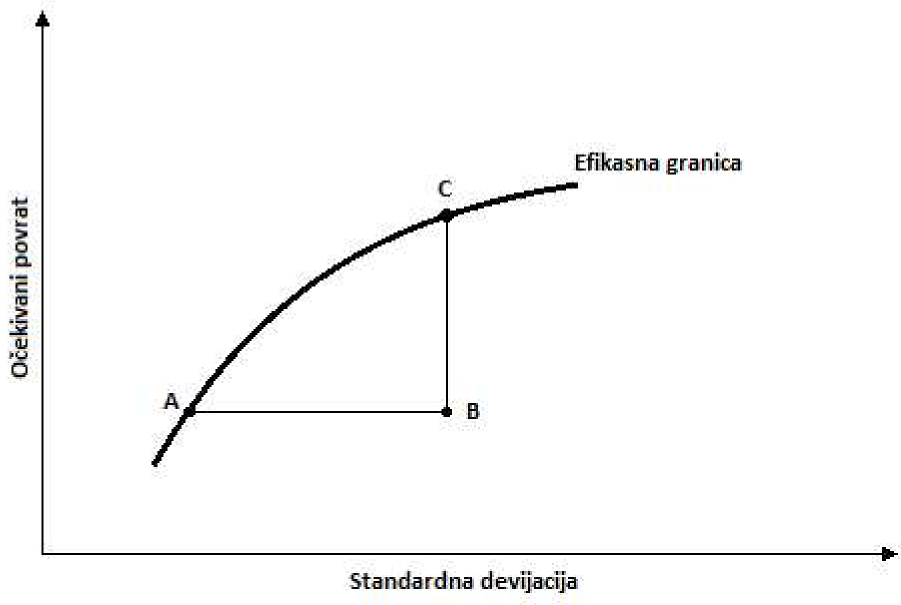
Prisjetimo se, u poglavlju 1.2 Pretpostavke Markowitzevog modela, već smo opisali racionalnost investitora te smo spomenuli pojam neefikasnog portfelja. Međutim još je nejasno što je točno onda efikasni portfelj.

Definicija 1.5.1. *Kažemo da je portfelj efikasan ukoliko zadovoljava barem jedan od sljedećih uvjeta:*

(i) ne postoji niti jedan drugi portfelj koji ima veći očekivani povrat uz istu razinu rizika

(ii) ne postoji niti jedan drugi portfelj koji ima manju razinu rizika uz isti očekivani povrat

Sada možemo zaključke iz poglavlja 1.2 izreći kao: racionalan investitor uvijek izabire efikasan portfelj. Efikasni portfelji vrlo se jednostavno mogu prikazati grafički. Prikažimo sve moguće kombinacije investicija (portfelje) na ravnini gdje x os predstavlja standardnu devijaciju portfelja (rizičnost), a y os predstavlja očekivani povrat.



Slika 1.3: Efikasna granica

Na slici 1.3 možemo vidjeti krivulju koja predstavlja efikasnu granicu - na njoj se nalaze svi efikasni portfelji. Ukoliko investitor raspolaže s portfeljom B jasno vidimo da je on neefikasan, odnosno racionalni bi investitor prodao portfelj B i kupio portfelj A ili C. To vidimo jer za danu razinu očekivanog povrata, portfelj A omogućuje manju standardnu devijaciju odnosno manju rizičnost. Slično, za danu rizičnosti portfelj C omogućuje veći očekivani povrat. Napomenimo još i da je na slici 1.3 odabir portfelja B proizvoljan, naime za svaki portfelj koji se nalazi ispod efikasne granice jasno je da je neefikasan te da se na analogan način može pretvoriti u efikasan.

Jednom kada znamo da želimo imati isključivo efikasne portfelje, postavlja se pitanje kako doći do njih? Odnosno kako izabrati optimalnu kombinaciju investicija koja portfelj čini efikasnim? Markowitz odgovor na to pitanje traži u analizi očekivanog povrata i varijance (Mean-Variance Optimization).

1.6 Problem odabira portfelja

Već smo u prethodnom poglavlju spomenuli kako će nas u cilju pronalaska optimalnog portfelja zanimati udjeli različitih investicija u portfelju. Te udjele označili smo malim grčkim slovom ω_j, gdje indeks j odgovara j-toj imovini. Radi usklađenosti zapisa s Markowitzevim načinom, u ovom ćemo potpoglavlju iste udjele označavati sa X_j. Dakle, definiramo $X_j := \omega_j$. Pretpostavit ćemo da vrijedi

$$X_j \geq 0, \quad \text{za sve } j$$

te

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = 1.$$

Nadalje, ograničenja na vrijednosti od X_j (osim već spomenutih) prikazivati ćemo jednadžbama te nejednadžbama.

$$\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n &= b_m
\end{aligned}$$

Ta ograničenja realne su prirode, a proizlaze iz različitih zakonskih i regulativnih akata, vlastitih preferencija ili na primjer financijskih mogućnosti. Nadalje, moguća je pojava nejednakosti oblika

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 \geq b$$

koje ćemo pretvarati u jednakosti tako da ćemo uvesti novu varijablu, $X_4 \geq 0$ te tako dobiti

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 - X_4 = b.$$

Time smo efektivno sustav jednadžbi i nejednadžbi pretvorili u sustav jednadžbi koji možemo zapisati kao

$$AX = b,$$

gdje je A matrica reda $m \times n$, X vektor već definiranih udjela u investicijama te b vektor s m elemenata. Sukladno prethodnoj definiciji, očekivanje na promatrani portfelj tada je

$$\mathbb{E} = \sum_{j=1}^{n} X_j\mu_j,$$

gdje je μ_j očekivani prihod na j-tu investiciju. Promatrati ćemo i vektor takvih očekivanih prihoda

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

Tada se očekivani povrat na portfelj može prikazati kao

$$E = \mu' X,$$

gdje je μ' oznaka za transponiranje matrice (vektora) μ. [2]

Slično, varijancu povrata portfelja

$$V = \sum_i \sum_j X_i X_j \sigma_{ij}$$

možemo zapisati kao

$$V = [X_1X_2 \cdots X_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix},$$

odnosno

$$V = X'CX,$$

[2]Istu notaciju koristit ćemo i u nastavku rada.

gdje je C kovarijacijska matrica. Uočimo, budući da je $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ za sve i, j (svojstvo kovarijance) slijedi da je C simetrična matrica.

Definirajmo matricu M kao

$$M = \begin{bmatrix} C & A' \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

$(m+n) \times (m+n)$ matricu. Uočimo, M je simetrična matrica po definiciji. Nadalje, neka je

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

vektor stupac kojemu su prvih n elemenata 0, a zadnjih m elemenata pripadni elementi vektora b te

$$S = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_n \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektor stupac s $m + n$ elemenata gdje su prvih n elemenata elementi vektora μ, a zadnjih m su nule.

Da bismo riješili problem pronalaska optimalnih portfelja uvesti ćemo takozvane jedinične križeve.

Definicija 1.6.1. *Jedinični križ definiramo kao uniju vektora stupca i vektora retka kojima su svi elementi nule, osim na presjeku gdje je* 1.

Na primjer, ako promotrimo matricu P definiranu kao

$$P = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$$

tada ”zamijeniti drugi redak i drugi stupac jediničnim križem” znači pretvoriti P u

$$P' = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{41} & 0 & \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$$

Kritični pravci

Skup efikasnih portfelja sastoji se od segmenata iz takozvanih kritičnih pravaca, a uz svaki kritični pravac vežemo skup varijabli za koje kažemo da su ”unutar” ili ”izvan”. Definirajmo najprije inverz matrice.

Definicija 1.6.2. *Matrica tipa $n \times n$ naziva se kvadratna matrica ili matrica reda n*

Definicija 1.6.3. *Kvadratna matrica A reda n je invertibilna ili regularna ako postoji matrica B reda n takva da je*

$$AB = BA = I.$$

Matricu B zovemo inverznom matricom od A te pišemo $B = A^{-1}$. U protivnom kažemo da je matrica A singularna.

Definicija 1.6.4. *Neka je $\tilde{M}$ matrica dobivena zamjenom redaka i stupaca varijabli koje su ”izvan” jediničnim križevima iz matrice M te pretpostavimo da je $\tilde{M}$ regularna matrica. Tada je jednadžba kritičnog pravca*

$$\tilde{M} \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \\ \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m \end{bmatrix} = R + \tilde{S}\lambda_E,$$

ili kraće

$$\tilde{M}\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = R + \tilde{S}\lambda_E. \tag{1.1}$$

Za sada nismo još definirali varijable $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, no za svako ograničenje s početka poglavlja koristit ćemo jednu varijablu λ_i. U slučaju kada je $\sum X_i = 1$ jedino ograničenje slijedi $m = 1$ te

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \\ \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Ovdje je R prethodno definiran $m + n$ vektor-stupac, a $\tilde{S}$ je dobiven iz S analogno kao $\tilde{M}$ iz M. Na primjer, ako je $n = 4$, $m = 1$ te varijable $j = 2, 4$ "izvan", tada je

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ 0 \\ \mu_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Specijalno, $\lambda_E \in \mathbb{R}$.

Iz prethodne formula za kritični pravac dobivamo i drugačiji zapis

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \left(\tilde{M}\right)^{-1} R + \left(\tilde{M}\right)^{-1} \tilde{S}\lambda_E$$

Uočimo da smo pretpostavkom na regularnost matrice $\tilde{M}$ osigurali postojanje inverza. U nastavku ćemo s $N(i)$ označavati $\tilde{M}^{-1}$ (pritom i označava i-ti kritični pravac na koji smo naišli pri pronalasku efikasne granice) no umjesto jediničnih križeva koristimo tzv. nul-križeve (umjesto jedinice, centralni element je također nula).

Sada možemo pisati

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = N(i)R + N(i)S\lambda_E \tag{1.2}$$

Proceduru pronalaska kritičnih pravaca biti će najjednostavnije pokazati primjerom, a paralelno ćemo pokazati i općeniti slučaj.

Primjer

Neka je $n = 3$, dakle promatrani portfelj sastoji se od 3 imovine, te neka je kovarijacijska matrica C dana s

$$C = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, neka je vektor očekivanih prinosa

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.062 \\ 0.146 \\ 0.128 \end{bmatrix}$$

te jedini uvjet na razdiobu investicija

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1,$$

te $X_j \geq 0$ za $j = 1, 2, 3$ (nema takozvanog "short sellinga", odnosno imovinu možemo jedino kupovati).

Slijedi da je prema definiciji

$$M = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 & 1 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 & 1 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.062 \\ 0.146 \\ 0.128 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prvi korak je pronaći efikasni portfelj $X^{(1)}$ s maksimalnim očekivanjem. Uz pretpostavku kako je jedino ograničenje $\sum_{i=1}^{3} X = 1$ to je trivijalan zadatak - odabiremo onu imovinu koja zasebno ima najveće očekivanje μ_i. U ovom primjeru portfelj koji maksimizira očekivani prinos je

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno u potpunosti se sastoji samo od druge imovine koja ima najveći očekivani prinos (0.146). U nešto općenitijem slučaju kada nam je zadan sustav uvjeta

$$AX = b$$

problem pronalaska takvog portfelja može postati dosta kompliciraniji. U takvim se slučajima koristi linearno programiranje za rješavanje sustava.

Drugi korak je pronalazak jednadžbe za kritični pravac povezan s portfeljom $X^{(1)}$. Najprije pogledajmo naš primjer, u njemu su $j = 1$ i $j = 3$ "izvan" (jer smo odabrali optimalni portfelj koji se sastoji samo od imovine $j = 2$) pa je jednadžba koja odgovara jednadžbi (1.1) oblika[3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0854 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0.146 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Laganim računom dobijemo inverz matrice $\tilde{M}$:

$$\tilde{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0854 \end{bmatrix}$$

Supstitucijom nul-križeva za varijable koje su izvan dobivamo matricu

$$N(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0854 \end{bmatrix}$$

Konačno, vrijednosti od X te λ uz kritični pravac dane su formulom (1.2), odnosno nakon uvrštavanja

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.0854 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.146 \end{bmatrix}$$

Dakle, na prvom kritičnom pravcu, samo se λ_1 mijenja u odnosu na promjenu λ_E, dok X ostaje konstantan. Takva situacija uvijek se dešava za prvi kritični pravac, no moguća je (iako rijetko) i u sljedećim koracima.

Slična je situacija kada je portfelj izložen općenitom sustavu linearnih uvjeta, $AX = b$. Ukoliko imamo m jednadžba uvjeta tada će biti m varijabli u portfelju koji maksimizira $\mathbb{E}$. U linearnom programiranju takve varijable nazivaju se baznima. Eliminacijom svih redaka i stupaca koji su "izvan" dobivamo matricu

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{A}' \\ \tilde{A} & 0 \end{bmatrix},$$

[3] U definiciji 1.6.4. možemo se prisjetiti kako smo došli do matrice $\tilde{M}$ te definicija matrica R i $\tilde{S}$.

gdje je $\tilde{C}$ $m \times m$ podmatrica od C, $\tilde{A}$ je regularna $m \times m$ podmatrica od A, $\tilde{A}'$ jest transponirana matrica $\tilde{A}$, a 0 je nul-matrica reda $m \times m$. Inverz ove matrice jest

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{A}' \\ \tilde{A} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}^{-1} \\ \left(\tilde{A}'\right)^{-1} & -\left(\tilde{A}'\right)^{-1} \tilde{C}\tilde{A}^{-1}, \end{bmatrix}$$

iz kojeg sada umetanjem nul-križeva na retke i stupce koji su "izvan" dobivamo $N(1)$. Konačno, formula za prvi kritični pravac je

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = N(1) \cdot R + \lambda_E N(1) S.$$

U svrhu jednostavnosti možemo uvesti oznake $T(1) := N(1)R$ te $U(1) := N(1)S$, čime formula za prvi kritični pravac postaje

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = T(1) + \lambda_E U(1)$$

Treći korak ovog procesa jest pronalazak vrijednosti od λ_E za koje pronađeni prvi kritični pravac iz prethodnog koraka presijeca svaki kritični pravac sa sljedeća tri svojstva:

1. sve varijable koje su bile "unutar" u prvom kritičnom pravcu i sada su "unutar"
2. jedna dodatna varijable je također "unutar"
3. sve ostale varijable su "izvan"

U tom pogledu, možemo pisati kako je prvi kritični pravac bio l_2 - oznaka kako je varijabla koja je "unutar" $j = 2$. Imajući na umu prethodne tri karakteristike kritičnih pravaca, sljedeći je korak pronaći vrijednosti λ_E u sjecištu pravaca l_2 i $l_{1.2}$ (varijabla koja je također dodana "unutar" je $j = 1$) te l_2 i $l_{2.3}$ (nova varijabla je $j = 3$). U sjecištu l_2 i $l_{1.2}$ vrijedi

$$\sigma_{11}X_1 + \sigma_{12}X_2 + \sigma_{13}X_3 + \lambda_1 = \mu_1\lambda_E,$$

gdje je σ_{ij} kovarijanca između i-te i j-te imovine, kao i

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = T(1) + \lambda_E U(1).$$

Slijedi

$$[\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, 1]\{T(1) + \lambda_E U(1)\} = \mu_1\lambda_E,$$

odnosno

$$[0.0146, 0.0187, 0.0145, 1]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-0.0854\end{bmatrix} + [0.0146, 0.0187, 0.0145, 1]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0.146\end{bmatrix}\lambda_E = 0.062\lambda_E.$$

Slijedi da na sjecištu vrijedi

$$\begin{aligned}-0.0667 + 0.146\lambda_E &= 0.062\lambda_E\\ \lambda_E &= 0.794.\end{aligned}$$

Slično, sada u sjecištu l_2 i $l_{2.3}$ imamo

$$[\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, 1]\{T(1) + U(1)\lambda_E\} = \mu_3\lambda_E,$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}-0.075 + 0.146\lambda_E &= 0.128\lambda_E\\ \lambda_E &= 4.17.\end{aligned}$$

Prvi segment efikasnog skupa leži između kritičnog pravca koji presijeca l_2 u maksimalnoj vrijednosti od λ_E pa možemo zaključiti kako u danom primjeru prvi segment leži duž kritičnog pravca $l_{2.3}$.

U općenitom slučaju, korak 3 može se opisati na sljedeći način. Neka je v_j j-ta komponenta vektora

$$V = MT(1),$$

te neka je w_j j-ta komponenta vektora

$$W = MU(1) - S.$$

Vrijedi $v_j = w_j = 0$ za j koji su "unutra". Nadalje, $\lambda_E^{(j)} = -v_j/w_j$ jest vrijednost od λ_E za koju prvi kritični pravac presijeca onaj kritični pravac za koji je j-ta varijabla također "unutar" (ako je $w_j = 0$ tada ne postoji sjecište tih pravaca). Sljedeći kritični pravac koji je "efikasan" jest onaj koji presijeca prethodni u maksimalnoj vrijednosti λ_E. Ukoliko je takav max $\lambda_E <= 0$ tada je $X^{(1)}$ rješenje problema, odnosno portfelj minimalne varijance te maksimalnog očekivanja.

Četvrti korak daje nam formulu za sljedeći kritični pravac. U našem primjeru, razlika između nove matrice M te dosadašnje jest u tome da je $j = 3$ sada "unutar". $N(1)$ također mora biti promijenjen kako bismo dobili $N(2)$. Promotrimo ovaj puta najprije općenitu proceduru.

Pretpostavimo da varijabla j_0 upada "unutar" za $(i+1)$-vi kritični pravac. Neka je sada C_{j_0} j_0-ti stupac matrice M. Neka je nadalje

$$
\begin{aligned}
B &= N(i)C_{j_o},\\
b &= B'C_{j_0},\\
c &= m_{j_0 j_0} - b,
\end{aligned}
$$

gdje je $m_{j_0 j_0} = M(j_0, j_0)$ odnosno element matrice M u j_0-tom retku i j_0-tom stupcu. Nadalje, elementi matrice $N(i+1)$, g_{ij}, mogu se iskazati pomoću elemenata matrice $N(i)$, f_{ij}, na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
g_{j_0 j_0} &= \frac{1}{c},\\
g_{ij_0} = g_{j_0 i} &= -\frac{b_i}{c}, \text{ za } i \neq j_0
\end{aligned}
$$

gdje je b_i i-ta komponenta vektora B te

$$g_{ij} = f_{ij} + \frac{b_i b_j}{c} \text{ za } i \neq j_0,\ j \neq j_0.$$

Vratimo li se sada na naš primjer možemo vidjeti kako promjena $N(1)$ u $N(2)$ izgleda. Budući da smo zaključili kako prvi segment leži duž pravca $l_{2.3}$, sljedeća varijabla koja je "unutar" jest $j_0 = 3$. Dakle, imamo

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0854 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0145 \\ 0.0104 \\ 0.0289 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -0.075 \end{bmatrix},$$

$$b = [0, 1, 0, -0.075] \begin{bmatrix} 0.0145 \\ 0.0104 \\ 0.0289 \\ 1 \end{bmatrix} = -0.0646$$

$$c = 0.0289 + 0.0646 = 0.0935.$$

Sada slijedi

$$N(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.0935} & -\frac{1}{0.0935} & 1 - \frac{0.075}{0.0935} \\ 0 & -\frac{1}{0.0935} & \frac{1}{0.0935} & \frac{0.075}{0.0935} \\ 0 & 1 - \frac{0.075}{0.0935} & \frac{0.075}{0.0935} & -0.0854 + \frac{(-0.075)^2}{0.0935} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.6951871 & -10.6951871 & 0.19786096 \\ 0 & -10.6951871 & 10.6951871 & 0.80213904 \\ 0 & 0.19786096 & 0.80213904 & -0.02523957 \end{bmatrix}$$

Napomena 1.6.5. *Pomnožimo li matrice $N(2)$ te M, produkt sadrži jedinične križeve na mjestima varijabli koje su "unutar" te nul-križeve na mjestima varijabli koje su "izvan", u ovom slučaju $j = 1$.*

Konačno, formula za novi kritični pravac je

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = N(2) \cdot R + \lambda_E N(2) S,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.196 \\ 0.804 \\ -0.025 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} 0 \\ 0.196 \\ -0.193 \\ 0.132 \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Kada je vrijednost od λ_E jednaka vrijednosti iz trećeg koraka, odnosno $\lambda_E^{(1)} = 4.17$ dobivamo

$$X_2 = 1$$

te

$$X_3 = 0.$$

Možemo uočiti, kako se λ_E smanjuje X_2 se također smanjuje, a X_3 raste. Točke koje smo dobili iz (1.3) efikasne su za $\lambda_E \in [\lambda_E^*, 4.17]$ gdje je $\lambda_E^* > 0$ vrijednost uz koju trenutni kritični pravac presijeca neki drugi, ili $\lambda_E = 0$ pa proces staje.

U sljedećem, petom koraku, cilj je upravo pronaći kritični pravac koji je prvi kojeg prethodni kritični pravac presijeca, odnosno zanima nas vrijednost od λ_E u kojem se sjecište postiže. Dakle, za trenutni kritični pravac $l_{2.3}$ zanima nas sjecište sa l_3 i $l_{1.2.3}$ (ne obaziremo se na l_2 s kojega smo došli). Pravac $l_{2.3}$ presijeca l_3 kada

$$X_2 = 0.198 + 0.193\lambda_E = 0,$$

odnosno za $\lambda_E < 0$.

Slično, $l_{2.3}$ presijeca $l_{1.2.3}$ kada vrijedi

$$[\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, 1]\{T(2) + U(2)\lambda_E\} = \mu_1 \lambda_E,$$

gdje je

$$T(2) = N(2)R,$$

i

$$U(2) = N(2)S.$$

Na sjecištu tada vrijedi

$$\begin{aligned} -0.0097 + 0.133\lambda_E &= 0.062\lambda_E \\ &= 0.14. \end{aligned}$$

Dakle, iz gornjeg računa možemo zaključiti kako je prvi kritični pravac na koji ćemo naići smanjivanjem λ_E od 4.17 pravac $l_{1.2.3}$ te da je odgovarajući $\lambda_E = 0.14$.

Za portfelj takav da se se efikasna granica pomiče s $l_{2.3}$ na $l_{1.2.3}$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = T(2) + \lambda_E^{(2)} \cdot U(2)$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.196 \\ 0.804 \end{bmatrix} + 0.14 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.193 \\ -0.193 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.22 \\ 0.78 \end{bmatrix}.$$

Šesti korak ekvivalentan je četvrtom. Želimo se domoći formule za kritični pravac $l_{1.2.3}$. Kao što je demonstrirano u četvrtom koraku, najprije moramo pronaći $N(3)$. Analognim postupkom dobivamo

$$N(3) = \begin{bmatrix} 111.2486 & -27.00904 & -84.23964 & 1.102313 \\ -27.00904 & 17.25246 & 9.75658 & -0.06976 \\ -84.23964 & 9.75658 & 74.48306 & -0.032552 \\ 1.102313 & -0.06976 & -0.032552 & -0.014317 \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je jednadžba za $l_{1.2.3}$ jednaka

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = T(3) + \lambda_E U(3) = N(3)R + \lambda_E N(3)S,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.07 \\ -0.03 \\ -0.01 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} -7.79 \\ 2.05 \\ 5.74 \\ 0.54 \end{bmatrix}.$$

Sedmi korak je sada pak ekvivalentan petom. Kako se λ_E smanjuje od $\lambda_E = 0.14$, pronalazimo da u sjecištu od $l_{1.2.3}$ i $l_{1.3}$ vrijedi

$$X_2 = -0.07 + 2.05\lambda_E = 0 \Rightarrow \lambda_E = 0.034.$$

Slično, $l_{1.2.3}$ presijeca $l_{1.2}$ kada

$$X_3 = -0.034 + 5.74\lambda_E = 0 \Rightarrow \lambda_E = 0.005.$$

Možemo zaključiti kako se prvo sjecište postiže za $\lambda_E^{(3)} = 0.034$ te da se sljedeći segment efikasne granice nalazi na pravcu $l_{1.3}$.

Portfelj za koji se efikasna granica pomiče s $l_{1.2.3}$ na $l_{1.3}$ jest

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ -0.07 \\ -0.03 \end{bmatrix} + 0.034 \begin{bmatrix} -7.79 \\ 2.05 \\ 5.74 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84 \\ 0 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

U osmom koraku, slično kao u koracima 2, 4 i 6, cilj nam je dobiti formulu za novi kritični pravac. Da bismo dobili $N(4)$ moramo zamijeniti odgovarajući (drugi) redak i stupac jediničnim križem. Općenito, kada god nul-križ zamjeni određeni redak i stupac j_0, element g_{ij} nove matrice $N(i+1)$ možemo dobiti pomoću odgovarajućeg elementa f_{ij} stare matrice $N(i)$ koristeći sljedeću formulu:

$$g_{ij} = f_{ij} - \frac{f_{ij_0} f_{i_0 j}}{f_{i_0 j_0}}.$$

Koristeći gornju formulu dobivamo matricu $N(4)$:

$$N(4) = \begin{bmatrix} 68.96554 & 0 & -68.96554 & 0.9931 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -68.96554 & 0 & 68.96554 & 0.0069 \\ 0.99310 & 0 & 0.0069 & -0.0146 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, formula za novi kritični pravac je

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = T(4) + \lambda_E U(4),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9931 \\ 0 \\ 0.0069 \\ -0.0146 \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} -4.552 \\ 0 \\ 4.552 \\ 0.06245 \end{bmatrix}.$$

Kako se λ_E smanjuje od 0.034 poprima vrijednost $\lambda_E = 0$ prije no što promatrani kritični pravac presijeca neki drugi kritični pravac. Dakle, kraj efikasne granice je

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = T(4) + 0 \cdot U(4) = T(4).$$

Konkretno, portfelj koji minimizira varijancu je

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9931 \\ 0 \\ 0.0069 \end{bmatrix}.$$

Kao zaključak, možemo navesti kako je svaki set efikasnih portfelja po dijelovima linearan te ga možemo opisati pomoću njegove početne i krajnje točke te unutarnjih točaka. U našem primjeru pronašli smo sljedeće točke pomoću kojih možemo opisati efikasni portfelj:

Točke	1.	2.	3.	4.
X_1	0	0	0.84	0.99
X_2	1	0.22	0	0
X_3	0	0.78	0.16	0.01

Nadalje, svaka točka dobivena linearnom interpolacijom dvije susjedne točke opet je efikasan portfelj. Na taj način možemo konstruirati linearan skup efikasnih portfelja.

Poglavlje 2

Value-at-Risk (VaR)

2.1 Uvod - mjera rizika

Prilikom investiranja, uz odabir željenog portfelja od krajnje je važnosti postaviti periodičke kontrole rizika. U skladu s time, jedno očekivano pitanje jest kako izmjeriti potencijalni gubitak u vrijednosti portfelja na kraju nekog proizvoljnog perioda? Odnosno, kako mjeriti rizik vezan uz promjenu vrijednosti našeg portfelja? Odgovor na to pitanje daje nam takozvani Value-at-Risk, nešto što ćemo mi nazivati mjera rizika ili kraće, VaR.

U svrhu ovog rada, o mjeri (rizika) općenito ćemo razmišljati jednostavno kao o proceduri koja dodjeljuje neke vrijednosti. S druge strane, atributima ćemo nazivati ono što mjerimo. Dakle, mjera kvantificira određeni atribut, a u ovom slučaju VaR je mjera koja dodjeljuje određenu vrijednost našem portfelju. Što onda možemo mjeriti? U području upravljanja rizika portfeljem, dvije su glavne komponente rizika: izloženost (kreditni rizik) i nesigurnost (eng. *uncertainty*). Mjere nesigurnosti obično su vjerojatnosne mjere što znači da se rizik opisuje nekim parametrom. Na primjer, standardna devijacija cijene neke dionice je mjera rizika koja kvantificira nesigurnost pomoću statističke standardne devijacije.

U nastavku poglavlja, cilj nam je definirati rizičnu vrijednost (VaR), vidjeti kako se ona može izračunati te dati konkretne primjere.

2.2 Value-at-Risk (VaR)

Primjer 2.2.1. *Pretpostavimo da nam investicijsko društvo za upravljanje fondovima ukaže da su određenim izračunom došli do zaključka da njihov portfelj sa 90% sigurnošću u sljedećih 7 dana neće izgubiti više od 20.000 eura vrijednosti. Ovo je primjer mjere rizika zvane Value-at-Risk (VaR). Za dani period t i vjerojatnost p, VaR nam ukazuje na* *količinu novaca n za koju postoji vjerojatnost p da je promatrani portfelj neće izgubiti u vremenskom periodu t.*

Iz prethodnog primjera možemo vidjeti da kako bismo definirali mjeru rizika moramo definirati sljedeće:

1. Vremenski period za koji računamo potencijalni gubitak. Ovaj period je u potpunosti proizvoljan, no u bankarskoj industriji najčešće se kao vremenski period uzima jedan dan. Dakle, zanima nas potencijalni gubitak u vrijednosti portfelja na kraju perioda od jednog (radnog) dana.

2. Razinu pouzdanosti za koju računamo VaR. Kao i za period, samostalno možemo odlučiti koju ćemo razinu pouzdanosti koristiti, no u praksi najčešće se koriste razine pouzdanosti od 90%, 95% te 99%. Mjere rizika tada nazivamo 90%-tni, 95%-tni, odnosno 99%-tni VaR.

Krenimo sada na formalnu definiciju mjere rizika, odnosno VaR-a.

Definicija 2.2.2. *d-dnevni VaR na razini pouzdanosti od p posto portfelja P definiramo kao $(1-p)$-kvantil distribucije d-dnevne promjene vrijednosti portfelja P. Odnosno,*

$$VaR_{p,d}(P) = -F_{P^d}^{-1}(1-p) \cdot PV(P),$$

gdje je P^d promjena vrijednosti portfelja nakon d dana, F_{P^d} funkcija distribucije od P^d, a $PV(P)$ je trenutna vrijednost portfelja P.

Uočimo kako je VaR najčešće pozitivna vrijednost, budući da očekujemo kako će portfelj u nekom razdoblju ostvarivati dobitke, ali i gubitke. Iz tog razloga realno je za očekivati da je $F_{P^d}^{-1}(1-p)$ negativan broj. Međutim moguće je i da VaR bude negativan broj. Kada bismo dobili negativan VaR to bi bio pokazatelj kako je portfelj u promatranoj distribuciji prinosa ostvario izuzetno dobre performanse te da s velikom vjerojatnošću očekujemo nastavak dobrih rezultata. Ova pretpostavka o pozitivnosti u skladu je s neformalnom definicijom VaR-a iz primjera iznad, gdje smo rekli da s određenom vjerojatnosti portfelj neće izgubiti više od x vrijednosti, gdje je x neki pozitivan broj.

Napomena 2.2.3. *Preciznije, gornja definicija rizične vrijednosti odnosno VaR-a jest definicija apsolutnog VaR-a. Analitičari često računaju i služe se i relativnim VaR-om, definiran kao $\mathbb{E}_P - VaR_{p,d}(P)$. Mjera koja uz računanje kvantila distribucije povrata, rezultat prikazuje u odnosu na očekivani povrat portfelja $\mathbb{E}_P$. Ovaj rad će se baviti isključivo apsolutnim VaR-om te nadalje apsolutni VaR jednostavno nazivamo VaR.*

Pojam koji ćemo često spominjati u ovom radu jesu faktori rizika. Sljedeća definicija nam stoga daje kratko pojašnjenje ovog pojma.

Definicija 2.2.4. *Faktor rizika je varijabla koja doprinosi mogućnosti da se dogodi neželjeni ili nepredviđeni događaj koji može uzrokovati gubitak ili štetu. Faktor rizika može biti volatilnosti cijene dionice, kretanje forward stopa, kretanje tečaja, itd.*

2.3 Povijesni VaR

Value-at-Risk, kao i većina ostalih mjera rizika, ne mora biti jedinstveno definirana, odnosno izračunata. U ovom poglavlju baviti ćemo se vjerojatno komercijalno najčešće korištenom metodom izračuna VaR-a - takozvanom povijesnom metodom. Prema istraživanju [5] konzultantske kompanije McKinsey & Company, u 2012. godini 72% posto banaka koje su sudjelovale u istraživanju koristi povijesnu VaR metodu, od kojih čak 85% koristi jednake težine za odabrani vremenski period, dok 15% banaka koristi težinsku povijesnu metodu. [1]

Osnovna ideja povijesne metode izračuna VaR-a bazira se na uzimanju trenutnog portfelja te podvrgavanju istog na promjene faktora rizika koje su se desile u nekom definiranom razdoblju u prošlosti. Tada se pomoću stvarnih kretanja cijena na tržištu u promatranom razdoblju izračuna hipotetski dobitak ili gubitak u vrijednosti trenutnog portfelja te se iz navedenih promjena vrijednosti računa VaR.

Ono što povijesnu metodu razlikuje od nekih drugih metoda koje se koriste u izračunu VaR-a jest jednostavnost i brzina računanja koristeći povijesne podatke. Nadalje, povijesna metoda pripada skupini neparametarskih metoda izračuna VaR-a (kasnije ćemo obraditi i neke parametarske metode). Drugim riječima, da bismo koristili povijesnu metodu ne donosimo nikakve pretpostavke o distribuciji dobitaka/gubitaka, već koristimo dostupne empirijske podatke - odnosno stvarna kretanja vrijednosti promatranih instrumenata. Međutim, prilikom korištenja povijesne metode izračuna VaR-a, ključno je imati dovoljan raspon podataka te osigurati kvalitetu i konzistentnost podataka.

Povijesna metoda izračuna VaR-a može se jednostavno opisati u tri koraka:

1. Za pojedini financijski instrument (dionicu, indeks, obveznicu, itd.) izračuna se d-dnevni povrat, gdje je d razdoblje za koje nas zanima VaR (npr. jedan dan). Isti postupak ponavljamo $n-d$ puta, gdje je n duljina povijesnog razdoblja iz kojeg smo dohvatili podatke (npr. jedna godina).

[1] Težinska povijesna metoda jest tema kojom se također nećemo baviti unutar ovog rada. U suštini, jedina razlika između rizične vrijednosti koju ćemo mi obrađivati u ovom poglavlju te težinske rizične vrijednosti su ponderi odnosno težine koje se mogu staviti na vremenski period iz kojega računamo povijesni VaR. Tako na primjer u težinskom Var-u možemo staviti veći naglasak na novije promjene vrijednosti nego na stare, možda manje relevantne promjene.

2. Povrate sortiramo uzlazno te ih pomnožimo sa trenutnom tržišnom vrijednosti odgovarajućeg instrumenta te se povrati pojedinih instrumenata zbrajaju kako bismo dobili prinos cijelog portfelja.

3. Ručno, iz sortiranih podataka, VaR predstavlja onaj broj koji se nalazi na $k = n \times (1 - p)$-tom mjestu, gdje je n broj vremenskih perioda u promatranom povijesnom razdoblju (npr. 100 dana), a p zadani kvantil odnosno razina pouzdanosti. Ukoliko k nije cijeli broj, VaR je neki iznos između dva susjedna cijela broja koji se dobije linearnom interpolacijom ili drugom interpolacijskom metodom. Naravno, možemo koristiti i definiciju VaR-a kao kvantila empirijske razdiobe.

2.4 Povijesni VaR - primjer

Uzmimo jednostavan primjer portfelja koji sadrži samo dionice tvrtke Apple Inc. Pretpostavimo da trenutna tržišna vrijednost portfelja (odnosno količina dionica pomnožena s cijenom po dionici na dan izračuna VaR-a) iznosi 1 milijun eura. Cilj nam je koristeći povijesni VaR odrediti količinu novaca koji portfelj može izgubiti u sljedećem danu. Zato ćemo koristiti VaR na razini značajnosti od 99% te s periodom od jednog dana.

Najprije odaberimo razdoblje u povijesti iz kojeg ćemo prikupljati podatke o kretanju cijena dionice Applea. Preporučljivo je uzeti razdoblje od minimalno jedne godine, odnosno otprilike 250 podataka budući da nas zanimaju jedino radni dani kada se dionicom trgovalo. U ovom primjeru izabrali smo razdoblje od 01.01.2022. do 31.12.2022. godine.

Sljedeći je korak izračunati dnevne prinose. Kako bismo to napravili, ukoliko već nisu potrebno je sortirati podatke vremenski počevši od najranijeg datuma. Označimo tako sortirane podatke sa

$$\{P_1, P_2, \dots, P_n\},$$

gdje je $n = 251$ broj dana u kojima se trgovalo dionicom u promatranom razdoblju. Dakle, P_i označava cijenu dionice Applea na i-ti dan. Zatim pronalazimo povrate kao

$$R_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Označimo niz povrata s

$$\{R_2, R_3, \dots, R_{n-1}, R_n\}.$$

Sljedeći je korak sortirati izračunate povrate uzlazno. Označimo taj niz sa

$$\{R_{(2)}, R_{(3)}, \dots, R_{(n)}\}$$

Ključni korak povijesne metode izračuna VaR-a je primjena povijesnih kretanja cijena, odnosno izračunatih povrata, na današnji portfelj. Zato uzimamo vrijednost portfelja i množimo svaki povrat kako bismo dobili simulaciju kretanja tržišne vrijednosti našeg portfelja na promatrane dane. Prisjetimo se da je vrijednost našeg portfelja 1 milijun eura. Neka je sada $S_i = 1000000R_i$ promjena u vrijednosti portfelja na i-ti dan u povijesnom razdoblju. Uočimo da je niz

$$S = \{S_{(2)}, S_{(3)}, \ldots, S_{(n)}\}$$

opet uzlazno sortiran zbog monotonosti funkcije $f(x) = 1000000x$ kojom smo pomnožili prethodni uzlazno sortiran niz.

Konačno, budući da računamo 99-postotni VaR, potrebno je pronaći 0.01-kvantil sortiranog niza S. To možemo jednostavno napraviti na više načina. U R-u na primjer koristeći funkciju quantile() s parametrom 0.01. Konačno dobivamo da je 0.99-kvantil niza S jednak

$$\text{VaR} = \text{quantile(diff, probs=1-0.99, type=1, names = FALSE)} = -37404.7.$$

Dakle, sa 99-postotnom vjerojatnošću tvrdimo da se sljedeći radni dan vrijednost portfelja neće smanjiti za više od 37404.7 eura.

U R-u to izgleda ovako:

```
podaci <- read.csv("~AAPL.csv") #ucitavanje podataka
close <- podaci$Close
l <- length(close)

R <- c()
for (i in 1:l-1){
  R[i] <- (close[i+1]-close[i])/close[i]
}

R_sort <- sort(R, decreasing=FALSE)
diff <- R_sort*1000000

final_var <- quantile(diff, probs=1-0.99, type=1, names = FALSE)
final_var
```

2.5 O

svrt na povijesnu metodu]Osvrt na povijesnu metodu izračuna VaR-a

Za kraj povijesne metode izračuna VaR-a, osvrnimo se na nekoliko prednosti i nedostataka ove metode.

Glavni razlog zašto je metoda povijesne simulacije toliko korištena je to što je metoda neparametarska, to jest ne moramo brinuti o računanju/procjeni parametara te ne ovisi o bilo kakvim pretpostavkama o distribuciji faktora rizika. Neparametarska priroda povijesne simulacije također eliminira potrebu za procjenom volatilnosti i korelacija faktora rizika te također nema problema s prilagodbom za distribucije povrata kojima su ekstremne vrijednosti češće od očekivanih (takozvane distribucije teških repova[2]) jer povijesni povrati već odražavaju stvarne kretnje faktora rizika na tržištu.

Naravno, ova metoda ima i nekih nedostataka. Jedan veliki nedostatak metode povijesne simulacije leži u potpunoj ovisnosti o određenom skupu povijesnih podataka i time o posebnostima tog skupa podataka. Osnovna pretpostavka je da je prošlost, odnosno ono ponašanje tržišta (faktora rizika) koje je prikazano u tom povijesnom skupu podataka, pouzdan prikaz budućnosti. Takva pretpostavka implicira da će se tržišni događaji sadržani u povijesnom skupu podataka ponoviti u danima, tjednima, odnosno mjesecima koji dolaze. Međutim, povijesno razdoblje može obuhvatiti događaje poput pada tržišta ili, obratno, razdoblje izuzetno niske volatilnosti, koji su malo vjerojatni da će se ponoviti u budućnosti. Iz tog razloga veliki oprez mora se staviti na pravilan odabir povijesnog razdoblja. Još jedno praktično ograničenje povijesne simulacije je dostupnost podataka. Jedna godina podataka prosječno odgovara samo 250 podataka (jer je toliko otprilike dana trgovanja) - odnosno, 250 scenarija koje koristimo za generiranje VaR-a. S druge strane, Monte Carlo simulacije o kojima ćemo pričati u sljedećem poglavlju obično uključuju barem 10 000 simulacija (scenarija) koji se koriste za generiranje VaR-a. Korištenje malih uzoraka povijesnih podataka neizbježno ostavlja praznine u distribucijama faktora rizika i tendenciju zapostavljanja repova distribucija - to jest pojavu manje vjerojatnih, ali ekstremnih događaja koji mogu imati dalekosežne posljedice na naš portfelj.

Kao zaključak, možemo napomenuti da iako ova metoda ima najmanje pretpostavki na skup podataka te je vjerojatno najjednostavnija i najbrža za izračunati, ona također ima određene nedostatke od kojih je vjerojatno najveći upravo odabir reprezentativnog povijesnog razdoblja za izračun.

Napomena 2.5.1. *U svrhu zaštite od preoptimističnog razdoblja, uz standardni VaR institucije znaju računati i takozvani stresni VaR koji je nešto konzervativniji. Stresni Var računa se analogno kao i standardni, jedina je razlika u odabranom povijesnom razdoblju. U ovom se slučaju kao odabrano razdoblje za izračun VaR-a koristi povijesno razdoblje u kojem su faktori rizika negativno utjecali na tržišnu vrijednost portfelja u jačem intenzitetu nego inače ili nego što je očekivano da će utjecati u bliskoj budućnosti. Opet je odabir stresnog razdoblja proizvoljan te također ne odražava mogućnost da u budućnosti može doći do još veće korekcije tržišta. Konačno, kao optimalni prikaz rizičnosti našeg portfelja, u obzir možemo uzeti zasebno računanje i prikaz standardnog i stresnog VaR-a.*

[2]O distribuciji teških repova pričati ćemo više kod parametarske metode gdje ona predstavlja nezanemariv problem.

2.6 Monte Carlo metoda izračuna VaR-a

U ovome poglavlju upoznati ćemo se s metodom Monte Carlo simulacija za izračun VaR-a. Metoda Monte Carlo simulacija za izračun VaR-a ima određenu sličnost povijesnoj metodi, pritom je ključna razlika da gdje povijesna metoda koristi opservirane promijene u tržišnim faktorima unutar odabranog vremenskog perioda kako bi generirala n hipotetskih dobitaka ili gubitaka u vrijednosti portfelja, Monte Carlo metoda koristi odabranu distribuciju za koju se pretpostavlja da dobro opisuje i aproksimira moguće promjene u tržišnim faktorima. Ključan korak Monte Carlo metode jest korištenje takozvanog generatora pseudo-slučajnih brojeva za generiranje velikog broja (najčešće više od 10000) hipotetskih promjena u tržišnim faktorima. Isti su zatim korišteni za konstruiranje hipotetskih dobitaka ili gubitaka u vrijednosti trenutnog portfelja te distribuciju mogućih profita ili gubitaka. Iz navedene distribucije zatim se izračuna VaR. No krenimo redom.

Prvi korak u simulaciji jest odabir stohastičkog modela koji će opisivati ponašanje procesa koji promatramo (npr. cijenu dionice). Model koji ćemo mi koristiti u ovom poglavlju je takozvano generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje (GBM).

Definirajmo najprije Brownovo gibanje te generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje.

Definicija 2.6.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $B = (B_t \mid t \geq 0)$ je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

1. *Putovi $t \to B_t(\omega)$ su neprekidne funkcije sa R_+ u R (za g.s. $\omega \in \Omega$).*
2. *$B_0 = 0$.*
3. *Za sve $m \in \mathbb{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ su prirasti*
$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$
nezavisni.
4. *Za sve $0 \leq s < t$ je prirast $B_t - B_s$ normalno distribuiran s očekivanjem nula i variajncom $t - s$.*

Definicija 2.6.2. *Proces S nazivamo* ***generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje*** *ako vrijedi*
$$dS_t = \alpha_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t,$$
gdje je α_t srednja stopa povrata, σ_t volatilnost u trenutku t te B_t Brownovo gibanje.

Ovakav proces predstavlja najopćenitiji model kretanja cijena financijske imovine koje je neprekidno, pozitivno te ima jedan izvor nesigurnosti - Brownovo gibanje B.

Vratimo se sada na naš ekonomski problem. Osnovne pretpostavke modela su da promjene u cijeni promatranog instrumenta ne ovise o prethodnim cijenama te da se male promjene u cijeni mogu opisati kao

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t,$$

gdje je $B = (B_t | t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Dakle, promjene u cijeni u Monte Carlo metodi ćemo modelirati upravo generaliziranim geometrijskim Brownovim gibanjem. Parametar μ_t jest srednja stopa povrata u trenutku t, dok σ_t ima interpretaciju volatilnosti i predstavlja mjeru varijacije cijene dionice na financijskom tržištu. Bitno je za napomenuti kako ti parametri općenito ne moraju biti konstantni, nego je dopušteno da se mijenjaju u vremenu t. Međutim radi jednostavnosti, mi ćemo pretpostaviti kako su oni zaista konstante pa možemo pisati

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

U praksi, proces s beskonačno malim pomacima dt možemo aproksimirati pomoću diskretnih pomaka Δt. Definirajmo t kao trenutno vrijeme, T kao finalno vrijeme te $\tau = T - t$ kao vremenski period u kojem računamo VaR. Sljedeći korak jest diskretizirati početni stohastički proces. Kako bismo generirali niz slučajnih varijabli S_{t+i} unutar intervala τ, najprije τ moramo podijeliti u n intervala, $\Delta t = \tau / n$.

Integriranjem dS/S na proizvoljnom intervalu $[t-1, t]$ dobivamo

$$\int_{t-1}^{t} dS_t = \int_{t-1}^{t} \mu S_t dt + \int_{t-1}^{t} \sigma S_t dB_t$$

te budući da je dB_t slučajna varijabla s očekivanjem 0 te varijancom dt možemo ju aproksimirati izrazom $\sqrt{dt}\epsilon$. Konačno dobivamo

$$\Delta S_t = S_{t-1}(\mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}),$$

gdje je $\epsilon \sim N(0, 1)$, standardna normalna slučajna varijabla te $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$.

Kako bismo simulirali put cijene za S, krenuti ćemo od S_t te generirati niz epsilona za $i = 1, 2, \ldots, n$ te tada postaviti

$$S_{t+1} = S_t + S_t(\mu \Delta t + \sigma \epsilon_1 \sqrt{\Delta t}). \tag{2.1}$$

Slično sada dobivamo

$$S_{t+2} = S_{t+1} + S_{t+1}(\mu \Delta t + \sigma \epsilon_2 \sqrt{\Delta t}),$$

te analogno općenito

$$S_{t+n} = S_{t+n-1} + S_{t+n-1}(\mu\Delta t + \sigma\epsilon_n \sqrt{\Delta t}).$$

Konačno, proces izračuna VaR-a koristeći Monte Carlo metodu možemo opisati u sljedećim koracima:

1. Prvi korak sastoji se od identifikacije tržišnih faktora te odabira stohastičkog procesa i pripadnih parametara.

2. Koristeći generator pseudo-slučajnih brojeva, sada generirajmo brojeve $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ pomoću kojih koristeći formulu $S_{t+1} = S_t + S_t(\mu\Delta t + \sigma\epsilon_1 \sqrt{\Delta t})$ generiramo očekivane cijene $S_{t+1}, S_{t+2}, \ldots, S_{t+n}$. Spomenuti korak ponavljamo K mnogo puta gdje je $K \geq 1000$ kako bismo generiral K scenarija.

3. Za svaki scenarij sada koristeći finalnu cijenu $S_{n+t} = S_T$ imamo hipotetsku vrijednost portfelja. Sljedeći je korak oduzeti trenutnu vrijednost portfelja od hipotetske.

4. Konačno, zadnji korak ekvivalentan je kao u povijesnoj metodi. Poredajmo povrate od najmanjeg do najvećeg te pronađimo odgovarajući kvantil.

2.7 Monte Carlo metoda - primjer

Uzmimo sada situaciju iz prethodnog primjera iz povijesne metode izračuna VaR-a. Prisjetimo se, kreirali smo portfelj koji sadrži samo dionice tvrtke Apple Inc. te da mu je trenutna tržišna vrijednost portfelja 1 milijun eura. Cilj nam je koristeći VaR izračunat pomoću Monte Carlo metode odrediti količinu novaca koji portfelj može izgubiti u sljedećem danu s razinom pouzdanosti od 99%. Zato ćemo koristiti VaR na razini značajnosti od 99% te s periodom od jednog dana.

Označimo trenutno vrijeme sa $t = 0$ te budući da nas zanima VaR s periodom od jednog dana neka je $T = 1$ (slijedi $\tau = 1$). Dakle, u ovom je slučaju za svaki scenarij potrebno generirati samo jedan pseudo-slučajni broj ϵ pomoću kojeg ćemo dobiti vrijednost portfelja S_1. Broj scenarija koje ćemo generirati je proizvoljan, no on mora biti "velik". Mi ćemo generirati $K = 10000$ scenarija.

1. Prvi korak je identifikacija tržišnih faktora. Prilikom promatrana povrata na portfelj kao što je to u ovom slučaju, jedini tržišni faktor biti će tržišna cijena dionica u portfelju, odnosno u ovom slučaju cijena dionice samo jedne kompanije. Ono što će nam biti korisno prilikom promatranje kretanja cijene dionice jest srednja stopa povrata μ te volatilnost dionice σ. Nadalje, za stohastički proces pomoću kojeg ćemo

modelirati cijene odabiremo već spomenuto generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

2. Drugi je korak generirati pseudo-slučajne brojeve ϵ_i, za $i = 1, \dots, n$. Kao što smo i spomenuli, budući da želimo predvidjeti samo cijenu na sljedeći radni dan potrebno je izračunati samo jedan pseudo-slučajan broj ϵ. Nadalje, kao početnu cijenu dionice S_0 uzimamo zadnju dostupnu cijenu iz našeg skupa podataka, $S_0 = \$191.24$ [3]. Sada je prema formuli 2.1 uz $t = 1$

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + S_0(\mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}) \\ &= S_0 + S_o(\mu + \sigma\epsilon). \end{aligned}$$

Računom[4] dobijemo $\mu \approx 0.0011248$ te $\sigma \approx 0.01372197$, konačno ϵ možemo pronaći koristeći neki generator pseudo-slučajnih brojeva kao što je naredba "rnorm" u R-u. Tako smo u ovom konkretnom slučaju dobili $\epsilon \approx 0.2216$. Konačno dobivamo

$$\begin{aligned} S_1 &= \$191,24 + \$191,24(0.0011248 + 0.01372197 \cdot 0.2216) \\ &\approx 192.04, \end{aligned}$$

odnosno, u ovom generiranom scenariju, predviđamo kako će se cijena dionce Applea drugi dan povećati s trenutnih $\$191,24$ na $\$192,04$, to jest scenarij generira profit. Sada isti posupak ponavljamo $K = 10000$ puta kako bismo dobili 10000 različitih scenarija.

3. Označimo spomenute scenarije sada s

$$\mathbb{S} = \{S_1^1, S_1^2, \dots, S_1^{10000}\},$$

gdje je $S_1^1 := S_1$, a S_1^j predstavlja j-tu predviđenu vrijednost generiranu iz j-tog psudo-slučajnog broja. Drugim riječima, svaka vrijednost S_i^j predstavlja jedan scenarij, odnosno predviđanje zaključne cijene na sljedeći radni dan. Oduzimanjem trenutne vrijednosti portfelja od hipotetske, $D_i := S_i - S_0$, za $i = 1, \dots, 10000$ dobivamo niz hipotetskih dobitaka/gubitaka

$$\mathbb{D} = \{D_1^1, D_1^2, \dots, D_1^{10000}\}.$$

[3] Uočimo da smo ovdje izabrali zadnju dostupnu cijenu iz razdoblja odabranog kao povijesno razdoblje za izračun VaR-a u povijesnoj metodi. To smo odabrali kako bi kasnije lakše usporedili dobivene rezultate iz dvije metode.

[4] R kod se nalazi ispod

4. Označimo sada s
$$\tilde{\mathbb{D}} = \{D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, \ldots, D_1^{(10000)}\}$$
uzlazno sortirani niz $\mathbb{D}$ (odnosno $\tilde{\mathbb{D}}$ je niz sortiran od najvećeg gubitka do najvećed dobitka).

   Konačno, preostalo je odrediti onaj gubitak koji je ostvaren 1 ili više posto puta kako bismo dobili VaR s traženih 99% pouzdanosti. To se najjednostavnije može odrediti koristeći postojeće funkcije u R-u kao što je funkcija quantile. Rezultat je $Q \approx -5.78944$. Dakle, gubitak u vrijednosti jedne dionce Applea koji se u 10000 scenarija desio jedan ili više posto puta jest 5.78944 eura. Nas zanima utjecaj na naš cijeli portfelj, u tu svrhu izračunajmo promijenu u vrijednosti portfelja kao
$$\Delta V = \frac{Q}{S_0} \cdot V = \frac{-5.78944}{191.24} \cdot 1000000 = -30273.17,$$
   što znaći da se vrijednost portfelja smanjila za 30273.17, što je ujedno u traženi VaR.

U R-u to izgleda ovako:

```
set.seed(123123)

podaci <- read.csv("~AAPL.csv")
close <- podaci$Close
l <- length(close)
S_0=close[l]

R <- c()
for (i in 1:l-1){
  R[i] <- (close[i+1]-close[i])/close[i]
}

mi=mean(R)
st_dev=sd(R)
K=10000
epsilon=rnorm(K,0,1)

S_1=c()
for (i in 1:K){
S_1[i]=S_0+S_0*(mi+st_dev*epsilon[i])
}
```

```
D_1=S_1-S_0
D_1


alpha=0.99
kvantil=quantile(D_1, probs=1-alpha, type=1, names = FALSE)

#hipotetska vrijednost portfelja
V=((close[l] + kvantil)/close[l])*1000000

#rezultat
delta_V=kvantil/S_0*1000000
VaR=abs(delta_V)
```

Možemo rezultate usporediti i s VaR-om izračunatim koristeći povijesnu metodu. Prisjetimo se, tamo smo dobili kako je iznos VaR-a jednak 37404.7. Možemo uočiti kako se rezultati razlikuju za relativno veliki iznos, međutim ne možemo na temelju jednog izračuna VaR-a donjeti racionalan zaključak kako je jedna metoda točnija, odnosno da bolje procjenjuje stvarni gubitak ostvaren sljedeći dan od druge.

2.8 Osvrt na Monte Carlo metodu izračuna VaR-a

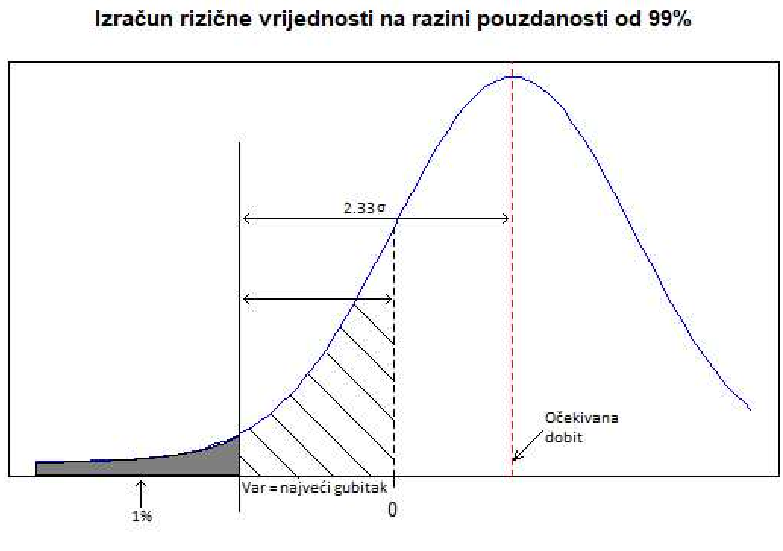
Računanje VaR-a pomoću Monte Carlo simulacija jest snažan i fleksibilan pristup. Takve simulacije mogu se prilagoditi bilo kojoj distribuciji faktora rizika kako bi uzeli u obzir i na primjer distribucije teškog repa, gdje se ekstremni događaji očekuju češće nego u normalnim distribucijama, te "skokove" ili diskontinuitete u procesima cijena.

Jedan nedostatak Monte Carlo simulacija je što analitičar mora moći dobro procijeniti distribuciju odnosno njene parametre, poput srednje vrijednosti, varijance i kovarijanca. Međutim, glavno ograničenje ovog pristupa je više praktične prirode: velika potrošnja računalnih resursa. Naime, računanje VaR-a koristeći Monte Carlo metodu za velike portfelje vrlo je spor proces. Tehnike smanjenja varijance mogu se koristiti kako bi se smanjilo vrijeme računanja, ali Monte Carlo simulacija zahtijeva značajne računalne resurse i ne može se efikasno koristiti za izračun VaR-a za vrlo velike i kompleksne portfelje.

2.9 Parametarska metoda

Konačno, zadnja metoda korištena za izračun VaR-a koju ćemo obraditi u ovom radu jest takozvana parametarska metoda, često nazivana i metodom varijance i kovarijance. Kao što i sam naziv govori, ova metoda jest parametarska, u smislu da je za njeno korištenje potrebno odrediti određene parametre distribucije povrata. Ključna ideja ove metode jest pretpostavka kako su svi faktori rizika te vrijednosti portfelja log-normlano distribuirani. Odnosno ekvivalentno, da su prirodni logaritmi povrata normalno distribuirani. Takva pretpostavka uvelike olakšava računanje VaR-a budući da je normalna distibucija u potpunosti okarakterizirana svojim prvim i drugim momentom, očekivanjem i varijancom. Ideja je provediva pod pretpostavkom da analitičar može očekivanje i varijancu distribucije povrata portfelja izračunati iz multivarijatne distribucije faktora rizika i kompozicije portfelja.

Kako bismo razumjeli parametarsku metodu, prisjetimo se kako smo definirali VaR. Općenito (nevezano za odabranu metodu) dva su ključna koraka za računanje VaR-a. Najprije, potrebno je na neki način dobiti distribuciju povrata na portfelj - kako bismo to napravili koristimo neku od obrađenih metoda kao što su povijesna, parametarska ili Monte Carlo metoda. Izračunata distribucija tada se može nacrtati u Kartezijevom sustavu kao krivulja što možemo vidjeti na slici 2.1. Ovu krivulju interpretiramo na sljedeći način: za svaki dobitak/gubitak na horizontalnoj osi, čitamo kolika je vjerojatnost da se on dogodi na vertikalnoj osi. Možemo i vidjeti ono što je intuitivno jasno: kako se približavamo očekivanom prinosu, a odmičemo od rubova distribucije, tako raste vjerojatnost određenog dobitka/gubitka. Odnosno, češće možemo očekivati manje dobitke ili gubitke od onih velikih.



Slika 2.1: Distribucija povrata te pripadni kvantil

Sljedeći korak računanja VaR-a je identifikacija zadanog percentila pronađene distribucije. Na primjer, na slici 2.1 odabran je i označen prvi percentil, tako da očitana vrijednost odgovara 99% VaR-u. VaR portfelja je sada jednostavno maksimalan gubitak uz razinu pouzdanosti od 99%. [5]

Dakle, da bismo izračunali VaR koristeći parametarsku metodu potrebno je pronaći očekivanje μ i standardnu devijaciju σ prinosa kroz neko povijesno razoblje. Jednom kada imamo te podatke, uz pretpostavku normalnosti jednostavno izračunamo VaR kao p-kvantil distribucije $N(\mu, \sigma)$.

Možemo zaključiti kako parametarska metoda koristi definiciju VaR-a kao kvantila distribucije povrata koju smo dobili pretpostavkom normalnosti te računanjem parametara, odnosno očekivanja i standardne devijacije. Kao što vidimo, ova metoda jest vrlo jednostavna za korištenje. Upravo zbog njene jednostavnosti te potrebnih pretpostavki o normalnosti, postoje određene mjere opreza koje moramo imati na umu prije korištenja ove metode, a o kojima ćemo više reći kasnije.

2.10 Parametarska metoda - primjer

Kao primjer uzmimo naš portfelj koji se sastoji isključivo od dionica Applea u vrijednosti od milijun eura. Dakle, jedini faktor rizika jest cijena dionce Apple. Neka radi lakše usporedbe i period koji koristimo za pronalazak distribucije prinosa bude također isti, odnosno razdoblje od 01.01.2022. do 31.12.2022.

Za računanje VaR-a parametarskom metodom potrebno je najprije pronaći odgovarajuće povrate. Kao i ranije to možemo napraviti kao

$$R_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_{i-1}}.$$

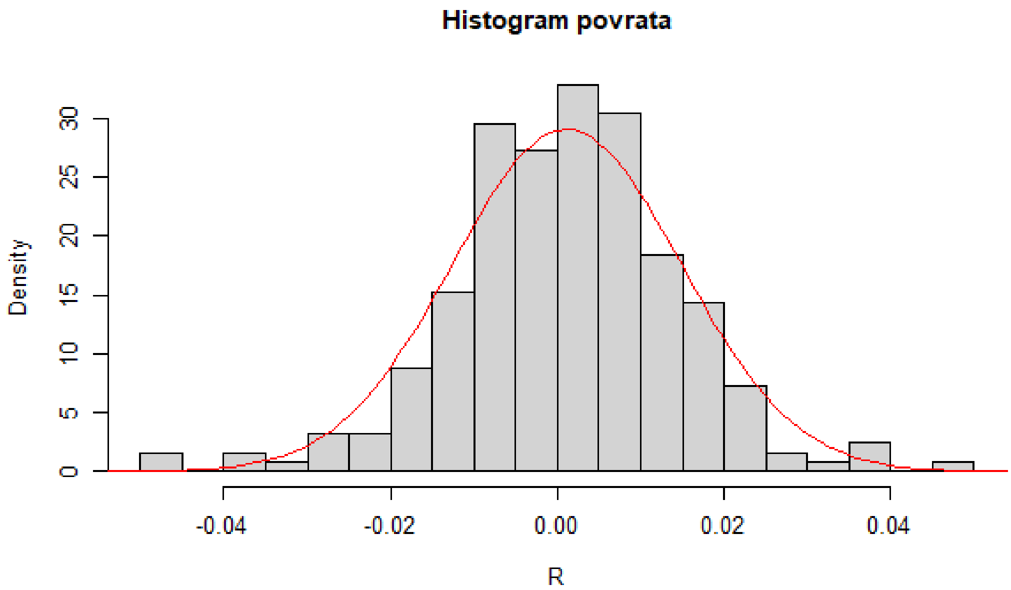
Prikazane povrate možemo prikazati pomoću histograma koji se nalazi na Slici 2.2.

Na histogramu možemo uočiti takozvan zvonoliku strukturu - jedan pokazatelj kako je moguće da podaci dolaze iz normalne distribucije. Dakle, naša pretpostavka o normalnosti povrata na prvu se zaista čini opravdanom.

Iz povrata pronalazimo srednju vrijednost povrata $\mu \approx 0.001124816$ te standardnu devijaciju $\sigma \approx 0.01372197$. Drugim riječima, u parametarskoj metodi pretpostavljamo da podaci o povratima dionice Apple dolaze iz normalne distribucije s očekivanjem μ te standardnom devijacijom σ, $R_i \sim N(\mu, \sigma)$. Na histogram sada možemo dodati crvenom bojom i funkciju gustoće normalne distribucije s parametrima μ i σ:

$$f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

[5] Prisjetimo se i kako se često definira i koristi VaR u odnosu na očekivani prinos, takozvani relativni VaR. U tom slučaju VaR se računa na analogan način, jedino se na kraju najgori scenarij za 99% razinu pouzdanosti oduzima od očekivanog prinosa.



Slika 2.2: Histogram povrata dionice Apple zajedno s funkcijom distribucije $N(\mu, \sigma)$

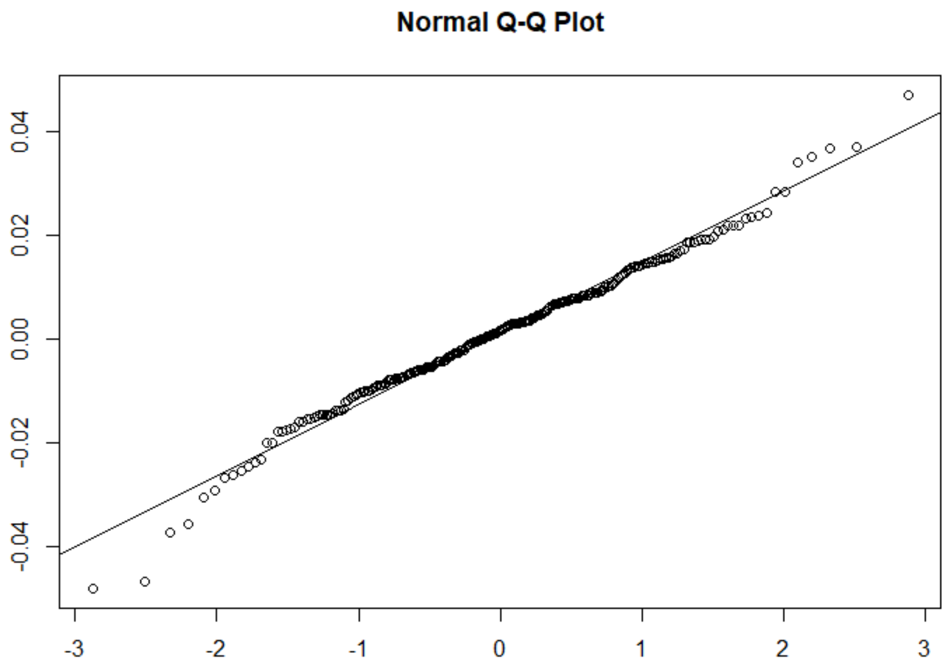
Kao što i vidimo, histogram podataka zaista prati funckiju gustoće normalne distribucije s parametrima μ i σ što nam ukazuje na normalnost podataka. Zaista, provedbom Kolmogorov-Smirnovljevog testa u R-u pozivanjem koda ”ks.test(R, ”pnorm”, mean = mean(R), sd = sd(R))”, dobivamo p-vrijednost jednaku 0.768. Možemo zaključiti da na svakoj razumnoj razini značajnosti ne odbacujemo hipotezu da podaci zaista dolaze iz normalne distribucije. Isti zakljčak možemo donjeti i vizualno, koristeći funkciju qqnorm(R) koja nam daje usporedbu uočene empirijske i normalne distribucije - rezultat koji možemo vidjeti na Slici 2.3. Budući da se podaci većinom grupiraju oko pravca s nagibom σ te sjecištem s y-osi u μ možemo zaključiti kako je pretpostavka normalnsoti opravdana.

Sada 99%-VaR izračunamo kao 0.01-kvantil pronađene normalne distribucije

$$\text{qnorm}(0.01, \mu, \sigma) \approx -0.03079727.$$

Drugim riječima, na razini pouzdanosti od 99% tvrdimo da se cijena dionice Applea neće smanjiti za više od 3.08% sljedeći radni dan. Budući da se naš portfelj sastoji isključivo od dionica Applea, također smo sigurni da se vrijednost našeg portfelja neće smanjiti za više od 3.08%. Odnosno, 99% jednodnevni VaR iznosi

$$\text{VaR} = 1000000 \cdot (0.03079727) = 30797.27.$$

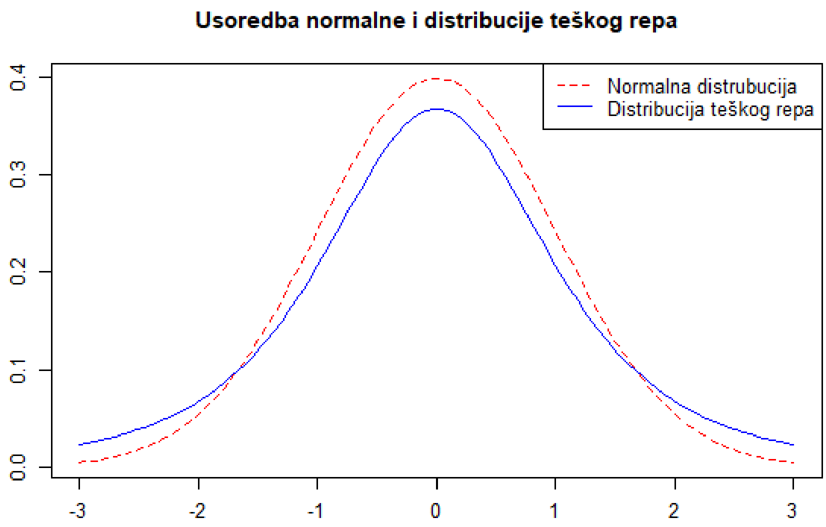


Slika 2.3: Provjera normalnosti povrata

Ponovo možemo usporediti rezultate s VaR-om izračunatim koristeći povijesnu, odnosno Monte Carlo metodu. Prisjetimo se, tamo smo dobili kako je iznos VaR-a jednak 37404.7, odnosno 30273.17. U ovom slučaju vidimo kako se rizične vrijednosti iz parametarskih metoda razlikuju za puno manje nego što je to slučaj u odnosu na neparametarsku povijesnu metodu. Zasad ćemo ove rezultate ostaviti bez komentara, a u poglavlju 2.12 dati ćemo kratki komentar.

2.11 Osvrt na parametarsku metodu

Gornja rasprava o parametarskom pristupu izračunu VaR-a postavlja jedno vrlo važno pitanje: koliko je realna, odnosno moguće opasna, naša pojednostavljena pretpostavka da su povrati normalno distribuirani? U praksi postoji mnogo dokaza koji pokazuju da mnoge distribucije povrata nisu normalno distribuirane, već su takozvane distribucije "teških/debelih repova". Pojam distribucije teških repova proizlazi iz oblika distribucije koji se može vidjeti na slici 2.4, gdje isprekidana linija predstavlja normalnu distribuciju, a puna linija distribuciju teškog (debelog) repa. U ovim distribucijama, ima više realizacija koje su daleko od srednje vrijednosti, nego što je to slučaj s normalnom distribucijom.



Slika 2.4: Distribucija teških repova i normalna distribucija

Distribucije teških repova sugeriraju da se veliki gubici događaju češće nego što bi nas normalna distribucija navodila. Posljedično, očekivali bismo da će VaR izveden iz distribucije teška repa biti veći (čak možda i značajno veći) nego onaj izveden iz normalne distribucije. Slijedi da uz pretpostavku normalnosti distribucije u izračunu VaR-a, kada kada je ona zapravo teškog repa, postoji velika vjerojatnost kako ćemo podcijeniti VaR.

Ipak, čak i ako se povrati nekog faktora rizika ne pridržavaju savršeno normalne distribucije, razumno je za očekivati da će povrati dobro diverzificiranog portfelja (portfelja podložnog mnogim različitim faktorima rizika) ipak pokazivati normalnu distribuciju. Ovaj učinak objašnjava centralni granični teorem, koji nam govori da će nezavisne slučajne varijable dobro ponašane distribucije imati srednju vrijednost koja se, u velikim uzorcima, približava normalnoj distribuciji.

U praksi, ovaj rezultat implicira da ipak možemo pretpostaviti da portfelj ima normalnu distribuciju povrata, pod uvjetom da je portfelj dovoljno dobro diverzificiran, tj. da su povrati faktora rizika dovoljno neovisni jedan o drugome (čak i kada zasebno nisu normalno distribuirani).

Međutim, potencijalni utjecaj teških repova, nediverzificiranih portfelja i koreliranih povratka faktora rizika svakako treba imati na umu prilikom korištenja ove metode.

Prednosti	**Nedostaci**
Vrlo računalno efikasna	Pretpostavka normalnosti nije uvijek istinita
Zbog centralnog graničnog teorema, metodologija se može primijeniti iako faktori rizika sami po sebi nisu normalno distribuirani, ukoliko su mnogobrojni te relativno nezavisni	Mogući problem podcjenjivanja VaR-a zbog nemogućnosti inkorporacije distribucija teških repova
	Zahtjeva procjenu volatilnosti faktora rizika te koreliranosti njihovih povrata

Tablica 2.1: Prednosti i nedostaci parametarske metode

2.12 Usporedba rezultata i metoda

U ovom smo poglavlju obradili tri metode za izračun VaR-a: povijesnu metodu, parametarsku metodu te Monte Carlo metodu.

Svaki od pristupa koje smo promatrali ima određene prednosti i ograničenja, posljedično niti jedna pojedina tehnika nije savršena, i niti jedna tehnika ne bi trebala biti viđena kao dominantna nad ostalima. Iz tog razloga važno je da svi analitičari koji se oslanjaju na VaR kako bi mjerili rizik ili stekli uvid u rizike koje institucija preuzima budu upoznati s osnovnim principima izračuna VaR-a.

U tablicama 2.1, 2.2 te 2.3 možemo vidjeti sustavno sažimanje prednosti i nedostataka pojedinog pristupa. Uz informacije sadržane u ovoj cjelini, mogu se koristiti kako bi se postavila pitanja o tome kako je određeni VaR broj izračunat.

Konačno, rezultate naših primjera već smo kratko komentirali, no donesimo zaključke te objasnimo potencijalne razloge. Prilikom računanja VaR-a potrebno je najprije odabrati odgovarajuće povijesno razdoblje. Upravo iz tog razdoblja ili direktno računamo VaR ako koristimo povijesnu metodu, ili u slučaju parametarskih metoda računamo potrebne parametre. Dakle, ako pogledamo očekivanje i standardnu devijaciju koje smo koristili u parametarskim metodama možemo zaključiti kako su njihove vrijednosti jednake u obje metode. To naravno proizlazi iz razloga što smo ih računali na istom povijesnom razdoblju.

Iz rezultata moguće je brzopleto zaključiti kako su očito parametarske metode točnije, jer su ipak njihove vrijednosti VaR-a tako blizu u usporedbi s vrijednosti povijesnog VaR-a. No sada, na kraju diskusije o VaR-u, jasno je kako niti jedna metoda nije lošija od drugih, a da su rezultati iz parametarske te Monte Carlo metode slični upravo zbog istih parametara. Imajući na umu raspravu o distribucijama teških repova, također je moguće da naše parametarske metode podcjenjuju VaR - sjetimo se, u povijesnom VaR-u već su

Prednosti	Nedostaci
Nema potrebe za pretpostavkama o distribuciji faktora rizika Bez procjena volatilnosti i korelacija - implicitno su sadržani u dnevnim realizacijama faktora rizika Veliki gubici (iz repa distribucije) uračunati su ukoliko se odabere odgovarajuće povijesno razdoblje	U potpunosti ovisi o odabranom povijesnom skupu podataka pa ekstremni događaji ili su izostavljeni ili u velikoj mjeri utječu na rezultate Za što precizniji VaR postoji potreba za velikim skupom podataka Ukoliko portfelj sadrži kompleksne instrumente (različite kombinacije dionica te opcija) nije računalno najefikasnija metoda

Tablica 2.2: Prednosti i nedostaci povijesne metode

Prednosti	Nedostaci
Lako se prilagodi bilo kojoj distribuciji faktora rizika Ne ovisi o kompleksnosti portfelja Pronalazak velikog broja različitih scenarija	Ne uzima u obzir odstupanja (eng. *outliers*) Računalno vrlo intenzivna metoda

Tablica 2.3: Prednosti i nedostaci Monte Carlo metode

odraženi svi ekstremni događaji iz povijesnog razdoblja.

2.13 Zaključak o VaR-u

Prije svega, kada koristimo VaR kao indikator moramo zapamtiti da on nije ”čarobna tehnika” za mjerenje i upravljanje rizikom. U pravim rukama, tehnike VaR-a pomažu nam da dobijemo racionalan i usporediv prikaz rizika određene pozicije ili portfelja. Ali njihova pouzdanost kao alat za donošenje odluka ovisi o vještini i iskustvu analitičara, prirodi problema koji se istražuje, i sposobnosti donositelja odluka da postavljaju inteligentna pitanja o značenju i podrijetlu rezultata.

S obzirom na različite metodologije koje se mogu primijeniti za izračun VaR-a i mnoge različite načine na koje rezultati mogu biti upotrijebljeni, postavlja se pitanje kako se VaR koristi u praksi od strane financijskih institucija te pojedinačnih investitora? Što se metodologije tiče, u praksi banke koriste sva tri pristupa. Međutim, pristup povijesne simulacije je daleko najpopularniji. Na čitatelju je pak odluka o odabiru metode, imajući na umu navedene prednosti i nedostatke svake metode.

Poglavlje 3

Portfelj minimalne varijance i upravljanje rizikom - primjer

3.1 Uvod

U prvoj smo se cjelini ovoga rada bavili problemom odabira optimalnog portfelja. Konkretno, za optimalne portfelje smatrali smo one koji su prema Markowitzevoj definiciji efikasni. Specijalan slučaj efikasnog portfelja jest portfelj minimalne varijance. Intuitivno, portfelj minimalne varijance jest također efikasan portfelj. Naime, budući da je prema definiciji portfelj minimalne varijance portfelj koji je najmanje rizičan (u usporedbi sa svim ostalim portfeljima koji se sastoje od istih imovina) slijedi da ne možemo pronaći drugi portfelj koji uz isti prinos ima manju varijancu/rizičnost.

U drugoj smo cjelini pak uveli pojam mjere rizika (VaR) te smo pokazali kako koristeći VaR analitičari mogu pratiti kako se kreće rizičnost njihova portfelja u vremenu.

Brojne strategije investiranja baziraju se na pronalasku portfelja minimalne varijance unutar određenih uvjeta (kao što je na primjer odabir dostupnih dionica). U ovoj cjelini baviti ćemo se upravo problemom pronalaska portfelja minimalne varijance te pronalaska vrijednosti VaR-a za isti portfelj. Za razliku od prethodnih cjelina, ovdje će naglasak biti na stvarnoj primjeni optimiziranja portfelja te računanju VaR-a. Kao što ćemo i vidjeti u nastavku, proces pronalaska portfelja minimalne varijance mnogo je jednostavniji koristeći moderne alate kao što su R ili Excel, a isto vrijedi i za računanje rizične vrijednosti.

3.2 Primjer - portfelj minimalne varijance

Naš portfelj sastojat će se od tri dionice pa je u skladu s time, prvi korak odabir tri kompanije u čije dionice želimo uložiti. Odabrati ćemo dionice Amazona (AMZN), Tesle (TSLA) i firme Alphabet (GOOG). Odabir ovih dionica je naravno proizvoljan te na analogan način možemo pronaći portfelj minimalne varijance za proizvoljno mnogo različitih imovina.

Pronađimo najprije portfelj minimalne varijance koristeći alat Excel. Prisjetimo se kako smo u prvoj cjelini slovom ω_j označavali udjele odnosno težine imovine I_j u ukupnoj investiciji, odnosno cijelom portfelju, I. Istih ćemo se oznaka pridržavati i dalje, pa će tako ω_1, ω_2 i ω_3 biti udjeli investicija u dionice Amazona, Tesle i Alphabeta (Google), respektivno. Nadalje, prisjetimo se kako su osnovni parametri potrebni za pronalazak optimalnog portfelja očekivani povrat te volatilnost, odnosno kovarijacija između različitih imovina. U tu svrhu sa

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix},$$

označavamo vektor očekivanih povrata, dok matricu kovarijacije označavamo sa

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

gdje je $\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ kovarijacija između povrata dvije dionice gdje je $i \neq j$ te σ_j standardna devijacija prinosa R_j za $j = 1, 2, 3$.

Zanimati će nas očekivani povrat našeg portfelja. U skladu s definicijom iz prve cjeline, očekivani povrat portfelja I koji se sastoji od dionica I_j s udjelima ω_j za $j = 1, 2, 3$ može se pronaći kao

$$\mu = \mu' W = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \mu_j.$$

Prisjetimo se i kako smo varijancu portfelja definirali kao

$$V = W' C W = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Uvjet koji portfelj minimalne varijance mora zadovoljavati jest da su za odabrane dionice udjeli $\omega* = (\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)$ takvi da je ukupna varijanca portfelja V minimalna. To možemo tražiti kao

$$\min V = (\omega^*)' C \omega^*,$$

pritom podrazumijevamo da za svaki $j = 1, 2, 3$ vrijedi $0 \leq \omega_j \leq 1$ te $\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^* = 1$.

Prvi korak je odabrati povijesno razdoblje iz kojeg ćemo računati sve potrebne parametre za pronalazak portfelja minimalne varijance. Ponovo, odabir povijesnog razdoblja jest proizvoljan, a mi ćemo za odabrano razdoblje uzeti cijelu 2023. godinu. Sljedeći je korak koristeći javno dostupne informacije, kao što je na primjer servis Yahoo Finance, dohvatiti podatke o finalnim cijenama odabranih dionica na svaki radni dan iz povijesnog razdoblja. Napomenimo kako smo izabrali gledati cijene na svaki radni dan pa će zato očekivani povrati zapravo biti očekivani dnevni povrati, dok će volatilnost biti izražena kao standardna devijacija na dnevnoj razini.

Prikaz podataka može se vidjeti na Slici 3.1 ispod. Možemo uočiti kako su sve odabrane kompanije vrlo dobro poslovale u promatranom razdoblju pa je za očekivati relativno veliki očekivani dnevni povrat.

Datum	AMZN	TSLA	GOOG
03.01.2023	85,82	108,10	89,70
04.01.2023	85,14	113,64	88,71
05.01.2023	83,12	110,34	86,77
...			
27.12.2023	153,34	261,44	141,44
28.12.2023	153,38	253,18	141,28
29.12.2023	151,94	248,48	140,93

Slika 3.1: Dnevna kretanja cijena dionica

Najprije, pronađimo očekivane povrate i varijance za zasebne imovine. Primjenjujući funkcije AVERAGE te STDEV.P na povrate u Excelu možemo jednostavno dobiti kako su očekivani povrati te standardne devijance sljedeći:

Parametri	AMZN	TSLA	GOOG
Očekivani povrat	0,25%	0,39%	0,20%
Standardna devijacija	2,08%	3,31%	1,92%

Slika 3.2: Povrati i standardne devijacije

Sljedeći korak je pronalazak matrice kovarijacije C. Ona se može izračunati na nekoliko načina, na primjer koristeći funkciju COVARIANCE, međutim vjerojatno najjednostavniji način jest upotrijebiti "Data Analysis" alat u Excelu. Zatim koristeći opciju "Covariance" te odabirom tablice podataka odmah dobivamo da je matrica kovarijacije

$$C = \begin{bmatrix} 0.000431104 & 0.000256334 & 0.000244584 \\ 0.000256334 & 0.00109554 & 0.000216629 \\ 0.000244584 & 0.000216629 & 0.000370351 \end{bmatrix}.$$

Sljedeći je korak minimiziranje varijance, odnosno tražimo minimum izraza

$$V = \begin{bmatrix} \omega_1^* & \omega_2^* & \omega_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000431104 & 0.000256334 & 0.000244584 \\ 0.000256334 & 0.00109554 & 0.000216629 \\ 0.000244584 & 0.000216629 & 0.000370351 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix}$$

Konkretno, želimo pronaći vrijednosti ω_j^* za koje je vrijednost gornjeg izraza najmanja. Kako bismo to izračunali ponovno ćemo se poslužiti jednim Exceleovim alatom - "Solver". Najprije postavimo zadana ograničenja. Prisjetimo se kako smo definirali $0 \leq \omega_j \leq 1$ te $\omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^* = 1$. Dakle, udjeli u kompanijama mogu biti između 0% te 100%. Koristeći alat Solver, minimiziramo polje koje označava varijancu portfelja, a koje je dobiveno iz gornje formule, a Solver nam zatim izbacuje sljedeće udjele:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.354 \\ 0.092 \\ 0.554 \end{bmatrix}.$$

Možemo zaključiti kako portfelj minimalne varijance sadrži udio od 35.4% dionica Amazona, 9.2% dionica Tesle te 55.4% dionica Alphabeta. Nadalje, iz prethodne formule za varijancu sada supstitucijom pronađenih vrijednosti možemo dobiti i vrijednost varijance portfelja minimalne varijance:

$$V_{min} = \begin{bmatrix} 0.354 & 0.092 & 0.554 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.000431104 & 0.000256334 & 0.000244584 \\ 0.000256334 & 0.00109554 & 0.000216629 \\ 0.000244584 & 0.000216629 & 0.000370351 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.354 \\ 0.092 \\ 0.554 \end{bmatrix} \approx 0.000312$$

Dakle, možemo zaključiti kako je varijanca našeg portfelja približno jednaka 0.0312%, odnosno standardna devijacija jest $\sigma = \sqrt{V} \approx 1.765\%$. Lako dobivamo i očekivani povrat za portfelj pomoću težina te individualnih očekivanih povrata kao

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{j=1}^{3} \omega_j \mu_j \\ &= 0.354 \cdot 0.25\% + 0.092 \cdot 0.39\% + 0.554 \cdot 0.2\% \\ &\approx 0.24\%. \end{aligned}$$

U usporedbi s očekivanim dnevnim povratima na same dionice možemo uočiti kako portfelj minimalne varijance ima veći očekivani dnevni povrat jedino od dionice GOOG, dok je dionica AMZN malo iznad, a dionica TSLA ima nezanemarivo veći očekivani povrat. Međutim, sama rizičnost našeg portfelja ipak je najmanja budući da je standardna devijacija jednaka 1.765%.

Možemo zaključiti kako smo kombiniranjem različitih dionica dobili portfelj koji ima najmanju rizičnost u odnosu na rizičnost dionica zasebno dok je očekivani dnevni povrat u rangu drugog najvećeg povrata. Time smo zaista pokazali Markowitzevu tezu diverzifikacije na našem primjeru.

Pretpostavimo sada da imamo na raspolaganju milijun dolara, budući da je vrijednost dionica izražena u dolarima. Nadalje, pretpostavimo kako je cijena po kojoj kupujemo upravo zadnja dostupna cijena iz promatranog povijesnog razdoblja, odnosno $AMZN$ = 151.94, $TSLA$ = 248.48 te $GOOG$ = 140.93. Iz dobivenih težina slijedi kako je iznos dostupan za investiranje u $AMZN$ jednak \$354000, u $TSLA$ \$92000 te u $GOOG$ \$554000. Budući da želimo maksimizirati naše ulaganje, želimo kupiti najveći mogući broj dionica svake kompanije unutar našeg budžeta. Dijeljenjem s cijenama dionica dobivamo kako ćemo kupiti 2329 dionica Amazona, 370 dionica Tesle te 3931 dionicu Alphabeta. Točni iznosi uloženi u pojedinačne kompanije tada su jednaki \$353868.26 za Amazon, \$91937.60 za Teslu te \$553995.83 za Alphabet.

	AMZN	TSLA	GOOG
Cijena dionice	$ 151,94	$ 248,48	$ 140,93
Raspoloživi iznos	$ 354.000,00	$ 92.000,00	$ 554.000,00
Kupljena količina	2.329	370	3.931
Iskorišteni iznos	$ 353.868,26	$ 91.937,60	$ 553.995,83
Portfelj			$ 999.801,69

Slika 3.3: Portfelj minimalne varijance

3.3 Primjer - računanje VaR-a

Jednom kada smo pronašli portfelj minimalne varijance sljedeći razumni korak jest izračunati njegovu rizičnost u apsolutnim vrijednostima. Do sada smo zaključili kako je portfelj minimalne varijance, kao što mu i naziv nalaže, najmanje rizičan portfelj te smo izračunali njegovu varijancu, odnosno standardnu devijaciju. Izračunajmo sada VaR kako bismo dobili nominalni prikaz dnevnih oscilacija našeg portfelja.

Računati ćemo jednodnevni VaR na razini pouzdanosti od 99%. Kao povijesno razdoblja možemo odabrati cijelu 2023. godinu budući da za to razdoblje već imamo informacije o kretanju cijena naših dionica. Za metodu izračuna VaR-a koristit ćemo povijesnu metodu budući da se ona najčešće koristi u praksi te zbog relativno jednostavnog portfelja.

Prvi je korak izračunati dnevne povrate za svaku dionicu. Prema definiciji, povrat na j-ti dan računamo kao

$$R_j = \frac{P_j - P_{j-1}}{P_{j-1}}.$$

Datum	AMZN	TSLA	GOOG
04.01.2023	-0,0079236	0,05124885	-0,0110368
05.01.2023	-0,0237256	-0,0290391	-0,021869
06.01.2023	0,0356112	0,0246511	0,01601944
...			
27.12.2023	-0,0004563	0,0188224	-0,0096625
28.12.2023	0,0002609	-0,0315943	-0,0011312
29.12.2023	-0,0093885	-0,0185639	-0,0024774

Slika 3.4: Povrati za portfelj minimalne varijance

Kada smo izračunali povrate, potrebno je izračunati i scenarije - jedan scenarij predstavlja promjenu u vrijednosti investicije tijekom jednog dana. Zato množimo inicijalni iznos uložen u svaku dionicu s izračunatim povratima za svaki dan. U zadnjem stupcu zbrojimo scenarije za svaku dionicu kako bismo dobili scenarij za cijeli portfelj. Tako na primjer, povrat portfelja s 03.01.2023 na 04.01.2023. iznosi $\$ - 4206.53$.

Date	AMZN	TSLA	GOOG	Portfelj
04.01.2023	-2.803,90	4.711,70	-6.114,32	-4.206,53
05.01.2023	-8.395,73	-2.669,78	-12.115,35	-23.180,87
06.01.2023	12.601,66	2.266,36	8.874,70	23.742,72
...				
27.12.2023	-161,49	1.730,49	-5.353,01	-3.784,01
28.12.2023	92,33	-2.904,70	-626,70	-3.439,08
29.12.2023	-3.322,28	-1.706,72	-1.372,47	-6.401,46

Slika 3.5: Generirani scenariji

Konačno, kako bismo izračunali VaR potrebno je sortirati scenarije za cijeli portfelj uzlazno. Time dobivamo niz povrata, od najmanjeg (odnosno najvećeg gubitka) do najvećeg. Sada jednostavno, na primjer pomoću funkcije *qunatile* u R-u dobivamo kako je 0.01-kvantil $\$ - 46272.91$, odnosno iznos VaR-a je $\$46272.91$.

Na samom uvodu u optimizaciju portfelja spomenuli smo kako su investitori prije Markowitzeve moderne teorije portfelja željeli maksimizirati prinose obraćajući malo pažnje na upravljanje rizicima. Kako bismo lakše prepoznali utjecaj Markowitzeve teorije diverzifikacije pretpostavimo sada da smo umjesto portfelja minimalne varijance željeli jednostavno maksimizirati povrat na investiciju. U tu svrhu pogledajmo Sliku 3.2 na kojoj možemo vidjeti kako je dionica Tesle imala daleko najveće očekivane dnevne povrate. Dakle, želimo li maksimizirati očekivane povrate, možemo probati strategiju ulaganja cijelog dostupnog iznosa od milijun dolara u dionice Tesle. Pojednostavimo situaciju pa pretpostavimo kako je moguće kupiti i samo dio dionice, na taj način smo osigurali kako je ukupni uloženi iznos jednak upravo milijun dolara.

Na istim podacima kao i za portfelj minimalne varijance, pogledajmo sada kako bi izgledao VaR za portfelj koji se sastoji isključivo od dionica Tesle. Dakle, potrebno je jednostavno već izračunate povrate na dionicu Tesle sortirati uzlazno te na isti način pronaći 0.01-kvantil koji iznosi $\$ - 93003.10$. Dakle, iznos VaR-a je \$93003.10 pa iako su nam očekivani povrati veći nego povrati na portfelj minimalne varijance, rizičnost je višestruko povećana. Naravno, to ne znači da je portfelj minimalne varijance "bolji" od ovoga ili pak nekog drugog proizvoljnog portfelja. Odabir portfelja ovisi o ambicijama investitora te volji za prihvaćanje rizika, no potrebno je imati na umu kako veći prinosi najčešće impliciraju i veću volatilnost.

Bibliografija

[1] Crouhy, M., D. Galai i R. Mark: *The Essentials of Risk Management, Second Edition*. Econometric Research and Special Studies Department, 2013.

[2] Franušić, Z. i J. Šiftar: *Linearna algebra*. Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2022.

[3] Linsmeier, T. J. i N.D. Pearson: *Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*. 1996.

[4] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II, (2), 1968.

[5] Mehta, A., M. Neukirchen, S. Pfetsch i T. Poppensieker: *Managing market risk: Today and tomorrow*. McKinsey Company, 2012.

[6] Sandrić, N. i Z. Vondraček: *Vjerojatnost - skripta predavanja*. 2019.

[7] Van den Goorbergh, R.W.J. i P.J.G. Vlaar: *Value-at-Risk Analysis of Stock Returns: Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?* Econometric Research and Special Studies Department, 1999.

[8] Vince, R.: *The Handbook of Portfolio Mathematics: Formulas for Optimal Allocation Leverage*. 2007.

[9] Wagner, V.: *Financijsko modeliranje 2 - materijali s predavanja*. 2023.

Sažetak

Cilj ovog rada bio je predstaviti te pojasniti dvije bitne strane investiranja - najprije odabir portfelja te zatim kontrolu rizika povezanih s investiranjem. U svrhu optimizacije portfelja predstavili smo optimizaciju portfelja kako ju je zamislio Markowitz u svojoj modernoj teoriji portfelja, raspravljali smo o svrsi diverzifikacije te smo uveli pojam efikasne granice te s njom povezanih efikasnih portfelja. Radi jasnijeg razumijevanja mjere rizika, tzv. rizične vrijednosti (eng. *Value-at-Risk*), pokazali smo nekoliko načina za njen izračun (povijesna metoda, parametarska metoda te metoda Monte Carlo simulacija) te komentirali prednosti i nedostatke svakog načina. Na kraju, kako bi se odmaknuli od teorijskog pogleda, prikazali smo primjerom kako se može izračunati portfelj minimalne varijance te smo na njemu izračunali VaR koristeći povijesnu metodu.

Summary

The aim of this paper was to present and clarify two important aspects of investing - firstly, the concept of portfolio selection, and then the control of investment-related risks. For the purpose of portfolio optimization, we introduced portfolio optimization as envisioned by Markowitz in his Modern Portfolio Theory, furthermore, we discussed the purpose of diversification and introduced the concept of the efficient frontier and with it related efficient portfolios. In order to better understand the risk measure Value-at-Risk, we presented several methods for its calculation (historical method, parametric method and Monte Carlo simulation method) and commented on the advantages and disadvantages of each method. Finally, to step away from the theoretical view, we constructed an example of the process to calculate the minimum-variance portfolio and calculated the Value-at-Risk metric on it by implementing the historical method.

Životopis

Rođen sam 8. kolovoza 1998. godine u Varaždinu. Osnovnoškolsko obrazovanje završavam u Drugoj osnovnoj školi u Varaždinu te potom upisujem opći gimnazijski smjer na Prvoj gimnaziji Varaždin. Nakon mature upisao sam nastavnički smjer matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu da bih nakon uspješno završenog preddiplomskog studija odlučio nastaviti školovanje na istraživačkom smjeru financijske i poslovne matematike PMF-a. Tijekom studija zapošljavam se u sektoru upravljanja rizicima, najprije u Privrednoj banci Zagreb u tržišnim i financijskim rizicima, a kasnije u Raiffeisen banci u odjelu validacije modela.