Razvoj algebarskog mišljenja u osnovnoj i srednjoj školi: algebarski izrazi i identiteti

Kujundžić, Matija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matija Kujundžić

RAZVOJ ALGEBARSKOG MIŠLJENJA U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI- ALGEBARSKI IZRAZI I IDENTITETI

Diplomski rad

Voditeljica rada:

Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, veljača 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1.______________________________, predsjednik

2.______________________________, član

3.______________________________, član

Povjerenstvo je red ocijenio ocjenom _________________.

Potpis članova povjerenstva:

1.______________________________________

2.______________________________________

3.______________________________________

Zahvaljujem mentorici prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji na svim savjetima kojima me je usmjeravala tokom izrade ovog rada, ali i tijekom studija.

Veliko hvala mojoj obitelji i prijateljima na bezuvjetnoj podršci i nepresušnoj motivaciji.

Posebna zahvala Petru Mikuliću na potpori tijekom svih uspona i padova tokom cijelog studija.

Sadržaj

1 Uvod

U riječima poznatog matematičara Paula Halmosa (1916.-2006.) možemo pronaći inspiraciju za ovaj rad. „Najbolji način učenja je raditi, a najgori način poučavanja je pričati." U ovoj rečenici ističe se važnost aktivnog učenja koje učenicima nudi iskustvo na temelju kojeg uče te ujedno kritizira pristup poučavanja koji se temelji isključivo na nastavnikovoj verbalnoj komunikaciji bez pružanja prilika učenicima da aktivno sudjeluju u učenju i primjenjuju stečeno znanje. Ova ideja je u skladu s ovim radom u kojem će te se susresti s nizom aktivnosti kojima učenici otkrivaju osnovne algebarske koncepta te razvijaju algebarskog mišljenja.

Domena Algebra i funkcije jedno je od pet širokih sadržajnih područja kurikuluma predmeta Matematika za osnovnu i srednje škole u Hrvatskoj. U njemu se algebra interpretira kao jezik za opisivanje pravilnosti u kojemu slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije, a varijable se koriste pri rješavanju matematičkih problema. Stoga je razvoj algebarskog mišljenja kod učenika jedan od važnijih ciljeva nastave matematike. Ono uključuje generalizacije s polazištem u aritmetici i uzorcima iz svih područja matematike, smislenu upotrebu simbola, proučavanje strukture u brojevnim sustavima, proučavanje uzoraka i funkcija, kao i proces matematičkog modeliranja koje povezuje sve prethodno navedeno. U suvremenom matematičkom obrazovanju posebna bi se pažnja trebala posvećivati razvoju algebarskog mišljenja kod učenika jer je ono ključan element matematičke pismenosti. Nadaje, ono je važno u matematičkom razvoju učenika jer im omogućava apstraktno razmišljanje, rješavanje problema te primjenu matematike u različitim kontekstima. U ovom radu opisano je algebarsko mišljenje te metode kojima se ono razvija kod učenika s fokusom na ključne elemente, modele i učila koja pridonose razvoju.

Poglavlje 2, *Algebarsko mišljenje i njegov razvoj kod učenika* opisuje sam koncept algebarskog mišljenja te njegove aspekte: generalizacija iz aritmetike i uzoraka, korištenje simbola, proučavanje strukture brojevnih sustava te proces matematičkog modeliranja. Nadalje, razmatraju se elementi algebarskog mišljenja ključni za pravilno razumijevanje algebarskih izraza, što uključuje znak jednakosti, nepoznanice i varijable, algebarske izraze te algebarske identitete. U poglavlju 3, kao što naslov govori, analizira se hrvatski kurikulum predmeta Matematika kako bismo dobili uvid kako se algebarsko mišljenje razvija unutar obrazovnog sustava, te analiziramo kontinuiranost kurikuluma. U poglavlju 4, *Aktivnosti koje pridonose razvoju algebarskog mišljenja* prikazane su aktivnosti koje su posebno usmjere na poticanje razvoja algebarskog mišljenja od početka školovanja, a to su aktivnosti usmjerene na razvoj koncepta jednakosti te koncepta varijable. Poglavlje 5, *Algebarski izrazi* sadrži aktivnosti koje se fokusiraju na probleme koju učenici susreću prilikom usvajanja algebarskih izraze, kao i aktivnosti otkrivanja algebarskih izraza te računanja s algebarskim izrazima. U aktivnostima se koristi model novca kao i model površine i volumena te vrijedno učilo-algebarske pločice. Poglavlje također sadrži aktivnosti namijenjene učeničkom samostalnom otkrivanju osnovnih algebarskih identiteta koje pridonose njihovom boljem razumijevanju. Slike unutar aktivnosti su izrađene u programu GeoGebra[1].

[1] https://www.geogebra.org/classic

2 Algebarsko mišljenje i njegov razvoj kod učenika

Algebra je grana matematike koja korištenjem simbola i jednadžbi predstavlja vezu između brojeva i matematičkih objekata. Algebarsko mišljenje i njegov razvoj je važan dio učeničkog obrazovanja. Razvojem algebarskog mišljenja učenici razvijaju razumijevanje za rješavanje problema, logičko razmišljanje te stvaraju veze između različitih matematičkih koncepata.

2.1 Algebarsko mišljenje

Prema Van de Walle, Karp i Bay-Williams (2007.) ne možemo eksplicitno definirati algebarsko mišljenje jer ono nije pojam koji obuhvaća samo jednu ideju već se sastoji od razumijevanja simboličkog formalnog jezika i različitih vrsta mišljenja. Algebarsko mišljenje možemo opisati kao način razmišljanja koje pomaže učenicima pri razumijevanju i rješavanju matematičkih problema, a uključuje prepoznavanje i analiziranje uzoraka, odnosa i struktura unutar matematike.

Možemo opisati pet aspekata algebarskog mišljenja:

- generalizacija iz aritmetike i uzoraka
- korištenje simbola
- proučavanje strukture brojevnih sustava
- proučavanje pravilnosti i funkcija
- proces matematičkog modeliranja.

Prema tome algebarsko mišljenje je sastavljeno od različitih vrsta mišljenja, iako algebra u kurikulumu stoji kao posebna domena, algebarsko mišljenje treba primjenjivati u svim granama matematike.

2.1.1 Generalizacija iz aritmetike i uzoraka

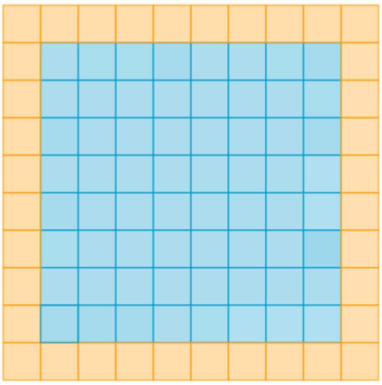
Generalizacija je najosnovniji i najvažniji oblik matematičkog mišljenja. To je proces koji dopušta učenicima da gledaju dalje od posebnosti matematičke situacije. Algebra se često smatra „generaliziranom aritmetikom" zbog toga što se slova koriste kao oznaka koja predstavlja brojeve u izrazima. Gledati na algebru samo kao na generaliziranu aritmetiku može biti zavaravajuće. Primjer toga je navođenje učenika da analogno manipuliraju algebarskim izrazima kao što bi rješavali jednadžbu. Jedna od najčešćih pogrešaka koja posljedica takvog pristupa jest dijeljenje algebarskog izraza varijablom, jer je učenici poistovjećuju s brojem te ne vode računa o tome koje sve brojeve varijabla može predstavljati. Zbog toga učenicima nije dovoljno reći što je varijabla već im je potrebno omogućiti dovoljno prilika da razviju naviku generaliziranja. (Driscoll 1999.). Proces generaliziranja iz aritmetike počinje već u vrtićkoj dobi i nastavlja se tijekom cijelog školovanja dok učenici uče o svim aspektima brojeva i računskih operacija. Primjer koji možemo zadati učenicima već u prvom razredu osnovne škole kako bi razvili naviku generaliziranja iz aritmetike jest sljedeći:

Ana i Maja su kupile 7 jabuka. Svaka imaju svoju vrećicu te trebaju raspodijeliti jabuke u njih. Kako to mogu napraviti?

Rješavanjem ovog problema učenici pronalaze različite načine za rastav broja 7 na pribrojnike, ali i uočavaju neke karakteristike koje mogu generalizirat poput zaključka da ako u jednoj vrećici povećamo broj jabuka za 1, u drugoj vrećici se broj jabuka smanji za 1. Još jedan skriveni zadatak za učenike je odrediti kada su pronašli sva rješenja. Učenici najčešće zaborave na broj 0, odnosno da sve jabuke mogu biti u jednoj vrećici. Učenici koji dođu do zaključka da za svaki broj od 0 do 7 postoji jedno rješenje su pronašli generalizaciju rješenja koja ne ovisi o broju jabuka ni o načinu njihove raspodjele te taj zaključak mogu primijeniti na bilo koji broj jabuka zadan u zadatku.

Postoje razne vrste generalizacija prilikom razvoja algebarskog mišljenja, ali najvažnija je generalizacija kroz istraživanje pravilnosti u uzorcima koja se proteže na sve razine školovanja. Najraniji primjer toga u osnovnog školi je promatranje niza parnih odnosno neparnih brojeva te u višim razredima osnovne škole izrazi s varijablama koje se koriste kao sredstvo opisivanja uzoraka i izražavanje generalizacije. Jedan zadatak koji možemo pronaći u Van de Walle (2007.) je problem granice.

Na koliko različitih načina možete prebrojati koliko ima pločica koje obrubljuju bazen dimenzija 8×8 bez da brojite jednu po jednu?



Učenici mogu pronaći mnogo načina kako bi mogli odgovoriti na pitanje, a nastavnikov zadatak je saslušati svaku ideju i pomoći učenicima da ju prošire te da pronađu odgovor neovisan o dimenzijama bazena, odnosno da generaliziraju. Jedno od rješenja je uočiti kako se 10 pločica nalazi na vrhu i dnu bazena, a 8 sa strane što učenici zapisuju kao

$10 + 10 + 8 + 8 = 36$ ili $2 \cdot 10 + 2 \cdot 8 = 36$. Na sličan način učenicu mogu uočiti da se sa svake strane bazena nalazi 8 pločica te da se 4 nalaze u krajevima obruba bazena što pišu kao $4 \cdot 8 + 4 = 36$. Učenici koji se fokusiraju na cijelu sliku mogu uočiti da je ukupno 100 pločica koje uključuju i bazen i obrub, a kako je bazen dimenzija 8×8 njega popločavaju 64 pločice pa je rješenje $100 - 64 = 36$. Postoji još različitih rješenja, ali za svako rješenje učenici moraju obrazložiti kako se članovi izraza odnose na fizički prikaz. Kako bi učenici došli do generaliziranog rješenja za bazen dimenzija $n \times$ n problem mogu promatrati postepeno počevši od kvadrata dimenzija 5×5 pa 6×6 zatim 7×7 dok ne uoče pravilnosti koje im omogućuju pronalazak broja pločica koje obrubljuju kvadrat dimenzija $n \times$ n. Neka od rješenja su $4 \cdot (n + 1),\ 2 \cdot (n + 2) + 2n,\ (n + 2)^2 - n^2$.

2.1.2 Korištenje simbola

U algebri simboli imaju ključnu ulogu u predstavljanju matematički operacija, veza i entiteta. Koriste se za označavanje brojeva, varijabli, operacija i drugih matematičke pojmova. Prema Van de Walle (2007.) jedan od razloga zašto učenici nisu uspješni u algebri je možda taj što nemaju dobro razumijevanje što predstavljaju simboli koje koriste. Za mnoge odrasle osobe algebra budi sjećanje na rješavanje kompliciranih jednadžbi čiji je cilj pronaći *x*. Manipulacija simbolima je često lišena razumijevanja te je rezultat toga mržnja prema matematici. Zbog toga je algebra često predmet ismijavanja te su algebarski zadaci često predmet rasprave na društvenim mrežama. U stvarnosti simboli predstavljaju stvarne događaje i trebali bismo ih gledati kao koristan alat pri rješavanju problema i pomoć pri donošenju odluka. Npr. ako želimo izračunati koliko proizvoda trebamo prodati ako želimo zaraditi *x* količinu novca. Učenici često ne razumiju takva pitanja bez potrebnog razumijevanja konteksta u kojem se simboli koriste.

U kontekstu algebarskog mišljenje simbole možemo podijeliti u nekoliko kategorija.

- Simboli koji predstavljaju količine, varijable. Varijable su simboli koji predstavljaju količine koje mogu varirati ili su jedinstvene numeričke vrijednosti. Označuju se slovima *a, b, c, x, y, z*… U algebri postoji nepisano pravilo da se slova s početka abecede koriste za označavanje varijabli, dok se slova s kraja abecede koriste za označavanje nepoznanica. Nepoznanicama u školstvu zovemo varijable koje predstavljaju jedinstvene numeričke vrijednosti.

- Znakovi koji se u algebri koriste za označavanje računskih operacija $+, -, \cdot, :$ kao i znakovi koji označavaju odnose $=, <, >, \leq, \geq$. Na višim razinama školovanja učenici se upoznaju sa simbolima koji označavaju zagrade, operaciju korjenovanja, simboli za deriviranje i integriranje, itd.
- Notacija za funkcije, vektori, matrice, ostali simboli poput ekvivalencije, implikacije, negacije.

Razumijevanje i smisleno korištenje simbola je osnovna vještina za rješavanje jednadžbi, manipuliranje izrazima te analiziranje matematičkih odnosa.

2.1.3 Proučavanje strukture brojevnih sustava

Svojstva zbrajanja, oduzimanja i množenja su važna za učenike dok uče osnovne računanja i strategije računanja. Npr. razumijevanje komutativnosti zbrajanja značajno smanjuje broj činjenica koje treba savladati. Komutativnost i ostala svojstva računskih operacija se koriste neformalno dok učenici razvijaju relacijsko mišljenje i vještinu računaju. Važan korak za učenike je proučavanje svojstava računskih operacija te njihovo izražavanje u općenitom smislu bez da referiraju na određene brojeve, prvo na vlastitom jeziku, a zatim pomoću simbola. Kao primjer nastavnik može uzeti svojstvo 0 kao neutralnog elementa pri zbrajanju. Na nizu primjera učenici uočavaju analogiju da kad pribroje 0 bilo kojem broju, rezultat je broj kojem su pribrojili 0. Što bismo mogli izraziti na način „Ako broju dodamo 0, dobijemo isti broj." Izražavanjem ovog svojstva u općenitijem smislu riječima ili simbolima učenici uočavaju da je istinito za sve brojeve što čini strukturu brojeva eksplicitnom. Kada učenici razumiju takve strukture one ne postaju samo sredstvo za računanje već obogaćuju učeničko razumijevanje brojevnog sustava i omogućavaju bazu za više razine mišljenja. (Van de Walle, Lovin, Karp i Bay-Williams, 2014.).

Možemo reći da proučavanje strukture brojevnih sustava obuhvaća:

- Svojstva računskih operacija poput komutativnosti zbrajanja ili množenja, asocijativnosti zbrajanja ili množenja, distributivnosti množenja prema zbrajanju ili oduzimanju, kao i postojanje neutralnih elemenata za zbrajanje i množenje.
- Strukture i svojstva brojevnih sustava.

2.1.4 Proučavanje pravilnosti i funkcija

Prema Van de Walle (2014.) pravilnosti možemo pronaći u svim područjima matematike. Učenje kako pronaći pravilnosti te kako ih opisati i proširiti je važan proces algebarskog mišljenja. Učenike treba navikavati na traženje, opisivanje i proširivanje pravilnosti kako bi razvili vještinu traženja i izražavanje pravilnosti u svim matematičkim situacijama. Cilj aktivnosti koje uključuju pravilnosti nije pronalazak pravilnosti već naglasak treba biti na učeničkom opisivanju i proširivanju pravilnosti kako bi razvili potrebne vještine traženja struktura i izražavanja pravilnosti u svim matematičkim situacijama. Takve aktivnosti trebaju u što većoj mjeri sadržavati fizičke materijale jer oni omogućuju učenicima fleksibilnost pri istraživanju te učenici mogu griješiti bez da se osjećaju kao da su pogriješili. Fizički materijali omogućuju učenicima primjenjivanje metode pokušaja i pogrešaka, također omogućuju i proširenje uzoraka na više od nekoliko elemenata nego što je zadano, što na papiru nije moguće. Korištenjem fizičkih materijala učenici stječu više iskustva s uzorcima jer su u mogućnosti raditi greške bez straha te na temelju grešaka donositi zaključke. Najčešće aktivnosti koje uključuju proučavanje pravilnosti su aktivnosti s nizovima, koji su preteča funkcije. Razlikujemo ponavljajuće nizove, rastuće nizove kao i brojevne nizove.

Od ranih razreda osnovne škole učenici mogu istraživati pravilnosti koje uključuju promjenu iz koraka u korak ili pravilnosti koje se ponavljaju, odnosno nizove. Prilikom proučavanja nizova učenici također moraju odrediti bazu, odnosno period, ali također moraju generalizirati i tražiti vezu koja će opisati kako će se niz ponavljati odnosno mijenjati. U višim razredima zahtjeva se od učenika da predvide ponašanje niza na nekom udaljenom mjestu do kojeg ne mogu doći konstrukcijom niza član po član što je važan korak u izgradnji algebarskog mišljenja i uvod u otkrivanje koncepta funkcije. Funkcije su temeljni koncepti u algebri. One opisuju odnos između ulaznih i izlaznih vrijednosti te igraju ključnu ulogu u modeliranju stvarnih situacija. Proučavanje funkcija omogućuje učenicima razumijevanje kako se vrijednosti mijenjaju ovisno o varijablama te kako se promjene interpretiraju u matematičkom kontekstu. Razvojem proučavanja pravilnosti i funkcija učenici potiču razvoj algebarskog mišljena na nekoliko načina. Rad s funkcijama potiče učenike na apstraktno razmišljanje te im omogućuje lakšu vizualizaciju odnosa između varijabli, što jača učenički sposobnost analiziranja i rješavanja problema. Radom na pravilnostima i funkcijama učenici usvajaju osnove algebre te razvijaju ključne vještine potrebne za rješavanje kompleksnijih matematičkih problema.

2.1.5 Proces matematičkog modeliranja

Modeliranje možemo definirati kao proces koji problemu iz stvarnog svijeta daje matematičku strukturu kako bi bio rješiv primjenom matematike. Matematičko modeliranje igra ključnu ulogu u razvoju algebarskog mišljenja jer omogućuje učenicima prepoznati kako se matematika može koristiti za rješavanje stvarnih problema primjenom algebarskih koncepata poput funkcija, jednadžbi i varijabli kako bi se opisale, analizirale ili predvidjele stvarne pojave ili problemi. Matematički modeli često koriste u stvarnom svijetu za predviđanje. Primjer toga su matematički modeli koji se koriste za praćenje promjene i rasta životinjske populacije. Zadnjih nekoliko godina posebno su popularni modeli koji opisuju i predviđaju širenje bolesti koje često možemo vidjeti i u zadacima na državnoj maturi. Osim što modeliranje služi za rješavanje stvarnih problema, sam proces modeliranja učenicima pomaže pri razumijevanju algebarskih elemenata kojima se koriste te njihovih međusobnih odnosa. Stvaranjem matematičkih modela, učenici primjenjuju koncepte kao što su funkcija, jednadžba, graf i varijable kako bi opisali specifične situacije što ih potiče na njihovo dublje razumijevanje i praktičnu primjenu. Učenici matematičkim modeliranjem razvijaju vještine analiziranja situacija, postavljanja pitanja i donošenja zaključaka što potiče kritičko razmišljanje i sposobnost donošenja informiranih odluka na temelju matematičkih modela. Bit matematičkog modeliranja nije samo u rješavanju matematičkih problema, već je bit u razumijevanju kako se matematika koristi u svijetu van obrazovnog sustava.

2.2 Elementi algebarskog mišljenja

Elementi algebarskog mišljenja obuhvaćaju ključne koncepte koji su bitni za razumijevanje i primjenu algebre. Njihovo razumijevanje i usvajanje ključno je za razvoj algebarskog mišljenja kod učenika te tvore temelj za daljnje istraživanje složenijih algebarskih koncepata i njihovu primjenu u različitim matematičkim situacijama. Neki od tih elemenata su opisani u nastavku.

2.2.1 Jednakost

Iako je znak jednakosti jedan od najvažniji simbola u matematici često nije usvojen na pravilan način. Od početka školovanja učenici su naučeni da znak jednakosti znači da su izrazi s lijeve i desne strane jednaki, ali zbog njihovog iskustva on učenicima predstavlja znak koji govori da nešto treba izračunati, odnosno mjesto iza kojeg slijedi odgovor. Zbog toga često nastaju problemi kod zadataka poput: $2 + 7 = \_\_ + 5$. Najčešće rješenje kod učenika koji ne razumiju koncept jednakosti bi bilo $2 + 7 = 9 + 5$. Stoga je od iznimne važnosti učenicima omogućiti iskustva pomoću kojih će znak jednakosti smatrati relacijskim simbolom, a ne samo operacijskim. Potrebno je staviti naglasak na ekvivalentnost izraza s lijeve i desne strane jednakosti, a ne samo na računanje. Proces interpretacije znaka jednakosti od operacijskog do relacijskog simbola se mijenja tijekom školovanja, ali taj proces je spor. Potrebno je izdvojiti vrijeme u nastavi kako bi učenici razvili pravilno razumijevanje te kako bi se izbjegla miskoncepcija da znak jednakosti predstavlja signal za računanje. U nastavu je potrebno ukomponirati istinite/lažne izraze, izraze otvorenog tipa, ali i vrlo vrijedno učilo-vagu (Jukić, Matić, Tutnjević 2013.).

2.2.2 Nepoznanice i varijable

Prema Arcavi, Drijvers i Stacey (2017.) varijable su središnji koncept algebre te poprimaju različito značenje i imaju razne uloge. Slova latinske abecede se koriste za označavanje varijabli čak i u zemljama u kojima se latinica ne koristi u svakodnevnom jeziku. Upotreba slova za učenike predstavlja radikalan odmak od upotrebe brojki zbog čega potencijalno mogu imati probleme. Varijable stoje umjesto brojeva, ali se koriste na različite načine koji su često ignorirani od strane matematičara stoga ih je u obrazovanju potrebno posebno poučavati. Možemo razlikovati pet različitih načina upotrebe varijabli. Prvi način s kojim se učenici susreću je korištenje varijable u svrhu „rezerviranja“ mjesta na koje bi trebao doći broj, odnosno numerička vrijednost. Koristimo ih u ranom školovanju u obliku prazne kućice ili crte kao mjesto koje označava gdje treba doći specifična numerička vrijednost kao preteča nepoznanica. Pojam nepoznanice i varijable učenici često poistovjećuju. Iako nepoznanica je varijabla, nepoznanice se koriste kako bi označile specifične numeričke vrijednosti dok varijabla označava količine koje variraju što nas dovodi do trećeg načina upotrebe varijabla. Varijable se koriste za predstavljanje bilo koje vrijednosti unutar algebarskog izraza ili funkcije. Četvrti način upotrebe varijabli je u zapisivanju matematičkih svojstava i zakonitosti, kao i formula. Varijable ne označavaju specifičnu numeričku vrijednost već generaliziraju skup brojeva za koje svojstva vrijede. Npr. svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Varijable a, b i c predstavljaju sve realne brojeve te za njih vrijedi svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju. Varijable se još koriste kao parametri. Primjer toga je jednadžba pravca. Pravac je graf linearne funkcije eksplicitno zapisan kao $y = ax + b$, gdje x i y predstavljaju nepoznate veličine koje variraju za fiksne parametre a i b. Promjenom parametara a i b ne mijenja se samo jedna točka pravca, odnosno grafa linearne funkcije već se mijenja funkcija i graf funkcije određen tom jednadžbom.

U obrazovanju varijable se najčešće koriste kao nepoznate veličine odnosno nepoznanice te kao veličine koje variraju odnosno varijable. Prijelaz između korištenja već spomenute prazne kućice koja za učenike označava mjesto u koje će upisati odgovor, do korištenja slova kao oznake za nepoznati broj može biti zbunjujuće ako dođe do naglog prijelaza. Arcavi (2017.) nam daje primjer pitanja i učeničkih odgovora koji ukazuju na nerazumijevanje.

David je 10 cm viši od Cona. Con je visok h cm. Što možeš napisati o Davidovoj visini.

Većina učenika točno odgovori na ovo pitanje s $10 + h$, ali klasična učenička pogreška je $10h$ jer učenici na temelju svog prethodnog znanja o mješovitim brojevima zaključe da mogu izostavit znak plus jer $2\frac{1}{3}$ ima isto značenje kao i $2 + \frac{1}{3}$. Možemo naići i na odgovore poput Dh gdje D predstavlja Davidovu visinu. Kako učenicima nije poznata Davidova visina zaključe da je trebaju označiti s novom nepoznanicom D. Još jedna česta greška koju učenici rade je biranje numeričke vrijednosti za h, npr. učenici odaberu da je Con visok 100 cm, pa je u skladu s tim David visok 110 cm. Do ove pogreške dolazi zato što su učenici navikli da rješenje zadatka mora biti broj, odnosno nekakva konkretna vrijednost. Na temelju ovakvih odgovora možemo uočiti kako učenici koriste prethodna iskustva s brojevima i slovima kako razumjeli algebru. Nastavnici koji uoče ovakve greške mogu pravovremeno intervenirati i naglasiti da slova nisu bitna jer različita slova mogu predstavljaju različite brojeve. Od početka korištenja varijabli nastavnici učenike mogu pitati kojim brojem mogu zamijeniti kućicu u izrazu $\square - 25 = 55$ kako bi tvrdnja bila istinita umjesto da ih pitaju koji broj mogu upisati u kućicu. Također umjesto prazne kućice mogu se koristiti simboli poput zvjezdice, kruga, cvijeta u koje se ne može upisati odgovor kako bi učenici stekli naviku da simboli predstavljaju brojeve. Kod učenika je također česta miskoncepcija da slovo predstavlja fizički objekt, a ne broj. Arcavi (2017.) to naziva „algebrom voćne salate" jer se za uvođenje varijabli, odnosno uvođenje slova kao oznaku za nepoznatih vrijednosti, često koristi voće. Npr. za izraz $5a + 2b - 3a + b$ nastavnici često govore učenicima kako a predstavlja jabuke, a b kruške te kako bi pojednostavnili ovaj izraz ne smiju zbrajati kruške i jabuke. Na ovaj način učenicima slova počinju predstavljati fizičke objekte umjesto brojeva te ignoriraju nevidljivi znak množenja i svojstva koja omogućuju pojednostavljivanje izraza.

Sljedeći primjer je zadataka pomoću kojeg nastavnici mogu otkriti učeničke miskoncepcije vezane za razumijevanje značenja varijabli.

Za vrt je kupljeno r crvenih grmova ruže i g bijelih grmova gardenije. Svaki grm ruže košta 4\$. Svaki grm gardenije košta 5\$. Odaberi jednadžbu koja govori da je ukupna cijena 70\$.
a) $4r + 5g = 70$
b) $10r + 6g = 70$
c) $r + g = 70$

Prvi odgovor je točan, ali većina učenika je kao točan odgovor odabrala odgovor pod b. Učenici su tim odgovorom zapravo odgovorili na pitanje koliko grmova ruža i gardenija mogu kupiti za 70\$ a to je da mogu kupiti 10 grmova ruže i 6 grmova gardenije. Vidi se da učenicima nepoznanice r i g predstavljaju fizičke objekte, grm ruže i grm gardenije, a ne broj grmova ruže i grmova gardenije koji su kupljeni. Osim što učenici ne razumiju čemu služe varijable često ne razumiju razliku između nepoznanica u jednadžbama i varijabli u nejednadžbama i izrazima. Razlog tomu je što se u matematici nepoznanice i varijable često koriste kao sinonimi iako imaju drugačiju upotrebu te se razlika između njih ne naglašava dovoljno, što možemo vidjeti promatrajući udžbenike za matematiku počevši od četvrtog razreda osnovne škole kada se uvodi slovo kao oznaka za broj kod jednostavnijih linearnih jednadžbi koje se rješavaju pomoću veze zbrajanja i oduzimanja. Korištenje slova se nastavlja koristiti u tu svrhu i u petom razredu osnovne škole, ali u udžbenicima možemo pronaći i primjere zadataka kada se slova koriste kao i varijable. Tek uvođenjem algebarskih izraza u šestom razredu osnovne škole uvodi se pojam varijable, ali netom prije uvođenja linearne jednadžbe. Zbog toga učenici često brkaju pojam varijable i nepoznanice kao i njihovo značenje te ulogu u matematici. Nerazumijevanje razlike između varijable i nepoznanice najviše dolazi do izražaja prilikom određivanja rješenja linearnih nejednadžbi. Pr. $\frac{1+a}{a} > 1$. Najčešća pogreška je množenje nejednakosti s a jer učenici ne razumiju da a može biti negativan broj ili čak 0. Kako bi se izbjegle miskoncepcije vezane za ta dva pojma potrebno ih je uvoditi postupno aktivnostima u kojima učenici sami otkrivaju što predstavljaju i kada se s njima susreću.

2.2.3 Algebarski izrazi

Algebarski izraz je matematički izraz koji se sastoji od kombinacije brojeva, varijabli i aritmetičkih operacija. Razlikujemo konstantne izraze (pr. 2), linearne izraze (pr. $x+3$), polinome (pr. x^3+2x-1), racionalne izraze $\left(\text{pr. } \frac{x}{x^3-2}\right)$ i ostale poput $\sqrt{a^2+9}$, e^x, $\log(y+x)$. Koriste se za opisivanje matematičkih problema te omogućuju manipulaciju s nepoznatim veličinama. Najjednostavniji algebarski izraz nazivamo monom, to je jednočlani algebarski izraz koji predstavlja množenje konstante i varijable. Zbroj ili razlika monoma je binom, dvočlani algebarski izraz. Algebarski izraz dobiven s više matematičkih operacija zbrajanja, oduzimanja i množenja s više od dva monoma je polinom. Iako toga učenici nisu svjesni, algebarski izrazi su i formule koje koriste tijekom školovanja, poput formula za opseg, površinu i volumen. Ako varijable u izrazima želimo zamijeniti numeričkom vrijednošću i izvršiti računske operacije u njima potrebno je paziti je li operacija definirana te je li izraz definiran za te vrijednosti. U izrazu $\frac{1}{x^2+1}$ možemo s varijablom x zamijeniti bilo koji realni broj, dok u izrazu $\frac{1}{x^2-1}$ ne možemo jer nije definiran za 1 i -1. Arcavi (2017) opisuje dualnost procesa i objekta algebarskih izraza, odnosno kad algebarski izrazi u isto vrijeme predstavljaju proces i objekt. Kako bi učenici mogli baratati algebarskim izrazima nekad prvo moraju „raspakirati“ proces koji izraz predstavlja, a nekad izraz predstavlja objekt. U početnim fazama učenja algebre ona se često smatra generaliziranom aritmetikom iako se algebra i aritmetika razlikuju. U aritmetici se najčešće traži numeričko rješenje zadatka, dok algebra opisuje matematičke strukture. Kada učenici zbrajaju u aritmetici njihov je zadatak pronaći broj kao rješenje. Npr. $46+91$, rješenje 137 je objekt u ovom slučaju. U zadatku *David je 10 cm viši od Cona. Con je visok h cm. Što možeš napisati o Davidovoj visini?* Učenici ne mogu pojmiti da je odgovor samo $h+10$, pa kako bi imitirali aritmetičke odgovore često pišu $h+10=h+10$ jer imaju potrebu napraviti nešto kako bi ukazali da je zbrajanje završeno. Zadatak $46+91$ možemo promatrati kao proces zbrajanja, a 137 kao produkt tog procesa dok $h+10$ u isto vrijeme označava i proces i produkt procesa, odnosno objekt. Zbog nerazumijevanja dualnosti objekta i procesa česte su pogreško prilikom pojednostavljivanja algebarskih izraza poput $2a + 5b = 7ab$. Do toga dolazi jer učenici traže odgovor koji izgleda drugačije od pitanja. Prema istraživanju TIMSS 2011 (Foy, Arora i Stanco (2013.) prema Arcavi (2017.)) zadatak u kojem je potrebno odrediti $2a + 2b + 4$ ako je $a + b = 25$ je u postotku točno riješilo 35% učenika. Kako bi učenici točno riješili zadatak trebali su prepoznati da je $2a + 2b = 2(a + b)$, ali i identificirati $a + b$ kao matematički objekt jednak 25. Razvoj i pravilna primjena dualnog pogleda na aritmetičke izraze kao objekt i proces je važan dio algebarskog mišljenja.

2.2.4 Algebarski identiteti

Algebarski izrazi mogu biti ekvivalentni ako je skup brojeva na kojima su definirani identičan te ako se za svaki broj iz skupa uvrštavanjem u izraz dobije ista vrijednost. Npr. izrazi $|a - 8|$ i $|8 - a|$, $x^2 - 9$ i $(x - 3)(x + 3)$. Kako bismo pokazali da su dva izraza ekvivalentna potrebno je pokazati da su definirani na istom skupu brojeva, te da se jedan izraz može transformirati u drugi algebarskim manipulacijama. Algebarskim identitetom možemo nazvati ekvivalentnost dvaju algebarskih izraza koja ostaje istinita ako se u nju uvrste bilo koje vrijednosti.

Osnovni algebarski identiteti su:

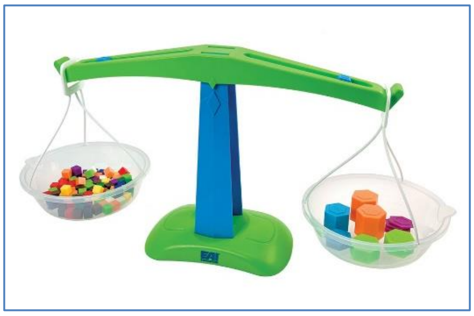
- kvadrat zbroja $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- kvadrat razlike $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- razlika kvadrata $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
- kub razlike $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- kub zbroja $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- razlika kubova $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- zbroj kubova $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- razlika dviju potencija jednakih eksponenata $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

2.3 Modeli i učila koja pridonose razvoju algebarskog mišljenja

U kontekstu matematičkog obrazovanja model je bilo kakav objekt, slika ili crtež koji predstavlja matematički koncept. Pomoću modela učenici mogu prepoznati odnose i veze unutar matematičkog koncepta, kao i odnose i veze s drugim matematičkim konceptima. U ovom radu koristi se model mase, model novca, model površine i model volumena. Osim modela, nastavnici bi se trebali služiti i učilima. Matematička učila su fizički objekti napravljeni kako bi eksplicitno i konkretno predstavljali apstraktne matematičke ideje. Učila koja će te vidjeti u aktivnostima su vaga jednakih krakova, te algebarske pločice.

2.3.1 Vaga jednakih krakova

Vaga je fizičko učilo koje učenicima pomaže pri razumijevanju koncepta jednakosti. Korištenjem vage učenici imaju vizualnu reprezentaciju jednakosti. Pomoću vage jednakih krakova učenici stječu razumijevanje što je jednakost, kako se postiže te kako se očuva. Vaga se osim za koncept jednakosti koristi i za koncept nepoznanica. U našem školstvu je neiskorjenjivo „prebacivanje" brojeva s jedne strane jednakosti na drugu prilikom rješavanja linearnih jednadžbu. Ta loša navika stvara mnoge probleme na svim razinama školovanja, a sve počinje od nerazumijevanja koncepta jednakosti.

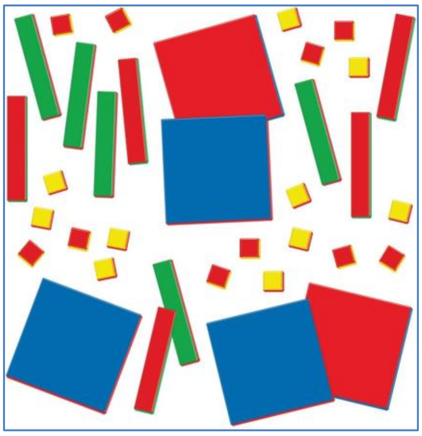


Slika 2.3.1-1 Vaga jednakih krakova[2]

[2] https://www.eaieducation.com

2.3.2 Algebarske pločice

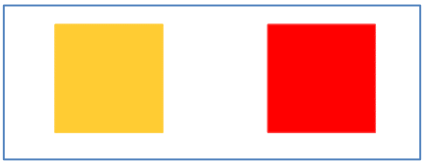
Jedno od učila koje se koristi kao model površine su algebarske pločice. Kao što samo ime kaže koriste se u algebri, a od velike su važnosti pri proučavanju algebarskih izraza. Pomoću njih učenici mogu vizualizirati brojeve i varijable što pridonosi razvoju apstraktnog načina razmišljanja. Korištenjem algebarskih pločica učenici povezuju algebru i geometriju zbog oblika algebarskih pločica. Standardni set algebarskih pločica sastoji se od 54 pločice koje mogu biti u obliku kvadrata ili pravokutnika, te razlikujemo tri vrste pločica u obliku kvadrata i tri vrste pločica u obliku pravokutnika. Sve pločice su s jedne strane crvene boje, dok su s druge strane različitih boja, ovisno o vrsti.



Slika 2.3.2-1 Algebarske pločice[3]

Razlikujemo pločice prema njihovim dimenzijama:

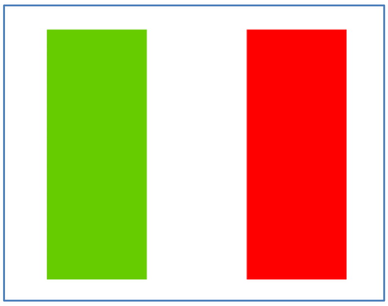
- Pločice jedinične površine su oblika kvadrata. Duljina stranice jednog kvadrata označava jediničnu dužinu, odnosno broj 1, dimenzije 1×1. Ako je pločica okrenuta na crvenu stranu predstavlja broj -1, dok žuta strana predstavlja broj 1.



Slika 2.3.2-2 primjer pločice 1

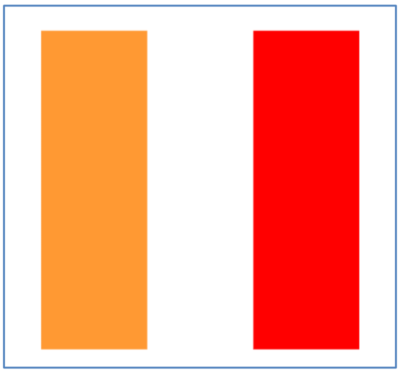
[3] https://www.eaieducation.com

- Pločice površine x su oblika pravokutnika čija je kraća stranica jedinične dužine, dok je duža stranica duljine x, dimenzije $1 \times x$. Ako je pločica okrenuta na crvenu stranu predstavlja izraz $-x$, dok zelena strana predstavlja izraz x.



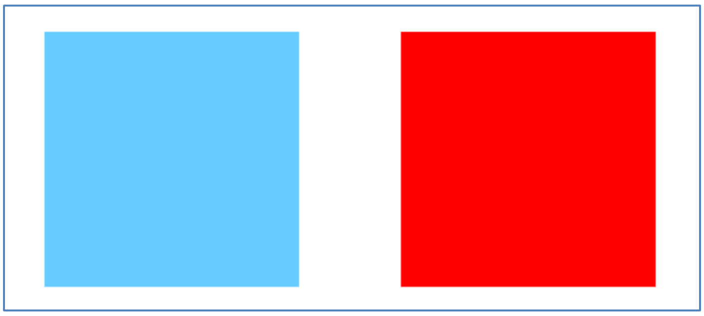
Slika 2.3.2-3 primjer pločice x

- Pločice površine y su oblika pravokutnika čija je kraća stranica jedinične dužine, dok je duža stranica duljine y, dimenzije $1 \times y$. Ako je pločica okrenuta na crvenu stranu predstavlja izraz $-y$, dok narančastu strana predstavlja izraz y.



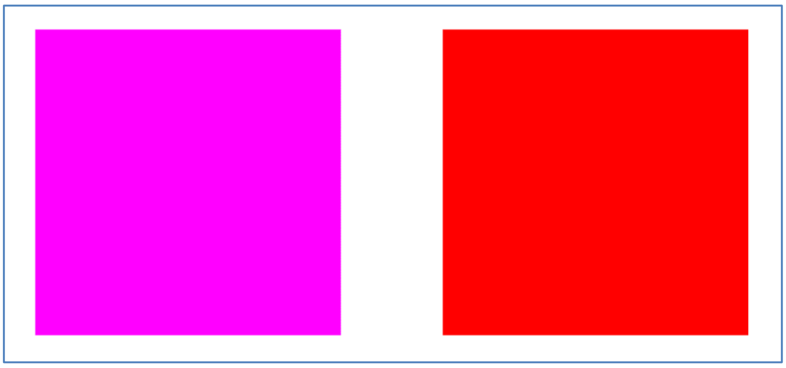
Slika 2.3.2-4 primjer pločice y

- Pločice površine x^2 su oblika kvadrata čije su stranice duljine x, dimenzije $x \times x$. Ako je pločica okrenuta na crvenu stranu predstavlja izraz $-x^2$, dok plava strana predstavlja izraz x^2 .



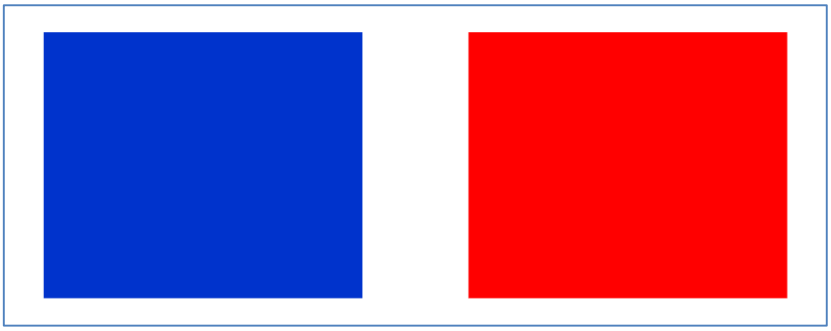
Slika 2.3.2-5 primjer pločice x^2

- Pločice površine y^2 su oblika kvadrata čije su stranice duljine y, dimenzije $y \times y$. Ako je pločica okrenuta na crvenu stranu predstavlja izraz $-y^2$, dok ljubičasta strana predstavlja izraz y^2



Slika 2.3.2-6 primjer pločice y^2

- Pločice površine xy su pravokutnog oblika čija je jedna stranica duljine x, a druga duljine y, dimenzije $x \times y$. Stranice duljina x i y su različite duljine. Ako je pločica okrenuta na crvenu stranu predstavlja izraz $-xy$, dok tamno plava strana predstavlja izraz xy.



Slika 2.3.2-7 primjer pločice xy

3 Hrvatski kurikulum predmeta Matematika

U Hrvatskoj je trenutno na snazi kurikulum za nastavni predmet Matematika za osnovne i srednje škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Opisuje pet domena: Brojevi (oznaka A), Algebra i funkcije (oznaka B), Oblik i prostor (oznaka C), Mjerenje (oznaka D), Podatci, statistika i vjerojatnost (oznaka E). Za domenu Algebra i funkcije piše „Algebra je jezik za opisivanje pravilnosti u kojemu slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije, a varijable se upotrebljavaju pri rješavanju matematičkih problema. U domeni Algebra i funkcije učenici se služe različitim vrstama prikaza; grade algebarske izraze, tablice i grafove radi generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih situacija. Uočavaju nepoznanice i rješavaju jednadžbe i nejednadžbe računski provođenjem odgovarajućih algebarskih procedura, grafički i služeći se tehnologijom kako bi otkrili njihove vrijednosti i protumačili ih u danome kontekstu. Određenim algebarskim procedurama koriste se i za primjenu formula i provjeravanje pretpostavki. Prepoznavanjem pravilnosti i opisivanjem ovisnosti dviju veličina jezikom algebre učenici definiraju funkcije koje proučavaju, tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva. Modeliraju situacije opisujući ih algebarski, analiziraju i rješavaju matematičke probleme i probleme iz stvarnoga života koji uključuju pravilnosti ili funkcijske ovisnosti.“

Osim domena u kurikulumu za nastavni predmet Matematika opisani su i matematički procesi: Prikazivanje i komunikacija, Povezivanje, Logičko mišljenje, argumentiranja i zaključivanje, Rješavanje problema i matematičko modeliranje te Primjena tehnologije. Uz svaki navedeni ishod stoji oznaka, MAT što označava predmet Matematika, OŠ ili SŠ ovisno radi li se o ishodu za osnovnu ili srednju školu, slovčana oznaka A, B, C, D ili E koja govori o kojoj je domeni riječ te dvije brojke. Prva brojka označava razred u kojem se ishod ostvaruje dok druga oznaka označava redni broj ishoda u navedenoj domeni. Svaki ishod također ima i svoju razradu. Kako domena Algebra i funkcije obuhvaća široko područje matematičkog obrazovanja fokusirat ćemo se samo na ishode kojih se dotiče ovaj rad. Ishodi i njihova razrada kojima se ostvaraje razvoj algebarskog mišljenja u osnovnoj školi su sljedeći:

Prvi razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.1.1. Zbraja i oduzima u skupu brojeva do 20.

- Primjenjuje svojstva komutativnosti i asocijativnosti te vezu zbrajanja i oduzimanja.
- Određuje nepoznati broj u jednakosti.

MAT OŠ B.1.2. Prepoznaje uzorak i nastavlja niz.

- Uočava uzorak nizanja.
- Objašnjava pravilnost nizanja. Objašnjava kriterije nizanja.
- Niže po zadanome kriteriju.

Drugi razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.2.1. Prepoznaje uzorak i kreira niz objašnjavajući pravilnost nizanja.

- Uočava pravilnosti nizanja brojeva, objekata, aktivnosti i pojava.
- Određuje višekratnike kao brojevni niz.
- Kreira nizove.
- Objašnjava kriterije nizanja.

MAT OŠ B.2.1. Određuje vrijednost nepoznatoga člana jednakosti.

- Određuje vrijednost nepoznatoga člana u jednakosti i dobiveno rješenje provjerava.
- Primjenjuje svojstva računskih operacija.
- Primjenjuje veze među računskim operacijama.

Prošireni sadržaji:

- Rabi slovo kao oznaku za broj

Treći razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.3.1. Rješava zadatke s jednim nepoznatim članom koristeći se slovom kao oznakom za broj.

- Koristi se slovom kao oznakom za broj.
- Uvrštava zadani broj umjesto slova.
- Određuje vrijednost nepoznatoga člana jednakosti/nejednakosti.
- Primjenjuje svojstva računskih operacija.
- Primjenjuje veze među računskim operacijama.

Četvrti razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.4.1. Određuje vrijednost nepoznate veličine u jednakostima ili nejednakostima.

- Razlikuje jednakosti i nejednakosti.
- Koristi se slovom kao oznakom za nepoznati broj u jednakostima i nejednakostima.
- Računa vrijednost nepoznate veličine primjenjujući veze između računskih operacija.

Peti razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.5.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.

- Prepoznaje nepoznanicu u problemskoj situaciji.
- Problemsku situaciju zapisuje linearnom jednadžbom.
- Rješava linearnu jednadžbu oblika $ax = b$, gdje su a i b prirodni ili decimalni brojevi, provjeravajući točnost dobivenoga rješenja.
- Izražava nepoznatu veličinu iz jednostavne linearne jednadžbe koristeći se vezom među računskim operacijama.

Šesti razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.6.1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.

- Analizira problemsku situaciju u skupovima $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}$ i zapisuje ju linearnom jednadžbom.
- Rješava jednadžbu koja se svodi na oblik $ax = b$, gdje su a i b nenegativni racionalni ili cijeli brojevi, primjenjujući ekvivalentnost jednadžbi.
- Provjerava točnost rješenja jednadžbe.
- Preispituje smislenost rješenja i tumači dobiveno rješenje u kontekstu problema.

Prošireni sadržaj:

- Rješava jednostavnu linearnu nejednadžbu.

Sedmi razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.7.1. Računa s algebarskim izrazima u $\mathbb{Q}$.

- Opisuje monom i binom.
- Pojednostavnjuje algebarske izraze (eksponenata u rezultatu ne većih od 3) u skupu racionalnih brojeva zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem, primjenjujući svojstva računskih operacija.
- Množi monom binomom i binom binomom.

MAT OŠ B.7.2. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu

- Analizira problemsku situaciju i zapisuje ju linearnom jednadžbom.
- Rješava jednadžbu koja se svodi na oblik $ax = b$, gdje su a i b racionalni brojevi, primjenjujući ekvivalentnost jednadžbi.
- Složeniju linearnu jednadžbu, primjenom ekvivalencije jednadžbi, svodi na oblik $ax + b = 0$ i rješava je uz provjeru.
- Provjerava točnost i preispituje smislenost rješenja.
- Izražava nepoznatu veličinu iz jednostavne linearne jednadžbe oblika $ax = b$ racionalni brojevi, koristeći se vezom među računskim operacijama.

Prošireni sadržaj:

- Rješava jednostavnu linearnu nejednadžbu.

Osmi razred osnovne škole

Učenik/ca:

MAT OŠ B.8.1. Računa s algebarskim izrazima u $\mathbb{R}$.

- Pojednostavnjuje algebarske izraze u skupu $\mathbb{R}$ zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem primjenjujući svojstva računskih operacija.
- Množi monom binomom i binom binomom.
- Računa vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza.
- Izlučuje zajednički faktor.
- Pojednostavnjuje algebarske izraze.
- Prikazuje veličine matematičkim formulama.

MAT OŠ B.8.3. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.

- Analizira problemsku situaciju i zapisuje ju linearnom jednadžbom.
- Raspravlja o rješenju s obzirom na postavljene uvjete.

MAT OŠ B.8.4. Rješava i primjenjuje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.

- Analizira rješenje sustava te ga uvrštavanjem dobivenih vrijednosti provjerava. Rješenje prikazuje uređenim parom brojeva.
- U zadanim problemima prepoznaje mogućnost rješavanja sustavom dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.
- Ako je sustav složeniji, svodi ga na standardni oblik i rješava zadanom/proizvoljnom metodom.
- Raspravlja o egzistenciji dobivenoga rješenja (jedinstvenost, nepostojanje, beskonačno mnogo rješenja).

Ishodi za srednje škole se razlikuju jer ovise o broju sati na godišnjoj razini. Razlikujemo gimnazijski program za prve, druge i treće razrede od 105, 140, 175 i 210, te 245 sati na godišnjoj razini. Za četvrte razrede gimnazije razlikujemo program za 96, 128, 160, 192 i 224 sati na godišnjoj razini. Koristit ćemo se ishodima gimnazijskog programa za 175 sat godišnje za prvi razred, te ishodima gimnazijskog programa za 192 sata godišnje za četvrti razred.

Prvi razred srednje škole

Učenik/ca:

MAT SŠ B.1.2. Računa s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima.

- Za zadani izraz računa konkretne vrijednosti, pojednostavnjuje izraz, primjenjuje formule za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata, zbroj i razliku kubova, faktorizira izraze.
- Krati, množi, dijeli i zbraja algebarske razlomke.

Četvrti razred srednje škole

Učenik/ca:

MAT SŠ B.4.3. Primjenjuje aritmetički i geometrijski niz i red.

- Opisuje aritmetički i geometrijski niz i geometrijski red, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom.
- Računa zbroj prvih n članova niza, računa zbroj geometrijskoga reda.

U razradi ishoda MAT OŠ B.1.1. napisano je da učenici određuju nepoznati broj u jednakosti, te imamo slične ishode MAT OŠ B.2.1., MAT OŠ B.3.1., MAT OŠ B.4.1. Učenici od prvog pa do četvrtog razreda razvijaju koncept jednakosti, te se pripremaju za uvođenje nepoznanica i varijabli. Već u trećem razredu ili trećem razredu učenici počinju koristiti slovo kao oznaku za broj. Ako pogledamo udžbenike možemo primijetiti da nedostaje zadataka čiji je kontekst da zamijene simbol (kućicu, praznu crtu) s brojem, već su zadatci takvi da je potrebno upisati odgovarajući broj. Iako linearnu jednadžbu formalno uče tek u petom razredu (MAT OŠ B.5.1.), jednostavnije linearne jednadžbe rješavaju već prije, odnosno određuju nepoznate vrijednosti u jednakostima primjenom veze računskih operacija zbrajanja i oduzimanja te množenja i dijeljenja. Ishodi MAT OŠ B.1.2. i MAT OŠ B.2.1. pripremaju učenike na generalizaciju i zaključivanje nepotpunom indukcijom, ali nakon drugog razreda osnovne škole stvaranje nizova i uočavanje pravilnosti u uzorku više se ne spominje do četvrtog razreda srednje škole kada uče aritmetički i geometrijski niz čime učenici ne dobivaju šansu za razvijanje više razine mišljenja i generaliziranja. U udžbenicima pojam varijable se već spominje u pet ili šestom razredu osnovne škole ali promatrajući navedene ishode možemo uočiti da varijable nisu obuhvaćene. Ostvarivanjem ishoda MAT OŠ B.7.1. učeni se upoznavaju se s pojmom monoma i binoma te pojednostavnjuju algebarske izraze u skupu racionalnih brojeva. U udžbenicima možemo primijetiti da se algebarski izrazi i linearne jednadžbe uvode paralelno tako da se učenici prvo upoznaju s algebarskim izrazima, a zatim s linearnim jednadžbama i metodama njihovog rješavanja što dodatno doprinosi učeničkom nerazumijevanju razlika između ta dva koncepta. Znanje o algebarskim izrazima proširuju na skup realnih brojeva u osmom razredu osnovne škole, dok u prvom razredu srednje škole računaju s algebarskim izrazima i razlomcima (MAT SŠ B.1.2.). Nakon prvog srednje algebarski izrazi i identiteti se više ne pojavljuju.

4 Aktivnosti koje pridonose razvoju algebarskog mišljenja

Algebarsko mišljenje se razvija kroz cijelo školovanje te ga je bitno njegovati kod učenika od samih početaka kako bi učenici gradili kvalitetne temelje na kojima mogu nadograđivati svoje matematičko znanje. U ovom poglavlju opisane su aktivnosti koje se mogu koristiti prilikom razvoja dva najvažnija matematička koncepta, koncepta jednakosti i koncepta varijabli. Pravilno razumijevanje jednakosti i upotrebe varijabli nije bitno samo za matematiku već je bitno i za sve ostale prirodne i tehničke znanosti.

4.1 Koncept jednakosti

Razumijevanje koncepta jednakosti je osnova algebarskog mišljenja. Učenici se sa znakom jednakosti upoznaju već u prvom razredu osnovne škole, ali to ne znači da usvoje koncept jednakosti kao relacije. Kako bi učenici relacijski razmišljali o znaku jednakosti trebaju razviti sposobnost razmišljanja o vezi između količina, a ne o samim količinama koje znak jednakosti povezuje. U ovom poglavlju prikazane su neke od mogućih aktivnosti kojima učenici razvijaju razumijevanje koncepta jednakosti.

4.1.1 Aktivnost *Vaga i zbrajanje*

Cilj aktivnosti je upoznati se s vagom te pomoću nje produbiti konceptualno razumijevanje jednakosti istraživanjem težina jednakih geometrijskih tijela. Aktivnost je primjerena za učenike prvog razreda osnovne škole te se njom ostvaruje ishod MAT OŠ B.1.2. Za svaku skupinu učenika potrebna je jedna vaga i 20 kockica te nastavni listići za svakog učenika koji se ne razlikuju. Skupine imaju različite nastavne listiće. Organizirani u četveročlane skupine učenici će slijedeći upute uočiti da se krakovi vage mogu izjednačiti bez obzira na redoslijed i način stavljanja kockica na krakove. Zapisujući postupak matematički zaključit će da se s različitih strana znaka jednakosti mogu zbrajati različiti brojevi tako da jednakost vrijedi.

Nastavni listić 4.1.1 Primjer nastavnog listića za jednu skupinu učenika

1. Na lijevi krak vage postavite 5 kockica, a zatim 3 kockice. Na desni krak vage zatim postavite 4 kockice.
    a) Opišite u kakvom se položaju nalazi vaga. Zašto?
    b) Koliko kockica treba staviti na jedan od krakove vage kako bi vaga bila u ravnoteži?
    c) Koliko se kockica nalazi na lijevom, a koliko na desnom kraku vage?
    d) Kako biste matematički zapisali da je broj kockica na lijevom kraku jednak broju kockica na desnom kraku?
    e) Zapišite matematički postupak dodavanja kockica na vagu. Koji biste znak koristili kako biste označili vagu?

2. Pomoću vage nadopunite odgovore:

   a) $9+\square=5+5$

   b) $4+5=7+\square$

   c) $7=\square+4$

   d) $\square+3=6$

   e) $12=\square+\square$

Prije početka aktivnosti s učenicima je potrebno raspraviti o mogućim položajima vage i o čemu ovise ti položaju. Vaga je u ravnoteži kada su na njezinim krakovima predmeti jednakih težina, vaga se naginje u lijevo kada je predmet na lijevom kraku teži, a naginje se u desno kada je predmet na desnom kraku teži.

Riješeni nastavni listić 4.1.1-1

1. Na lijevi krak vage postavite 5 kockica, a zatim 3 kockice. Na desni krak vage zatim postavite 4 kockice.
   a) Opišite u kakvom se položaju nalazi vaga. Zašto?
      Vaga nije u ravnoteži. Na lijevom kraku nalazi 8 kockica, a na desnom 4 kockice pa je lijevi krak teži od desnog.
   b) Kako biste matematički zapisali postupak dodavanja kockica na lijevi krak?
      $$5+3$$
   c) Koliko kockica treba staviti na jedan od krakove vage kako bi vaga bila u ravnoteži?
      Na desnu stranu bi trebalo staviti još 4 kockice kako bi oba kraka bila jednake težine, a vaga u ravnoteži.
   d) Koliko se kockica nalazi na lijevom, a koliko na desnom kraku vage?
      Na oba kraka vage nalazi se 8 kockica.
   e) Kako biste matematički zapisali da je broj kockica na lijevom kraku jednak broju kockica na desnom kraku?
      $$8=8$$

f) Kako biste matematički zapisali postupak dodavanja kockica na desni krak?

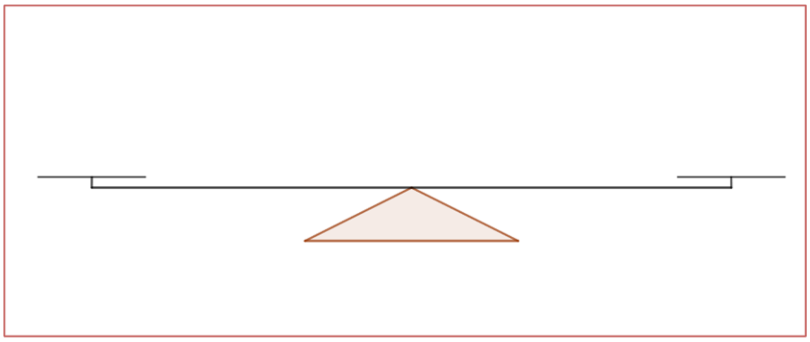
$$4 + 4$$

g) Zapišite matematički kako ste dodavali kockice na krakove vage kako bi ju doveli u ravnotežu. Koji biste znak koristili kako biste označili vagu? Je li zapisana jednakost istinita? Zašto? Objasni.

$$5 + 3 = 4 + 4$$

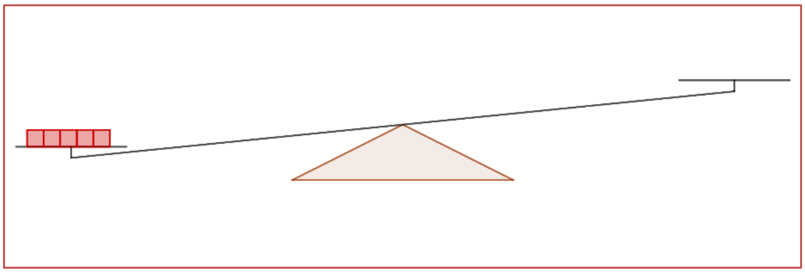
Zapisana jednakost je istinita zato što je $5 + 3 = 8$ i $4 + 4 = 8$, a kako je $8 = 8$ tako je $5 + 3 = 4 + 4$.

Učenici slijede upute iz prvog zadatka te odgovaraju na pitanja. Na početku aktivnosti vaga je u ravnoteži jer su krakovi prazni.



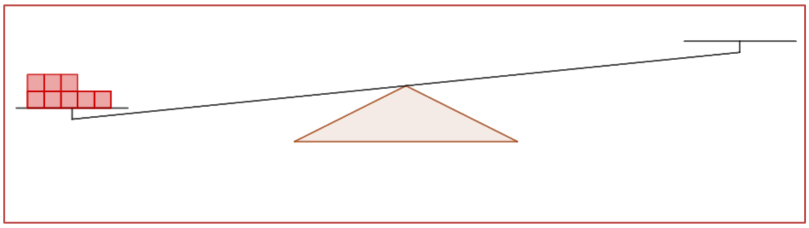
Slika 4.1.1-1 Vaga u ravnoteži

Nakon što stave pet kockica na lijevi krak vaga više nije u ravnoteži jer je lijevi krak teži.



Slika 4.1.1-2

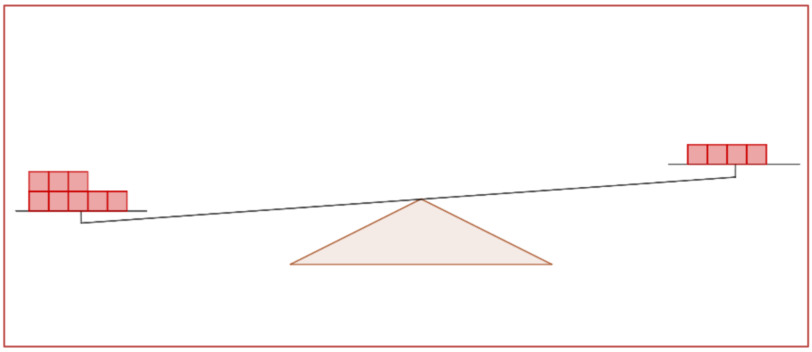
Nakon što dodaju još tri kockice na lijevi krak položaj vage se nije promijenio jer je lijevi krak i dalje teži od desnog kraka.



Slika 4.1.1-3

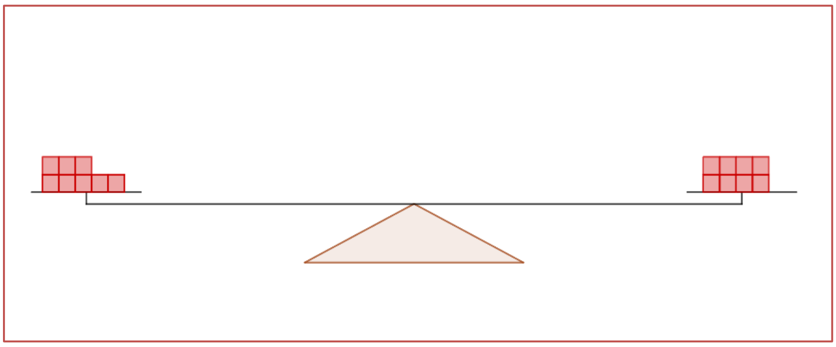
Postupak dodavanja kockica na krak vage učenici apstrahiraju te raspravom u skupinu zaključuju da ga mogu zapisati kao zbrajanje te zapisuju 5+3. Dodavanjem 4 kockice na desni krak učenici uočavaju da vaga,

iako su se krakovi pomaknuli, nije u ravnoteži jer se na lijevom kraku još uvijek nalazi više kockica nego na desnom.



Slika 4.1.1-4

Kako učenici trebaju izjednačiti težine na krakovima vage mogu stavljati na lakši krak jednu po jednu kockicu kako bi ih izjednačili te prebrojiti koliko su novih kockica stavili. Što bi matematički zapisali kao $4 + 1 + 1 + 1 + 1$. Međutim neki učenici mogu uočiti da se na desnom kraku nalaze četiri kockice više nego na lijevom pa će odmah staviti četiri kockice i vidjeti da su težine na krakovima vage jednake. To zapisuju kao $4 + 4$.



Slika 4.1.1-5

Taktike izjednačavanja krakove vage učenici raspravljaju u skupini te ih zajedno testiraju dok se težine na krakovima vage ne izjednače. Učenici uočavaju da su na krakove vage dodavali kockice različitim redoslijedom i različitu količinu, ali su se težine na krakovima vage izjednačile. Zaključuju da mogu koristiti znak jednakosti prilikom zapisivanja postupka dodavanja kockica na krakove vage jer je broj kockica na krakovima jednak, a kockice su jednake pa su težine na oba kraka jednake. Apstrahiranjem postupka dodavanja kockica na krakove vage te raspravom u skupini zaključuju da postupak matematički mogu zapisati kao $5 + 3 = 4 + 4$. Nakon što dođu do tog zaključka, učenici ga primjenjuju na 2. zadatak.

Riješeni nastavni listić 4.1.1-2 nastavak

2. Pomoću vage nadopunite odgovore:

a) $9 + \boxed{1} = 5 + 5$

b) $4 + 5 = 7 + \boxed{2}$

c) $7 = \boxed{3} + 4$

d) $\boxed{3} + 3 = 6$

e) $12 = \boxed{2} + \boxed{10}$

Uočimo da je 2. zadatak tipični zadatak s kojim se susreću učenici prvog razreda osnovne škole kada zbrajaju i uče o pribrojnicima. Vaga kao vizualno sredstvo olakšava učenicima shvaćanje šireg pojma znaka jednakosti te im pomaže u uspješnoj primjeni raznih matematičkih koncepata s kojima će se sresti u budućnosti.

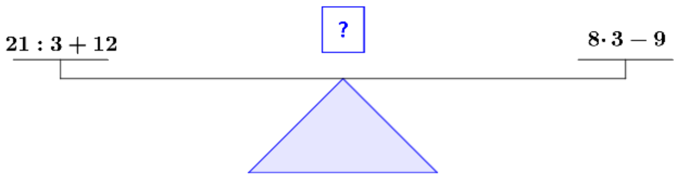
4.1.2 Aktivnost *Izjednači*

Aktivnost je primjerena učenicima četvrtog razreda osnovne škole te suradničkom radu u četveročlanim skupinama. Ostvaruje se ishod MAT OŠ B.4.1. Za svakog učenika u skupini potreban je jedan nastavni listić, a skupine imaju različite nastavne listiće. Cilj aktivnosti je kod učenika osvijestiti da se s lijeve i desne strane znaka jednakosti mogu nalaziti različiti brojevi i različite računske operacija a da jednakost i dalje vrijedi.

Riješeni nastavni listić 4.1.2 Primjer za jednu skupinu učenika

1. Promotrite što se nalazi na krakovima vage i ustanovite u kakvom je ona položaju, je li u ravnoteži ili je nagnuta. Obrazložite svoje odgovore i zapišite stanje na vagi matematičkim jezikom. Raspravite u skupine!

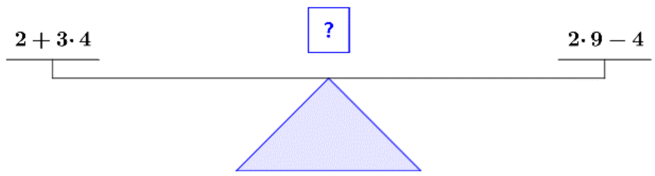
a)



Vaga nije u ravnoteži. Rezultat na lijevom kraku je 19, a na desnom je 15 pa se vaga naginje u lijevo.

$$21:3+12>8\cdot 3-9$$
$$19>15$$

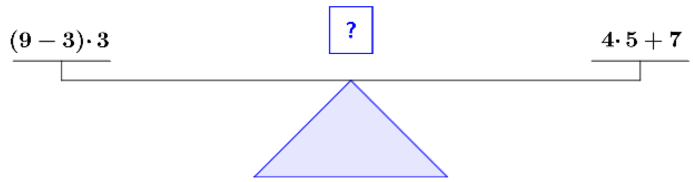
b)



Vaga je u ravnoteži jer je rezultat na lijevom i desnom kraku isti, odnosno 14.

$$2+3\cdot 4=2\cdot 9-4$$
$$14=14$$

c)



Vaga nije u ravnoteži. Rezultat na lijevom kraku vage je 18, a na desnom kraku vage je 27, pa se vaga naginje u desno.

$$(9-3)\cdot 3 < 4\cdot 5 + 7$$

$$18 < 27$$

2. Promotrite vage koje nisu u ravnoteži i opišite kako biste promijenili izraze na njihovim krakovima kako biste ih izjednačili. Raspravite u skupine!
   a) Krakove vage možemo izjednačiti tako da izrazu na lijevom kraku oduzmemo 6, ili tako da izrazu na desnom kraku dodamo 6.

$$21:3 + 12 = 8\cdot 3 - 9 + 6$$

   c) Krakove vage možemo izjednačiti tako da izrazu na lijevom kraku dodamo 9 ili tako da izrazu na desnom kraku oduzmemo 9.

$$(9-3)\cdot 3 + 9 = 4\cdot 5 + 7$$

Učenici rješavaju zadatke samostalno te u skupini uspoređuju rezultate. Međusobno raspravljaju kako bi mogli matematičkim jezikom opisati u kakvom je vaga položaju. Kako rezultati izraza na krakovima nisu jednaki svjesni su da ne mogu koristiti znak jednako, ali znaju uspoređivati brojeve te zaključuju da mogu koristiti znakove manje i veće. Nakon što izračunaju vrijednosti izraza na krakovima vage uspoređuju ih. U 2. zadatku trebaju u skupini osmislit kako bi izmijenili izraze na krakovima vaga koje nisu u ravnoteži. Na kraju aktivnosti bitno je raspraviti na koliko su to različitih načina mogli napraviti. Najočiglednija rješenja su izjednačavanje pomoću zbrajanja i oduzimanja, ali potrebno je potaknuti učenike na razmišljanje mogu li izjednačiti izraze množenjem i dijeljenjem.

4.1.3 Aktivnost *Očuvanje jednakosti-zbrajanje i oduzimanje*

Prije nego što se učenici u šestom razrednu osnovne škole upoznaju s algebarskim izrazima i linearnim jednadžbama trebali bi konceptualno dobro razumjeti jednakost i kako ju očuvati. Ova aktivnost je namijenjena upravo tome da učenici šestih razreda sami otkriju da što dodaju odnosno oduzmu na lijevoj strani jednakosti moraju dodati odnosno oduzeti na desnoj strani jednakosti kako bi očuvali jednakost. Potrebna je vaga te 30 kockice jednakih dimenzija za svaki par učenika. Na lijevom i desnom kraku se nalazi po 15 kockica.

Nastavni listić 4.1.1

1. Promotrite vagu ispred sebe opišite i matematički zapišite što vidite.
2. S lijevog kraka uklonite 5 kockica. Što se dogodilo s vagom? Kako biste matematički mogli zapisati u kako ste promijenili položaj vage?
3. Kako biste vagu mogli vratiti u prvobitni položaj bez da dodate uklonjene kockice? Opišite i zapišite matematički taj postupak.
4. Uklonite s desnog kraka 3 kockice. Što trebate napraviti kako biste izjednačili lijevi krak s desnim krakom? Zapišite matematički taj postupak.
5. Dodajte na lijevi krak 2 kockice, a na desni dodajte 3 kockice. U kakvom je položaju vaga? Zašto? Ako vaga nije u ravnoteži dovedite ju u taj položaj dodavanjem kockica. Objasnite svoje postupke.

6. Neka se na lijevom i na desnom kraku vage nalaze 23 kockice. Ako s lijevog kraka vage uklonimo 11 kockica, koliko kockica trebamo ukloniti s desnog kraka vage kako bi vaga bila u ravnoteži? Koliko kockica se nalazi na svakom kraku?

7. Neka se na lijevom i desnom kraku vage nalazi 19 kockica. Ako na desni krak stavimo 7 kockica, koliko kockica trebamo staviti na lijevi krak vage kako bi ona bila u ravnoteži? Koliko kockica se nalazi na svakom kraku?

8. Ako s nekog kraka vage u ravnoteži uklonimo n kockica, što moramo napraviti s drugim krakom vage kako bi vaga bila u ravnoteži?

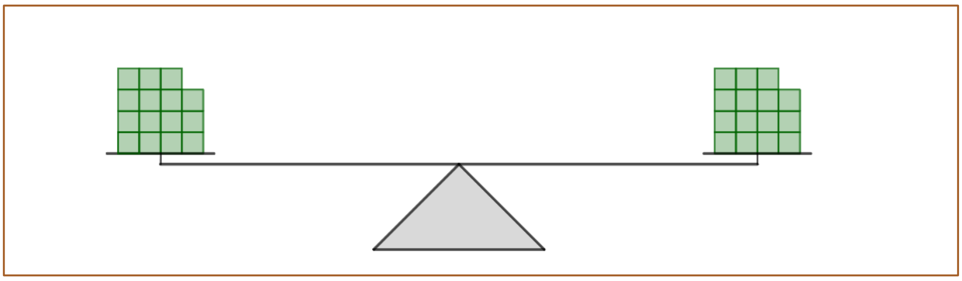
9. Ako na neki krak vage u ravnoteži stavimo n kockica, što moramo napraviti s drugim krakom vage kako bi vaga bila u ravnoteži?

10. Kako prethodne zaključke možete primijeniti na jednakost?

Učenici promatraju vagu i uočavaju da se na svakom kraku nalazi po 15 kockica. Zatim slijede upute te uklanjaju određen broj kockica.

Riješeni nastavni listić 4.1.3-1

1. Promotrite vagu ispred sebe opišite i matematički zapišite što vidite.



Slika 4.1.3-1 prikaz početnog položaja vage

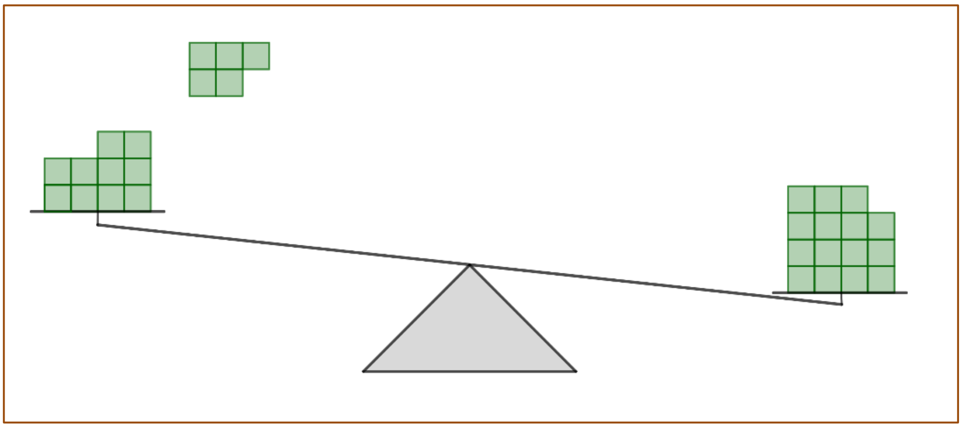
Vaga je u ravnoteži jer se na svakom kraku vage nalazi 15 kockica.

$$15 = 15$$

2. S lijevog kraka uklonite 5 kockica. Što se dogodilo s vagom? Kako biste matematički mogli zapisati u kako ste promijenili položaj vage?

Vaga više nije u ravnoteži. Desni krak je teži od lijevog jer se na njemu nalazi 5 kockica više.

$$15 - 5 < 15$$



Slika 4.1.3-2 Prikaz vage

Učenici uočavaju da vaga više nije u ravnoteži te je sljedeći korak vagu vratiti u ravnotežni položaj. Kako su uklonili 5 kockica s lijevog kraka vage zaključuju da moraju ukloniti 5 kockica s desne strane kako bi vaga bila u ravnoteži. Do tog saznanja mogu doći raznim taktika npr. uklanjaju kockicu po kockicu dok se krakovi vage ne izjednače ili mogu ukloniti više kockica od jedanput i vidjeti jesu li uklonili dobar broj kockica dok ne dođu do zaključka da s desnog kraka trebaju ukloniti točno 5 kockica. Apstrahiraju postupak uklanjanja kockica s desnog kraka vage te ga poistovjećuju s oduzimanjem broja 5 od broja 15 na desnoj strani jednakosti.

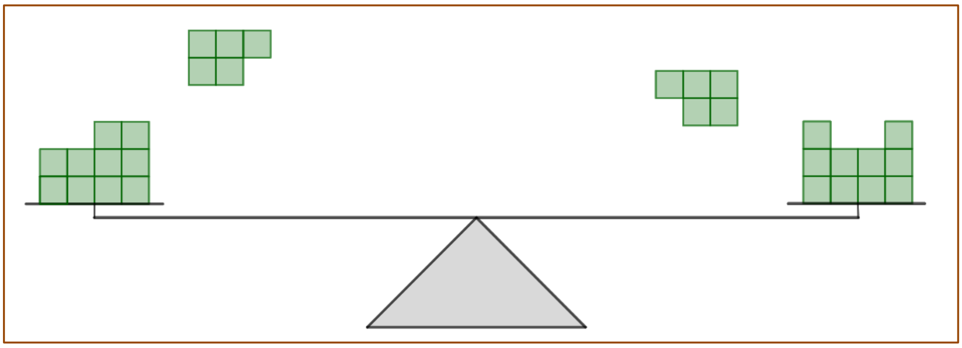
Riješeni nastavni listić 4.1.3-2 nastavak

3. Kako biste vagu mogli vratiti u prvobitni položaj bez da dodate uklonjene kockice? Opišite i zapišite matematički taj postupak.

   Krakove vage možemo izjednačiti tako da s lijeve strane uklonimo 5 kockica.

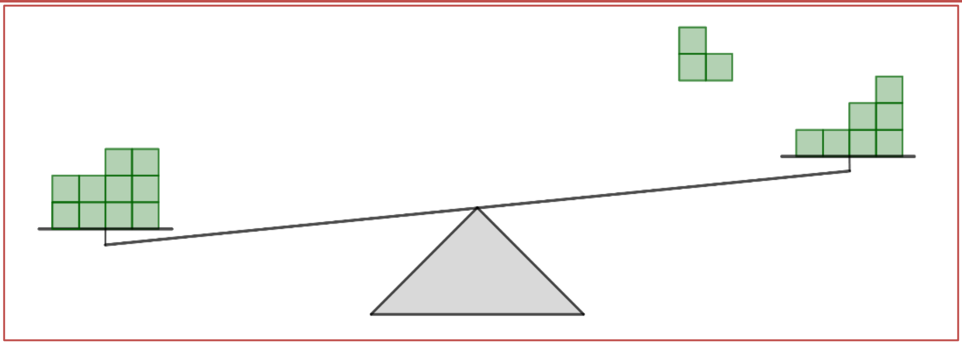
   $$10 = 15 - 5$$

4. Uklonite s desnog kraka 3 kockice. Što trebate napraviti kako biste izjednačili lijevi krak s desnim krakom? Zapišite matematički taj postupak.



Slika 4.1.3-3 Prikaz vage

   Ako uklonimo 3 kockice s desnog kraka lijevi krak vage će biti teži od desnog kraka pa će vaga biti nagnuta u lijevu stranu.

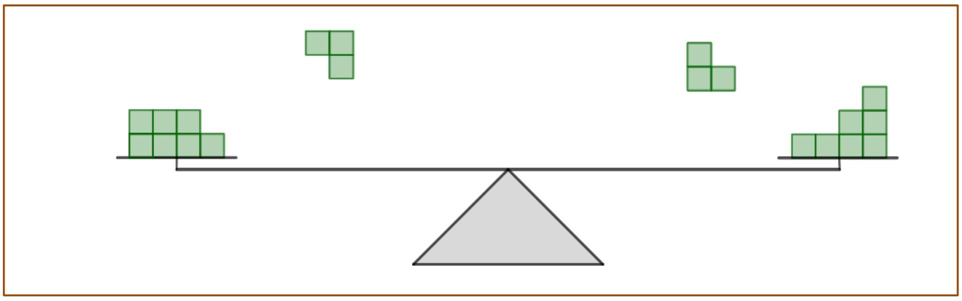


Slika 4.1.3-4 Prikaz vage

$$10 > 10 - 3$$

Kako bismo izjednačili krakove vage moramo ukloniti 3 kockice s lijevog kraka vage.

$$10 - 3 = 10 - 3$$

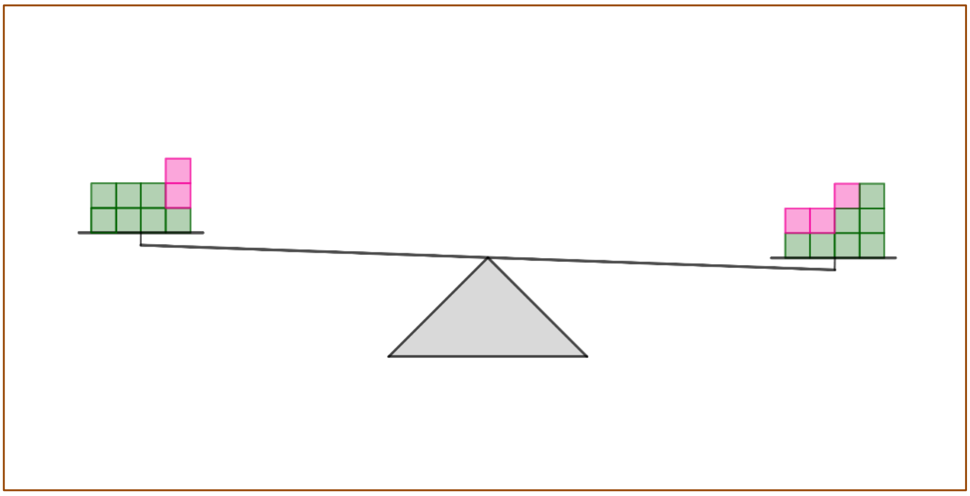


Slika 4.1.3-5 Prikaz vage

Kako je u 3. zadatku bilo potrebno ukloniti kockice s lijevog kraka te izjednačiti uklanjanjem kockica s desnog kraka potrebno je razlikovati slučaj kada se prvo uklone kockice s desnog kraka, te je potrebno izjednačiti lijevi krak što rade u 4. zadatku. Nakon što su učenici uočili da ako s jednog kraka uklone određeni broj kockica trebaju ukloniti isti broj kockica i s drugog kraka kako bi vaga bila u ravnoteži, istražuju što se dogodi kad dodaju različit broj kockica na krakove vage u ravnoteži. U 5. zadatku dodaju dvije kockice na lijevi krak i tri kockice na desni krak. Uočavaju da vaga nije u ravnoteži te zaključuju da je to zato što su dodali različit broj kockica na krakove vage. Kako bi izjednačili vagu dodaju još jednu kockicu na lijevi krak vage kako bi ju uravnotežili. Zaključuju da je potrebno dodati jednak broj kockica na oba kraka vage kako bi ona ostala u ravnoteži.

Riješeni nastavni listić 4.1.3-1 nastavak

5. Dodajte na lijevi krak 2 kockice, a na desni dodajte 3 kockice. U kakvom je položaju vaga? Zašto? Ako vaga nije u ravnoteži dovedite ju u taj položaj dodavanjem kockica. Objasnite svoje postupke.



Slika 4.1.3-6 prikaz vage

Vaga je nagnuta na desnu stranu jer smo na desni krak dodali više kockica.

Kako imaju ukupno 30 kockica na raspolaganju učenici moraju postupak stavljanja kockica na krakove vage i izjednačavanje nastaviti misaono za zadatke 6 i 7.

6. Neka se na lijevom i na desnom kraku vage nalaze 23 kockice. Ako s lijevog kraka vage uklonimo 11 kockica, koliko kockica trebamo ukloniti s desnog kraka vage kako bi vaga bila u ravnoteži? Koliko kockica se nalazi na svakom kraku?

   S desnog kraka bismo trebali ukloniti isto 11 kockica kako bi vaga bila u ravnoteži.

$$23 - 11 = 23 - 11$$
$$12 = 12$$

   Na svakom kraku nalazi se dvanaest kockica.

7. Neka se na lijevom i desnom kraku vage nalazi 19 kockica. Ako na desni krak stavimo 7 kockica, koliko kockica trebamo staviti na lijevi krak vage kako bi ona bila u ravnoteži? Koliko kockica se nalazi na svakom kraku?

   Na lijevi krak trebamo staviti 7 kockica kako bi vaga bila u ravnoteži.

$$19 + 7 = 19 + 7$$
$$26 = 26$$

   Na svakom kraku se nalazi 26 kockica.

8. Ako s nekog kraka vage u ravnoteži uklonimo *n* kockica, što moramo napraviti s drugim krakom vage kako bi vaga bila u ravnoteži?

   Moramo s drugog kraka ukloniti *n* kockica.

9. Ako na neki krak vage u ravnoteži stavimo *n* kockica, što moramo napraviti s drugim krakom vage kako bi vaga bila u ravnoteži?

   Moramo na drugi krak dodati *n* kockica.

10. Kako prethodne zaključke možete primijeniti na jednakost?

Ako izrazu na lijevoj strani jednakosti dodamo broj, isti broj moramo dodati izrazu na desnoj strani jednakosti. Isto vrijedi za oduzimanje.

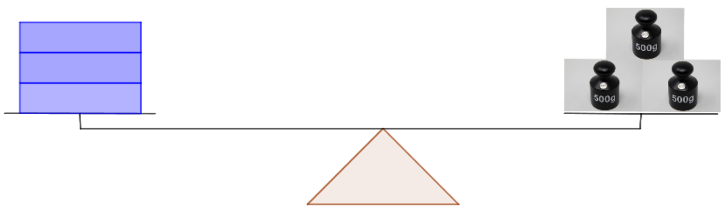
Analogijom pomoću nepotpune indukcije učenici dolaze do zaključka da ako izrazu na jednoj strani jednakosti dodaju odnosno oduzmu određeni broj, isti taj broj moraju dodati odnosno oduzeti izrazu na drugoj strani jednakosti kako bi jednakost vrijedila.

4.1.4 Aktivnost *Očuvanje jednakosti-množenje i dijeljenje*

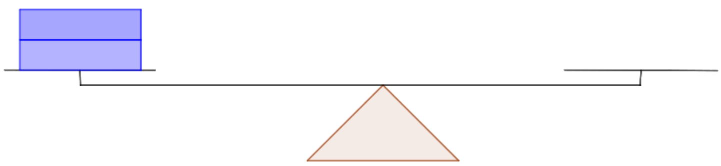
Nakon što učenici otkriju kako očuvati jednakost prilikom zbrajanja i oduzimanja, trebali bi otkriti kako se jednakost čuva prilikom množenja i dijeljenja. Aktivnost je namijenjena učenicima šestih razreda osnovne škole te se izvodi u četveročlanim skupinama. Za svakog učenika u skupini je potreban nastavni listić koji se razlikuje za svakog učenika, a nastavni listići za skupine su isti.

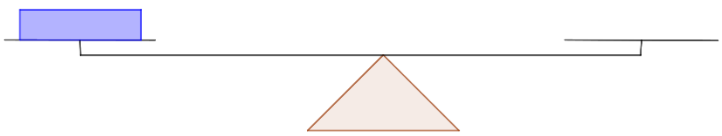
Nastavni listić 4.1.4 Primjer za jednog učenika u skupini

1. Promotrite vagu na slici. Utezi koje vidite teški 0.5kg, a na lijevom kraku nalaze se tri plave kutije. Što možete zaključiti o kutijama koje se nalaze na lijevom kraku?

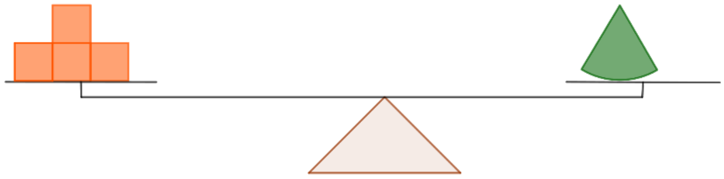


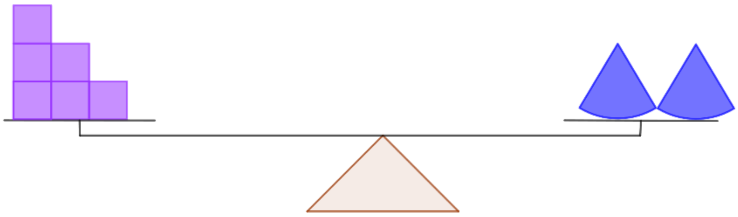
2. Nadopunite prazni krak vage u skladu s uočenim u prvom zadatku tako da vaga bude u ravnoteži.





3. Što moramo napraviti s predmetima na lijevom kraku vage ako udvostručimo broj predmeta na desnom kraku kako bi vaga ostala u ravnoteži?





4. Što moramo napraviti s predmetima na desnom kraku vage ako prepolovimo broj predmeta na lijevom kraku kako bi vaga ostala u ravnoteži?

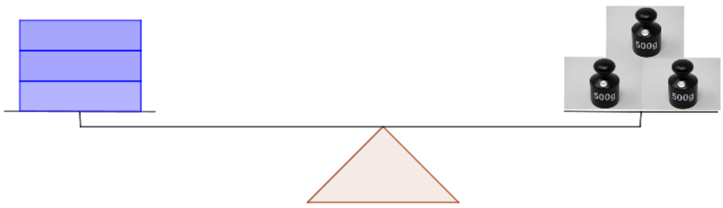
5. Ako broj predmeta na jednom od krakova povećamo *n* puta, kako bi uravnotežili vagu?

6. Ako broj predmeta na jednom od krakova smanjimo *n* puta, kako bi uravnotežili vagu?

Prije početka aktivnosti s učenicima je potrebno ponoviti kakvi sve položaji mogu biti, te naglasiti iako su slike predmeta dvodimenzionalne da ih treba zamisliti u prostoru kako ih važemo koristeći vagu.

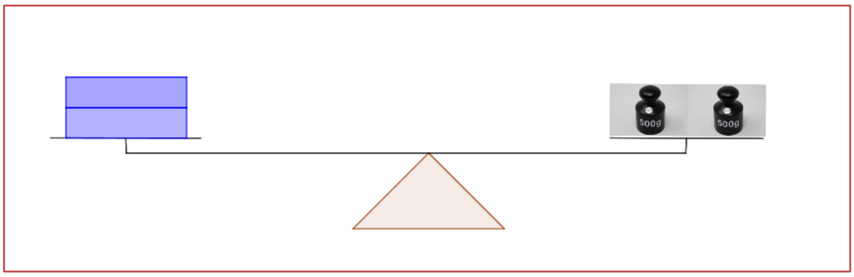
Riješeni nastavni listić 4.1.4-1

1. Promotrite vagu na slici. Utezi koje vidite teški 0.5kg, a na lijevom kraku nalaze se tri plave kutije. Što možete zaključiti o kutijama koje se nalaze na lijevom kraku?

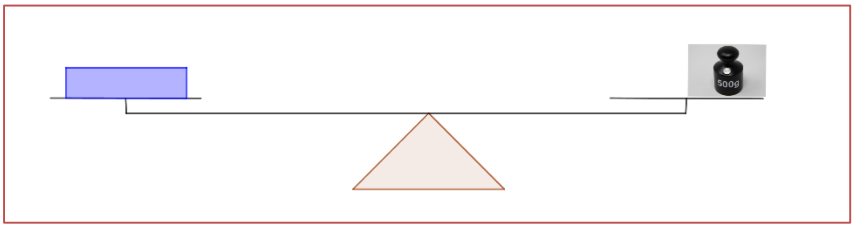


   3 Kutije su teške 1.5 kg. Kako se na desnom kraku nalaze tri utega, a na lijevom kraku tri kutije, jedna kutija je teška kao jedan uteg a to je 0.5 kg.

2. Nadopunite prazni krak vage u skladu s uočenim u prvom zadatku tako da vaga bude u ravnoteži.



Slika 4.1.4-1 primjer učeničkog crteža

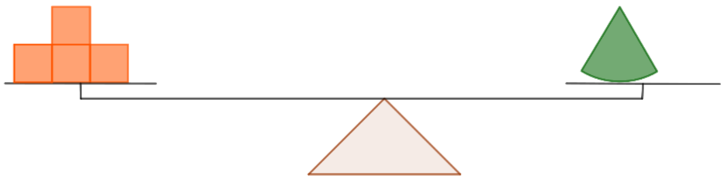


Slika 4.1.4-2 primjer učeničkog crteža

U prvom zadatku učenici promatraju sliku i na temelju nje donose zaključke. Najbitnije je da učenici uoče da se na slici nalaze tri kutije i tri utega težine 0.5 kg te da zaključe da je je jedna kutija teška 0.5 kg. Pomoću tih zaključaka lako će riješiti 2. zadatak koji im zapravo služi kako bi potvrdili pravilo raspravom u skupini. Na prvoj slici će nacrtati dva utega, a na trećoj jedan uteg. U 3. zadatku mogu odmah uočiti kako je jedan stožac težak kao četiri kockice, dva stošca bi bila teška kao osam kockica. U 4. zadatku broj predmeta smanjuju za pola. Mogu uočiti ako je šest kockica jednako teško kao dva stošca, da bi pola od šest kockica, odnosno tri kockice bile teške kao polovica od dva stošca tj. jedan stožac. Zaključuju ako broj predmeta na lijevom kraku smanje za pola, moraju za pola smanjiti i broj predmeta na desnom kraku.

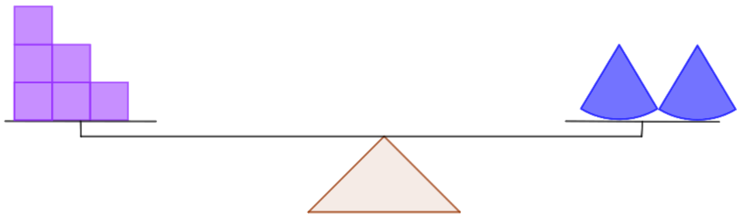
Riješeni nastavni listić 4.1.4-2 nastavak

3. Što moramo napraviti s predmetima na lijevom kraku vage ako udvostručimo broj predmeta na desnom kraku kako bi vaga ostala u ravnoteži?



Ako na lijevom kraku udvostručimo broj kockica bit će ih 8, tada trebamo udvostručiti i broj stožaca na desnom kraku.

4. Što moramo napraviti s predmetima na desnom kraku vage ako prepolovimo broj predmeta na lijevom kraku kako bi vaga ostala u ravnoteži?



Na lijevom kraku se nalazi šest kockica, a na desnom dva stošca. Iz toga možemo zaključiti da je jedan stožac jednako težak kao tri kockice. Ako prepolovimo broj stožaca na desnom kraku moramo prepoloviti broj kockica na lijevom kraku. Tada će se na lijevom kraku nalaziti tri kockice, a na desnom jedan stožac.

Sljedeći korak pri zaključivanju bi bila generalizacija. Kako se nastavni listići razliku za sve grupe u razredu u nekim grupa trebat broj predmeta smanjivat, odnosno povećavati trostruko ili četverostruko, ako učenici i ne dođu do zaključka za 5. i 6. zadatak sigurno će svi do njega doći nakon razredne diskusije i analize rješenja za sve grupe u razredu.

Riješeni nastavni listić 4.1.4-3 nastavak

5. Ako broj predmeta na jednom od krakova povećamo *n* puta, kako biste uravnotežili vagu?

   Ako broj predmeta na jednom kraku povećamo n puta moramo povećati *n* puta i broj predmeta na drugom kraku.

6. Ako broj predmeta na jednom od krakova smanjimo *n* puta, kako biste uravnotežili vagu?

   Ako broj predmeta na jednom kraku smanjimo *n* puta, moramo *n* puta smanjiti broj predmeta na drugom kraku kako bi vaga bila u ravnoteži.

4.2 Značenje varijabli i nepoznanica

Prijelaz s aritmetike na algebru je izazovan za učenike jer algebra uključuje zapisivanje, interpretiranje i upotrebu matematičkih izraza i jednadžbi koji sadrže varijable. Pravilna upotreba i interpretacija varijabli je u centru prijelaza s aritmetike na algebru. Kako je već opisano varijable se koriste u razne svrhe, ali kroz školovanje se često te razlike ne ističu dovoljno što kod učenika izaziva općenito nerazumijevanje koncepta varijable. Cilj sljedećih aktivnosti je razvoj učeničkog razumijevanja upotrebe varijabli kao predstavnika specifičnih numeričkih vrijednosti (nepoznanice) te upotrebe varijabli kao količina koje variraju.

4.2.1 Aktivnost *Slovo kao nepoznat broj*

Aktivnost je namijenjena učenicima četvrtog razreda osnovne škole. Učenici suradničkim radom u četveročlanim skupinama pokušavaju pomoću vage otkriti koliko su teški predmeti koje posjeduju, a zatim otkrivaju koliko su teški paketići iznenađenja. Cilj aktivnosti je da učenici otkriju da se slova mogu koristiti za označavanje nepoznatih veličina. Aktivnošću se ostvaruje ishod MAT OŠ B.4.1. Za aktivnost su osim vage potrebne kutijice s predmetima različitih težina takve da po dvije skupine imaju istu kutiju, te utezi različitih težina. Učenici moraju imati kuhinjske utege težine 500g, 100 g, 50 g i 10 g. Kao utege možemo koristiti i ribolovne utege koji su općenito manjih težina od 10 g do 120 g.

Nastavni listić 4.2.1 Primjer za jednu skupinu učenika

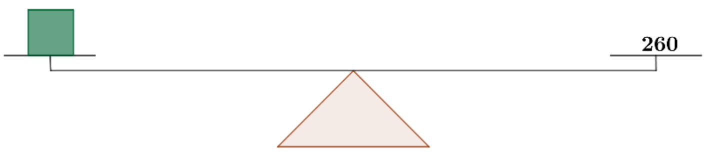
1. Na jedan krak vage stavite svoju pernicu i odredite njezinu težinu. Kako biste matematički zapisali koliko je teška?

2. Na jedan krak vage stavite svoju bilježnicu i odredite njezinu težinu. Kako biste matematički zapisali koliko je teška?

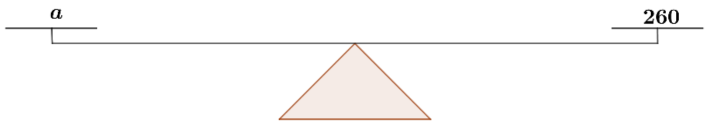
3. Kako ste saznali težinu predmeta? Koji znak ste koristili prilikom matematičkog zapisa? Zašto? Raspravite u skupini!

4. Stavite paketić iznenađenja na vagu i odredite njegovu težinu. Znate li koji je predmet u paketiću? Kako biste nazvali nepoznati predmet u paketiću?

5. Promotrite sliku. Što možete zaključiti iz slike? Zapišite matematički.



6. Promotrite sliku. Što možete zaključiti iz slike? Zapišite matematički.



7. Je li nam poznato što zeleni kvadratić i slovo a predstavljaju? Znamo li čemu su jednaki?

8. Čemu je jednako  $+a$? Obrazloži.

9. Kako bismo mogli označiti paketić iznenađenja kako bi matematički mogli zapisati da je težak 260 grama?

10. Promotrite zadatak $\square = 2 + 3$. Što prazna kućica označava?

11. Što označava a u jednadžbi $a = 2 + 3$?

12. Čemu nam je služilo slovo a u pitanima? Jesmo li mogli uzeti drugo slovo u istu svrhu? Kako biste nazvali takva slova?

Prije nego što učenici krenu vagati predmete potrebno ih je upoznati s utezima koje imaju na raspolaganju i s vagom koju koriste kako bi znali izvagati pernice i bilježnice. Također je dobro iskoristiti priliku za komentiranje s učenicima greške u mjerenju, te ih upitati što misle zašto nemaju uteg težine 5 g na raspolaganju. Učenici sami važu bilježnice i pernice te u skupini raspravljaju kako bi mogli matematički zapisati koliko je teška pernica i bilježnica. U skupini učenici trebaju doći do zaključka da mogu koristiti znak jednako jer je pernica jednako teška kao i utezi težine 570 g.

Riješeni nastavni listić 4.2.1-1

1. Na jedan krak vage stavite svoju pernicu i odredite njezinu težinu. Kako biste matematički zapisali koliko je teška?

   Pernica je teška 570 grama.

   $$pernica = 570\ g$$

2. Na jedan krak vage stavite svoju bilježnicu i odredite njezinu težinu. Kako biste matematički zapisali koliko je teška?

   Bilježnica je teška 200 grama.

   $$bilježnica = 200\ g$$

3. Kako ste saznali težinu predmeta? Koji znak ste koristili prilikom matematičkog zapisa? Zašto? Raspravite u skupini!

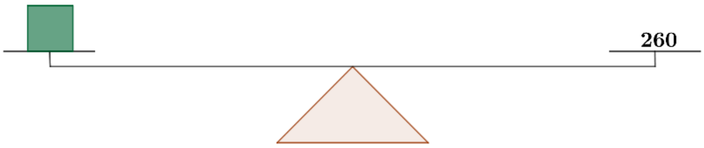
   Težinu smo saznali tako da predmete stavimo na jedan krak vage, a na drugi krak vage smo dodavali utege dok se težina predmeta na jednom kraku nije izjednačila s težinom utega. Pri matematičkom zapisu koristili smo znak jednako.

Nakon što su se učenici uvještili vaganju s dvokrakom vagom imaju zadatak izvagati paketić iznenađenja čiji sadržaju ne znaju. Otkrivaju da je on težak 260 g, te motiviramo učenike da daju ime predmetu u paketiću iznenađenja. Učenici potom dobivaju sliku vage iz koje mogu zaključiti da je kvadratić jednak 260. Učenici mogu također protumačiti sliku kao kockicu koja je teška 260 g, ali tada bi ih nastavnik trebao podsjetiti da vaga u ravnoteži znači jednakost, a da je kvadratić u ovom primjeru simbol, a ne kockica. Također upućujemo učenike da broj 260 ne mogu protumačiti kao utege težine 260 g, već da doslovno shvate kao broj, a vagu kao znak jednakosti. Tada zaključuju da je kvadratić jednak 260, te analogno u sljedećem zadatku zaključuju da je slovo *a* jednako 260. Shvaćaju da zapravo zeleni kvadratić i slovo *a* predstavlja broj 260, te u 8. zadatku primjenjuju zaključak.

4. Stavite paketić iznenađenja na vagu i odredite njegovu težinu. Znate li koji je predmet u paketiću? Kako biste nazvali nepoznati predmet u paketiću?

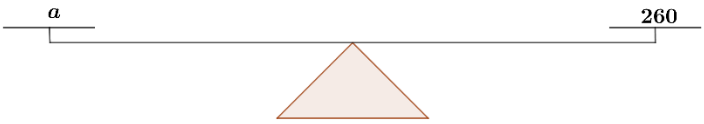
   Predmet u paketiću iznenađenja je težak 260 grama. Ne znamo koji je predmet u paketiću iznenađenja pa ga možemo nazvati nepoznati, nepoznato, nepoznanica.

5. Promotrite sliku. Što možete zaključiti iz slike? Zapišite matematički.



 $= 260$

6. Promotrite sliku. Što možete zaključiti iz slike? Zapišite matematički.



$a = 260$

7. Je li nam poznato što zeleni kvadratić i slovo a predstavljaju? Znamo li čemu su jednaki?

   Nije nam poznato što predstavljaju, ali su jednaki broju 260.

8. Čemu je jednako  $+a$? Obrazloži.

   Bilo bi jednako $260 + 260 = 520$ jer je zeleni kvadratić jednak 260 i slovo a je jednako 260.

9. Kako bismo mogli označiti paketić iznenađenja kako biste matematički mogli zapisati da je težak 260 grama?

   Mogli bismo ga označiti simbolom ili slovom i napisati $a = 260$ g.

10. Promotrite zadatak $\square = 2 + 3$. Što prazna kućica označava?

    Prazna kućica označava mjesto gdje trebamo upisati rješenje, odnosno broj 5.

11. Što označava a u jednadžbi $a = 2 + 3$?

    Slovo a označava broj 5.

12. Čemu nam je služilo slovo *a* u pitanima? Jesmo li mogli uzeti drugo slovo u istu svrhu? Kako biste nazvali takva slova?

Slovo *a* je označavalo nešto nepoznato pa ga možemo zvati nepoznanica. Mogli smo koristiti bilo koje drugo slovo.

Učenici postepeno dolaze do zaključka da slova u matematici označavaju nešto što je nepoznato, te su spremni za daljnju primjenu nepoznanica.

4.2.2 Aktivnost *Nepoznanice u jednadžbama*

Aktivnošću učenici petih razreda osnovne škole otkrivaju kako mogu primijeniti vezu zbrajanja i oduzimanja pri rješavanju jednadžbi s jednom nepoznanicom. Aktivnošću se ostvaruju ishodi MAT OŠ B.4.1. i MAT OŠ B.5.1. Učenici rješavaju zadatke na nastavnom listiću u paru tako da prvi zadatak rješavaju samostalno, a zatim provjeravaju rješenja drugog učenika, dok drugi zadatak rješavaju zajedno primjenjujući uočenu vezu zbrajanja i oduzimanja iz prvog zadatka kako bi odredili čemu je jednaka nepoznanica *x*.

Riješeni nastavni listić 4.2.2 Primjer za jedan par učenika

1. Odaberite stupce koje će te rješavati SAMOSTALNO. Nakon što riješite sve zadatke u stupcu usporedite rješenja i zapišite što ste uočili.

$24+\boxed{29}=53$ jer je $53-24=\boxed{29}$	$47+\boxed{15}=62$ jer je $62-47=\boxed{15}$
$\boxed{47}+15=62$ jer je $62-15=\boxed{47}$	$\boxed{24}+29=53$ jer je $53-29=\boxed{24}$
$112-\boxed{24}=88$ jer je $112-88=\boxed{24}$	$80-\boxed{25}=55$ jer je $80-55=\boxed{25}$
$74-\boxed{54}=20$ jer je $74-20=\boxed{54}$	$168-\boxed{34}=134$ jer je $168-134=\boxed{34}$
$\boxed{80}-25=55$ jer je $55+25=\boxed{80}$	$\boxed{112}-24=88$ jer je $88+24=\boxed{112}$
$\boxed{168}-34=134$ jer je $134+34=\boxed{168}$	$\boxed{74}-54=20$ jer je $20+54=\boxed{74}$

Uočili smo: Ako je u zadatku nepoznat pribrojnik izračunamo ga tako da od zbroja oduzmemo poznati pribrojnik. Ako je u zadatku nepoznat umanjitelj izračunamo ga tako da od poznatog umanjenika oduzmemo poznatu razliku. Ako je u zadatku nepoznat umanjenik izračunamo ga tako da zbrojimo poznatu razliku i poznati umanjitelj.

2. Pomoću uočenog u prethodnom zadatku odredite čemu je jednak *x*. Radite U PARU!

   a) $125-34=x$

      $x=91$ jer je $91+34=125$

   b) $53+13=x$

      $x=66$ jer je $66-13=53$

   c) $12-x=8$

      $x=4$ jer je $8+4=12$

   d) $37+x=52$

      $x=15$ jer je $52-37=15$

   e) $x-23=45$

      $x=68$ jer je $23+45=68$

   f) $x+25=75$

      $x=50$ jer je $75-25=50$

3. Jeste li u svim zadacima mogli odrediti koliki je *x*? Kako?

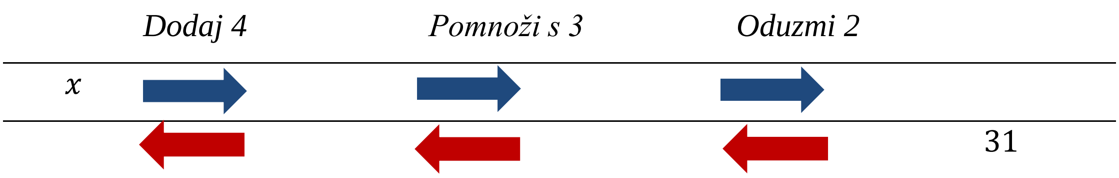
   U svim zadacima smo boli odrediti koliki je *x* jer smo koristili vezu zbrajanja i oduzimanja.

4.2.3 Aktivnost *Linearne jednadžbe*

Sljedeća aktivnost je namijenjena učenicima šestih razreda osnovne škole koji se uče kako rješavati linearne jednadžbe te se njom ostvaruje ishod MAT OŠ B.6.1. Aktivnost je namijenjena radu u paru te bi bilo poželjno učenike slabijih matematičkih sposobnosti spojiti s učenicima jačih matematičkih sposobnosti. Za svaki par je potreban izrezak sa zadatkom, a cilj svakog zadatka je otkriti što je *x* metodom vraćanja unatrag.

Nastavni listić 4.2.1 Primjer za jedan par učenika

1. Promotrite zadani dijagram. Prvo odredite o kojem se izrazu radi slijedeći upute iznad strelica. Zatim pokušajte odgonetnuti koji broj predstavlja *x* izvršavanjem računskih operacija iznad strelica. Radite u smjeru strelica. Kako biste otkrili o kojem broju *x* se radi, radite unatrag poništavajući napravljeno u gornjem retku.



2. Zapišite matematički svaki korak kako ste došli do odgovora što je *x*. Započnite od toga da napišete čemu je jednako 31.

Prije samog početka aktivnosti s učenicima je potrebno raspraviti znaju li što bi to bio postupak vraćanja unatrag i pojam suprotnih računskih operacija. Dobra analogija iz stvarnog svijeta je postupak obuvanja cipela. Kako bismo obuli cipele prvo trebamo obuti čarape, a zatim cipele. A kako bismo se izuli potrebno je prvo izuti cipele, a zatim čarape. Postupak izuvanja cipela je suprotan od obuvanja cipela. Nakon što učenicima postane jasnije što se traži od njih sljedeći korak je otkriti o kakvom izrazu je riječ slijedeći upute iznad strelica.

Riješeni nastavni listić 4.2.3-1

1. Promotrite zadani dijagram. Prvo odredite o kojem se izrazu radi slijedeći upute iznad strelica. Zatim pokušajte odgonetnuti koji broj predstavlja *x* izvršavanjem računskih operacija iznad strelica. Radite u smjeru strelica. Kako biste otkrili o kojem broju *x* se radi, radite unatrag poništavajući napravljeno u gornjem retku.

	Dodaj 4		*Pomnoži s 3*		*Oduzmi 2*	
x	→	$x+4$	→	$3(x+4)$	→	$3(x+4)-2$
7	←	11	←	33	←	31

Prilikom rješavanja 1. zadatka možemo uočiti razumiju li učenici značenje riječi dodaj, pomnoži i oduzmi. Prilikom rješavanja drugog retka klasična pogreška koju možemo očekivati je u drugom koraku. Umjesto da učenici cijeli izraz $x + 4$ pomnože s 3, množe samo nepoznanice *x* s 3. Za učenike je bitan proces razmišljanja kojim povezuju da je izraz $3(x + 4) - 2$, dobiven na kraju drugog retka jednak broju na kraju trećeg retka, odnosno $3(x + 4) - 2 = 31$ te od tud započeti „traženje“ *x*-a. U 2. zadatku pri matematičkom zapisu također treba očekivati dosta grešaka i drugačijih zapisa ali svaku ideju trebamo prokomentirati. Npr.

$$3(x + 4) - 2 = 31$$
$$3(x + 4) - 2 = 31 + 2$$
$$3(x + 4) - 2 = (31 + 2): 3$$
$$3(x + 4) - 2 = (31 + 2): 3 - 4 = 7$$

U slučaju ovakvog zapisa rješenja učenike treba podsjetiti kako se čuva jednakost i što znači znak jednako. Rješenje je prikazano u nastavku.

Riješeni nastavni listić 4.2.3-2 nastavak

2. Zapišite matematički svaki korak kako ste došli do odgovora što je x i objasnite ga. Započnite od toga da napišete čemu je jednako 31.

Idemo unatrag te zaključujemo da je izraz na kraju drugog retka jednak izrazu na kraju trećeg

$$3(x+4)-2=31$$

Kako bismo poništili oduzimanje broja 2, moramo dodati broj 2.

$$3(x+4)-2+2=31+2$$

Kako bismo poništili množenje s 3 moramo izraz podijeliti s 3, dobijemo izraz $x+4=11$

$$3(x+4):3=33:3$$

Kako bismo poništili dodavanje broja 4, moramo od izraza oduzeti broj 4 te dobijemo rješenje :

$$x+4-4=11-4$$
$$x=7$$

Ovakav način razmišljanja jača konceptualno razumijevanje linearni jednadžbi i otvara drugačiji pristup pri njihovom rješavanju.

4.2.4 Aktivnost *Varijable*

Aktivnost je namijenjena učenicima šestih razreda osnovne škole koji su već upoznati tim da slovo može predstavljati nepoznati vrijednost. Cilj aktivnosti je učeničko otkrivanje da simbol kao oznaka u zadatku može predstavljati više različitih vrijednost, ne samo jedinstvenu vrijednost. Nakon što učenici to otkriju uvodimo pojam varijable kao simbol čija se vrijednost može mijenjati. Aktivnost je namijenjena radu u tročlanim skupinama. Svaka skupina učenika dobiva nastavni listić sa zadatkom te slike kovanica od 50 centi, 1 euro i 2 eura, odgovore zapisuju i prikazuju u bilježnici.

Nastavni listić 4.2.2 Primjer nastavnog listića za jednu skupinu učenika

1. Ana je odlučila sljedeća tri tjedna štedjeti kako bi mogla kupiti novi ruksak za školu. U prvom tjednu je ubacila pet kovanica u kasicu prasicu, u drugom tjednu je uspjela ubaciti 7 kovanica u kasicu prasicu, dok je u trećem tjednu ubacila samo tri kovanice. Koliko je novca uštedjela Ana ako je ubacivala kovanice od:
   a) 50 centi
   b) 1 euro
   c) 2 eura

Zajedno: Zapišite cijeli matematički postupak računanja koliko je Ana uštedila. Usporedite rezultate. Zašto se razlikuju? Jeste li računali na isti način? Što uočavate?

Učenik 1: Prikaži kako je Ana štedjela pomoću slika kovanica.

Učenik 2: Prikaži kako je Ana štedjela riječima.

Učenik 3: Prikaži kako je Ana štedjela simbolima.

Zajedno:

Usporedite sve prikaze. Što uočavate? Što je zajedničko?

O čemu ovisi rezultat?

Što je sve promjenjivo u zadatku? Kako biste nazvali te vrijednosti?

Što se ne mijenja u zadatku? Kako biste nazvali te vrijednosti?

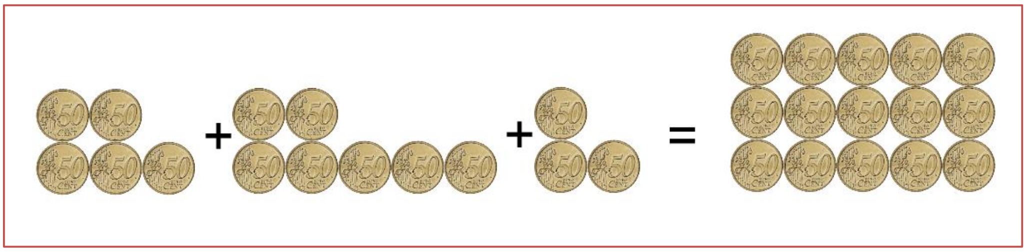
Učenici zajednički računaju koliko je Ana uštedjela te pišu:

a) $5 \cdot 0.5 + 7 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.5 = 2.5 + 3.5 + 1.5 = 7.5$
b) $5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 + 7 + 3 = 15$
c) $5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10 + 14 + 6 = 30$

Učenici uočavaju da se rezultati razlikuju iako su računali na isti način. Zaključuju da je to zato što su drugačije kovanice bile u pitanju. Također možemo očekivati da će učenici uočiti kako je rezultat dvostruko veći kada su u pitanju dvostruko veće kovanice.

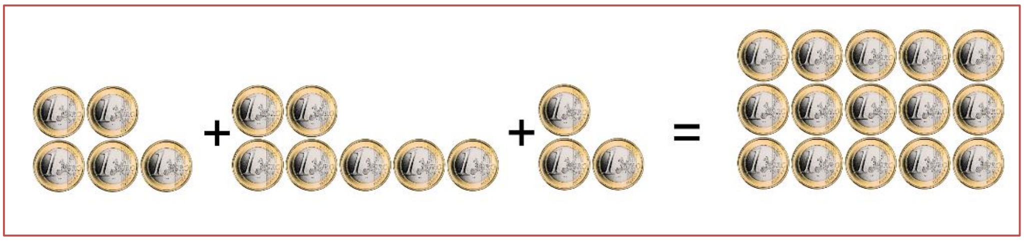
Rješenje prvog učenika pomoću slikovnog prikaza je prikazano na sljedećim slikama.

a)



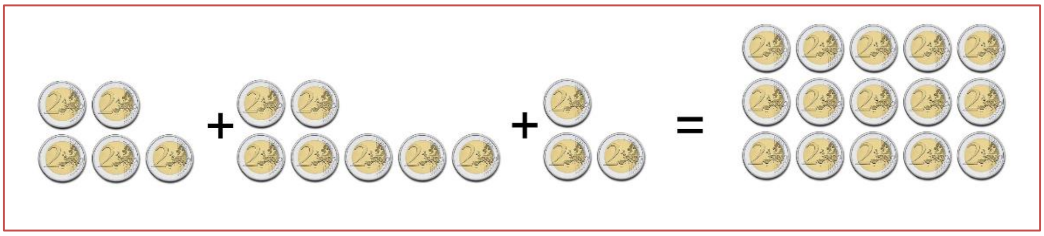
Slika 4.2.4-1 Primjer učeničkog rješenja s kovanicama od 50 centi

b)



Slika 4.2.4-2 Primjer učeničkog rješenja s kovanicama od 1 eura

c)



Slika 4.2.4-3 Primjer učeničkog rješenja s kovanicama od 2 eura

Učenik slikama prikazuju kako je Ana štedjela kako je prikazano na slikama 4.2.4-1, 4.2.4-2 i 4.2.4-3. Kako je takav zapis nepraktičan potrebno je učenike potaknuti da probaju pronaći praktičniji prikaz. Jedna od smjernica kojom im pomažemo je ta da umjesto skupine slika kovanica iskoriste samo jednu te da brojem naglase koliko takvih kovanica ima. Takvo rješenje je prikazano na slikama 4.2.4-4, 4.2.4-5 i 4.2.4-6.

a)

Slika 4.2.4-4 Primjer učeničkog rješenja s kovanicama od 50 centi u skraćenom obliku

b)

Slika 4.2.4-5 Primjer učeničkog rješenja s kovanicama od 1 eura u skraćenom obliku

c)

Slika 4.2.4-6 Primjer učeničkog rješenja s kovanicama od 2 eura u skraćenom obliku

Rješenja učenika 2 su:

a) „*Pet kovanica od pedeset centi plus sedam kovanica od pedeset centi plus tri kovanice od pedeset centi jednako je petnaest kovanica od pedeset centi.*“
b) „*Pet kovanica od jednog eura plus sedam kovanica od jednog eura plus tri kovanice od jednog eura jednako je petnaest kovanica od jednog eura.*“
c) „*Pet kovanica od dva eura plus sedam kovanica od dva eura plus tri kovanice od dva eura jednako je petnaest kovanica od dva eura.*“

Potrebno je potaknuti učenike da uoče kako riječi pet, pedeset, plus, sedam, tri, jednako, jedan, dva i petnaest mogu zamijeniti pripadajućim matematičkim oznakama te ih potaknuti da naprave tu promjenu. Rješenja bi tada izgledala:

a) *„5 kovanica od 50 centi + 7 kovanica od 50 centi + 3 kovanice od 50 centi = 15 kovanica od 50 centi“*
b) *„5 kovanica od 1 eura + 7 kovanica od 1 eura + 3 kovanice od 1 eura = 15 kovanica od 1 eura“*
c) *„5 kovanica od 2 eura + 7 kovanica od 2 eura + 3 kovanice od 2 eura = 15 kovanica od 2 eura“*

Učenik 3 treba prvo odabrati simbole koje bi koristio pri označavanju kovanice od 50 centi, 1 eura i 2 eura. Može odabrati simbole poput geometrijskih likova, ali kako već učenici koriste slova kao oznake potrebno ga je motivirati da koristi slova. Primjer rješenja bi bio:

a) $P = kovanica\ od\ 50\ centi$

$$5P + 7P + 3P = 15P$$

b) $J = kovanica\ od\ 1\ eura$

$$5J + 7J + 3J = 15J$$

c) $D = kovanica\ od\ 2\ eura$

$$5D + 7D + 3D = 15D$$

Nakon što učenici dođu do rješenja uspoređuju rezultate te popunjavaju drugi dio listića.

Riješeni nastavni listić 4.2.4-1

Zajedno:

Usporedite sve prikaze. Što uočavate? Što je zajedničko?

Izrazi koji opisuju kako je Ana štedjela su slični, razlikuju u ovisnosti o kovanici. Ako zamijenimo sliku s riječima ili simbolom značenje se neće promijeniti te će rezultat biti isti.

O čemu ovisi rezultat?

Rezultat ovisi o kovanicama koje je Ana ubacivala u kasicu prasicu.

Što je sve promjenjivo u zadatku? Kako biste nazvali te vrijednosti?

U zadatku se je mijenjala vrijednost kovanica. Te vrijednosti možemo nazvati promjenjive, izmjenjive, varirajuće,…

Koliko biste rješenja imali da nije bilo naglašeno koje kovanice je ubacila Ana u kasicu? Zašto?

Ima li bismo 8 rješenja, jer imamo kovanice od 1 cent, 2 centa, 5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi, 1 euro, 2 eura.

Što se ne mijenja u zadatku? Kako biste nazvali te vrijednosti?

Ne mijenja se količina kovanica ubačenih u kasicu. Stalne, konstantne, nepromjenjive,…

Nakon što učenici odgovore na sva pitanja slijedi diskusija s nastavnikom kako bi se nastavnik uvjerio da njihovi zaključci idu u dobrom smjeru. Nastavnik uvodi pojam varijable kao simbol čija se vrijednost može mijenjati te pojam konstante kao nepromjenjive veličine.

5 Algebarski izrazi

Prema Nacionalnom matematičkom kurikulumu učenici se tek u sedmom razredu osnovne škole susreću s algebarski izrazima, no ako promotrimo udžbenike za osnovnu školu algebarski izrazi se uvode u šestom razredu paralelno s uvođenjem linearnih jednadžbi što kod učenika rezultira poistovjećivanjem algebarskih izraza s linearnim jednadžbama. U nastavku rada opisane su aktivnosti pomoću koji se to može izbjeći te aktivnosti uvođenja algebarskih izraza, kao i aktivnosti kojima učenici otkrivaju kako računati s algebarskim izrazima na modelu površine.

5.1 Razvoj koncepta algebarskog izraza

U ovom poglavlju su opisane aktivnost kojom se osvještava postojanje algebarskih izraza kao generaliziranog zapisa broja, kao i aktivnost otkrivanja algebarskih izraza.

5.1.1 Aktivnost *Osvještavanje postojanja algebarskih izraza*

Aktivnost je namijenjena učenicima šestih razreda osnovne škole. Cilj aktivnosti je da učenicima osvijesti postojanje algebarskih izraza, odnosno ono što će oni uočiti je da postoji zajednički zapis problemske situacije koji vrijedi za beskonačno mnogo brojeva. Učenici rade u četveročlanim skupinama, te na kraju aktivnosti svaki predstavnik skupine predstavlja rješenja i zaključke vlastite skupine što pokreće razrednu diskusiju u kojoj učenici sučeljavaju različita mišljenja i ideje.

Riješeni nastavni listić 5.1.1 Primjer za jednu skupinu učenika

1. Petra, Martina i Karlo trebaju izmjeriti opseg bakinog vrta koji je pravokutnog oblika kako bi kupili pripadajuću ogradu. Na raspolaganju imaju štap i uže. Petar je uzeo štap, a Martina uže pa je Karlo odlučio koristiti duljinu stopala kako bi izmjerio opseg vrta. Petar je izmjerio da je vrt dug 7 i pol duljina štapa, a širok 6 duljina štapa. Martina je izmjerila da je vrt dug 5 duljina užeta, a širok 4 duljine užeta. Karlo je izmjerio da je vrt dug 150 stopa, a širok 120 stopa.
   a) Koliki je opseg vrta?
      Opseg vrta je 27 duljina štapa, 18 duljina užeta i 540 stopa.
   b) O čemu ovisi opseg vrta?
      Opseg vrta ovisi o alatu s kojim je izmjeren.
   c) Kako računamo opseg?
      Opseg vrta računamo tako da zbrojimo duljine rubova vrta.
   d) Možemo li s izračunatim podacima kupiti ogradu? Koji nam podatak treba?
      Ne možemo. Da bismo kupili ogradu potreban nam je opseg vrta u metrima.
   e) Kako možemo zapisati izraz pomoću kojeg računamo opseg vrta bez obzira s čim mjerimo?
      Možemo zapisati kao što smo zapisivali formulu za površinu pravokutnika $2a + 2b$.

2. Cijene proizvoda su u trgovini prikazane s PDV-om koji iznosi 25% osnovne cijene. Izračunajte cijenu proizvoda s PDV-om ako znamo cijenu proizvoda bez njega.

OSNOVNA CIJENA	20	40	50	70	100	x
PDV	5	10	16.25	17.5	125	0.25
CIJENA S PDV-OM	25	50	66.25	87.5	125	$x + 0.25x$

a) Kako možemo izračunati cijenu proizvoda s porezom? Opišite riječima?

Na cijenu proizvoda dodamo cijenu PDV-a koja iznosi 25% cijene.

b) O čemu ovisi iznos PDV-a?

Iznos PDV-a ovisi o cijeni proizvoda čiji se PDV računa.

c) O čemu ovisi cijena proizvoda s PDV-om?

Cijena proizvoda s PDV-om ovisi o osnovnoj cijeni.

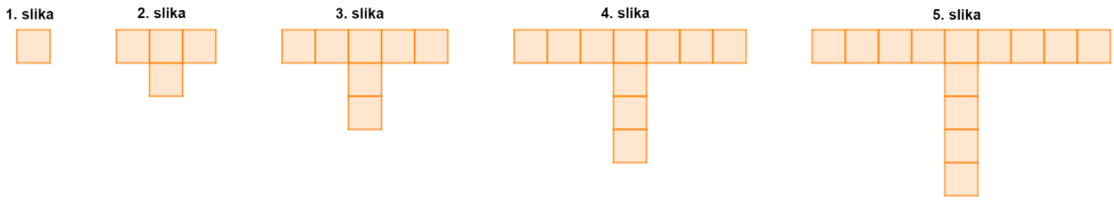
d) Ako dva proizvoda imaju istu osnovnu cijenu imaju li istu cijenu i s PDV-om? Što ako imaju različitu osnovnu cijenu?

PDV je isti za proizvode pa ako proizvodi imaju istu osnovnu cijenu imaju i istu cijenu s PDV-om, ako imaju različitu osnovnu cijenu tada imaju različitu cijenu s PDV-om.

e) Postoji li izraz kojem možemo izračunati cijenu s PDV-om bez obzira o cijeni proizvoda?

Cijena proizvoda ovisi o osnovnoj cijeni pa će to biti varijabla u izrazu. Cijenu PDV-a možemo izračunati kao $x + 0.25x = 1.25x$.

3. Promotrite sliku i popunite tablicu.



Broj slike	1	2	3	4	5	6	7	10	15
Broj kvadratića	1	4	7	10	13	16	19	28	43

a) Kakve ste sve pravilnosti uočili na danom nizu slika?

Na svakoj sljedećoj slici broj kvadratića se poveća za 1.

Imamo jedan središnji kvadrat na čija se tri stranice nalazi niz od $n-1$ kvadratića gdje je n redni broj slike.

U gornjem redu se nalazi $n+n-1=2n-1$ kvadrata, dok se u stupcu nalazi $n-1$ kvadratića, n je broj slike.

b) Kako ste odredili koliko kvadratića ima na 6. i 7. slici?

Na 6. slici nalaze se tri kvadrata više nego na 5. pa je na 6. slici 16 kvadratića, a na 7. tri kvadratića više što čini 19. kvadratića.

c) Kako ste odredili koliko kvadratića ima na 10. i 15. slici?

Na 10. slici imamo jedan središnji kvadrat i 9 kvadrata na tri stranice pa je to $3 \cdot 9 + 1 = 28$ kvadratića. Na 15. slici imamo jedan središnji kvadrat i 14 kvadrata na tri stranice kvadrata pa je to $1 + 3 \cdot 14 = 43$.

d) Koliko će kvadratića biti na 50. slici?

Na 50. slici nalazio bi se jedan središnji kvadrat i 49 kvadrata na tri stranice pa je to $1 + 3 \cdot 49 = 148$.

e) Koliko će kvadratića biti na 100. slici?

Na 100. slici nalazio bi se jedan središnji kvadrat i 99 kvadrata na tri stranice pa je to $1 + 3 \cdot 99 = 298$.

f) Koliko će kvadratića biti na n-toj slici?

Na n-toj slici nalazio bi se jedan središnji kvadrat i $n-1$ kvadrata na tri stranice pa je to $1 + 3 \cdot (n-1) = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$.

U razrednoj diskusiju prilikom uspoređivanja rješenja i zaključaka za prvi zadatak bitno je istaknuti da je zapis za opseg vrta do kojeg su svi učenici došli $2a + 2b$ gdje je a duljina, a b širina vrta, odnosno broj duljina štapa ili konopa ili broj stopa. Također potrebno je pitati učenike što misle koliko je dug štap, uže i Karlova stopa te za svaku ideju izračunati koliki je opseg vrta kako bi učenici uočili da se opseg vrta razlikuje za svaku mjeru koju su odabrali. U nastavku diskusije uočavaju da a i b mogu predstavljati bilo koju mjeru. U diskusiji za drugi zadatak učenici uočavaju kako je stopa PDV-a ista za svaki proizvod, ali se cijene s uključenim PDV-om razlikuju zbog toga što ovise o osnovnoj cijeni proizvoda. Potrebno je prokomentirati i zapis izraza kojim se može izračunati cijena proizvoda s PDV-om. Neki učenici se mogu odlučiti za zapis sa koeficijentom kao decimalnim brojem $1.25x$ dok se neki učenici mogu odlučiti za zapis s razlomkom jer znaju da je 25% cijene zapravo $\frac{1}{4}$ cijene pa zapisuju $x+\frac{1}{4}x=\frac{5}{4}x$. Učenici zatim mogu računati cijenu s PDV-om za proizvode s proizvoljnom cijenom kako bi uočili da x predstavlja bilo koju brojku. U trećem zadatku potrebno je raspraviti sve pravilnosti koje učenici uočavaju na nizu slika kao što je zapisano u rješenjima te zapisati svaku pravilnost koristeći varijable. Učenici mogu nacrtati 6. i 7. sliku u nizu, ali kako bi nacrtali 10. i 15. bit će im potrebno previše vremena pa će morati koristiti uočene pravilnosti kako bi izračunali koliko je kvadratića na slici, ako nisu sigurni u rješenje mogu nacrtati jednu od slika i provjeriti jesu li im rezultati istiniti. 50. i 100. sliku je ne moguće nacrtati pa će morati odrediti rješenje koristeći uočene pravilnosti. U diskusiji se uspoređuju rješenja svih skupina učenika te se uspoređuje rješenje za n-tu sliku. Učenici koji su zaključili da je niz slika nastaje tako da se na središnjem kvadratu nalaze tri niza kvadrata koja imaju jedan kvadratić manje nego što je redni broj slike zapisuju rješenje kao $1+3\cdot(n-1)=2+3n-3=3n-2$. Učenici koji su uočili da se u retku nalazi dvostruko kvadratića koliki je redni broj slike minus jedan kvadratić, a u stupcu se nalazi broj kvadratića koliki je redni broj slike minus jedan kvadratić koji su već brojali zapisuju kao $2n-1+n-1=3n-2$. Učenici također mogu uočiti da se na svakoj slici spajaju tri niza kvadratića koji imaju kvadratića onoliko koliki je redni broj slike, ali jedan kvadratić im je zajednički pa zaključuju da bi se isti kvadratić brojao tri puta umjesto jednom, odnosno 2 puta više nego što je potrebno pa od trostrukog broja kvadratića oduzimaju dva $3n-2$. Učenici trebaju uočiti kako su svi došli do istog zapisa za broj kvadratića na slici na drugačije načine, ali svaki zapis ovisi o rednom broju slike. Na kraju razredne diskusije nastavnik dobivena tri izraza zapisuje na ploču i pita učenike što im je zajedničko. Učenici uočavaju da ne znaju za niti jedan izraz čemu je jednak te da mogu poprimiti različite vrijednosti koje ovise o brojevima koje uvrste u njih, a mogu uvrstiti beskonačno mnogo brojeva.

5.1.2 Aktivnost *Otkrivanje algebarskih izraza*

Aktivnost je namijenjena učenicima šestih razreda osnovne škole. Cilj aktivnosti je otkrivanje pojma algebarski izraz. Aktivnost je namijenjena radu u četveročlanim skupinama te je za svaku skupinu potrebno 8 kartica na kojima su napisani algebarski ili brojevni izrazi. Učenici trebaju razvrstati kartice u skupine ali im nije rečeno po kojem kriteriju niti u koliko skupina treba razvrstati kartice.

$7x - 3$	$7 \cdot 9 + 4 \cdot 2$
$(-21) + 4 \cdot 20$	$k - l + 9$
$32 - 3 \cdot 5 + 10$	$2b + 7x$
$(-27a) + 19c$	$5u + (-3v)$

Slika 5.1.2-1 Primjer seta kartica za jednu skupinu učenika

Možemo očekivati dva moguća rješenja. Jedno rješenje je da učenici kartice razvrstaju u dvije skupine. Prva skupina se sastoji od brojevnih izraza čije vrijednosti učenici mogu izračunati, dok u drugu skupinu razvrstaju kartice s algebarskim izrazima, odnosno one izraze čiju vrijednost ne mogu izračunati jer mogu poprimiti beskonačno mnogo vrijednosti.

1. skupina kartica	2. skupina kartica
$7x - 3$	$7 \cdot 9 + 4 \cdot 2$
$k - l + 9$	$(-21) + 4 \cdot 20$
$2b + 7x$	$32 - 3 \cdot 5 + 10$
$(-27a) + 19c$	
$5u + (-3v)$	

Slika 5.1.2-2 Prikaz razvrstanih kartica u dvije skupine

Učenici trebaju objasniti kriterij po kojem su razvrstali kartice. Mogući kriteriji za ovaj slučaj je mogućnost je taj što se izrazi u jednoj skupini mogu izračunati, a u drugoj ne. Neki učenici mogu obrazložiti da se u jednoj grupi izrazi sastoje samo od brojeva dok u drugoj skupini sadrže i varijable. Učenici također mogu obrazložiti da su u jednoj skupini izrazi koji imaju samo jednu vrijednost, dok su u drugoj skupini izrazi koji mogu poprimiti beskonačno mnogo vrijednosti. Drugo moguće rješenje je da učenici razvrstaju kartice u tri skupine.

1. skupina kartica	2. skupina kartica	3. skupina kartica
$7 \cdot 9 + 4 \cdot 2$	$7x - 3$	$2b + 7x$
$(-21) + 4 \cdot 20$	$k - l + 9$	$(-27a) + 19c$
$32 - 3 \cdot 5 + 10$		$5u + (-3v)$

Slika 5.1.2-3 Prikaz razvrstanih kartica u tri skupine

Učenici koji na ovaj način razvrstaju kartice kriterij određuju prema tome što se nalazi u izrazu. U jednu skupinu sortiraju kartice koje sadrže samo izraze s brojevima, u drugu skupinu sortiraju izraze koje sadrže samo varijable, dok u treću skupinu sortiraju izraze koji sadrže varijable i brojeve. Nakon što učenici dovrše aktivnost i svaka grupa obrazloži kriterij po kojem je sortirala kartice cijeli razred zajednički donosi pravilo po kojem dijele kartice, a to je da se u prvoj skupini nalaze kartice s izrazima koji sadrže samo brojeve, odnosno brojevni izrazi čiju vrijednost mogu izračunati, a u drugoj i trećoj skupini kartice s izrazima koji se ne mogu izračunati jer varijable mogu poprimiti beskonačno mnogo vrijednosti. Te dvije skupine se razlikuju po tome zbrajaju li se varijable s brojevima ili ne. Nastavnik zatim skreće raspravu na pribrojnike u izrazima u prvoj skupini. Navodi učenike da uoče da pribrojnici imaju stalne vrijednosti, odnosno konstante vrijednosti te da ih zovemo konstante. Uvodi pojam konstante kao nepromjenjive veličine, odnosno racionalnog broja koji je unaprijed određen. Zatim nastavnik zajedno s učenicima analizira preostale dvije skupine čiji izrazi sadrže varijable, te varijable i konstante. Nastavnik uvodi novi pojam za učenike a to je algebarski izraz kao izraz koji čine varijable i konstante.

5.2 Algebarski izrazi s jednom varijablom

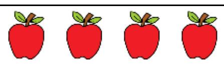
Samim uvođenjem varijabli učenici su upoznati s algebarskih izrazima s jednom varijablom te se sljedećim aktivnostima razvija se učeničko razumijevanje koeficijenta ispred varijable, te učenici otkrivaju kako zbrajati varijable.

5.2.1 Aktivnost *Problem nule i jedinice*

Aktivnost je namijenjena učenicima šestih razreda osnovne škole nakon što se učenici upoznaju s pojmom varijabli. Učenici će raditi suradnički u skupini kako bi otkrili zapis algebarskih izraza kada je koeficijent uz varijablu 1, 0 ili -1. Učenici rade na modelu nizova primjenom analogije te zaključuju nepotpunom indukcijom. Svaki učenik u skupini dobiva isti nastavni listić sa zadacima na kojem je potrebno uočiti pravilnosti i nastaviti niz. Nastavni listići se razlikuju za skupine.

Nastavni listić 5.2.1 Primjer za jednu skupinu učenika

1. **Zadatak** Nastavi niz

Dopuni odgovarajućim sličicama	Čitamo:
5  = 	pet jabuka
4  = 	četiri jabuke
3  =	
2  =	
1  =	
0  =	

2. **Zadatak**

Promotrite prvi i predzadnji stupac. Što predstavlja broj 5 ispred znaka jabuke? A što broj 1?

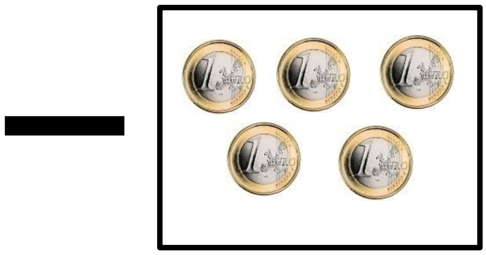
Hoće li predzadnji stupac imati isto značenje ako se ispred ne nalazi broj 1? Zašto?

Kako ste popunili zadnji stupac? Što znači 0  ? Je li potrebna slika jabuke?

Kako bi izgledala tablica kada biste umjesto jabuke zapisali simbol *x*?

Što uočavate u zadnja dva retka? Na koliko načina ih možemo zapisati kako bi značenje ostalo isto?

3. **Zadatak** Promotrite zadanu sliku, te osmislite tekst zadatka. Primijetite da je ispred slika znak **minus!**



____

____

____

Kako biste kraće pomoću slike mogli opisati rješenje zadatka koji ste zadali?

4. Zadatak Nastavi niz

Čitamo:	Prikaži pomoću sličica dužim zapisom:	Prikaži pomoću sličica kraćim zapisom:
minus pet eura	− 	
minus četiri eura		
minus tri eura		
minus dva eura		
minus jedan euro		

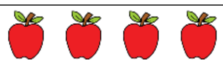
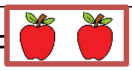
Promotrite zadnji redak. Što zaključujete?

Što bi se dogodilo kada biste umjesto kovanice zapisali simbol *y*? Što uočavate u zadnjem retku?

Učenici nastavljaju niz lijepljenjem sličica jabuka ili crtanjem jabuka u lijevom stupcu, dok u desnom trebaju zapisati kako pročitati ono što piše u lijevom stupcu. Odgovaranjem na pitanja zaključuju da broj ispred jabuke predstavlja koliko jabuka ima. Bitno je da učenici uoče kako se značenje zapisa u lijevom stupcu ne mijenja ako ispred slike jabuke stavimo broj 1 kako bi označili jednu jabuku. Učenici također trebaju uočiti kako broj 0 označava da nema jabuka, odnosno da uz broj nula nije potrebna sličica jabuke kako bi označila da ih nema. Zatim učenici analogno dolaze do istih zaključaka kada umjesto slike jabuke koriste simbol *x*.

Riješeni nastavni listić 5.2.1-1

1. Zadatak Nastavi niz

Dopuni odgovarajućim sličicama	Čitamo:
5  = 	pet jabuka
4  = 	četiri jabuke
3  = 	tri jabuke
2  = 	dvije jabuke
1  = 	jedna jabuka
0  = 0	nula jabuka

2. Zadatak

Promotrite prvi i predzadnji stupac. Što predstavlja broj 5 ispred znaka jabuke? A što broj 1?

Broj 5 označuje pet jabuka, a broj jedan označuje jednu jabuku.

Hoće li predzadnji stupac imati isto značenje ako se ispred ne nalazi broj 1? Zašto?

Hoće, zato što slika jedne jabuke označuje jednu jabuku isto kao i broj 1.

Kako ste popunili zadnji stupac? Što znači 0  ? Je li potrebna slika jabuke?

Ako broj 1 označuje jednu jabuku, broj 0 označuje da nema jabuka, pa slika jabuke nije potrebna.

Kako bi izgledala tablica kada biste umjesto jabuke zapisali simbol *x*?

$$5x = x\ x\ x\ x\ x$$
$$4x = x\ x\ x\ x$$
$$3x = x\ x\ x$$
$$2x = x\ x$$
$$1x = x$$
$$0x = 0$$

Što uočavate u zadnja dva retka? Na koliko načina ih možemo zapisati kako bi značenje ostalo isto?

U predzadnjem retku uočavamo da je pisanje broja 1 nepotrebno jer je $1x = x$. U zadnjem retku uočavamo da je pisanje simbola x nepotrebno jer isto značenje dobijemo pisanjem samo 0 jer je $0x = 0$.

Nakon što učenici dođu do zaključaka za pozitivne koeficijente, istražuju zapise s negativnim koeficijentima. Osmišljavaju tekst zadatka čije je rješenje -5 centi, te moraju rješenje prikazati na kraći način. Zatim primjenjuju analogno razmišljanje iz prvog zadatka kako bi nastavili niz u četvrtom zadatku te ga zapisali pomoću dužeg i skraćenog zapisa.

Riješeni nastavni listić 5.2.1-2 nastavak

3. Zadatak

Promotrite zadanu sliku, te osmislite tekst zadatka tako da je slika njegovo rješenje. Primijetite da je ispred slika znak **minus!**

Ana je u jednom tjednu svaki dan u školi od Marije posuđivala po jedan euro. Koliko je ukupno Ana dužna Mariji sljedeći tjedan?

Kako biste kraće pomoću slike mogli opisati rješenje zadatka koji ste zadali?

-5 

4. Zadatak Nastavi niz

Čitamo:	Prikaži pomoću sličica dužim zapisom:	Prikaži pomoću sličica kraćim zapisom:
minus pet eura		-5 

minus četiri eura	− 	-4 
minus tri eura	− 	-3 
minus dva eura	− 	-2 
minus jedan euro	− 	-1 

Promotrite zadnji redak. Što zaključujete?

Iskorištena je samo jedna sličica u produženom i u skraćenom zapisu, ako uklonimo broj 1 produženi i skraćeni zapis će biti jednaki.

Kako bi izgledao zadnji redak kada bi umjesto kovanice koristili simbol *y*? Što zaključujete?

$$-y = -1y$$

Nije potrebno pisati broj 1 jer je značenje isto.

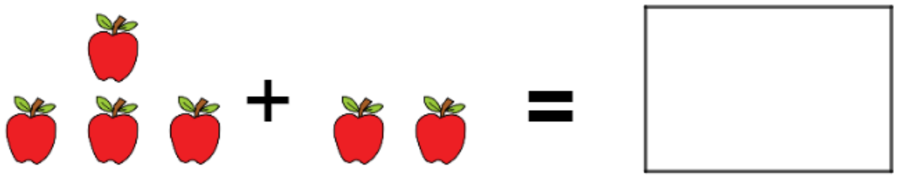
Nakon što su učenici nadopunili niz raspravom dolaze do analognog zaključka, to je da ako ispred nekog znaka piše 1 ili -1, 1 mogu izostaviti.

5.2.2 Aktivnost *Zbrajanje varijabli*

Aktivnost je namijenjena učenicima šestih razreda osnovne škole te se njome ostvaruje ishod MAT OŠ B.7.1. Namijenjena je za suradnički rad učenika u četveročlanima skupinama. Potrebna su četiri nastavna listića, po jedan za svakog učenika u skupini, nastavni listići se razlikuju za različite skupine.

Nastavni listić 5.2.2 Primjer za jednu skupinu

1. Nadopunite što je potrebno te zapišite skraćeno i koristeći matematički jezik.

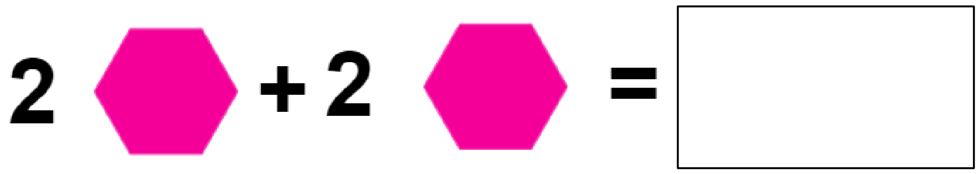


Skraćeni simbolički zapis:

Matematički zapis:

1. Opišite riječima kako ste riješili prvi zadatak.

2. Riješite sljedeći zadatak bez prebrojavanja i zapišite ga matematički. Objasnite kako ste došli do zaključka.



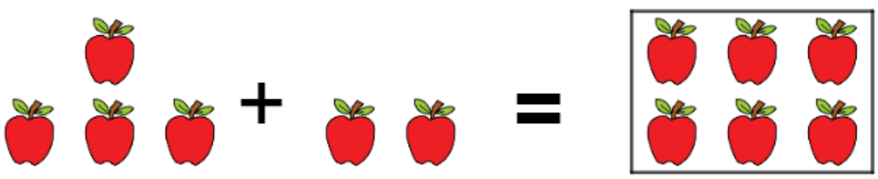
3. Primijenite prethodne zaključke na sljedeće zadatke. Objasnite svoje razmišljanje.
   a) $x + x =$
   b) $x + x + x + x =$
   c) $2x + x =$
   d) $3x + 2x =$
4. Primijenite zaključke te popunite tablicu.

	$x = 1$	$x = -6$	$x = 8$
$2x + 3x =$			
$5x - 7x =$			
$-3x - 5x =$			
$-4x + 5x =$			

Učenici prvi zadatak rješavaju tako da nacrtaju potrebne jabuke u pravokutnik. Zatim zapisuju skraćenim simboličkim zapisom i matematički koristeći slovo umjesto simbola kao što su radili prilikom uvođenja pojma varijable i algebarskog izraza.

Riješeni nastavni listić 5.2.2-1

1. Nadopunite što je potrebno te zapišite skraćeno i koristeći matematički jezik.



Skraćeni simbolički zapis:

Slika 5.2.2-1 Prikaz skraćenog simboličkog zapisa

Matematički zapis:

$$4a + 2a = 7a$$

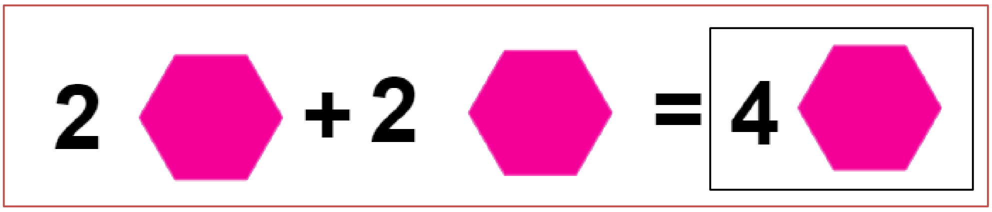
Učenici zatim opisuju što su radili u prvom zadatku kako bi uočili da nije potrebno brojati jednu po jednu jabuku. Zatim pokušavaju riješiti treći zadatak zadan skraćenim simboličkim zapisom kako bi se okušali u rješavanju bez prebrojavanja i kako bi uočili da je zapravo dovoljno zbrojiti koeficijent ispred slike šesterokuta. To rješenje također zapisuju u matematičkom obliku kako bi uočili analogiju.

Riješeni nastavni listić 5.2.2-2 nastavak

2. Opišite riječima kako ste riješili prvi zadatak.

   Zbrajali smo jabuke prebrojavanjem svih jabuka. Zatim smo se skraćenim simboličkim zapisom zapisali taj postupak tako da smo ispred jedne slike brojem označili koliko ih ima. Da bismo matematički zapisali rješenje sliku jabuke smo zamijenili slovom *a*

3. Riješite sljedeći zadatak bez prebrojavanja i zapišite ga matematički. Objasnite kako ste došli do zaključka.



   Broj dva ispred šesterokuta označava da zbrajamo dva šesterokuta s dva šesterokuta, pa je rješenje četiri šesterokuta.

$$2x + 2x = 4x$$

Učenici zatim zbrajaju samo varijable primjenom uočenog pravila. Postepeno uočavaju da je dovoljno zbrojiti samo koeficijente ispred varijable. Zatim u petom zadatku primjenjuju uočeno i provjeravaju rješenja uvrštavanjem konkretnih vrijednosti u izraz.

Riješeni nastavni listić 5.2.2-3 nastavak

4. Primijenite prethodne zaključke na sljedeće zadatke. Objasnite svoje razmišljanje.
   a) $x + x = 2x$
   b) $x + x + x + x = 4x$
   c) $2x + x = 3x$
   d) $3x + 2x = 5x$

   Koeficijent ispred x označava koliko je x-eva pa je dovoljno zbrojiti koeficijente ispred njih.

5. Primijenite zaključke te popunite tablicu.

	$x = 1$	$x = -6$	$x = 8$
$2x + 3x = 5x$	$2 + 3 = 5$	$-12 - 18 = -30$	$16 + 24 = 40$
$5x - 7x = -2x$	$5 - 7 = -2$	$-30 + 42 = 12$	$40 - 56 = -46$
$-3x - 5x = -8x$	$-3 - 5 = -8$	$18 + 30 = 48$	$-24 - 40 = -64$
$-4x + 5x = x$	$-4 + 5 = 1$	$24 - 30 = -6$	$-32 + 40 = 8$

5.3 Algebarski izrazi s dvije varijable

U sedmom razredu osnovne škole učenici se upoznavaju s algebarskih izrazima s dvije varijable s kojima će se nastaviti susretat do kraja školovanja. U nastavku poglavlja opisane su aktivnosti kojima se uvode algebarski izrazi s dvije varijable, kao i aktivnosti kojima učenici otkrivaju kako računati s algebarskim izrazima. U aktivnostima se koristimo modelom novca kao i modelom površine, te su za aktivnosti potrebne algebarske pločice kao učilo.

5.3.1 Aktivnost *Uvođenje algebarskih izraza s dvije varijable*

Aktivnost je namijenjena učenicima sedmih razreda osnovne škole. Cilj aktivnosti je da učenici samostalno otkriju algebarske izraze s dvije varijable. Aktivnost je namijenjena suradničkom radu učenika u četveročlanim skupinama. Potreban je po jedan nastavni listić za svakog učenika u skupini, te se nastavni listići razlikuju za skupine.

Nastavni listić 5.3.1 Primjer za jednu skupinu učenika

1. Marko je odlučio otvoriti kasicu prasicu kako bi vidio koliko je novca uštedio. Prilikom brojanja odlučio je prvo razvrstati novčiće iste vrste na jednu hrpu. Kad je razvrstao novčiće jednu hrpa je imala 10 novčića, a druga hrpu je imala 12 novčića.

Zajedno: Prikažite pomoću sličica izraz (skraćeni oblik) koji opisuje koliko je novca Marko uštedio.

Svaki učenik neka odabere **jedan pod zadatak** i odgovori:

Koliko je novca uštedio ako je:

a) prva hrpa sadržavala novčiće od 1 eura, a druga novčiće od 2 eura.

b) prva hrpa sadržavala novčiće od 2 eura, a druga novčiće od 50 centi.

c) prva hrpa sadržavala novčiće od 50 centi, a druga novčiće od 1 eura.

d) prva hrpa sadržavala novčiće od 2 eura, a druga novčiće od 1 eura.

2. **Zajedno:**

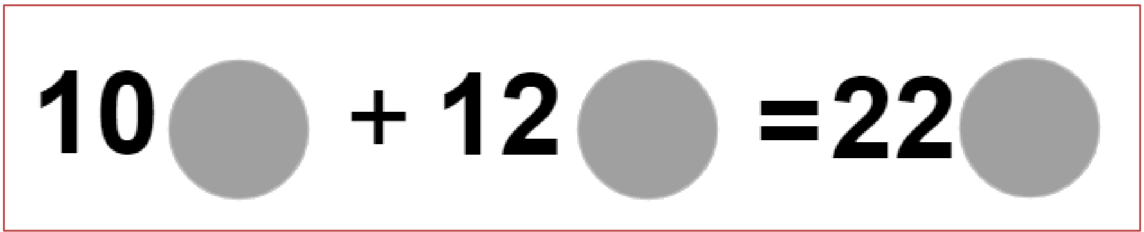
   a) Promotrite i usporedite sva rješenja te objasnite zašto se razlikuju.

   b) Je li u 1. zadatku poznatu koje su kovanice u kojoj hrpi? Kako nazivamo takve vrijednosti? Koliko ih ima u zadatku? Obrazložite odgovor.

   c) Pronađite način da algebarski zapišete izraz koji opisuje koliko je novca Marko uštedio. Obrazložite odgovor.

   d) Kako biste nazvali taj algebarski izraz?

Potrebno je omogućiti barem četiri različite skupine na razini razreda koje sadrže varijacije zadataka s različitim kovanicama kako bi učenici uočili koliko različitih rješenja ima zadatak te time proširili algebarsko mišljenje učenika. Očekujemo da će učenici simbolički prikazati izraz koristeći istu sliku kovanice za obje hrpe kovanica i izračunati koliko je to zajedno.



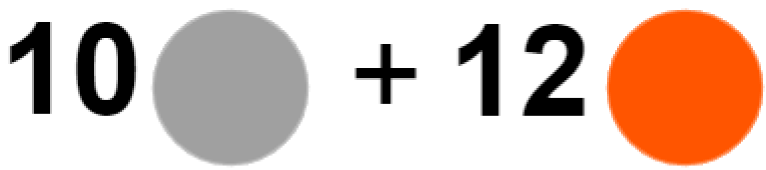
Slika 5.3.1-1 Primjer očekivanog rješenja

Učenike možemo pustiti da uoče da je ovo rješenje krivo u sljedećoj fazi kad uvrste kovanice i primijete da im se rješenje ne odgovara, te da zatim isprave simbolički zapis ili im možemo natuknuti da bi trebali rješenje prikazati različitim kovanicama za različitu hrpu.

Riješeni nastavni listić 5.3.1-1

1. Marko je odlučio otvoriti kasicu prasicu kako bi vidio koliko je novca uštedio. Prilikom brojanja odlučio je prvo razvrstati novčiće iste vrste na jednu hrpu. Kad je razvrstao novčiće jednu hrpa je imala 10 novčića, a druga hrpu je imala 12 novčića.

Zajedno: Prikažite pomoću sličica izraz (skraćeni oblik) koji opisuje koliko je novca Marko uštedio.



Nakon što učenici dođu do ovakvog slikovnog prikaza individualno rješavaju pripadni pod zadatak.

Riješeni nastavni listić 5.3.1-2 nastavak

Svaki učenik neka odabere **jedan pod zadatak** i odgovori:

Koliko je novca uštedio ako je:

a) prva hrpa sadržavala novčiće od 1 eura, a druga novčiće od 2 eura.

$$10 \cdot 1 + 12 \cdot 2 = 10 + 24 = 34$$

Marko je uštedio 34 eura.

b) prva hrpa sadržavala novčiće od 2 eura, a druga novčiće od 50 centi.

$$10 \cdot 2 + 12 \cdot 0.5 = 20 + 6 = 26$$

Marko je uštedio 26 eura.

c) prva hrpa sadržavala novčiće od 50 centi, a druga novčiće od 1 eura.

$$10 \cdot 0.5 + 12 \cdot 1 = 5 + 12 = 17$$

Marko je uštedio 17 eura.

d) prva hrpa sadržavala novčiće od 2 eura, a druga novčiće od 1 eura.

$$10 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 20 + 12 = 32$$

Marko je uštedio 32 eura.

Nakon što učenici riješe svoj zadatak i usporede rješenja raspravljaju u skupini, odgovaraju na pitanja i dolaze do zaključaka.

Riješeni nastavni listić 5.3.1-3 nastavak

2. **Zajedno:**
   a) Promotrite i usporedite sva rješenja te objasnite zašto se razlikuju.
   Rješenja se razlikuju zato što su u različitim zadacima bile zadane različite kovanice.
   b) Je li u 1. zadatku poznatu koje su kovanice u kojoj hrpi? Kako nazivamo takve vrijednosti? Koliko ih ima u zadatku? Obrazložite odgovor.
   Nije naznačeno u zadatku koje kovanice je Marko razvrstao u hrpe pa su zadane veličine promjenjive. Promjenjive veličine nazivamo varijablama. U ovom zadatku imamo dvije varijable.

c) Pronađite način da algebarski zapišete izraz koji opisuje koliko je novca Marko uštedio. Obrazložite odgovor.

Za označiti jednu hrpu kovanica možemo koristiti varijablu a. Kako je druga hrpa kovanica različita od prve možemo koristiti drugačiju varijablu b. Izraz možemo zapisati kao $10a + 12b$.

d) Kako biste nazvali taj algebarski izraz?

Možemo ga nazvati algebarski izraz s dvije varijable.

Nakon što učenici dođu do zaključka da se je zadatak može opisati algebarskim izrazom s dvije varijable nastavnik proširuje učeničko znanje na algebarski izraz s tri i više varijabli diskusijom. Zapisuje na ploču algebarski izraz s tri varijable poput $4x - 7y + z$, zatim s četiri varijable $-5t + 8g - 11s - 23č$ te pita učenike kako bi ih nazvali, a oni odgovaraju da bi ih nazvali algebarski izraz s tri varijable i algebarski izraz s četiri varijable.

5.3.2 Aktivnost *Zbrajanje i oduzimanje algebarskih izraza s dvije varijable*

Aktivnost je namijenjena učenicima sedmih razreda osnovne škole te se njom ostvaruje ishod MAT OŠ B.7.1. Cilj aktivnosti je da učenici sami otkriju pravila za zbrajanje algebarskih izraza, odnosno da se varijable i konstante ne mogu zbrajati te da se mogu zbrajati odnosno oduzimati samo iste varijable. Učenici aktivnost rade u paru te svaki učenik ima različit nastavni listić. Tablice popunjavaju individualno, ali zaključke donose skupa.

Nastavni listić 5.3.1 Primjer za jedan par učenika

1. (SAMI!) Popuni tablicu:

x	$x + 2$	$x - 2$	$3x$	$-x$
3				
5				
-2				
-7				

2. Promotrite stupce i u paru odgovorite na pitanja.
   a) Postoje li stupci s istim rješenjima? Obrazloži odgovor.

   b) Po čemu se razlikuju stupci s različitim rješenjima? Obrazloži odgovor.

   c) O čemu ovise rješenja u jednom stupcu?

   d) O čemu ovise rješenja u jednom retku?

   e) Vrijedi li $x + 2 = 3x$? A $x + 2 = 3$? Zašto?

   f) Kako zbrajamo varijablu i konstantu?

3. (SAMI!) Popuni tablicu:

x	y	$8x - 2y$	$6x$	$6y$
3	-2			
2	4			
-1	-5			
-4	6			

4. Promotrite stupce i u paru odgovorite na pitanja.
   a) Postoje li stupci s istim rješenjima? Zašto?

   b) O čemu ovise rješenja u jednom stupcu?

   c) O čemu ovise rješenja u jednom retku?

d) Promotrite 3. i 4. stupac, te 3. i 5. stupac. Zašto rješenja nisu jednaka kada uvrstimo iste vrijednosti u njih?

e) Vrijedi li $x + 2y = 3x$? A $x + 2y = 3y$? Zašto?

f) Što mislite kako zbrajamo različite varijable?

5. Zbrojite algebarske izraze zadane u prva dva stupca te rješenje upišite u prazan stupac. Zatim u četvrtom stupcu provjerite rješenja.

	ZBROJI	PROVJERI za $x = 1, y = -1$	
$9x$			
$-2y$			
$7x - 2$			
$6y + 3$			
$-x + y + 1$			
$3x - 5y$			
$2x - 3y - 2$			
$5x + 6y + 1$			

Nastavni listić za drugog učenika u para sadrži analogne primjere u tablici te ista pitanja nakon tablice. Učenici samostalno rješavaju prvi zadatak.

Riješeni nastavni listić 5.3.2-1

1. (SAMI!) Popuni tablicu:

x	$x + 2$	$x - 2$	$3x$	$-x$

3	5	1	9	-3
5	7	3	15	-5
-2	0	-4	-6	2
-7	-5	-9	-21	7

Uspoređuju rješenja s drugim učenikom u paru te zajedno odgovarajući na pitanja dolaze do zaključaka.

Riješeni nastavni listić 5.3.2-2 nastavak

2. Promotrite stupce i u paru odgovorite na pitanja.
   a) Postoje li stupci s istim rješenjima? Obrazloži odgovor.
   Ne postoje stupci s istim rješenjima jer smo umjesto x uvrštavali različite vrijednosti za svaki stupac
   b) Po čemu se razlikuju stupci s različitim rješenjima? Obrazloži odgovor.
   Stupci se razlikuju u konstantama i koeficijentima ispred varijable x.
   c) O čemu ovise rješenja u jednom stupcu?
   Rješenja ovise o vrijednosti x.
   d) O čemu ovise rješenja u jednom retku?
   Rješenja ovise o zadanom algebarskom izrazu.
   e) Vrijedi li $x + 2 = 3x$? A $x + 2 = 3$? Zašto?
   $x + 2 = 3x$ ne vrijedi jer ako uvrstimo umjesto x 2 dobit ćemo $4 = 6$ što nije istina. $x + 2 = 3$ također ne vrijedi jer ako uvrstimo umjesto x 0 dobit ćemo $2 = 3$ što nije istina.
   f) Kako zbrajamo varijablu i konstantu? Zašto?
   Ne možemo zbrajati varijablu i konstantu jer varijabla može predstavljati različite brojeve koji nam nisu poznati.

Nakon što učenici dođu do zaključka da se varijable i konstante ne mogu zbrajati samostalno rješavaju 3. zadatak na nastavnom listiću.

Riješeni nastavni listić 5.3.2-3 nastavak

3. (SAMI!) Popuni tablicu:

x	y	$8x - 2y$	$6x$	$6y$
3	-2	$24 + 4 = 28$	18	-12
2	4	$16 - 8 = 8$	12	24
-1	-5	$-8 + 10 = 2$	-6	-30
-4	6	$-32 - 12$ $= -34$	-24	36

Učenici promatraju popunjene tablice te zajedno diskusijom dolaze do zaključaka i odgovaraju na pitanja.

Riješeni nastavni listić 5.3.2-4 nastavak

4. Promotrite stupce i u paru odgovorite na pitanja.
   a) Postoje li stupci s istim rješenjima? Zašto?
   Ne postoje stupci s istim rješenjima. Stupci nemaju ista rješenja jer uvrštavamo iste vrijednosti u različite algebarske izraze.
   b) O čemu ovise rješenja u jednom stupcu?
   Rješenja ovise o tome koje vrijednosti uvrštavamo u algebarski izraz.
   c) O čemu ovise rješenja u jednom retku?
   Rješenja u retku ovise o algebarskom izrazu u koji uvrštavamo zadane vrijednosti.
   d) Promotrite 3. i 4. stupac, te 3. i 5. stupac. Zašto rješenja nisu jednaka kada uvrstimo iste vrijednosti u njih?
   Rješenja nisu jednaka jer su algebarski izrazi različiti.
   e) Vrijedi li $x + 2y = 3x$? A $x + 2y = 3y$? Zašto?
   Ne vrijedi jer ako uvrstimo $x = 1$ i $y = 2$ dobijemo $5 = 3$ i $5 = 6$ što nije istina.

f) Što mislite kako zbrajamo različite varijable?

Različite varijable ne možemo zbrajati.

Nakon što učenici dođu do zaključaka da ne mogu zbrajati varijablu i konstantu te da ne mogu zbrajati različite varijable u paru će se okušati u zbrajanju algebarskih izraza. Ovaj zadatak je isti za oba učenika kako bi mogli lakše usporediti rezultate.

Riješeni nastavni listić 5.3.2-5 nastavak

5. Zbrojite algebarske izraze zadane u prva dva stupca te rješenje upišite u prazan stupac. Zatim u četvrtom stupcu provjerite rješenja.

	ZBROJI	PROVJERI za $x = 1, y = -1$	
$9x$	$9x - 2y$	9	$9 + 2 = 11$
$-2y$		2	
$7x - 2$	$7x + 6y + 1$	5	$5 + (-3) = 2$
$6y + 3$		-3	
$-x + y + 1$	$2x - 4y + 1$	-1	$(-1) + 8 = 7$
$3x - 5y$		8	
$2x - 3y - 2$	$7x + 3y - 1$	3	$3 + 0 = 3$
$5x + 6y + 1$		0	

5.3.3 Aktivnost Algebarske pločice

Cilj aktivnosti je upoznati učenike s algebarskim pločicama. Učenici otkrivaju što one predstavljaju te kako se s njima koristiti za prikazivanje algebarskih izraza. Aktivnost se izvodi u četveročlanim skupinama te je za svaku skupinu potreban jedan set algebarskih pločica te nastavni listić za svakog učenika u skupini. Nastavni listići se razlikuju za skupine u razredu. Nastavnik aktivnost započinje s upoznavanjem učenika sa žutom algebarskom pločicom pomoću koje će otkrivati ostale. Naputak koji daje učenicima je taj da je duljina stranice pločice jedinična, odnosno 1. Prije nego što učenici započnu samostalan rad uspoređuje sve pločice kako i se uvjerili da nema jednakih. Učenici dalje rade samostalno te opisuju pločice koje su dobili.

Riješeni nastavni listić 5.3.3-1 primjer za jednu skupinu „kod kuće“

1. Opišite žutu pločicu. Napišite kojeg je oblika, duljinu njezinih stranica te kolika joj je površina.

   Žuta pločica je kvadratnog oblika, Stranice su dužine duljine 1 (jedinične dužine), a njezina površina je 1.

2. Pločica predstavlja broj koji je jednak njezinoj površini. Koji broj predstavlja jedna žuta pločica?

   Što predstavljaju sljedeće pločice?

   a)

   Ove pločice predstavljaju broj 3 jer je njihova površina 3.

   b)

   Ove pločice predstavljaju broj 6 jer je njihova površina 6.

c) Kako biste prikazali broj 8? Na koliko načina to možete napraviti?

Broj 8 možemo prikazati na četiri načina pomoću 8 pločica površine 1.

3. Crvena strana pločice nalazi se nasuprot žutoj strani. Ako žuta pločica predstavlja broj 1, crvena strana pločice predstavlja njemu suprotan broj, a to je -1.

Što predstavljaju ove pločice? Obrazložite odgovore.

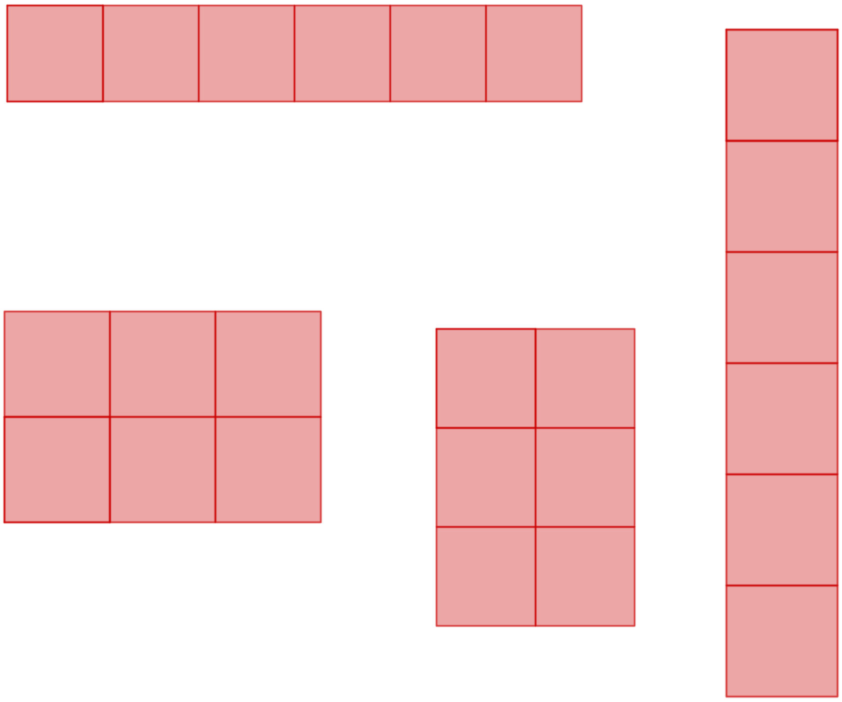
a)

Tri pločice površine 1 imaju površinu 3, a kako su crvene predstavljaju broj -3.

b)

Na slici je pet pločica površine 1, pa je površina 5. Kako su pločice crvene boje one predstavljaju broj -5.

c) Kako biste prikazali broj -6? Na koliko načina to možete napraviti?



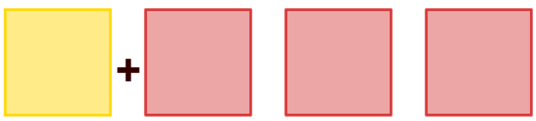
Broj 6 možemo prikazati tako da koristimo šest crvenih pločica površine 1.

To možemo napraviti na četiri načina.

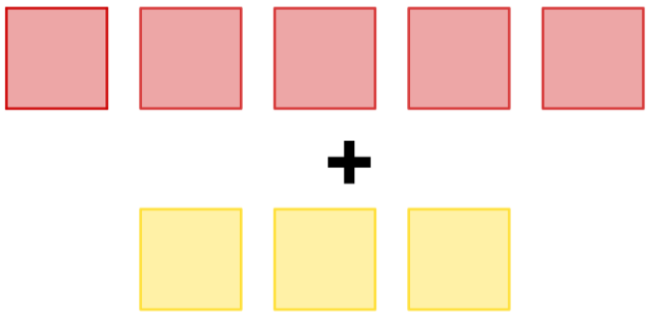
4. Kako biste prikazali pomoću pločica sljedeće izraze

a) $2 + 3$

b) $1 + (-3)$



c) $(-5) + 3$



d) $(-2) + (-3)$

Nakon što učenici završe nastavni listić „kod kuće“, idu „u goste“. Na početku aktivnosti učenici u svakoj grupi dobili su slova A, B, C, D i E, po jedno slovo za svakog učenika te se u ovoj fazi učenici grupiraju u grupe A, B, C, D i E sukladno slovo koje su dobili tako da se u svakoj skupini nalazi po jedan učenik iz svake početne grupe. Zadaci se razlikuju za sve skupine kako bi učenici vidjeli što više primjera te kako bi razvijali vještinu komunikacije prilikom objašnjavanja svog načina razmišljanja i obrazlaganja svoji postupaka i zaključaka.

Riješeni nastavni listić 5.3.3-2 primjer za jednu skupinu „u gostima“

Usporedite zaključke s prethodnih nastavnih listića i provjerite jeste li svi došli do istih zaključaka.

1. Koristite žute, zelene i narančaste pločice. Koristite žutu pločicu za mjerenje.
   a) Opišite zelenu pločicu. Napišite kojeg je oblika, duljinu njezinih stranica te kolika joj je površina. Ako ne možete izraziti navedeno pomoću žute pločice pronađite drugi način za opisati zelenu pločicu.

      Pločica je pravokutnog oblika, jedna stranica je jedinične duljine dok drugu ne možemo odredit, nepoznate je veličine. Drugu stranicu možemo označiti s x, pa je njezina površina $1 \cdot x = x$

   b) Opišite narančastu pločicu. Napišite kojeg je oblika, duljinu njezinih stranica te kolika joj je površina. Ako ne možete izraziti navedeno pomoću žute pločice pronađite drugi način za opisati narančastu pločicu.

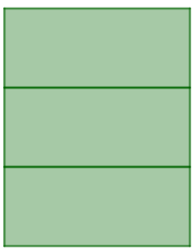
      Pločica je pravokutnog oblika, jedna stranica je jedinične duljine dok drugu ne možemo odredit, nepoznate je veličine. Drugu stranicu možemo označiti s y, pa je njezina površina $1 \cdot y = y$.

2. Pločica predstavlja njezinu površinu.

   Zelena pločica predstavlja $\underline{x}$, a narančasta pločica predstavlja $\underline{y}$.

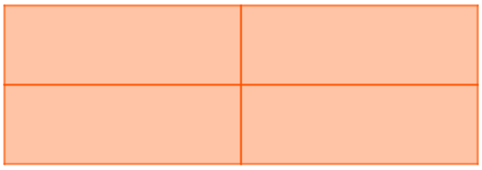
   Što predstavljaju sljedeće pločice?

   a)



   Na slici se nalaze tri zelene pločice površine x pa je površina jednaka $3 \cdot x = 3x$.

b)



Na slici se nalaze četiri pločice površine y pa je površina jednaka $4 \cdot y = 4y$.

3. Crvena strana pločice nalazi se nasuprot zelenoj strani. Ako zelena pločica predstavlja x, crvena strana pločice predstavlja njemu suprotan broj, a to je $-x$. Crvena strana pločice nalazi se nasuprot narančastoj strani. Ako narančasta pločica predstavlja y crvena strana pločice predstavlja njemu suprotan broj, a to je $-y$.
4. Što predstavljaju ove pločice?

a)

Na slici su dvije pločica površine x, pa je površina $2x$. Kako su pločice crvene boje one predstavljaju $-2x$.

b)

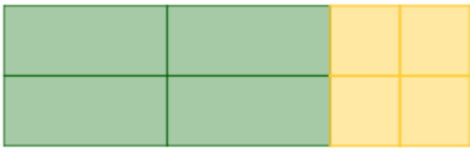
Na slici se nalazi pet pločica površine y pa je površina jednaka $5y$. Kako su pločice crvene boje one predstavljaju $-5y$.

Prilikom rješavanja prvog zadatka učenici će pokušati izmjeriti zelenu i narančastu pločicu pomoću žute pločice pa možemo očekivati rješenja poput $2\frac{1}{2}$ ili $3\frac{1}{3}$. Nastavnikov zadatak je naglasit učenicima da ne mogu na taj način odrediti duljinu nepoznatih stranica zelene i narančaste pločice jer ne mogu točno odrediti duljinu pomoću žute pločice. Ako učenici sami ne dođu do zaključka potrebno ih je navesti na zaključak da je duljina duže stranice nepoznata te ih podsjetiti kako se označavaju nepoznate veličine. Uspoređivanjem zelene i narančaste pločice učenici su već došli do zaključka da su različitih duljina te da ih je potrebno označiti s drugačijim nepoznanicama. Nakon što učenici dođu do zaključka da zelena pločica predstavlja *x*, a narančasta *y* vraćaju se nazad u početne skupine. Nastavni listići za grupe A, B, C, D i E se razlikuju međusobno kako bi učenici imali što više različitih primjera kad se vrate u početne skupine. Bitno je da učenici vrate u početne skupine sa zaključkom da zelena pločica predstavlja *x*, a njezina crvena strana *–x*, te da narančasta pločica predstavlja *y*, a njezina crvena strana *–y*. Nazad „kod kuće“ odnosno u početnim skupinama primjenjuju zaključke kako bi odredili koje izraze određuju algebarske pločice.

Riješeni nastavni listić 5.3.3-3 primjer za jednu skupinu „nazad kod kuće“

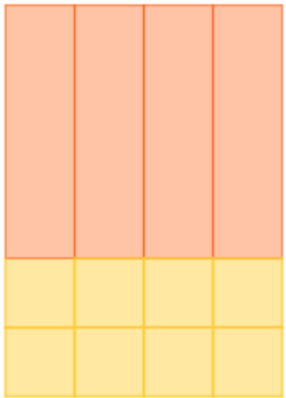
Za sljedeće slike algebarskih pločica napišite algebarski izraz koji predstavljaju.

a)



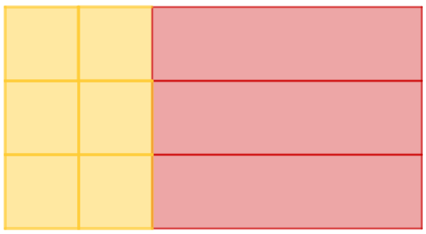
$4x + 4$

b)



$4y + 8$

c)



$8 - 3y$

d)

$-5 + 5x$

Bitno je obuhvatiti sa svim zadacima na razini svih skupina sve moguće slučajeve s pozitivnim i negativnim varijablama i konstantama u izrazima. Na kraju aktivnosti slijedi razredna diskusija kako bi se saželi zaključci iz svih skupina a to su : Žuta pločica predstavlja broj 1, zelena predstavlja nepoznatu veličinu *x*, narančasta pločica predstavlja nepoznatu veličinu *y*. Ako su pločice okrenute na crvenu stranu predstavljaju brojeve suprotne od njihove površine odnosno -1, –*x* i –*y*.

5.3.4 Aktivnost *Umnožak broja i algebarskog izraza s jednom varijablom*

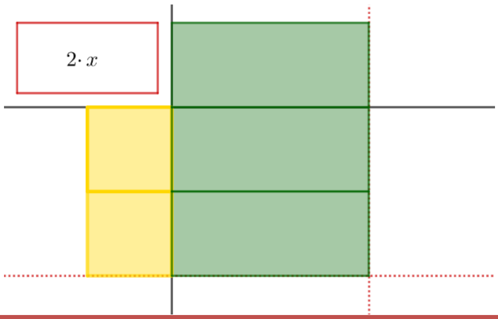
Aktivnost je namijenjena učenicima sedmog razreda osnovne škole. Učenici suradničkim radom u peteročlanim skupinama u obliku „gostionice“ otkrivaju čemu je jednak umnožak broja i algebarskog izraza s jednom varijablom. Aktivnošću se ostvaruje ishod MAT OŠ B.7.1. Za aktivnost su potrebne algebarske pločice te tri nastavna listića za svakog učenika u skupini. Nastavni listići u skupini su isti za sve učenike, a razlikuju se za skupine kako bi se pokrilo što više različitih slučajeva. Učenici su podijeljeni u pet skupina, te svaki učenik u skupini dobiva po jedno slovo A, B, C, D ili E. Nakon što u početnoj skupini „kod kuće“, svi učenici riješe nastavne listiće mijenjaju skupinu te se grupiraju prema slovu koje su dobili u grupe A, B, C, D ili E, idu u „goste“. Razmjenjuju ideje i zaključke do kojih su došli u prethodnoj skupini te pomoću njih rješavaju drugi nastavni listić. Nakon što „u gostima“ riješe nastavni listić učenici se vraćaju nazad u početne skupine („nazad kod kuće“) donose i prenose zaključke i ideje do kojih su došli u prethodnoj skupini te rješavaju treći nastavni listić primjenom zaključaka do kojih su došli razmjenom ideja i mišljenja s učenicima u svim skupinama.

Učenici na nastavni listić slažu algebarske pločice te metodom pokušaja i pogrešaka dolaze do rješenja odnosno pravokutnika sastavljenog od algebarskih pločica. Određuju dimenzije, odnosno duljine stranica pravokutnika te njihov umnožak povezuju s algebarskim izrazom koji opisuje površinu.

Riješeni nastavni listić 5.3.4-1 primjer za jednu skupinu „kod kuće“

1. Promotrite dobivenu sliku. Složite od algebarskih pločica pravokutnik tako da u cijelosti popunjava prostor unutar crvenih linija tako da ne prijeđete crvenu liniju.

    a)



Što je rješenje?

Rješenje su dvije pločice *x*.

Koje su dimenzije pravokutnika kojeg ste sastavili? Što je odredilo dimenzije?

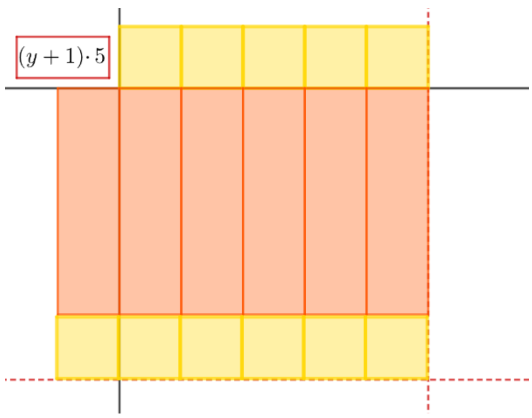
Pravokutnik je visok 2, a širok je *x*. Visinu su odredile dvije žute pločice, a širinu jedna zelena pločica.

Čemu je jednaka površina?

$$P = 2x$$

U crveni kvadratić upišite što morate pomnožiti kako biste dobili površinu dobivenog pravokutnika.

b)



Što je rješenje?

Rješenje je pet pločica *y*, i pet pločica 1.

Koje su dimenzije pravokutnika kojeg ste sastavili? Što je odredilo dimenzije?

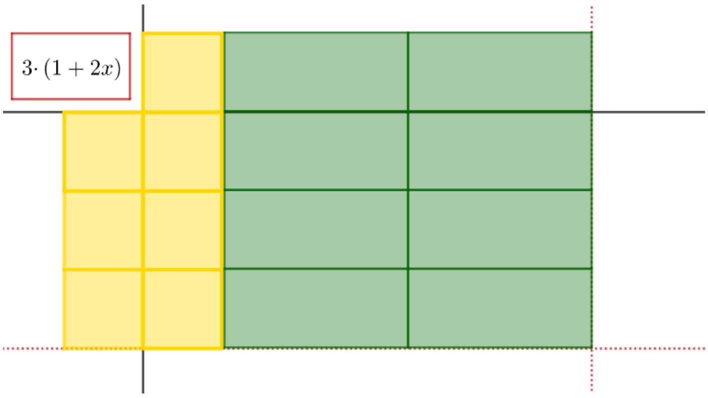
Visina pravokutnika je $y + 1$, a širina je 5. Visinu su odredile pločice *y* i 1, a širinu je odredilo pet pločica 1.

Čemu je jednaka površina?

$$P = 5y + 5$$

U crveni kvadratić upišite što morate pomnožiti kako biste dobili površinu dobivenog pravokutnika.

c)



Što je rješenje?

Rješenje su tri pločice 1 i šest pločica *x*.

Koje su dimenzije pravokutnika kojeg ste sastavili? Što je odredilo dimenzije?

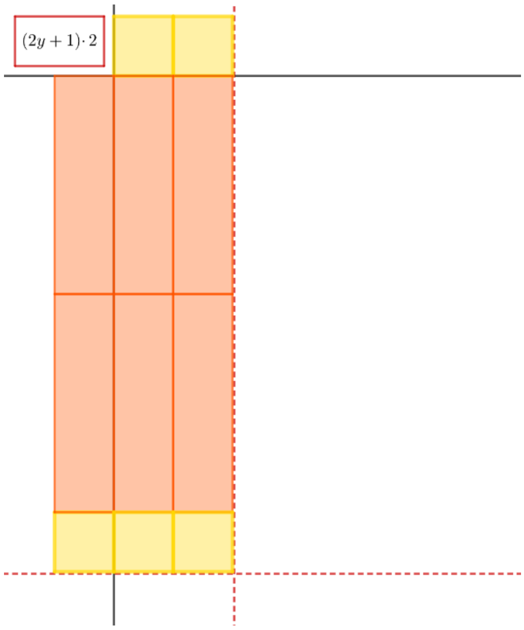
Pravokutnik je visok 3, a širok $1 + 2y$. Visinu su odredile tri pločice 1, a širinu jedna pločica 1 i dvije pločice *y*.

Čemu je jednaka površina?

$$P = 2 + 4x$$

U crveni kvadratić upišite što morate pomnožiti kako biste dobili površinu dobivenog pravokutnika.

d)



Što je rješenje?

Rješenje su četiri pločice y i dvije pločice 1.

Koje su dimenzije pravokutnika kojeg ste sastavili? Što je odredilo dimenzije?

Pravokutnik je visok $2y + 1$, a širok 2. Visinu su odredile dvije pločice y i jedna pločica 1, a širinu dvije pločice 1.

Čemu je jednaka površina?

$$P = 4y + 2$$

U crveni kvadratić upišite što morate pomnožiti kako biste dobili površinu dobivenog pravokutnika.

2. Kako biste povezali izraz u crvenom kvadratu i pločice koju se zadane s dobivenim pravokutnikom?

   Izraz u crvenom kvadratu je jednak umnošku površina zadanih algebarskih pločica koje su odredile dimenzije danog pravokutnika.

3. Koja je veza između izraza u crvenom kvadratu s površinom dobivenog pravokutnika? Zapišite matematički.

   Crveni izraz je umnožak dimenzija pravokutnika pa je on jednak površini pravokutnika.

$$2 \cdot x = 2x$$

$$(y + 1) \cdot 5 = 5y + 5$$

$$3 \cdot (1 + 2x) = 3 + 6x$$

$$(2y + 1) \cdot 2 = 4y + 2$$

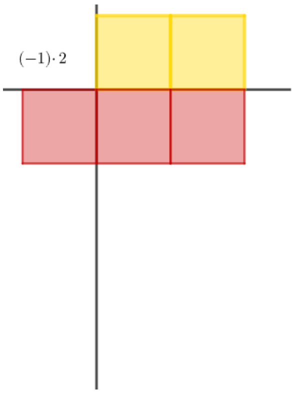
4. Kako pomoću algebarskih pločica možete izračunati umnožak algebarskog izraza i broja?

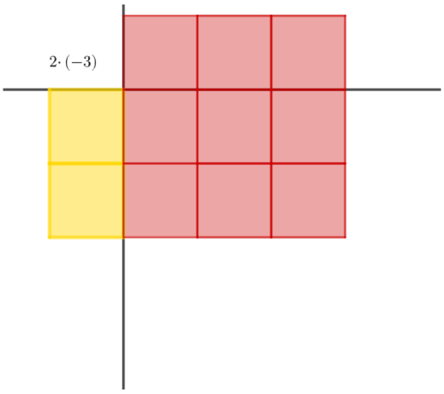
   U kućicu pišemo umnožak koji želimo izračunati a na horizontalnu i vertikalnu os postavljamo izraze koje množimo. Algebarskim pločicama popunjavamo prostor pravokutnog oblika koji je određen duljinom postavljenih pločica. Površinu dobijemo tako da prebrojimo postavljene algebarske pločice, a ona je jednaka umnošku u crvenom kvadratu.

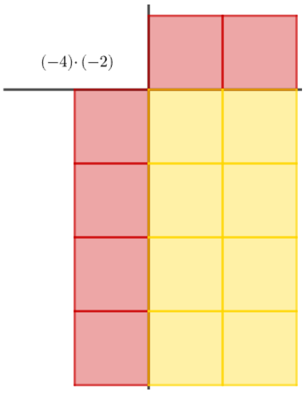
Nakon što učenici popune nastavni listić idu „u goste“ sa zaključkom kako pomoću algebarskih pločica mogu izračunati umnožak broja i algebarskog izraza s jednom varijablom. Nastavni listić u gostima sadrži algebarske izraze s negativnim koeficijentima. Učenici će prvo računati što im je poznato, a to je umnožak cijelih brojeva i negativnih i pozitivnih, a zatim će ga prikazati pomoću algebarskih pločica da uoče kako će baratati s pločicama koje predstavljaju negativne vrijednosti.

Riješeni nastavni listić 5.3.4-2 primjer za jednu skupinu „u gostima“

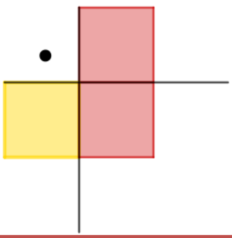
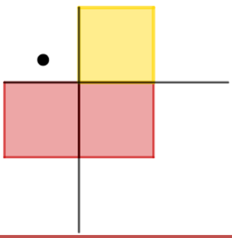
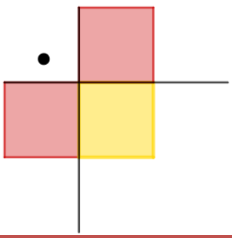
1. Izračunajte čemu su jednaki zadani zadaci, a zatim posložite odgovarajuće algebarske pločice na dano polje kako biste ih prikazali.
    a) $(-1) \cdot 2 = -2$
    b) $2 \cdot (-3) = -6$
    c) $(-4) \cdot (-2) = 8$

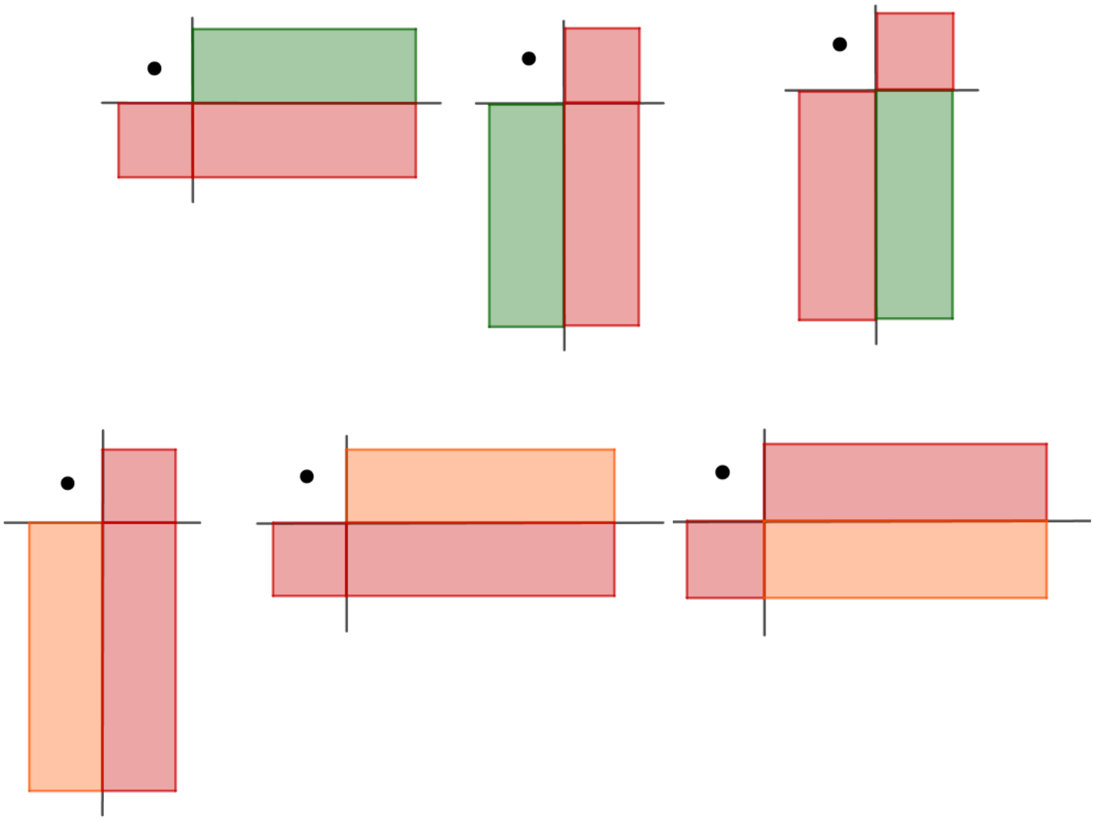






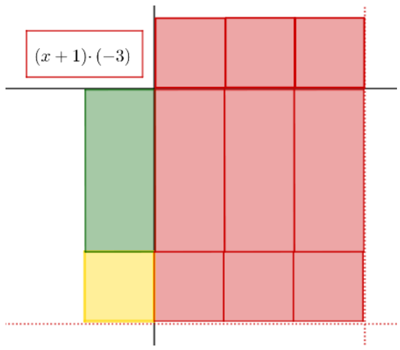
2. Što uočavate?
    Na presjeku crvene i žute pločice treba staviti crvenu, a na presjeku dviju crvenih pločica treba staviti žutu pločicu.
3. Popunite s odgovarajućim pločicama.



4. Pomoću uočenih pravilnosti odredite sljedeće izraze:

   a)



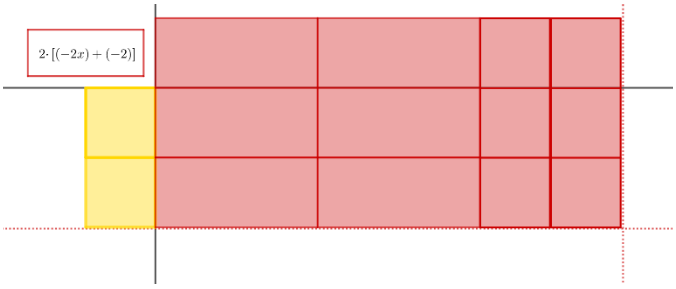
Što je rješenje?

Rješenje su tri pločice -*x* i tri pločice -1.

Koja je veza između izraza u crvenom kvadratu s dobivenim rješenjem? Zapišite matematički.

$$(x+1)\cdot(-3) = -3x - 3$$

b)



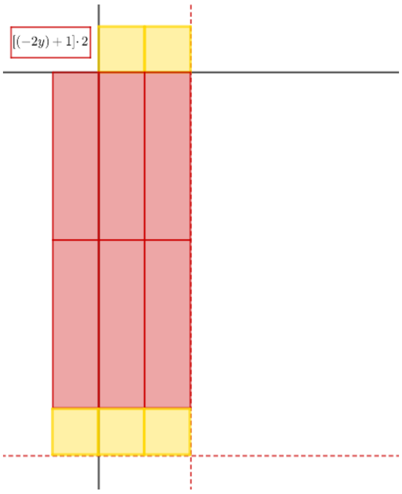
Što je rješenje?

Rješenje su četiri pločice -*x* i četiri pločice -1.

Koja je veza između izraza u crvenom kvadratu s dobivenim rješenjem? Zapišite matematički.

$$2[(-2x)+(-2)] = -4x-4$$

c)



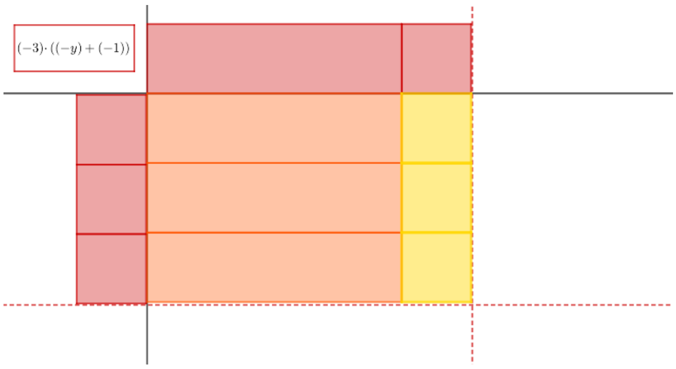
Što je rješenje?

Rješenje su četiri pločice -*y* i dvije pločice 1.

Koja je veza između izraza u crvenom kvadratu s dobivenim rješenjem? Zapišite matematički.

$$[(-2y)+1]\cdot 2 = -4y+2$$

d)



Što je rješenje?

Rješenje su tri pločice y i tri pločice 1.

Koja je veza između izraza u crvenom kvadratu s dobivenim rješenjem? Zapišite matematički.

$$(-3)\cdot[(-y)+(-1)] = 3x + 3$$

5. Kakvu vezu uočavate s rješenjima upisanim u crveni kvadrat i iskorištenim pločicama?

   Izraz u crvenom kvadratu je umnožak dimenzija pravokutnika pa je on jednak površini pravokutnika.

$$(x+1)\cdot(-3) = -3x - 3$$
$$2\cdot[(-2x)+(-2)] = -4x - 4$$
$$[(-2y)+1]\cdot 2 = -4y + 2$$
$$(-3)\cdot[(-y)+(-1)] = 3y + 3$$

6. Promotrite ovaj nastavni listić i prethodni. Možete li donijeti zaključak kako množimo algebarski izraz s brojem?

   Algebarski izraz množimo brojem tako da svaki član izraza pomnožimo tim brojem.

Nakon što učenici popune nastavni listiće dolaze do zaključka da na presjeku crvene pločice i pločice u boji stavljaju crvenu pločicu, na presjeku crvenih pločica slažu pločice u boji koje odgovaraju potrebnim dimenzijama. Analogno prethodnoj aktivnosti učenici slažu algebarske pločice te povezuju umnožak duljina stranica s površinom pravokutnika koju su dobili prebrojavanjem. U 4. d) zadatku učenici mogu napraviti pogrešku tako da postave sve crvene pločice te zaključe da je površina $3x + 3$. Na kraju aktivnosti trebaju zaključiti da algebarski izraz množimo brojem tako da broj pomnožimo sa svakim članom algebarskog izraza te taj zaključak donose „nazad kući“ u početnu skupinu.

Riješeni nastavni listić 5.3.4-3 primjer za jednu skupinu „nazad kod kuće“

1. Usporedite 6. zadatak s prethodnog nastavnog listića. Do kojeg ste zaključka došli, kako množimo algebarski izraz brojem?

   Algebarski izraz množimo brojem tako da pomnožimo svaki član algebarskog izraza tim brojem.

2. Izračunajte sljedeće izraze pa provjerite pomoću algebarskih pločica.

   a) $(-2) \cdot (2x - 4) = (-2) \cdot [2x + (-4)] = (-2) \cdot 2x + (-2) \cdot (-4)$
   $= -4x + 8$

   b) $(4 - y) \cdot 3 = [4 + (-y)] \cdot 3 = 12 + (-3y) = 12 - 3y$

   c) $(-2) \cdot (-x - 3) = (-2) \cdot (-x) + (-2) \cdot (-3) = 2x + 6$

3. Bez upotrebe algebarskih pločica izračunajte sljedeće izraze.

   a) $-1.1 \cdot (10 + 2y) = (-1.1) \cdot 10 + (-1.1) \cdot 2y = -11 - 2.2y$

   b) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot [(-0.8x) + 2] = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-0.8x) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 0.4x - 1$

   c) $[(-3y) - 2.5] \cdot 5 = [(-3y) + (-2.5)] \cdot 5 = (-3y) \cdot 5 + (-2.5) \cdot 5$
   $= -15y - 12.5$

   d) $\left(-7 - \frac{1}{3}x\right) \cdot (-6) = \left[(-7) + \left(-\frac{1}{3}x\right)\right] \cdot (-6) = (-7) \cdot (-6) + \left(-\frac{1}{3}x\right) \cdot$
   $(-6) = 42 + 2x$

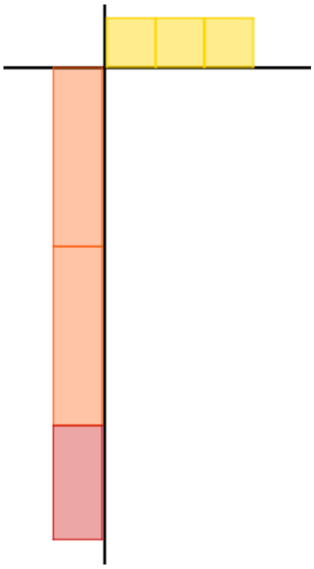
U prvom zadatku učenici uspoređuju zaključak s prethodnog nastavnog listića te se okušavaju u množenju algebarskih izraza brojem bez upotrebe algebarskih pločica. Nakon što riješe drugi zadatak rješenja mogu provjeriti pomoću algebarskih pločica dok za treći zadatak to već ne mogu napraviti.

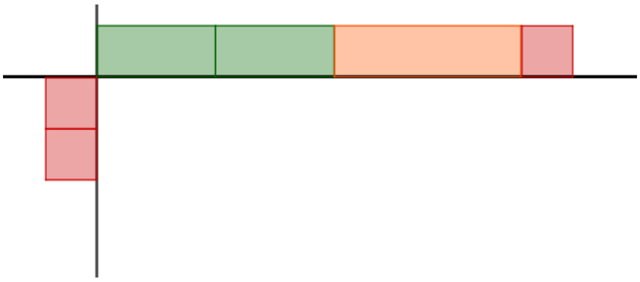
5.3.5 Aktivnost *Umnožak algebarskih izraza s dvije varijable i broja*

Aktivnost je namijenjena učenicima sedmog razreda osnovne škole te se njom ostvaruje ishod MAT OŠ B.7.1. Učenici rade u paru, za aktivnost im je potreban set algebarskih pločica te nastavni listić za svakog učenika. Učenicima su zadani umnošci te trebaju sami postaviti potrebne algebarske pločice na zadane okomite linije.

Nastavni listić 5.3.2

1. Sljedeće zadatke riješite uz pomoć algebarskih pločica. U kut u kojem niste stavili pločice upišite što ste množili. Čemu je jednak umnožak?





2. Sljedeće zadatke riješite uz pomoć algebarskih pločica. Zapišite čemu je jednak dani umnožak.

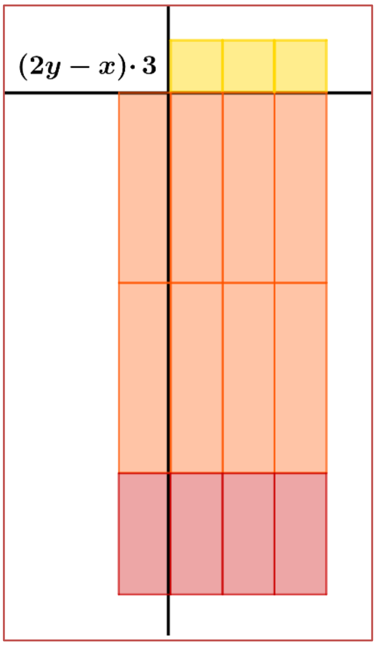
$(-3x+y-2))\cdot 3$

$(-4)\cdot(3-2x-3y)$

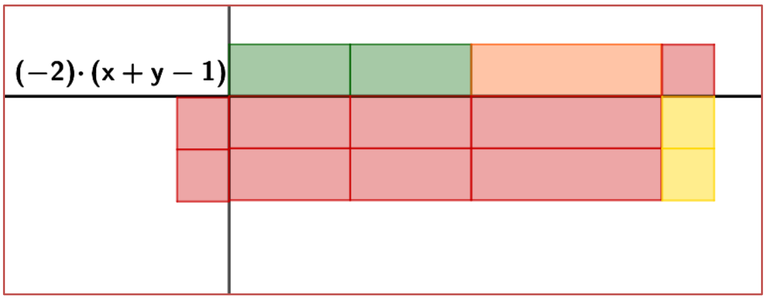
3. Povežite površinu složenog pravokutnika s umnoškom njegovih dimenzija. Što uočavate? Kako množimo broj i algebarski izraz s dvije varijable?

4. Riješite bez upotrebe algebarskih pločica.
   a) $\frac{2}{3}\cdot\left(3x-\frac{1}{4}y+5\right)$
   b) $\left(2.4x-\frac{2}{5}y-3\right)\cdot(-10)$
   c) $\left(-1\frac{1}{3}x+0.25y+2\right)\cdot(-5)$
   d) $(-1.2)\cdot(-3x+2.4y-2)$

Učenici analogno rješavaju zadatke uz pomoć pločica kao u prethodnim aktivnostima. Slažu pločice na danu podlogu kao što je prikazano na slikama 5.3.5.1 i 5.3.5.2.



Slika 5.3.5-1



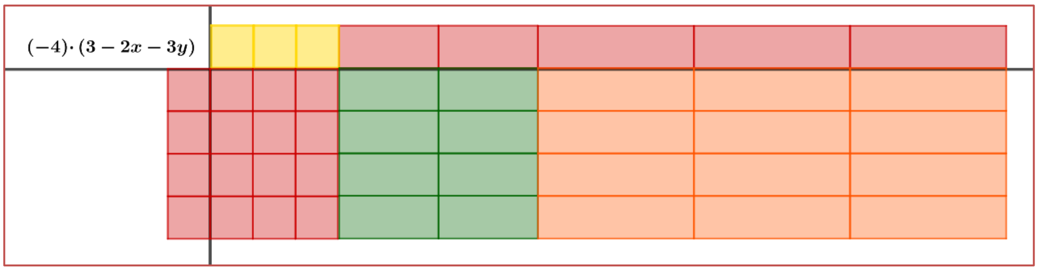
Slika 5.3.5-2

Učenici zapisuju:

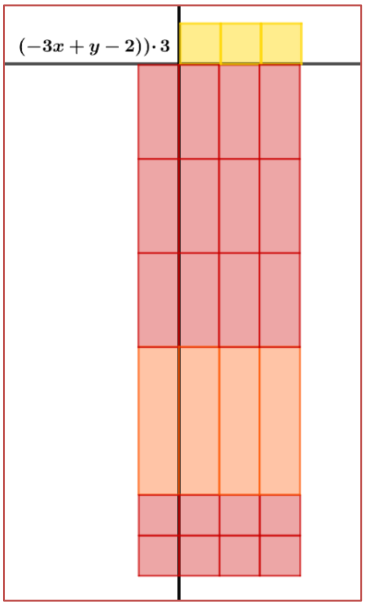
$$(2y-x)\cdot 3 = 6y-3x$$

$$(-2)\cdot(x+y-1) = -2x-2y+2$$

Rješenje 2. zadatka prikazano je na slikama 5.3.5.3 i 5.3.5.4.



Slika 5.3.5-3



Slika 5.3.5-4

Učenici zapisuju:

$$(-3x + y - 2) \cdot 3 = -9x + 3y - 6$$
$$(-4) \cdot (3 - 2x - 3y) = -12 + 8x + 12y$$

Učenici promatraju zapisane izraze i uočavaju kako je rješenje u svim zadacima dobiveno tako da su brojem pomnožili svaki član algebarskog izraza. dolaze do zaključka da broj i algebarski izraz s dvije varijable množe tako da broj pomnože sa svakim članom izraza. Nakon što učenici dođu do zaključka kako množiti algebarski izraz brojem učenici ga primjenjuju na primjere u 4. zadatku koje ne mogu izračunati pomoću algebarskih pločica.

a) $\frac{2}{3} \cdot \left(3x - \frac{1}{4}y + 5\right) = x - \frac{1}{6}y + \frac{10}{3}$

b) $\left(2.4x - \frac{2}{5}y - 3\right) \cdot (-10) = -24x + 4y + 30$

c) $\left(-1\frac{1}{3}x + 0.25y + 2\right) \cdot (-5) = \frac{20}{3}x - 1.25y - 10$

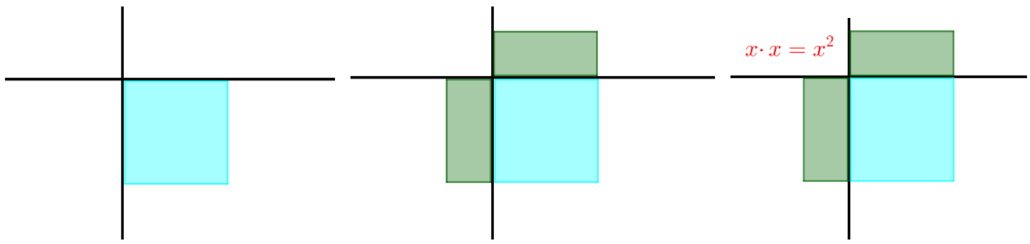
d) $(-1.2) \cdot (-3x + 2.4y - 2) = 3.6x - 2.88y + 2.4$

5.3.6 Aktivnost *Umnožak dva algebarska izraza s jednom varijablom*

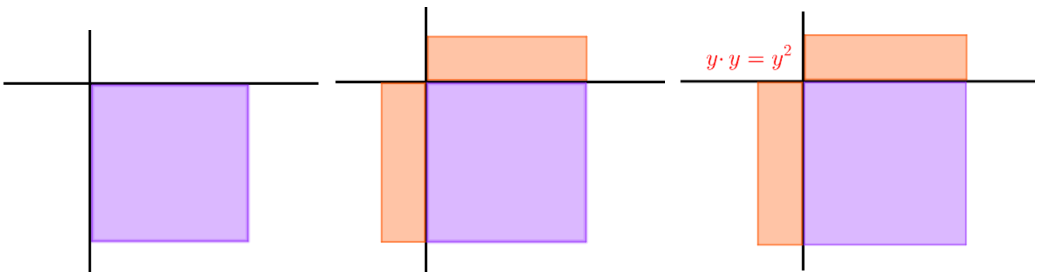
Cilj aktivnosti je upoznati učenike s pločicama $xy, -xy, x^2, -x^2, y^2$ i $-y^2$ i otkrivanje kako množiti algebarske izraze s jednom varijablom. Aktivnost je namijenjena radu u četveročlanim skupinama te se s njom ostvaruje ishod MAT OŠ B.7.1. Potreban cijeli set algebarskih pločica za svaku skupinu i nastavni listić za svakog učenika. Učenici unutar skupine imaju iste nastavne listiće, a razlikuju su za skupine u razredu. Učenici prvo otkivaju što predstavljaju svijetlo plava, ljubičasta i tamno plava pločica. Postavljaju pločice na označeno područje te pomoću poznatih pločica pokušavaju odrediti njezinu površinu. Nakon što učenici stave pločicu na označeno mjesto naslanjaju pločice *x*, *y* i 1 dok ne uče poklapanje.

Riješeni nastavni listić 5.3.6-1

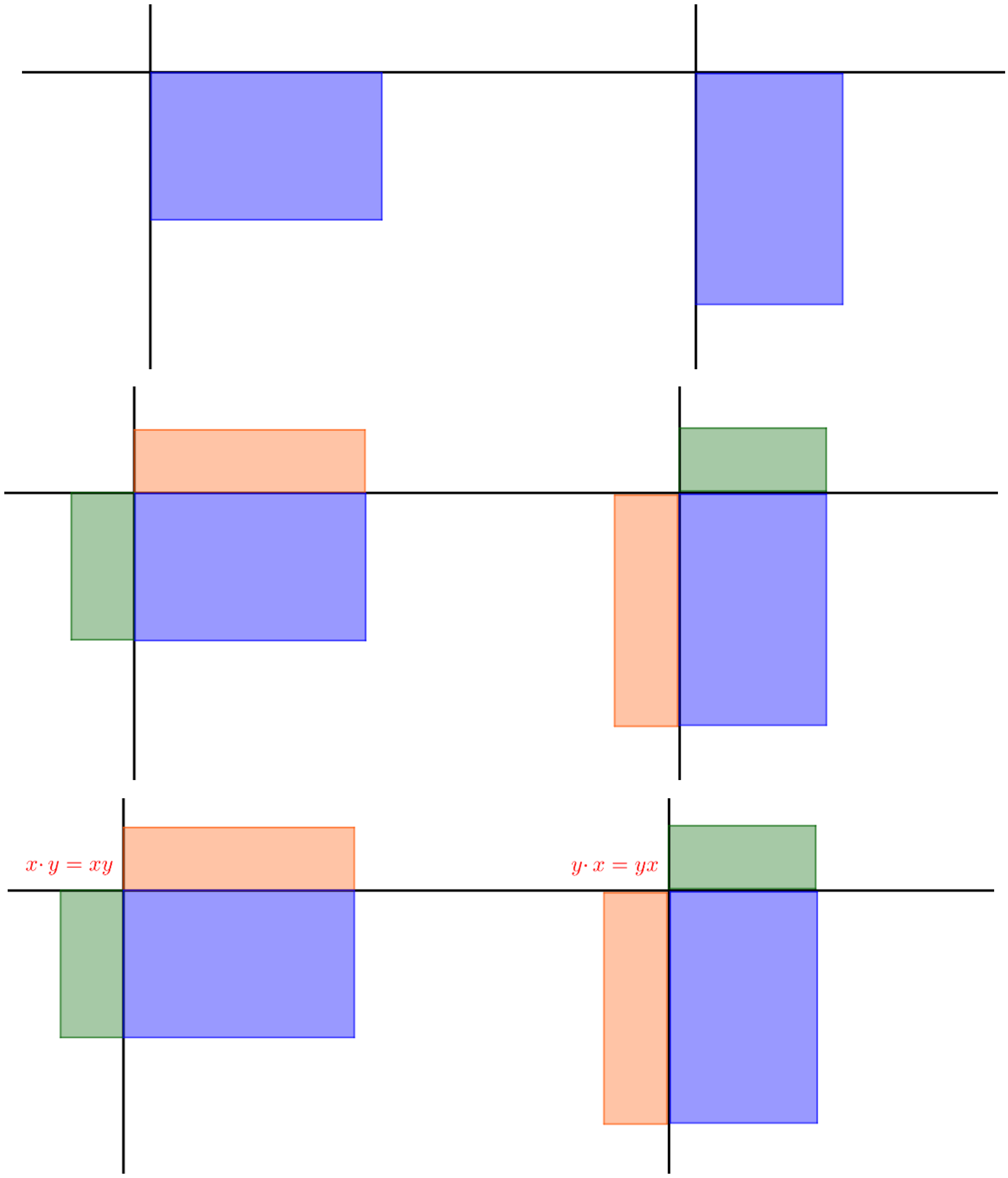
1. Postavite svijetlo plavu pločicu u označeni prostor i pomoću pločica *x*, *y* i 1 odredite njezinu površinu, odnosno koji izraz predstavlja. Rješenje upišite na mjesto gdje se linije križaju.



2. Postavite ljubičastu pločicu u označeni prostor i pomoću pločica *x*, *y* i 1 odredite njezinu površinu, odnosno koji izraz predstavlja. Rješenje upišite na mjesto gdje se linije križaju.



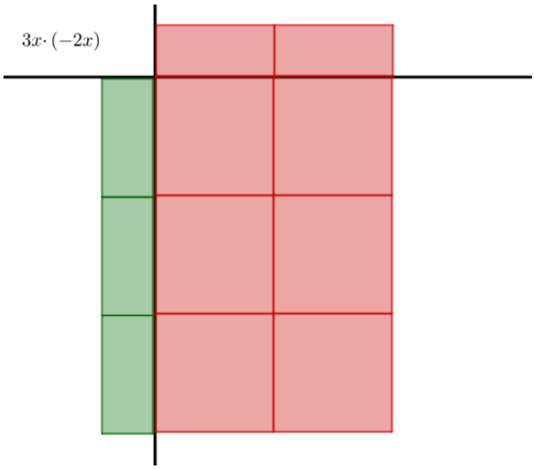
3. Postavite tamno plavu pločicu u označeni prostor i pomoću pločica *x*, *y* i 1 odredite njezinu površinu, odnosno koji izraz predstavlja. Rješenje upišite na mjesto gdje se linije križaju.



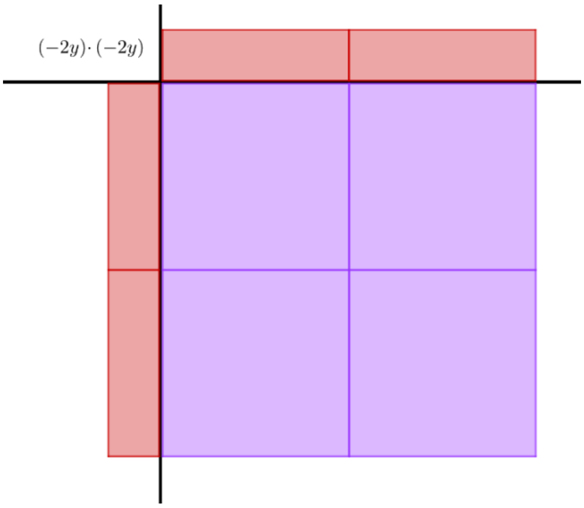
Rješenje trećeg zadatka ovisi kako učenici postave tamno plavu pločicu što je potrebno raspraviti učenicima u diskusiji te je bitno povezati da su izrazi xy i yx jednaki jer je površina pločice jednaka te učenike podsjetiti na svojstvo komutativnosti.

3. Odredite čemu su jednaki dani umnošci.

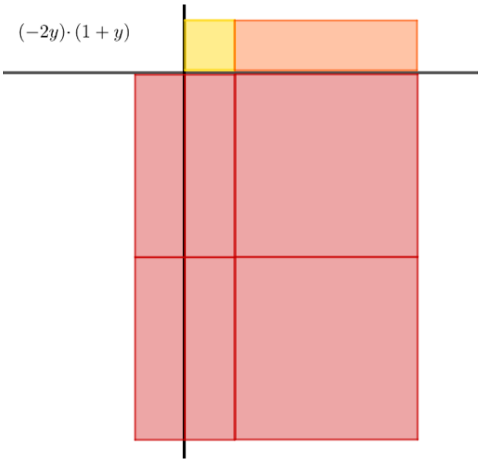
    a)



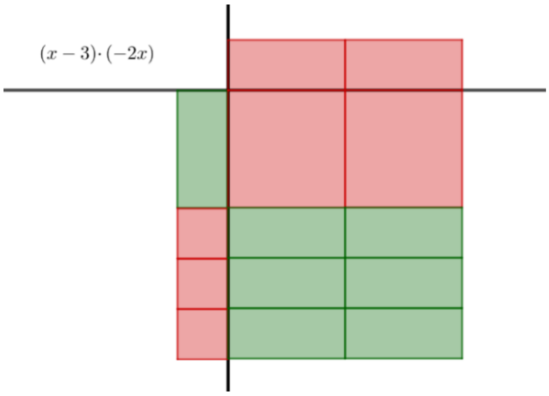
    b)



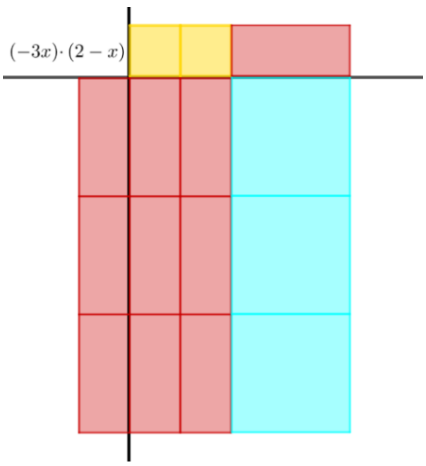
c)



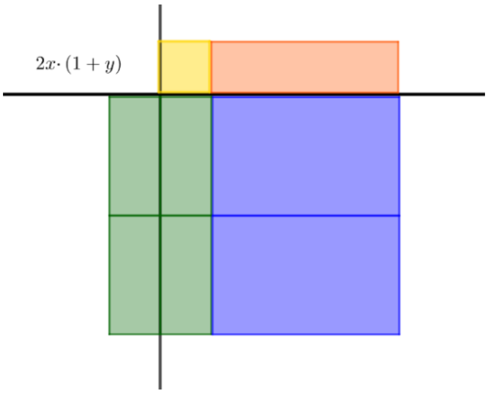
d)



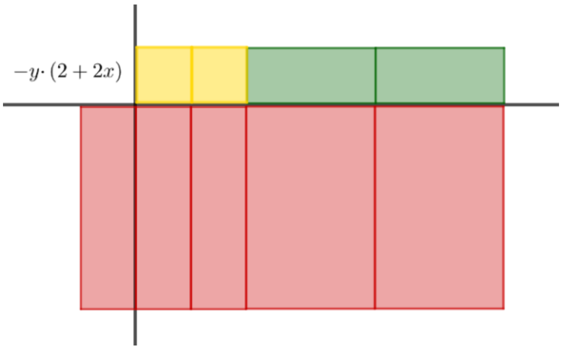
e)



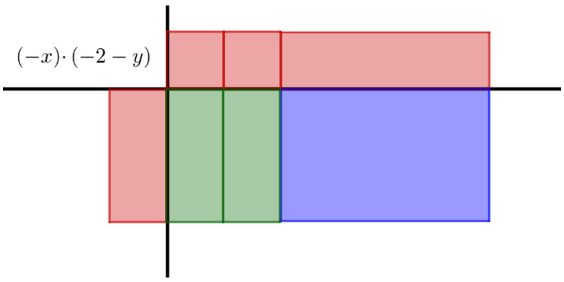
f)



g)



h)



4. Povežite dobivenu površinu pravokutnika s danim faktorima. Što uočavate? Kako množimo algebarski izraz varijablom?

$$3x \cdot (-2x) = -6x^2$$
$$(-2y) \cdot (-2y) = 4y^2$$
$$(x-3) \cdot (-2x) = -6x^2 + 6x$$
$$(-2y) \cdot (1+y) = -2y - 2y^2$$
$$(-3x) \cdot (2-x) = -6x + 3x^2$$
$$2x \cdot (1+y) = 2x + 2xy$$
$$-y \cdot (2+2x) = -2y - 2xy$$
$$(-x) \cdot (-2-y) = 2x + xy$$

Algebarski izraz smo množili varijablom tako da smo varijablu pomnožili sa svakim članom algebarskog izraza.

6. Riješite bez upotrebe algebarskih pločica.
   a) $\frac{3}{5}x \cdot (3x+5)$
   b) $\left(\frac{2}{5}y - 3\right) \cdot (-2y)$
   c) $\left(-1\frac{1}{10}x + 0.8\right) \cdot (-5y)$
   d) $(-1.2x) \cdot (-3 + 2.4y)$

Učenicima su zadani faktori te sami trebaju postaviti pločice koje ih predstavljaju na okomite osi. Zatim slažu pravokutnik od algebarskih pločica takav da njegove dimenzije odgovaraju postavljenim algebarskim pločicama. Učenici povezuju izraz koji predstavlja složeni pravokutnik sa zadanim faktorima te uočavaju da se izraz može izračunati tako da varijablu pomnožimo sa svakim članom algebarskog izraza, analogno kao što su broj množili algebarskim izrazom. U 6. zadatku uočeno pravilo primjenjuju na izraze koje ne mogu izračunati pomoću algebarskih pločica.

a) $\frac{3}{5}x \cdot (3x+5) = \frac{9}{5}x^2 + 3x$
b) $\left(\frac{2}{5}y - 3\right) \cdot (-2.2y) = -\frac{22}{25}y^2 + 6.6y$
c) $\left(-1\frac{1}{10} + 0.8x\right) \cdot (-5y) = \frac{11}{2}y - 4xy$
d) $(-1.2x) \cdot (-3 + 2.4y) = 3.6x - 2.88xy$

5.3.7 Aktivnost *Umnožak dva algebarska izraza s dvije varijable*

Aktivnost je namijenjena učenicima sedmog razreda osnovne škole te se s njom ostvaruje ishod MAT OŠ B.7.1. Učenici rade u četveročlanim skupinama. Za svaku skupinu potreban je po jedan nastavni listić za učenika, set algebarskih pločica te poseban papir s okomitim linijama na koji će učenici slagati algebarske pločice i tražiti rješenje.

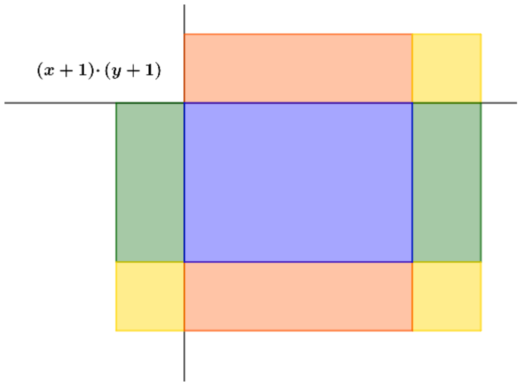
Nastavni listić 5.3.3 primjer nastavnog listića

1. Pronađite rješenja pomoću algebarskih pločica za sljedeće umnoške algebarskih izraza.
   a) $(x+1)\cdot(y+1)=$
   b) $(4-y)\cdot(2+2x)=$
   c) $(-x+2)\cdot(-2y+3)=$
   d) $(2x-1)\cdot(2-x)=$
   e) $(3-y)\cdot(1+2y)=$
   f) $(x-2y)\cdot(x+2)=$
   g) $(2y-3)\cdot(y-2x)=$
   h) $(x+y+1)\cdot(2x+y)=$

2. Izračunajte $x\cdot(y+1)+1\cdot(y+1)$. Postoji li izraz u 1. zadatku koji je jednak? Usporedite ih i zapišite što uočavate.
3. Promotrite ostale izraze. Možete li primijeniti pravilnost uočenu u 2. zadatku na njih?
4. Kako množimo dva algebarska izraza s dvije varijable?

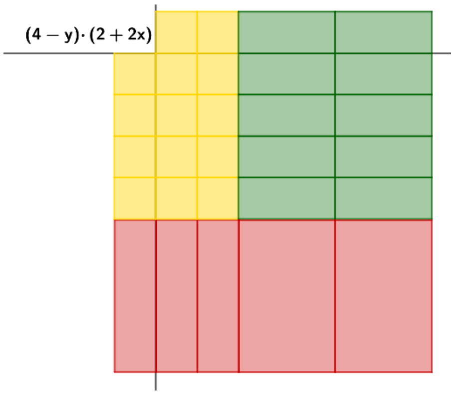
Učenici slažu algebarske pločice za dane faktore te određuju površinu složenog pravokutnika kako bi odredili čemu su jednaki dani izrazi.

a)



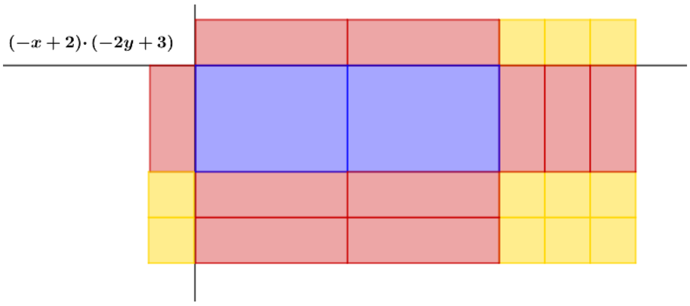
$(x+1)\cdot(y+1) = xy + y + x + 1$

b)



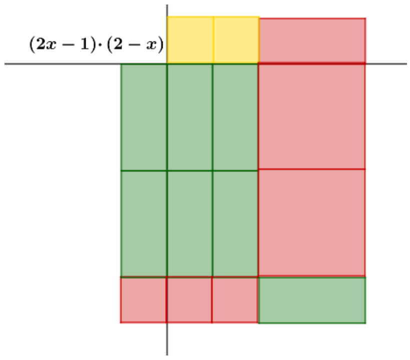
$(4-y)\cdot(2+2x) = 8 + 8x - 2y - 2xy$

c)



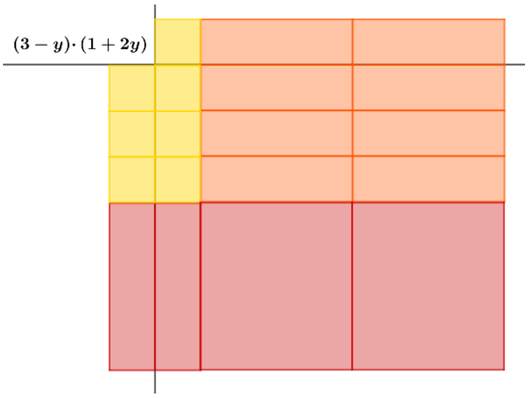
$(-x+2)\cdot(-2y+3) = 2xy - 3x - 4y + 6$

d)



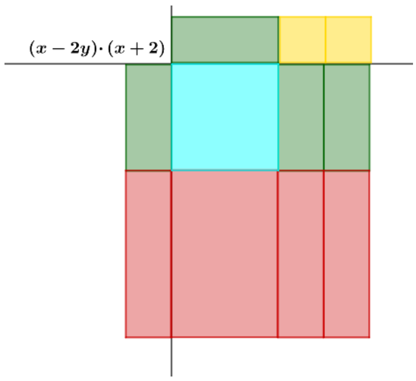
$(2x - 1) \cdot (2 - x) = 4x - 4x^2 - 2 + x$

e)



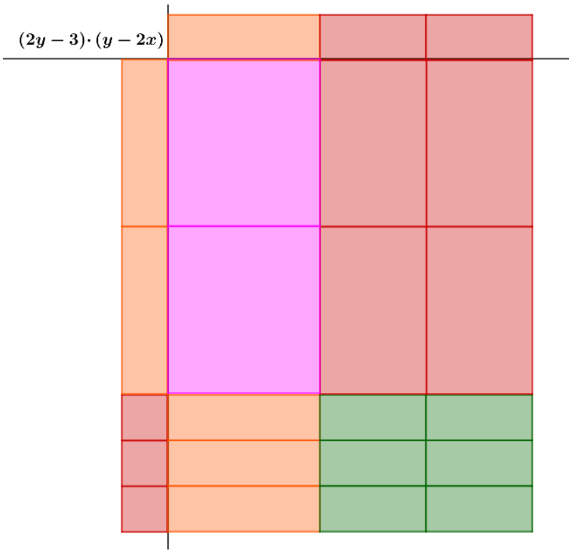
$(3 - y) \cdot (1 + 2y) = 3 + 6y - 2y^2$

f)



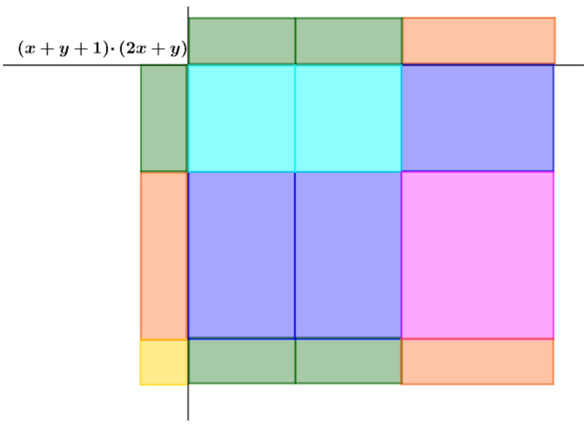
$(x - 2y) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x - xy - 2y$

g)



$$(2y-3)\cdot(y-2x) = 2y^2 - 4xy + 3y + 6x$$

h)



$$(x+y+1)\cdot(2x+y) = 2x^2 + xy + 2xy + y^2 + 2x + y$$

U 2. zadatku učenici računaju $x \cdot (y+1) + 1 \cdot (y+1) = xy + x + y + 1$ te uočavaju da je rješenje jednako rješenju iz 1.a) zadatka, te zaključuju $x \cdot (y+1) + 1 \cdot (y+1) = (x+1) \cdot (y+1)$. Uočavaju da su svaki član prvog algebarskog izraza (faktora) množili sa drugim algebarskim izrazom te su zbrojili umnoške. U 3. zadatku učenici ne temelju uočenog računaju vrijedili li uočeno za ostale algebarske izraze. Učenici računaju i uočavaju $(4-y)\cdot(2+2x)=8+8x-2y-2xy$ što je jednako $4\cdot(2+2x)+(-y)\cdot(2+2x)=8+8x-2y-xy$. Analogno računaju za sve ostale izraze. Nakon što provjere za sve zadatke odgovaraju na 4. zadatak sa zaključkom da dva algebarska izraza s dvije varijable množe tako da svaki član prvog algebarskog izraza (prvog faktora) pomnože sa svakim članom drugog algebarskog izraza (drugog faktora) i zbroje produkte.

5.3.8 Aktivnost *Interpretacija algebarskih izraza*

Aktivnost je namijenjena učenicima prvog srednje. Aktivnost služi kako bi nastavnik provjerio učeničko razumijevanje algebarskih izraza te sposobnost učenika da algebarske izraze povežu s različitim zapisima poput zapisa riječima, simbolima kao i povezivanje algebarskog zapisa s njegovim grafičkim prikazom. Aktivnost je namijenjena radu u paru. Za svaki par je potreban po jedan nastavni listić za svakog učenika i 4 seta kartica. Na jednom setu kartica su napisani algebarski izrazi, na drugom setu kartica su rečenice koje opisuju algebarski izraz, na trećem setu kartica su grafički prikazi algebarskih izraza. Četvrti set kartica sastoji se od praznih kartica na koje će učenici napisati odgovore koji nedostaju.

Riješeni nastavni listić 5.3.8-1

1. Zapišite pripadni algebarski izraz koji rečenica opisuje.
   a) Pomnožite *n* sa 7, zatim dodajte 3.
   $$7\cdot n+3$$
   b) Dodajte 8 na *n*, zatim podijelite s 4.
   $$(8+n):4=\frac{8+n}{4}$$
   c) Zapišite umnožak zbroja *n* i 5 te dvostruke vrijednosti *n*.
   $$(n+5)\cdot 2n$$
   d) Zapišite kvadrirani umnožak broja 2 i *n*.
   $$(2\cdot n)^2$$
2. Promotrite dane tvrdnje. Ako su istinite obrazložite zašto ako nisu istinite zapišite ih tako da budu istinite.

a) $2(n+3) = 2n+3$

Tvrdnja nije istinita jer je $2(n+3) = 2n+6$

b) $\frac{10n-5}{5} = 2n-1$

Tvrdnja je istinita jer $\frac{10n-5}{5} = \frac{10n}{5} - \frac{5}{5} = 2n-1.$

c) $(5n)^2 = 5n^2$

Tvrdnja nije istinita jer je $(5n)^2 = 5^2 \cdot n^2 = 25n^2$

d) $(n+3)^2 = n^2+9$

Tvrdnja nije istinita jer je $(n+3)^2 = n^2 + 2 \cdot n \cdot 3 + 3^2 = n^2 + 6n + 9$

3. Povežite odgovarajuće parove

a) $4n+2$	Dodaj četiri broju *n* pa pomnoži s dva.
b) $2(n+4)$	Pomnoži *n* s dva te dodaj četiri.
c) $4(n+2)$	Dodaj dva broju *n*, zatim pomnoži s četiri.

4. Spojite odgovarajuće algebarske izraze s opisom i slikovnim prikazom. Ako kartice rezultiraju istim rezultatom kada se algebarski izrazi na slici pojednostave do kraja također ih spojite. Može se više kartica iz istog seta naći u istoj skupini. Prazne kartice iskoristite kako biste na njih napisali prikaze koji nedostaju.

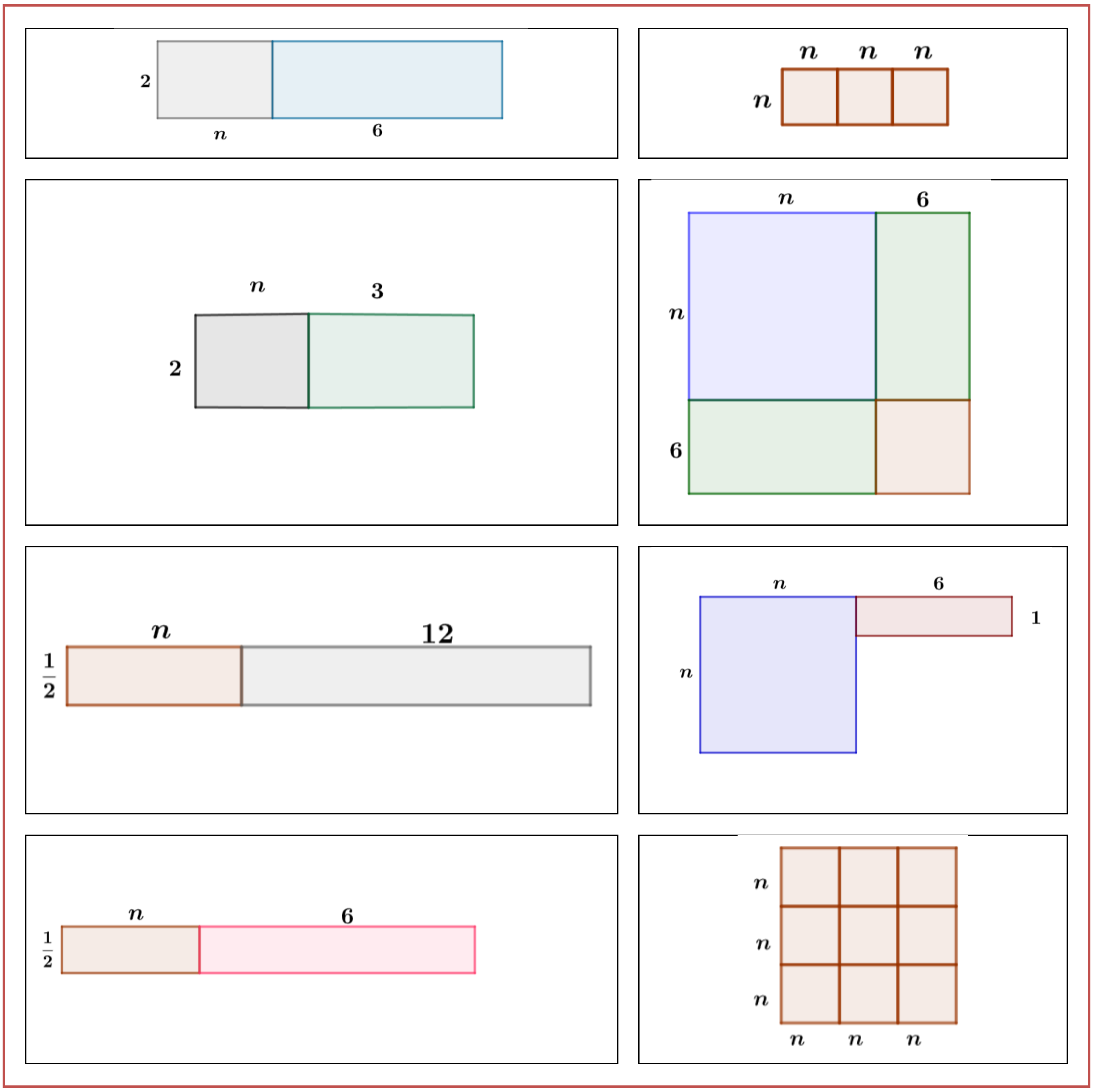
Prema rješenjima 1. zadatka možemo uočiti učeničko razumijevanje tekstualnih zadatka. Osim nerazumijevanja riječi dodaj, umnožak, dvostruka vrijednost i slično možemo očekivati greške gdje učenik zapisuje računske operacije onim redoslijedom kako se pojavljuju u rečenici npr. za 1.b) zadatak možemo očekivati $8 + \frac{n}{4}$. U 2. zadatku ispitujemo učeničko razumijevanje jednakosti kao i ekvivalentnih izraza skupa s računskim operacija. Učenici svoje odgovore također mogu obrazložiti uvrštavanjem konkretnih vrijednosti u izraze kako bi provjerili njihovu ekvivalentnost. U razrednoj diskusiji nastavnik od učenika treba tražiti da zadatke pročitaju na glas u stilu u kojem je zadan 1. zadataka. U trećem zadatku odgovor pod c) nema rješenja kako bi nastavnik dobio uvid uočavaju li učenici razliku između zadanih zadataka. Učenici bi trebali obrazložiti odgovore na sva rješenja te u razrednoj diskusiji za izraze koji nemaju par napisati potreban odgovor. Za $4(n+2)$ mogu napisati „Četiri pomnoži sa zbrojem brojeva n i 2." dok za „Pomnoži n s dva te dodaj četiri." pišu $2n+4$. Setovi kartica koje učenici dobivaju su prikazane na sljedećim slikama.

$\frac{n+6}{2}$	$3n^2$	$2(n+3)$	$\frac{n}{2}+6$
$2n+12$	$2n+6$	$(3n)^2$	$(n+6)^2$
$n^2+12n+36$	$3+\frac{n}{2}$	n^2+6	n^2+6^2

Slika 5.3.8-1 Slika seta kartica s algebarskim izrazima

Pomnoži n s dva, zatim dodaj šest.	Pomnoži n s tri zatim kvadriraj.	Dodaj šest na n pa pomnoži s dva.	Dodaj šest na n zatim podijeli s dva.
Dodaj tri na n zatim pomnoži s 2.	Dodaj šest na n zatim kvadriraj.	Udvostruči n zatim dodaj šest.	Kvadriraj n zatim pomnoži s 9.

Slika 5.3.8-2 Slika seta kartica s opisima algebarskih izraza



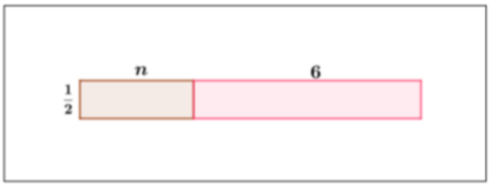
Slika 5.3.8-3 Slika seta kartica s grafičkim prikazima algebarskih izraza

Učenici kartice grupiraju u sljedeće skupine:

$\frac{n+6}{2}$

$3+\frac{n}{2}$

Dodaj šest na *n* zatim podijeli s dva.



1. skupina

$3n^2$

2. skupina

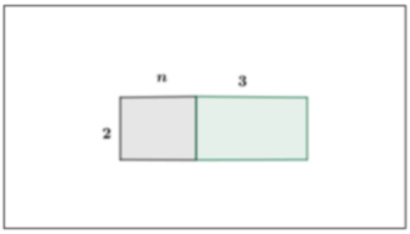
$2(n+3)$

$2n+6$

Pomnoži *n* s dva, zatim dodaj šest.

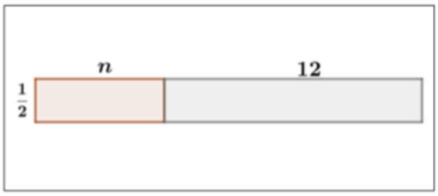
Dodaj tri na *n* zatim pomnoži s 2.

Udvostruči *n* zatim dodaj šest.



3. skupina

$\frac{n}{2}+6$

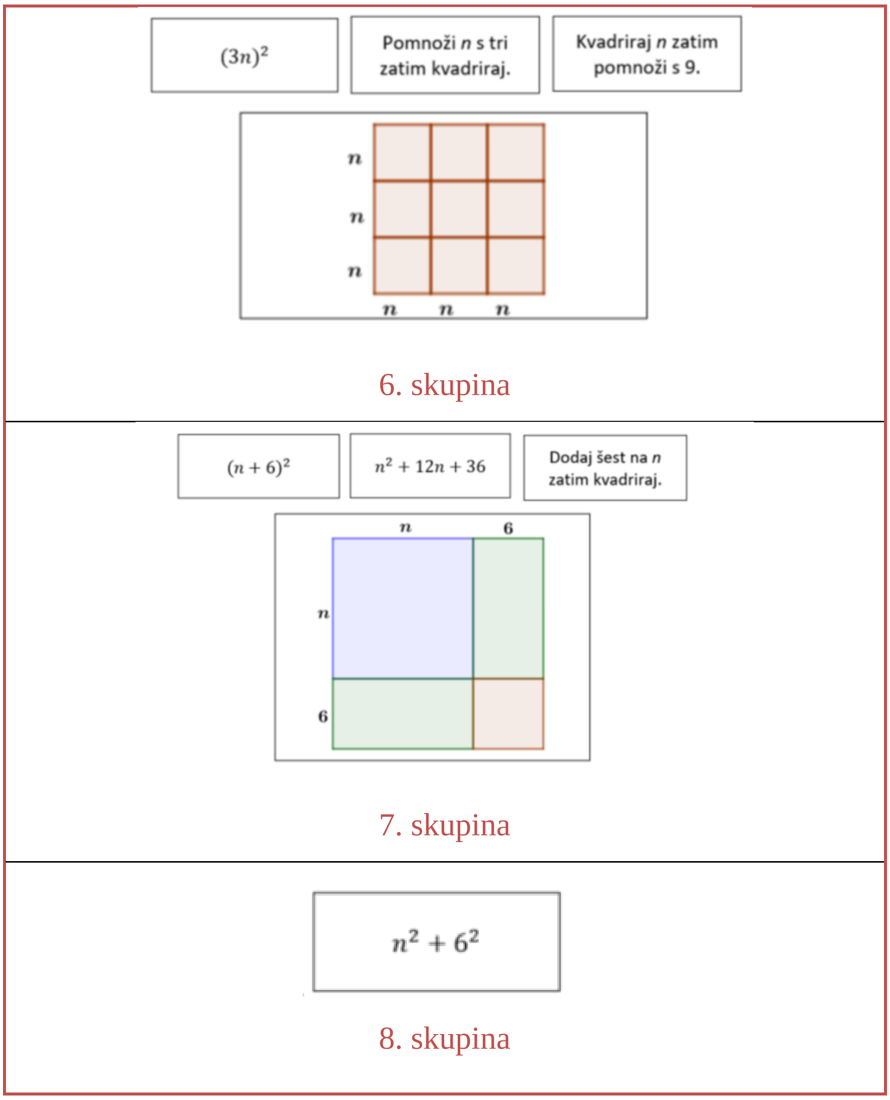


4. skupina

$2n+12$

Dodaj šest na *n* pa pomnoži s dva.

5. kupina

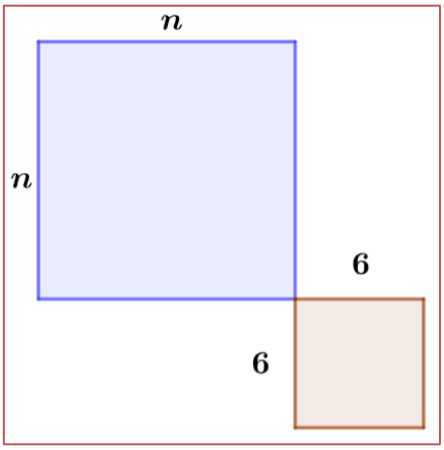


Slika 5.3.8-4 prikaz učeničkih rješenja

U 1., 3., 6. i 7. skupini algebarski izrazi su prikazani i riječima i grafički pa učenici ne trebaju koristiti dodatne kartice kako bi nadopunili prikaze. U 2. skupini izraz $3n^2$ nije prikazan riječima pa učenici na praznu karticu nadopunjuju s „Tri pomnožimo s kvadratom broja *n*.“ ili mogu čak napisati „Trostruki kvadrat broja *n*.“ U četvrtoj skupini također nedostaje kartica s opisom pa učenici na praznu karticu pišu „Broj *n* podijelimo s dva i dodamo 6.“. U 5. skupini učenici crtaju grafički prikaz algebarskog izraza. Što mogu napraviti na više načina. Jedan od primjera je prikazan na slici 5.3.8-5.

Slika 5.3.8-5

U 8. skupini nedostaje i grafički prikaz i opis riječima. Učenici izraz mogu opisat kao „Kvadriraj *n* te zbroj kvadrat broja 6.“ ili „Zbroj kvadrata broja *n* i broja 6.“ Dok grafički mogu prikazati sliku kao što je prikazano na slici 5.3.8-6.



Slika 5.3.8-6

Ono što je bitno na kraju aktivnosti u razrednoj diskusije s učenicima je usporediti sva moguća rješenja te raspraviti sva pogrešna kako bi učenici dobili priliku učiti na vlastitim greškama te kako bi nešto naučili iz njih.

5.4 Poznati algebarski identiteti

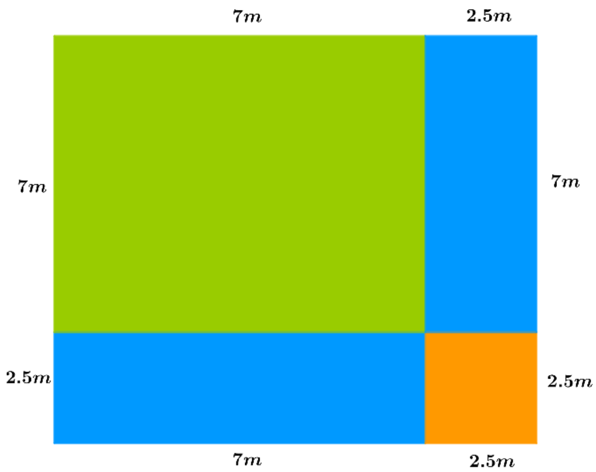
Učenici se upoznaju s algebarskim identitetima u osmom razredu osnovne škole te u prvom razredu srednje škole. U sljedećim aktivnostima učenici radom na modelu površine i volumena otkrivaju poznate algebarske identitete kako bi ih na konceptualnoj razini usvojili umjesto da ih pamte kao formule.

5.4.1 Aktivnost *Kvadrat zbroja i razlike*

Aktivnost je namijenjena učenicima prvih razreda srednje škole te se s njom ostvaruje ishod MAT SŠ B.1.2. Cilj aktivnosti je otkrivanje algebarskih identiteta kvadrata zbroja i kvadrata razlike. Učenici rade u paru, svaki učenik u paru ima isti nastavni listić, a listići se razlikuju za različite parove. Učeni rade na modelu površine.

Riješeni nastavni listić 5.4.1-1

1. Osnova škola „Stjepan Radić“ koristi kantinu kvadratnog oblika koja je podijeljena u četiri dijela, dio sa stolovima, 2 dijela namijenjena za formiranje reda i jedan dio za odlaganje prljavog suđa.



1. učenik	2. učenik
Izračunajte površinu kantine kao zbroj svih dijelova kantine. $7^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot 7 + 2.5^2 = 49 + 35 + 6.2$ $= 90.25\ m^2$	Izračunajte površinu kantine kao površinu cijelog kvadrata. $(7 + 2.5) \cdot (7 + 2.5) = 9.5 \cdot 9.5$ $= 90.25\ m^2$

a) Kojeg je oblika kantina, a kojeg njezini dijelovi?

Kantina je kvadratnog oblika, njezina dva dijela su pravokutnog oblika, a dva su kvadratnog oblika.

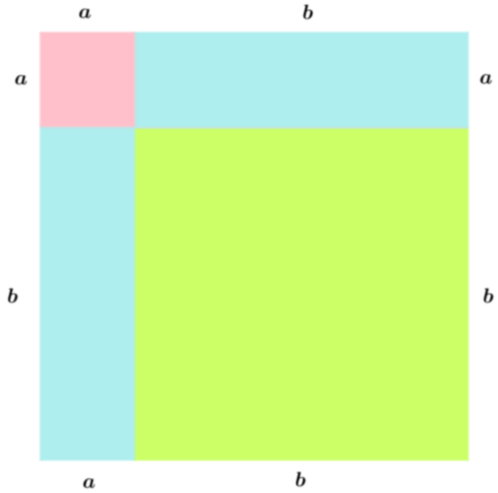
b) Usporedite dobivene rezultate, što uočavate?

Dobili smo jednake površine za oba načina na koji smo računali. Površina dijelova kvadrata jednaka je površini cijelog kvadrata. $7^2 + 2 \cdot 2.5 \cdot 7 + 2.5^2 = (7 + 2.5) \cdot (7 + 2.5) = (7 + 2.5)^2$

c) Vrijedi li uočena pravilnost za bilo koje dimenzije kantine?

Vrijedi jer se površina kvadrata ne mijenja bez obzira kako ga podijelili na dijelove.

2. Izračunajte površinu kvadrata na slici kao zbroj površine njegovih dijelova, zatim kao umnožak duljina stranica.



$$a^2 + 2 \cdot ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a) Što uočavate?

Uočavamo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

b) Kako biste nazvali dobiveni izraz? Što smo kvadrirali?

Kvadrirali smo zbroj dva broja, pa ga možemo nazvati kvadrirani zbroj, kvadrat zbroja,…

3. Čemu je jednako $[m + (-n)]^2$?

$$[m + (-n)]^2 = m^2 + 2 \cdot m \cdot (-n) + (-n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$$

a) Kako drugačije možemo zapisati $m + (-n)$?

Možemo zapisati kao $m - n$.

b) Čemu je jednako $(a - b)^2$?

$$(a - b)^2 = [a + (-b)]^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

c) Kako biste mogli nazvati prethodni izraz?

Kvadrirali smo razliku dva broja pa ga možemo nazvati kvadrat razlike dva broja.

4. Izračunajte sljedeće izraze i provjerite točnost rješenja.

a) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

b) $\left(1.2 - \frac{2}{5}x\right) = 1.2^2 - 2 \cdot 1.2 \cdot \frac{2}{5}x + \left(\frac{2}{5}x\right)^2 = 1.44 - \frac{24}{25}x + \frac{4}{25}x^2$

c) $(-1.5x + 2y)^2 = (-1.5)^2 + 2 \cdot (-1.5) \cdot 2y + (2y)^2$

$$= 2.25 - 6y + 4y^2$$

d) $\left(-\frac{2}{3}p - \frac{1}{4}r\right)^2 = \left[\left(-\frac{2}{3}p\right) + \left(-\frac{1}{4}r\right)\right]^2$

$$= \left(-\frac{2}{3}p\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}p\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}r\right) + \left(-\frac{1}{4}r\right)^2$$

$$= \frac{4}{9}p^2 + \frac{1}{3}pr + \frac{1}{16}r^2$$

Nakon što učenici riješe nastavni listić slijedi razredna diskusija gdje se uspoređuju rješenja različitih nastavnih listića kako bi se usporedili zaključci učenika i njihovi načini razmišljanja. U 1. zadatku svi učenici su trebali uočiti da su dobili jednaku površinu bez obzira na koji su način računali te doći do zaključka da je to zato što je zbroj površina dijelova kvadrata jednak površini kvadrata koji je podijeljen. Rješavanjem 2. zadatka učenici dolaze do zaključka da $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Razrednom diskusijom dolaze do zaključka da to vrijedi za sve realne brojeve te da su izrazili algebarski identitet koji se naziva kvadrat zbroja. Rješavanjem trećeg zadatka učenici dolaze do algebarskog identiteta kvadrata razlike. Primjenom pravila za kvadrat zbroja kvadriraju zbroj varijable s pozitivnim koeficijentom i negativnim koeficijentom, zatim uočavaju kako dani izraz mogu zapisati kao razliku te kvadriraju razliku varijabli. Uočavaju $(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Diskusijom s nastavnikom učenici otkrivaju da su otkrili algebarski identitet kvadrat razlike te na on vrijedi za sve realne broje. Nakon diskusije i uspoređivanja zaključka učenici primjenjuju novootkrivene identitete na konkretne primjere.

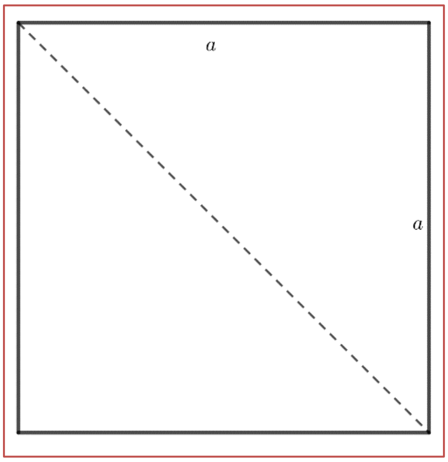
5.4.2 Aktivnost *Razlika kvadrata*

Cilj aktivnosti je otkrivanje algebarskog identiteta razlika kvadrata. Aktivnošću se ostvaruje ishod MAT SŠ B.1.2, te je namijenjena učenicima prvog razreda srednje škole. Učenicima je za nastavnu aktivnost potreban komad papira oblika kvadrata, škare te nastavni listić s uputama i pitanjima za svakog učenika. Aktivnost je namijenjena individualnom radu.

Nastavni listić 5.4.1

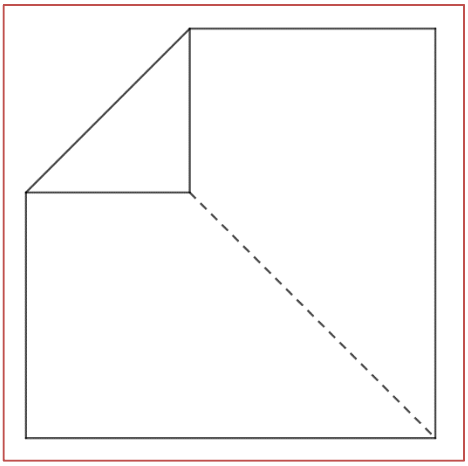
1. Dan je papir čija je duljina stranice a. Kolika je njegova površina?
2. Uzmite papir i presavijte ga po dijagonali.
3. Odaberite jedan od vrhova koji je kraj dijagonale i presavijanjem papira ga spojite s nekom točkom na dijagonali.
4. Presavijeni „trokut“ izrežite. Rastvorite odrezani papirić. Kojeg je oblika? Označite duljinu stranica na odrezanom dijelu i ostatku papira.
5. Kolika je površina odrezanog dijela?
6. Kolika je površina ostatka papira?
7. Ostatak papira odrežite po dijagonali i presložite u pravokutnik. Koja je duljina njegovih stranica?
8. Koja je površina dobivenog pravokutnika?
9. Usporedite 6. i 8. pitanje. Što uočavate?

Učenici slijede upute s nastavnog listića dok nastavnik nadgleda njihov rad i ispravlja moguće greške. Učenici za početni papirić pišu da je njegova površina a^2, jer je stranica duljine a, a u pitanju je kvadrat. Savijeni papir je prikazan na slici 5.4.2.1.

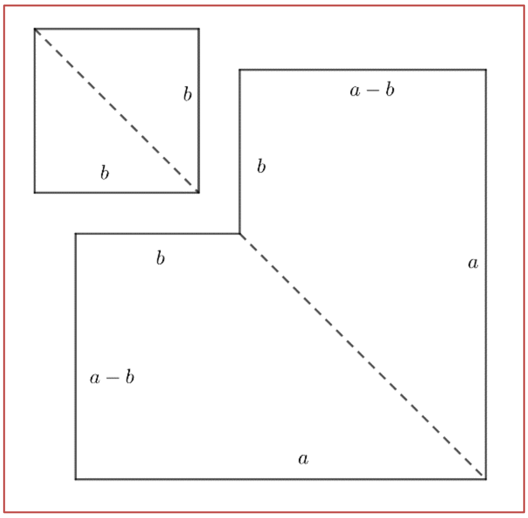


Slika 5.4.2-1

Učenici zatim odrađuju korake 3. i 4. što je prikazano na slikama 5.4.2.2 i 5.4.2.3. Uočavaju da je odrezani dio isto oblika kvadrata što mogu potvrditi presavijanjem papira kako bi usporedili duljine stranica. Stranice novog kvadrata označavaju s b.

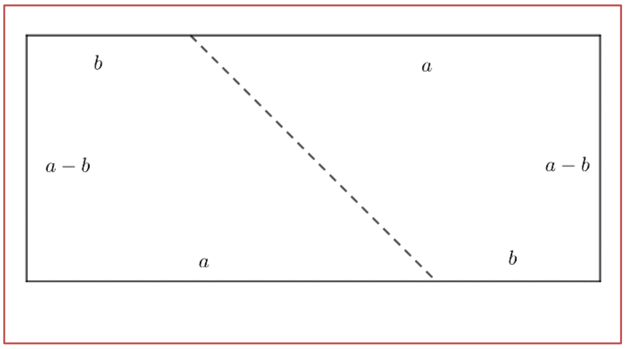


Slika 5.4.2.2

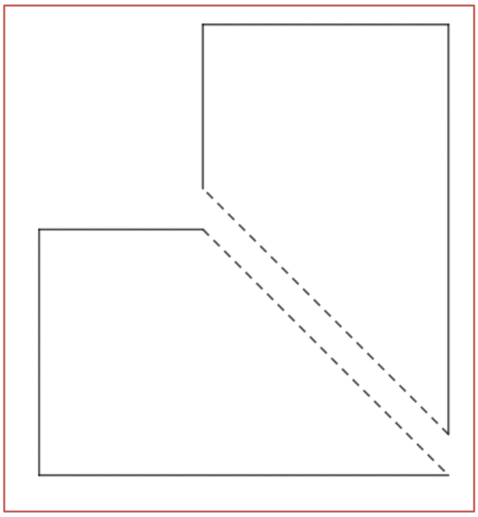


Slika 5.4.2.3

Kako je novi odrezani papir kvadrat sa stranicom duljine b, zaključuju da je njegova površina b^2. Kako ostatak papira nije kvadratnog oblika zaključuju da njegovu površinu mogu izračunati tako da od površine početnog kvadrata oduzmu površinu izrezanog kvadrata odnosno $a^2 - b^2$. Učenici zatim u 7. koraku ponovno režu ostatak papira po dijagonali i preslaguju ga u pravokutnika kao što je prikazano na slikama 5.4.2.4 i 5.4.2.5.



Slika 5.4.2.5

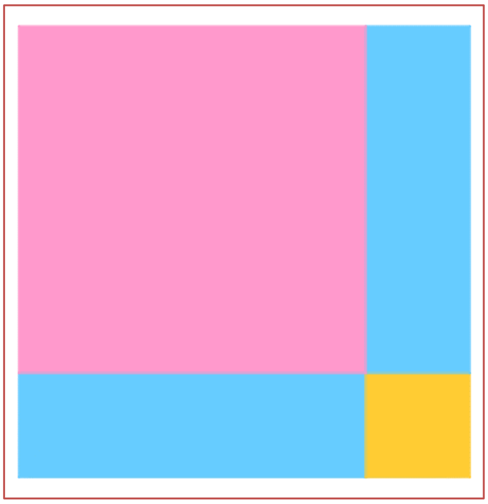


Slika 5.4.2.4

Kako su učenici u svakom koraku pisali duljine stranica na rubove lika lako mogu uočiti duljine stranica dobivenog pravokutnika a to su $a + b$ i $a - b$. Kako bi dobili površinu pravokutnika množe dobivene stranice $(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$. Učenici uspoređuju odgovore na šesto i osmo pitanje te dolaze do zaključka da su obje površine jednake pa vrijedni jednakost $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$. Nakon što učenici dođu do prethodnog zaključka u diskusiji s nastavnikom uspoređuju rješenja i zaključke te nastavnik postavlja pitanje za učenike: „Vrijedi li dobivena jednakost za svaki realan broj a i b?“. Učenici tada proizvoljno uzimaju različite brojeve za a i b kako bi provjerili pravilo. Uspoređuju rezultate u razredu te uočavaju da su svi učenici dobili da jednakost vrijedi te zaključuju kako jednakost vrijedi za sve realne brojeva a i b pa je to novi algebarski identitet. Učenici zatim raspravljaju kako bi nazvali dobiveni izraz te uočavaju da je to izraz koji govori čemu je jednaka razlika dva kvadrirana broja pa zaključuju da ga mogu nazvati razlika kvadrata.

5.4.3 Aktivnost *Kub zbroja i razlike*

Aktivnost je namijenjena učenicima prvog razreda srednje škole te se njome ostvaruje ishod MAT SŠ B.1.2. Cilj aktivnosti je da učenici u četveročlanim skupinama otkriju algebarski identitet kub zbroja. Za aktivnost je potrebno osam blokova koje će učenici slagati u kocku volumena $(a+b)^3$. Potrebna je jedna kockica volumena a^3 i jedna volumena b^3. tri kvadra volumena a^2b i tri kvadra volumena ab^2. Učenicima je još potreban predložak na koji će slagati pločica kao i dva nastavna listića na kojem će pisati upute i pitanja te drugi za drugi dio aktivnosti u kojem otkrivaju kub razlike. Također je učenicima potrebna i bilježnica u koju pišu odgovore.



Slika 5.4.3-1 Predložak za slaganje blokova

Nastavni listić 5.4.2

1. Zapišite na predložak površine kvadrata i pravokutnika kao i duljine stranica kvadrata i pravokutnika.
2. Od danih blokova složite kocku.
3. Kolika je duljina brida složene kocke?
4. Koliki je volumen složene kocke? Izrazite pomoću formule za volumen.
5. Od koliko ste blokova složili kocku? Koje su njihove dimenzije? Zapišite za svaki njegov volumen.
6. Izrazite volumen složene kocke kao zbroj volumena dijelova kocke.
7. Što uočavate? Što je jednako?

8. U bilježnicu izračunajte:

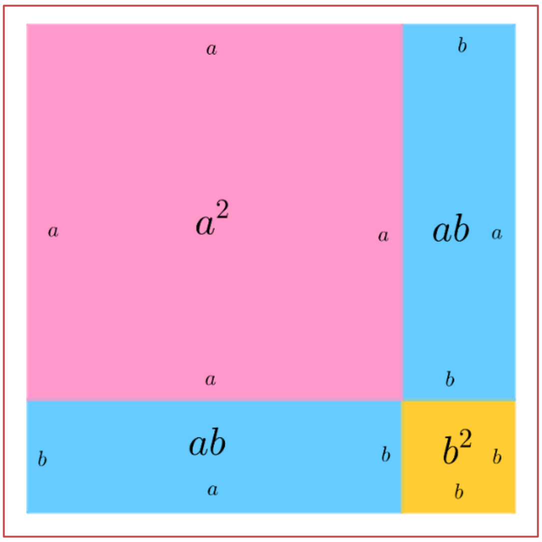
   a) $(x + 2y)^3$

   b) $\left(\frac{2}{3} + v\right)^3$

   c) $(1.5p + 3)^3$

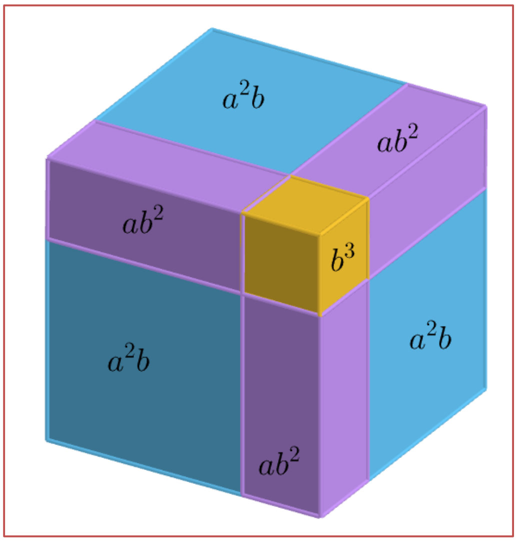
   d) $(5x + \pi y)^3$

Učenici na predlošku zapisuju površine kvadrata kao i duljine stranica.



Slika 5.4.3-2 Predložak s upisanim dimenzijama

Učenici zatim od danih blokova metodom pokušaja i pogrešaka slažu kocku na podložak. Učenici mogu složiti kocku na dva načina, jedna od mogućnosti je prikazana na slici.



Slika 5.4.3-3 Jedan način na koji se može složiti kocka

Učenici uočavaju da je duljina bridova kocke $a + b$, te pomoću formule za volumen pišu $V = (a + b)^3$. Zatim opisuju blokove od kojih su složili kocku. Uočavaju da su dva bloka kocke te mjerenjem bridova na predlošku zaključuju da su bridovi jedne kocke duljine a, dok su bridovi druge kocke duljine b. U skladu s tim zapisuju da su njihovi volumeni a^3 i b^3. Zatim uspoređuju ostale blokovi koji su oblika kvadra i uočavaju da imaju tri ista bloka, i tri koja su različita od njih ali su međusobno isti. Zatim pomoću predloška određuju njihove dimenzije i uočavaju da jedna skupina ima dva brida duljine a i jedan brid duljine b, dok druga skupina ima dva brida duljine b i jedan brid duljine a. Zapisuju da je volumen bridova u prvoj skupini volumen jednak a^2b, dok je u drugoj skupini ab^2. Učenici zatim zapisuju volumen kocke kao $V = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$. Zaključuju da je volumen kocke jednak zbroju volumena njezinih dijelova, blokova. U skladu s tim zaključuju $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$. U nastavku diskusije s nastavnikom, nastavnik na ploču zapisuje izraz $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ te pita učenike kako bi nazvali dobiveni algebarski izraz te učenici zaključuju kako su kubirali zbroj dva broja ili da su kubirali binom pa bi dobiveni izraz nazvali kub binoma ili kub zbroja. U drugom nastavnom listiću zadani su zadaci u kojima učenici primjenjuju izraz te provjeravaju rješenja tako da odaberu vrijednost varijabli po volji. Nakon uspoređivanja rješenja zaključuju da je dobiveni izraz identitet jer vrijedi za sve brojeve koje su uvrstili.

a) $(x+2y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (2y) + 3 \cdot x \cdot (2y)^3 + (2y)^3$

$$= x^3 + 6x^2y + 24xy^2 + 8y^3$$

b) $\left(\frac{2}{3}+v\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot v + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot v^2 + v^3 = \frac{8}{27} + \frac{8}{9}v + \frac{4}{9}v^2 + v^3$

c) $(1.5p+3)^3 = (1.5p)^2 + 3 \cdot (1.5p)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 1.5p \cdot 3^2 + 3^3$

$$= 3.375p^3 + 20.25p^2 + 33.75p + 27$$

d) $(5x+\pi y)^3 = (5x)^3 + 3 \cdot (5x)^2 \cdot y\pi + 3 \cdot 5x \cdot (\pi y)^2 + (\pi y)^3$

$$= 125x^3 + 75\pi x^2 y + 15\pi^2 xy^2 + \pi^3 y^3$$

Učenici zatim rješavaju drugi nastavni listić pomoću kojega će otkriti algebarski identitet za kub razlike.

Riješeni drugi nastavni listić 5.4.3-1

1. Koristeći definiciju kubiranja i odgovarajuća matematička svojstva dokažite da vrijedi $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = (a+b) \cdot (a^2 + ab + ab + b^2)$$
$$= (a+b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2. Čemu je jednako $[x+(-y)]^3$?

$$[x+(-y)]^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-y) + 3 \cdot x \cdot (-y)^2 + (-y)^3$$
$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

3. Kako drugačije možete zapisati $x-y$? Čemu je jednak njegov kub? Provjerite.

Možemo zapisati kao $x+(-y)$. Kub $x-y$ je isti kao za $x+(-y)$.

$$(x-y)^3 = (x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y) = (x-y) \cdot (x-y)^2$$
$$= (x-y) \cdot (x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= x \cdot (x^2 - 2xy + y^2) + (-y) \cdot (x^2 - 2xy + y^2)$$
$$= x^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2 - y^3$$
$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

4. Izračunajte:

a) $(x-4y)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 4y + 3 \cdot x \cdot (4y)^2 - (4y)^3$

$$= x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$$

b) $(2w - 3.5)^3 = (2w)^3 - 3 \cdot (2w)^2 \cdot 3.5 + 3 \cdot 2w \cdot 3.5^2 - 3.5^3$

$$= 8w^2 - 42 + 73.5w - 42.875$$

c) $\left(-4 + \frac{1}{2}a\right)^3 = (-a)^3 + 3 \cdot (-4)^2 \cdot \frac{1}{2}a + 3 \cdot (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^3$

$$= -a^3 + 24a - 6a^2 - \frac{1}{8}a^3$$

d) $\left(-1.2x - \frac{5}{6}y\right)^3 = (-1.2x)^3 + 3 \cdot (-1.2x)^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}y\right) + 3 \cdot (-1.2x) \cdot$
$\left(-\frac{5}{6}y\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}y\right)^3 = -1.728x^3 - \frac{18}{5}x^2y - 3 + \frac{125}{216}y^3$

5. Koje ste algebarske identitete otkrili?

Otkrili smo algebarske identitete za kub zbroja i kub razlike.

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

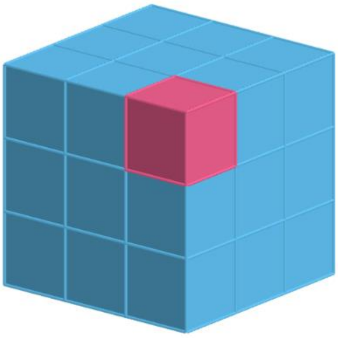
Učenici prvo dokazuju algebarski identitet za kub zbroja pomoću definicije kubiranja te primjenom svojstava distributivnosti i komutativnosti. Zatim primjenjuju kub zbroja na zbroj pozitivnog i negativnog broja kako bi dobivenu jednakosti mogli povezati s kubom razlike koji se traži u 3. zadatku. Pretpostavljaju da vrijedi $[x + (-y)]^3 = (x - y)^3$ što provjeravaju računanjem $(x - y)^3$ primjenom definicije kubiranja te primjenom svojstva distributivnosti i komutativnosti, jedna od mogućnosti je primijeniti kvadrat razlike na dva faktora u umnošku kao što je prikazano u rješenju. Nakon što primjene nove identitete na konkretne zadatke zapisuju ih na nastavni listić koji lijepe u bilježnicu. Nastavnik zatim diskutira s učenicima je li potrebno pamtiti oba identiteta. Učenici bi trebali uočiti da to nije potrebno jer $(x - y)^3$ mogu zapisati kao $[x + (-y)]^3$. Neki učenici mogu uočiti da nije potrebno pamtiti identitet jer ga mogu zapisati kao umnožak binoma i kvadrata binoma.

5.4.4 Aktivnost *Razlika i zbroj kubova*

Aktivnost je namijenjena učenicima prvog srednje te se s njom ostvaruje ishod MAT SŠ B.1.2. Aktivnost je namijenjena radu u četveročlanim skupinama te je za svaku skupinu potreban set od 27 kockica jednakih dimenzija od kojih je jedna različite boje te nastavni listić s uputama i pitanjima.

Nastavni listić 5.4.3

1. Složite kockice kako je prikazano na slici.



2. Plave plavi bridovi su duljine *a* dok su rozi bridovi duljine *b*. Koliki je volumen cijele kocke? Koliki je volumen roze kocke?

   Volumen cijele kocke je a^3, a volumen male kocke je b^3.

3. Uklonite rozu kockicu. Koliki je volumen plavog tijela?

   Volumen plavog tijela je $a^3 - b^3$.

4. Od kojih se blokova sastoji plavo tijelo? Zapišite njihove volumene.

   Tijelo se sastoji od tri kvadra. Dimenzije jednog kvadra su dvije stranice duljine a i stranica duljine $a - b$. Njegov volumen je $a^2(a - b)$. Dimenzije drugog kvadra su $a - b, b$ i a, dok je njegov volumen $ab(a - b)$. Dimenzije trećeg kvadra su dvije stranice duljine b i jedna stranica duljine $(a - b)$, a njegov volumen je $b^2(a - b)$.

5. Čemu je jednak volumen plavog tijela? Faktorizirajte ga ako je moguće.

   Volumen plavog tijela jednak je zbroju volumena njegovih dijelova. Njegov volumen je $a^2(a - b) + ab(a - b) + b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

6. Što zaključujete? Obrazloži odgovor. Kako možete dokazati?

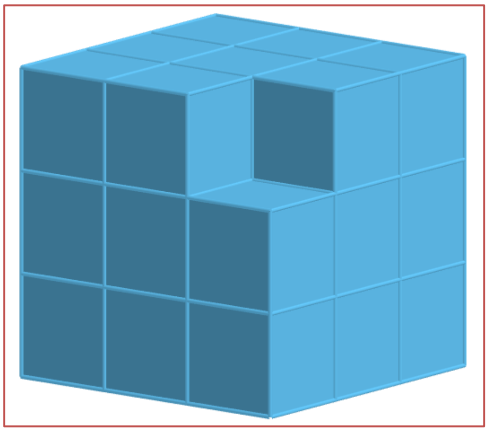
   Volumen plavog tijela je jednak volumenu njegovih dijelova pa prema tome vrijedi:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ako pomnožimo desnu stranu izraza dobit ćemo lijevu stranu.

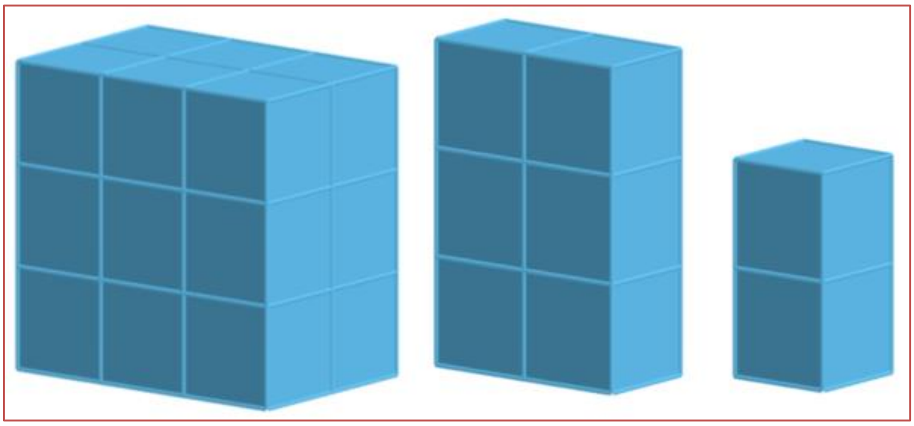
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Nakon što učenici uklone rozu kocku volumena b^3 dobiju tijelo prikazano na slici 5.4.4-1 te zaključuju da njegov volumen mogu izračunati ako od volumena cijele kocke oduzmu volumen roze kocke.



Slika 5.4.4-1

Učenici u 4. razredu mogu odabrati raznu podjelu tijela na blokove jedna od njih je prikazana na slici 5.4.4-2 i opisana u rješenju 4. zadatka. Bez obzira na podjelu učenici bi trebali doći do istog zaključka. U razrednoj diskusiji sve skupine trebaju prikazati svoj način na koji su podijelili kvadar te za svaki način treba provjeriti je li doveo do istog zaključka.



Slika 5.4.4-2

U 5. zadatku učenici dolaze do faktoriziranog zapisa za zbroj volumena dijelova plavog tijela $(a-b)(a^2+ab+b^2)$. U 6. zadatku dolaze do zaključka da vrijedi $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ što u 7. zadatku pokazuju množenjem izraza na lijevoj strani. U razrednoj diskusiji je potrebno raspraviti jesu li sve skupine došle do istog zaključka kako bi se proveo ostatak aktivnosti.

Riješeni nastavni listić 5.4.4-2

1. Primijenite novootkrivenu jednakost u zadatcima te provjerite uvrštavanjem konkretnih vrijednosti vrijedi li za sve izraze.

   a) $x^3-(2y)^3=(x-2y)(x^2+x\cdot 2y+4y^2)$

   PROVJERA: $x=1, y=1$

   Lijeva strana: $1^3-2^3=1-8=-7$

   Desna strana: $(1-2)(1^2+1\cdot 2+4\cdot 1^2)=-(1+2+4)=-7$

   b) $(-3)^3-\left(\frac{1}{2}z\right)^3=\left(-3-\frac{1}{2}z\right)\left(9-\frac{3}{2}z+\frac{1}{4}z^2\right)$

   PROVJERA: $z=2$

   Lijeva strana: $(-3)^3-\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^3=-27-1=-28$

   Desna strana: $\left(-3-\frac{1}{2}\cdot 2\right)\left(9-\frac{3}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2^2\right)=(-4)\cdot(9-3+1)$
   $=-28$

2. Što mislite za koje brojeve vrijedi jednakost $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$?

   Jednakost vrijedi za sve realne brojeve.

3. Kako biste ste ju nazvali?

   Jednakost je algebarski identitet koji možemo nazvati razlika kubova jer govori čemu je jednaka razlika dva kuba.

4. Kako biste ste odredili čemu je jednako a^3+b^3 primjenom uočenog pravila i odgovarajućih svojstava?

   Izraz a^3+b^3 možemo zapisati kao razliku $a^3-(-b^3)$ te primijeniti kub razlike.

   $$a^3+b^3=a^3-(-b^3)=[a-(-b)][a^2+a\cdot(-b)+(-b)^2]$$
   $$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

5. Čemu je jednako a^3+b^3? Kako biste ste nazvali dobiveni izraz?

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Nazvali bismo ga zbroj kubova jer zbrajamo dva kubirana broja.

6. Primijenite novootkrivenu jednakost u zadatcima te provjerite uvrštavanjem konkretnih vrijednosti vrijedi li za sve izraze. Što mislite za koje sve brojeve vrijedi jednakost?

a) $(1.2a)^3 + (5b)^3 = (1.2a + 5b)[(1.2a)^2 - 1.2a \cdot 5b + (5b)^2]$

$$= (1.2a + 5b)(1.44a^2 - 6ab + 25b^2)$$

PROVJERA: $a = 5, b = \frac{1}{5}$

Lijeva strana: $(1.2 \cdot 5)^3 + \left(5 \cdot \frac{1}{5}\right)^3 = 6^3 + 1^3 = 217$

Desna strana: $\left(1.2 \cdot 5 + 5 \cdot \frac{1}{5}\right)\left[1.44 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} + 25\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]$

$$= 7 \cdot (36 - 6 + 1) = 7 \cdot 31 = 217$$

b) $\left(-\frac{1}{2}d\right)^3 + (-4)^3$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}d\right) + (-4)\right]\left[\left(-\frac{1}{2}d\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}d\right)(-4) + (-4)^2\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}d - 4\right)\left(\frac{1}{4}d^2 - 2d + 16\right)$$

PROVJERA: $d = 4$

Lijeva strana: $\left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right)^3 + (-4)^3 = (-2)^3 - 64 = -8 - 64 = -72$

Desna strana: $\left[\left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right) + (-4)\right]\left[\left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right) \cdot (-4) + (-4)^2\right]$

$$= (-2 - 4)(4 - 8 + 16) = -6 \cdot 12 = -72$$

Jednakost vrijedi za sve realne brojeve.

1. zadatak na nastavnom listiću služi kako bi učenici provjerili vrijedi li algebarski identitet za sve brojeve. Prilikom diskusije nastavnik ispisuje sve brojeve koje su učenici uvrštavali za provjeru rješenja kako bi učenici uočili da izraz vrijedi za mnogo brojeva. Na temelju toga, generalizacijom pomoću nepotpune indukcije učenici zaključuju da izraz vrijedi za sve realne brojeve te da je novootkrivena jednakost algebarski identitet koji se zove razlika kubova. Učenici zatim rješavaju 4. zadatak kako bi otkrili čemu je jednako

$a^3 + b^3$. Učenike bi se trebali podsjetiti da za svaki realan broj x vrijedi $-(-x) = x$ te to primijeniti u zadatku kako bi zbroj zapisali kao razliku te primijenili algebarski identitet razlika kvadrata. Uočavaju da vrijedi $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ te zaključuju da ga mogu nazvati zbroj kubova. Zatim u 6. zadatku koriste dani identitet kako bi faktorizirali dane izraze te u njih uvrštavaju konkretne vrijednosti kako bi provjerili za koje sve brojeve vrijedi novootkrivena jednakost. U diskusiji ponovno uočavaju da jednakost vrijedi za sve brojeve te zaključuju da su otkrili algebarski identitet zbroj kubova.

LITERATURA

[1] A. Arcavi, P. Drijvers i K. Stacey, *The Learning and Teaching of Algebra*, Routledge, New York, 2017.

[2] E. J. Knuth, A. C. Stephens, N. M. McNeil, M. W. Alibali, *Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations*, dostupno na https://www.jstor.org/stable/30034852 (prosinac 2023.)

[3] J. A. Van de Walle, K. S. Karp i J. M. Bay-Williams, *Elementary and Middle School Mathematics*, Allyn & Bacon, Boston,2007.

[4] J. K. Lannin, *Developing algebraic reasoning through generalization* , dostupno na https://www.jstor.org/stable/41181838h (siječanj 2024.).

[5] J. A. Van de Walle, L. A. H. Lovin, K. H. Karp i J. M. Bay-Williams, *Teaching Student-Centered Mathematics*, Pearson, Essex, 2014.

[6] Lj. Jukić Matić, V. Tutnjević, *Algebarski koncepti u nastavi matematike,* dostupno na: https://hrcak.srce.hr/125703 (prosinac 2023.).

[7] M. Driscoll, *Fostering Algebraic Thinking- A Guide for Teachers Grades 6-10*, Heinemnn, Portsmouth, 1999.

[8] M. K. Gavin, L. Jensen Sheffield, *A Balancing Act: Making Sense of Algebra*, dostupno na https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.20.8.0460 (siječanj 2024.).

[9] N. Herscovics, C. Kieran, *Constructing meaning for the concept of equation*, dostupno na http://www.jstor.org/stable/27962179 (siječanj 2024.).

[10] Nacionalni matematički kurikulum (2019), dostupno na https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/full/2019_01_7_146.html (prosinac 2023.).

[11] Interpreting Algebraic Expressions, dostupno na Formative Assessment Lessons (mathshell.org) (siječanj 2024,).

[12] Generating polynomials from Patterns, dostupno na Formative Assessment Lessons (mathshell.org) (siječanj 2024.).

IZVORI ZA SLIKE:

[1] Vaga jednakih krakova dostupno na https://www.eaieducation.com (veljača 2024.).

[2] Algebarske pločice, dostupno na https://www.eaieducation.com (veljača 2024.).

[3] Kovanice, dostupno na https://www.hnb.hr/novac/eurokovanice/apoeni-eurokovanica (prosinac 2023.)

SAŽETAK

Cilj ovog rada jest detaljno opisati proces razvoja algebarskog mišljenja kod učenika te opisati učinkovite metode i aktivnosti koje doprinose tom razvoju u nastavi matematike. U uvodnom dijelu rada analizira se sam koncept algebarskog mišljenja kroz njegove različite aspekte, s naglaskom na osnovne elemente nužne za pravilno usvajanje algebarskih izraza. Poseban naglasak stavlja se na aktivnosti usmjerene na razvoj ključnih koncepata poput jednakosti i varijable. Rad sadrži i aktivnosti usmjerene na uvođenje algebarskih izraza, pri čemu se koristi model novca i površine. Opisane su aktivnosti koje uključuju upotrebu algebarskih pločica u nastavi kao alata za vizualizaciju i aktivno sudjelovanje učenika u procesu otkrivanja osnova računanja s algebarskim izrazima. Algebarske pločice koriste se kako bi učenici stekli vizualno iskustvo i bolje usvojili osnove računanja s algebarskim izrazima. Aktivnosti namijenjene za otkrivanje osnovnih algebarskih identiteta služe kako bi se učenike potaklo na otkrivanje osnovnih algebarskih identiteta pomoću modela površine i volumena, što omogućuje razvoj njihove sposobnosti povezivanja geometrijskih i algebarskih koncepata. Opisanim aktivnostima rad pridonosi razumijevanju razvoja algebarskog mišljenja kod učenika te opisuje pristupe koji potiču dublje razumijevanje i usvajanje ključnih algebarskih koncepata.

SUMMARY

The aim of this paper is to comprehensively describe the process of developing algebraic thinking in students and to outline effective methods and activities that contribute to this development in mathematics education. In the introductory part, the concept of algebraic thinking is analyzed through its various aspects, with a focus on fundamental elements necessary for the proper acquisition of algebraic expressions. Special emphasis is placed on activities directed towards the development of key concepts such as equality and variables. The paper includes activities aimed at introducing algebraic expressions, utilizing models such as money and surface area. There is a description of activities that involve the use of algebraic tiles as tools for visualization and active student participation in the process of discovering the basics of computing with algebraic expressions. Algebraic tiles are employed to provide students with a visual experience and enhance their understanding of the fundamentals of computing with algebraic expressions. Activities designed to explore basic algebraic identities are intended to encourage students to discover fundamental algebraic identities using surface and volume models, facilitating the development of their ability to connect geometric and algebraic concepts. Through the described activities, the paper contributes to understanding the development of algebraic thinking in students and outlines approaches that promote deeper comprehension and adoption of key algebraic concepts.

ŽIVOTOPIS

Rođena sam u Imotskom 10. prosinca 1997. gdje sam odrastala sa svojim roditeljima, sestrom i dvojicom braće. Školovanje sam započela u Osnovnoj školi „Stjepan Radić" koja je danas poznata kao Osnovna škola „Josip Vergilij Perić" 2004. godine. 2012. godine nastavljam školovanje u Gimnaziji dr. Mate Ujevića gdje sam upisala prirodoslovno matematički program. Nakon trećeg razreda srednje škole postalo mi je jasno da želim biti nastavnica matematike te niti jednu drugo zanimanje nije niti dolazilo u obzir jer sam smatrala da pravi izazov leži u pronalasku načina kako objasniti nekome nešto što ne razumije. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2016. upisujem preddiplomski studij Matematika- nastavnički smjer na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu te 2021. upisujem diplomski studij Matematika- nastavnički smjer na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu.