

Modeliranje dinamičkih sustava vođeno podacima

Mustafić, Ermin

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:792428>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-29**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ermin Mustafić

MODELIRANJE DINAMIČKIH
SUSTAVA VOĐENO PODACIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zvonimir
Bujanović

Zagreb, ožujak 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sebi i obitelji

Sadržaj

Uvod	1
1 Dekompozicija na dinamičke modove	3
1.1 Osnovni pojmovi i formulacija DMD strukture	3
1.2 Koopmanov operator i poveznica s DMD-om	10
1.3 DMD u mehanici fluida	13
1.4 Primjeri	18
2 DMD u teoriji upravljanja	23
2.1 Formulacija DMDc strukture	23
2.2 Poveznica s Koopmanovim operatorom	27
3 Učenje nelinearne dinamike iz podataka	29
3.1 Osnovni pojmovi	29
3.2 Primjeri i usporedba s DMD-om	34
3.3 <i>Lift & Learn</i> metoda	40
A Uvod u teoriju upravljanja	47
Literatura	51
Sažetak	53

Uvod

U mnogim primjenama kao što su mehanika fluida, medicina, klimatologija ili obrada signala i videozapisa često ne znamo jednadžbe koje opisuju promatrani sustav, već su nam dostupni samo podaci koji su prikupljeni raznim mjerenjima. Stoga su metode za modeliranje dinamičkih sustava koje se temelje isključivo na eksperimentalnim podacima sve popularnije. Takvi sustavi su obično visokodimenzionalni i nelinearni te su izazovni za numeričke simulacije, no mogu se aproksimirati sustavima manjih dimenzija.

Jedna od takvih metoda je dekompozicija na dinamičke modove (DMD), tj. svojstvena dekompozicija linearnog operatora koji preslikava stanje sustava u nekom vremenskom trenutku u sljedeće ili općenito neki ulaz u izlaz. Dobivene svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori (modovi) daju detaljniji uvid u strukturu promatranog sustava. Ti svojstveni parovi mogu biti korišteni i za predviđanje budućeg ponašanja te za upravljanje sustavom. Opravdanje aproksimacije nelinearnog sustava linearnim daje Koopmanova teorija.

Za razliku od DMD-a, metoda učenja operatora dinamike na temelju podataka (eng. *operator inference*), uvedena u [8], nastoji konstruirati nelinearni aproksimativni model s polinomnim članovima. Taj aproksimativni model je reducirani model baziran na projekciji na nižedimenzionalni potprostor. Ova metoda je također vođena podacima, odnosno jednadžbe potpunog modela nisu dostupne, nego su dostupni samo ulazi, stanja sustava te izlazi. Prezentiramo još jednu metodu redukcije modela zvanu *Lift & Learn* u kojoj je poznavanje jednadžbi sustava iskorišteno za pronalaženje novih koordinata iz kojih se može dobiti nižedimenzionalni model.

Poglavlje 1

Dekompozicija na dinamičke modove

1.1 Osnovni pojmovi i formulacija DMD strukture

Neka su dani podaci u parovima (x_k, y_k) , za $k = 1, \dots, m$, pri čemu su $x_k, y_k \in \mathbb{R}^n$. Ti podaci tipično predstavljaju izmjerene vrijednosti nekog dinamičkog sustava. Matematički model sustava nam je nepoznat i naš cilj će biti njegova rekonstrukcija isključivo na temelju ovih podataka. Želimo pronaći operator koji će podatke x_k preslikati u y_k . U tu svrhu, posložimo zadane podatke u dvije $n \times m$ matrice

$$X = [x_1 \dots x_m], \quad Y = [y_1 \dots y_m]. \quad (1.1)$$

Definicija 1.1 (DMD). Za podatke dane u (1.1), definiramo operator

$$A = YX^\dagger, \quad (1.2)$$

gdje je X^\dagger pseudoinverz matrice X . *Dekompozicija na dinamičke modove (DMD)* para (X, Y) je svojstvena dekompozicija matrice A . Nadalje, DMD modovi i svojstvene vrijednosti su svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti od A .

Gornja definicija je predstavljena u [12] i općenitija je od originalne algoritamske definicije iz [10] o kojoj će biti riječ pri kraju ovog potpoglavlja. Iako su ta dva pristupa slična, ipak imaju neke važne razlike.

Napomena 1.2. Operator A u (1.2) je rješenje problema najmanjih kvadrata

$$\min_{A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \|AX - Y\|_F.$$

Napominjemo da su matrice X i Y zadane, a matrica A je nepoznata. Ako postoji egzaktno rješenje od $AX = Y$, što je uvijek slučaj kada su vektori x_k linearno nezavisni, onda (1.2) minimizira $\|A\|_F$, gdje je $\|A\|_F = \text{tr}(AA^*)^{1/2}$ Frobeniusova norma. Ukoliko nema takvog A , onda (1.2) minimizira $\|AX - Y\|_F$.

Uočimo da je matrica A dimenzije $n \times n$, a n je općenito velik, stoga je računanje svojstvene dekompozicije od A potencijalno skupo. Sljedeći algoritam, koristeći dekompoziciju na singularne vrijednosti (SVD), računa svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti bez direktne manipulacije s matricom A .

Algoritam 1.3 (DMD). Ulaz: X, Y .

1. Izračunati reducirani (ekonomični) SVD matrice X , $X = U\Sigma V^*$.
2. Izračunati matricu $\tilde{A} = U^*YV\Sigma^{-1}$.
3. Izračunati svojstvene parove $(\tilde{\varphi}, \lambda)$ matrice \tilde{A} . Svaka svojstvena vrijednost λ različita od nule je DMD svojstvena vrijednost.
4. DMD mod koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ je dan kao

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} YV\Sigma^{-1} \tilde{\varphi}. \quad (1.3)$$

Izlaz: φ, λ .

DMD modovi u (1.3) se mogu skalirati na mnogo načina. Ovdje se, u svrhu teorije, radi kao u [12], ali u primjerima skaliranje varira. Generalno se skalira na način da vektori budu jedinične norme, no svaki primjer može imati neku svoju interpretaciju. Podsjetimo se, ako je v svojstveni vektor, onda je to i αv , za $\alpha \neq 0$.

Teorem 1.4. *Svaki par (φ, λ) generiran Algoritmom 1.3 je svojstveni par matrice A . Štoviše, algoritam pronalazi sve svojstvene vrijednosti matrice A koje su različite od nule.*

Dokaz. Iz SVD-a od X vidimo da je pripadni pseudoinverz

$$X^\dagger = V\Sigma^{-1}U^*,$$

stoga iz (1.2) slijedi da je

$$A = YV\Sigma^{-1}U^* = BU^*, \quad (1.4)$$

gdje je

$$B = YV\Sigma^{-1}.$$

Nadalje, vrijedi da je

$$\tilde{A} = U^*YV\Sigma^{-1} = U^*B. \quad (1.5)$$

Sada pretpostavimo da je $\tilde{A}\tilde{\varphi} = \lambda\tilde{\varphi}$, $\lambda \neq 0$, i neka je $\varphi = \frac{1}{\lambda}B\tilde{\varphi}$, kao u (1.3). Tada je

$$A\varphi = \frac{1}{\lambda}BU^*B\tilde{\varphi} = B\frac{1}{\lambda}\tilde{A}\tilde{\varphi} = B\tilde{\varphi} = \lambda\varphi.$$

Ako pokažemo još i da je $\varphi \neq 0$, onda smo dokazali da je (φ, λ) zaista svojstveni par matrice A . Pretpostavimo da je $\varphi = 0$, tada je po definiciji $B\tilde{\varphi} = 0$ i $\tilde{A}\tilde{\varphi} = U^*B\tilde{\varphi} = 0$. Kako je $\tilde{\varphi} \neq 0$ jer je to svojstveni vektor, slijedi da je $\lambda = 0$ što daje kontradikciju s pretpostavkom da je $\lambda \neq 0$. Time smo dokazali da je $\varphi \neq 0$.

Kako bismo dokazali da algoritam pronalazi sve svojstvene vrijednosti različite od nule, uzmimo $\lambda \neq 0$ takav da je $A\varphi = \lambda\varphi$ i stavimo da je $\tilde{\varphi} = U^*\varphi$. Tada je

$$\tilde{A}\tilde{\varphi} = U^*BU^*\varphi = U^*A\varphi = \lambda U^*\varphi = \lambda\tilde{\varphi}.$$

Vidimo da je $\tilde{\varphi} \neq 0$ jer bi u suprotnom vrijedilo i da je $U^*\varphi = 0$, a u tom je slučaju $A\varphi = BU^*\varphi = 0$, odnosno $\lambda = 0$. Slijedi da je $\tilde{\varphi}$ svojstveni vektor od \tilde{A} , tj. prepoznat je od algoritma. \square

U praksi ćemo odbaciti malene singularne vrijednosti od X , odnosno odrediti (ako postoji) $r \ll n$ takav da je

$$\|X - U_r \Sigma_r V_r^*\|_F < \varepsilon,$$

za neki $0 < \varepsilon \ll 1$. $U_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ je matrica u kojoj se nalazi prvih r stupaca od U . Vektore stupce u U_r još zovemo i POD baza (prava ortogonalna dekompozicija). Analogno je konstruirana i $V_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$. Nadalje, vrijedi $\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, gdje su $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ singularne vrijednosti matrice X . Kada u Algoritmu 1.3 zamijenimo U s U_r , V s V_r te Σ sa Σ_r , računanje svojstvene dekompozicije matrice \tilde{A} je značajno brže jer je \tilde{A} dimenzije $r \times r$. Za DMD svojstvenu vrijednost nema smisla uzeti nulu jer u tom slučaju pripadni mod nema ulogu u promatranom sustavu.

Sada nam je cilj karakterizirati uvjet pod kojim će operator definiran u (1.2) zadovoljavati $Y = AX$. Za to nam je potrebna sljedeća definicija:

Definicija 1.5 (Linearna konzistentnost). Matrica izlaza $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je *linearno konzistentna* s matricom ulaza $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ako za svaki $v \in \mathbb{R}^m$ takav da je $Xv = 0$ vrijedi i da je $Yv = 0$.

Drugim riječima, matrica Y je linearno konzistentna s matricom X ako i samo ako je jezgra od X sadržana u jezgri od Y . Ako su vektori x_k (stupci od X) linearno nezavisni, onda je matrica X punog ranga, odnosno ima jezgru $\{0\}$, stoga je linearna konzistentnost trivijalno zadovoljena. Obrat ne vrijedi.

Pojam linearne konzistentnosti ima smisla ako vektore x_k promatramo kao ulaz, a vektore y_k kao izlaz. Definicija 1.5 je bazirana na ideji da dva identična ulaza ne bi smjela davati dva različita izlaza. Na primjer, ako su x_1 i x_2 jednaki, a njihovi pripadni izlazi y_1 i y_2 nisu, onda je $0 = x_1 - x_2 = A(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$, što dovodi do kontradikcije. Precizna tvrdnja je iskazana u sljedećem teoremu:

Teorem 1.6. Neka je operator A dan kao u Definiciji 1.1. Tada je $Y = AX$ ako i samo ako je matrica Y linearno konzistentna s matricom X .

Dokaz. Prvo pretpostavimo da Y nije linearno konzistentna s X . Tada postoji neki v_0 iz jezgre od X , označimo je s $\mathcal{N}(X)$, takav da je $Yv_0 \neq 0$, no onda je $AXv_0 = 0 \neq Yv_0$, stoga je $AX \neq Y$ za svaki A .

Sada pretpostavimo da Y jest linearno konzistentna s X , odnosno da je $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}(Y)$. Tada je

$$Y - AX = Y - YX^\dagger X = Y(I - X^\dagger X).$$

Vrijedi da je $X^\dagger X$ ortogonalna projekcija na sliku od X^* , označimo je s $\mathcal{R}(X^*)$, stoga slijedi da je $I - X^\dagger X$ ortogonalna projekcija na $\mathcal{R}(X^*)^\perp = \mathcal{N}(X)$. Kako je $\mathcal{N}(X) \subseteq \mathcal{N}(Y)$, slijedi da je $Y(I - X^\dagger X) = 0$, odnosno da je $Y = AX$ za sve matrice Y linearno konzistentne s matricom X . \square

Iako su podaci u (1.1) proizvoljni, oni najčešće dolaze iz nekog dinamičkog sustava koji je zadan parcijalnom diferencijalnom jednačjom

$$\frac{\partial s}{\partial t} = f(s), \quad (1.6)$$

gdje je $s : \mathcal{D} \times [0, T] \rightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{d_s}$. $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ predstavlja prostornu, a $[0, T] \subseteq \mathbb{R}$, $T > 0$, vremensku domenu. Funkcija desne strane f je obično nelinearna. Pretpostavljamo da je s dovoljno glatka tako da su sve derivacije od s po d koje se pojavljuju u f dobro definirane. Nepoznata funkcija s može predstavljati, na primjer, brzinu, temperaturu ili tlak u nekom sustavu. Često f ovisi još i o nekom parametru μ koji može značajno utjecati na dinamiku promatranog sustava.

U mnogim situacijama, funkcija desne strane f je nepoznata ili je značajno komplicirana te je egzaktno rješenje jednačbe (1.6) nepoznato. Shodno tome, metode koje daju aproksimaciju sustava na temelju podataka, odnosno uzoraka u vremenu, su sve popularnije u mnogim primjenama. DMD je jedna od brojnih takvih metoda koje daju nekakvu informaciju o promatranom sustavu.

Promatramo semidiskretizirani model, odnosno sustav običnih diferencijalnih jednačbi

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x), \quad (1.7)$$

gdje je $x(t) \in \mathbb{R}^{nd_s}$ sada vektor stanja čije su komponente $x_1(t) = s_1(d_1, t)$, ..., $x_n(t) = s_1(d_n, t)$, ..., $x_{nd_s}(t) = s_{d_s}(d_n, t)$ za skup točaka $\{d_i \in \mathcal{D}\}_{i=1}^n$. $\mathbf{f} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ je funkcija koja diskretizira f , a $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^n \mathcal{S}$. Uz dani početni uvjet $x(0) = x_0$, još pretpostavljamo da je diskretna nelinearna funkcija \mathbf{f} Lipschitzova jer u tom slučaju jednačba (1.7) ima jedinstveno rješenje.

Kod promatranja dinamičkih sustava, podaci su sekvencijalni, odnosno za dani vremenski korak Δt vrijedi $x_k = x(k\Delta t)$, za $k = 0, \dots, m$, te su matrice X i Y formirane na sljedeći način:

$$X = [x_0 \dots x_{m-1}], \quad Y = [x_1 \dots x_m], \quad (1.8)$$

gdje su stanja sustava x_0, \dots, x_m dobivena raznim mjerenjima senzora ili simulacijom nekog eksperimenta. Ovdje uzorke uzimamo u uniformnim vremenskim koracima, no to nije nužno. Uočimo da svaki stupac u Y predstavlja stanje sustava u idućem vremenskom koraku u odnosu na pripadni stupac iz matrice X . Obično je $n \gg m$, stoga je rang matrice A najviše m pa nema smisla računati cijelu $n \times n$ matricu A . Matrica \tilde{A} iz Algoritma 1.3 je najviše $m \times m$. Kao i u komentaru nakon Teorema 1.4, zadržavanjem samo prvih r singularnih vrijednosti od X , matrica \tilde{A} će biti dimenzije $r \times r$. Pomoću nje možemo dobiti nereducirani operator $A = U_r \tilde{A} U_r^*$ za kojeg vrijedi

$$x_{k+1} = Ax_k. \quad (1.9)$$

Time smo dinamički sustav u kontinuiranom vremenu (1.7) reprezentirali u diskretnom. U tom je slučaju dinamika opisana jednačbom

$$x_{k+1} = \mathbf{F}(x_k) \quad (1.10)$$

u kojoj \mathbf{F} predstavlja evoluciju stanja iz jednog vremenskog trenutka u sljedeće.

Rješenje od (1.9) je dano izrazom

$$x_k = \sum_{i=1}^r \varphi_i \lambda_i^k b_i = \Phi \Lambda^k b, \quad (1.11)$$

gdje su $\{(\varphi_i, \lambda_i)\}_{i=1}^r$ svojstveni parovi matrice \tilde{A} koji se dobiju DMD algoritmom. Φ je matrica u kojoj su stupci φ_i , a $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. U vektoru b se nalaze koordinate početnog uvjeta x_0 u bazi koju čine svojstveni vektori φ_i , odnosno vrijedi $x_0 = \Phi b$.

Kontinuiranu varijantu dobivenog diskretnog dinamičkog sustava možemo dobiti tako da promotrimo matricu \mathcal{A} takvu da vrijedi $A = e^{\Delta t \mathcal{A}}$. Tada nepoznatu dinamiku (1.7) aproksimiramo sa

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{A}x. \quad (1.12)$$

Uz početni uvjet $x(0) = x_0$, jednačba (1.12) ima rješenje

$$x(t) = \sum_{i=1}^r \varphi_i e^{t \omega_i} b_i = \Phi e^{t \Omega} b,$$

gdje su $\omega_i = \ln \lambda_i / \Delta t$, a $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_r)$. Podsjetimo se da su svojstvene vrijednosti općenito kompleksni brojevi, stoga je $\ln \lambda_k$ kompleksan, a definiciju logaritma možemo proširiti na kompleksne brojeve različite od nule. Kako su DMD svojstvene vrijednosti različite od nule, ω_i je dobro definirano. Vektori φ_i su također svojstveni vektori matrice \mathcal{A} .

Još jednom napominjemo da smo nelinearni sustav aproksimirali linearnim, stoga treba imati na umu ukoliko nam je cilj predvidjeti neko buduće ponašanje, moramo biti oprezni koliko daleko ima smisla ići u budućnost. Na primjer, petodnevna vremenska prognoza je otprilike 90% točna, sedmodnevna 80%, dok je desetodnevna prognoza točna u otprilike 50% slučajeva.

DMD je originalno prezentiran u [10] u kontekstu poveznice s Krylovljevim potprostorima i Arnoldijevim algoritmom. U obzir su uzeti samo sekvencijalni podaci kao u (1.8), umjesto općenitijih (1.1). Dobivene uzorke promatranog sustava x_k s vremenskim razmakom Δt spremamo u matricu

$$X_1^m = [x_1 \dots x_m]. \quad (1.13)$$

Pretpostavljamo da postoji linearni operator A takav da vrijedi

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (1.14)$$

za sve $k = 1, \dots, m$. Ako su uzorci x_k došli iz nelinearne dinamike, što je najčešće slučaj, onda A predstavlja linearnu tangencijalnu aproksimaciju. Pretpostavka postojanja matrice A iz (1.14) nam omogućuje formulaciju uzoraka (1.13) u terminima Krylovljeve matrice

$$X_1^m = [x_1 \ Ax_1 \ \dots \ A^{m-1}x_1]. \quad (1.15)$$

Cilj je ekstrahirati dinamičke karakteristike promatranog sustava kao što su svojstveni vektori, svojstvene vrijednosti, energetske značajke itd.

Razumno je pretpostaviti da dodavanjem sve više i više uzoraka, x_k postaju sve više i više linearno zavisni jer niz $(A^m x_1)_m$ teži k svojstvenom vektoru koji pripada po modulu najvećoj svojstvenoj vrijednosti. Drugim riječima, pretjeranim dodavanjem novih uzoraka ne poboljšavamo vektorski prostor razapet stupcima matrice X_1^m . U tom slučaju, vektor x_m možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora x_k , $k = 1, \dots, m - 1$:

$$x_m = a_1 x_1 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} + r, \quad (1.16)$$

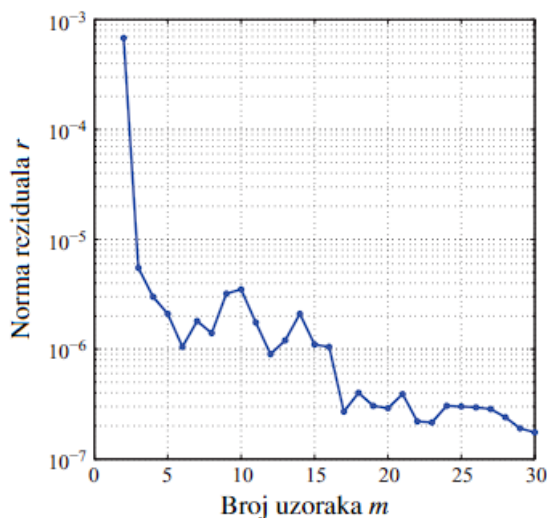
gdje je r rezidual. O vektoru r možemo razmišljati kao o nekakvom indikatoru koji nam govori jesmo li uzeli dovoljan broj uzoraka m . Na slici 1.1 vidimo primjer u kojem norma reziduala r ovisi o m . Osim vektora r , o kvaliteti rekonstrukcije dinamičkog sustava, veliku ulogu ima vremenski razmak Δt . Ako je prevelik, postoji mogućnost da ne uspijemo dovoljno dobro rekonstruirati dinamiku, a ako je premali, onda vektori x_k jako brzo postaju linearno zavisni što nam kod računanja reducirane baze predstavlja problem.

Stavivši $a = (a_1, \dots, a_{m-1})^T$, (1.16) možemo zapisati kao

$$x_m = X_1^{m-1} a + r$$

ili, koristeći (1.15), kao

$$AX_1^{m-1} = X_1^{m-1} C + r e_{m-1}^T, \quad (1.17)$$



Slika 1.1: (Preuzeto iz [10]). Rezidual r koji ovisi o broju uzoraka m na primjeru toka nekog fluida.

gdje je $e_{m-1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{m-1}$, a

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & & & a_1 \\ 1 & 0 & & & a_2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 & a_{m-2} \\ & & & & 1 & a_{m-1} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

je matrica pratilac. Koeficijenti a_1, \dots, a_{m-1} su nepoznanice, a svojstvene vrijednosti matrice C aproksimiraju svojstvene vrijednosti matrice A .

Arnoldijev algoritam je usko vezan za gornju dekompoziciju (1.17) i rezultira ortogonalizacijom vektora u X_1^m , no za to nam je potrebna matrica A . Kako je već napomenuto, cilj nam je naći matricu A iz podataka, tj. uzoraka u nekom vremenskom intervalu.

Cilj nam je minimizirati rezidual r metodom najmanjih kvadrata, odnosno

$$\min_{a \in \mathbb{R}^{m-1}} \|X_1^{m-1} a - x_m\|_2.$$

Rezultat je dan izrazom

$$a = R^{-1} Q^* x_m,$$

gdje je $X_1^{m-1} = QR$ QR dekompozicija matrice X_1^{m-1} . Iako je navedena metoda matematički korektna, problem je loše uvjetovan, pogotovo kada podaci dolaze iz nekog eksperimenta

koji možda sadrže šum. Poteškoće se mogu javiti i ako su vektori x_k linearno zavisni, stoga odabiremo robusniju implementaciju baziranu na SVD-u. Algoritam prezentiran u [10] se od Algoritma 1.3 razlikuje u zadnjem koraku na način da dobijemo tzv. *projicirane DMD modove* $\phi = U_r \tilde{\varphi}$. Više detalja o razlikama se mogu pronaći u [12].

1.2 Koopmanov operator i poveznica s DMD-om

Iako je u Teoremu 1.6 dan uvjet pod kojim je osigurana egzistencija operatora (1.2), linearnu konzistentnost je u praksi teško provjeriti. Stoga, uvodimo pojam Koopmanovog operatora koji će dati opravdanje aproksimaciji nelinearnog sustava linearnim.

Definicija 1.7 (Koopmanov operator za diskretni dinamički sustav). Neka je dan dinamički sustav (1.10), gdje funkcija $\mathbf{F} : M \rightarrow M$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mnogostrukost, predstavlja evoluciju stanja iz nekog vremenskog trenutka u sljedeće. *Koopmanov operator* K djeluje na svim funkcijama opažajima $h : M \rightarrow \mathbb{C}$ kao

$$Kh = h \circ \mathbf{F}. \quad (1.19)$$

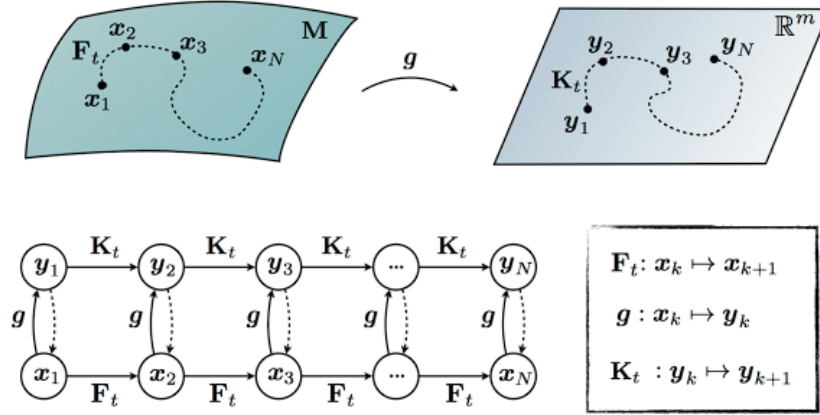
Funkcije h u prethodnoj definiciji tvore Hilbertov prostor H [13], stoga je K beskonačno dimenzionalan linearni operator, dok je funkcija \mathbf{F} konačnodimenzionalna, ali nelinearna. Nadalje, vrijedi da je Koopmanov operator $K : H \rightarrow H$ te je $(Kh)(x_k) = h(\mathbf{F}(x_k)) = h(x_{k+1})$ za svaki $k = 0, \dots, m-1$. Drugim riječima, Koopmanov operator K evoluirao opažaj h u sljedeći vremenski korak. K se može definirati i za vektorske opažaje. Naime, ako je opažaj $h = (h_1, \dots, h_n) : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ takav da vrijedi $h_i \in H$ za svaki $i = 1, \dots, n$, onda ćemo s Kh označavati vektor $(Kh_1, \dots, Kh_n) \in H^n$.

Napomena 1.8. U osnovi, Koopmanov operator, odnosno jednakost (1.19) definira novi dinamički sustav, no važno je uočiti da su oba sustava, jedan definiran preko \mathbf{F} , a drugi preko K , dvije različite parametrizacije istog fundamentalnog ponašanja, odnosno (1.10) i (1.19) reprezentiraju istu dinamiku. Poveznica je opažaj identiteta $\text{id}(x) = x$. Naime, ako nam za dani $x \in M$ treba $\mathbf{F}(x)$, možemo jednostavno primijeniti \mathbf{F} na x ili K na identitetu $((K \text{id})(x) = \text{id}(\mathbf{F}(x)) = \mathbf{F}(x))$. S druge strane, ako nam za dani $h \in H$ treba $(Kh)(x)$, možemo primijeniti K na h te dobivenu funkciju evaluirati u x ili možemo prvo primijeniti \mathbf{F} na x te evaluirati h na $\mathbf{F}(x)$. Ilustracija opisane veze je prikazana na Slici 1.2.

Prethodna napomena nam daje do znanja da možemo raditi s konačnodimenzionalnim nelinearnim ili beskonačnodimenzionalnim linearnim dinamičkim sustavom.

Sada nam je cilj povezati Koopmanov operator s DMD-om. Za tu namjenu, promotrimo svojstveni problem

$$(K\theta_j)(x) = \hat{\lambda}_j \theta_j(x), \quad j = 1, 2, \dots$$



Slika 1.2: (Preuzeto iz [5]). Napomena o oznakama: $F_t \rightarrow F$, $N \rightarrow m$, $g \rightarrow h$. Vrijedi $g(x_k) = y_k$ te je K_t restrikcija od K na konačnodimenzionalni potprostor vektorskih funkcija opažaja dimenzije m . Ovdje vidimo da je $F_t = K_t$ ukoliko je opažaj g identiteta.

Skalare $\hat{\lambda}_j$ zovemo *Koopmanove svojstvene vrijednosti*, a funkcije θ_j *Koopmanove svojstvene funkcije*. Uzmimo vektorski opažaj $h: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ za kojeg pretpostavljamo da je $h_i \in \text{span}\{\theta_j: j = 1, 2, \dots\}$ za svaki $i = 1, \dots, n$. Zapišimo ga u terminima svojstvenih funkcija

$$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x) \hat{\varphi}_j,$$

gdje vektor $\hat{\varphi}_j \in \mathbb{C}^n$ nazivamo *Koopmanov mod*. Nadalje, vrijedi

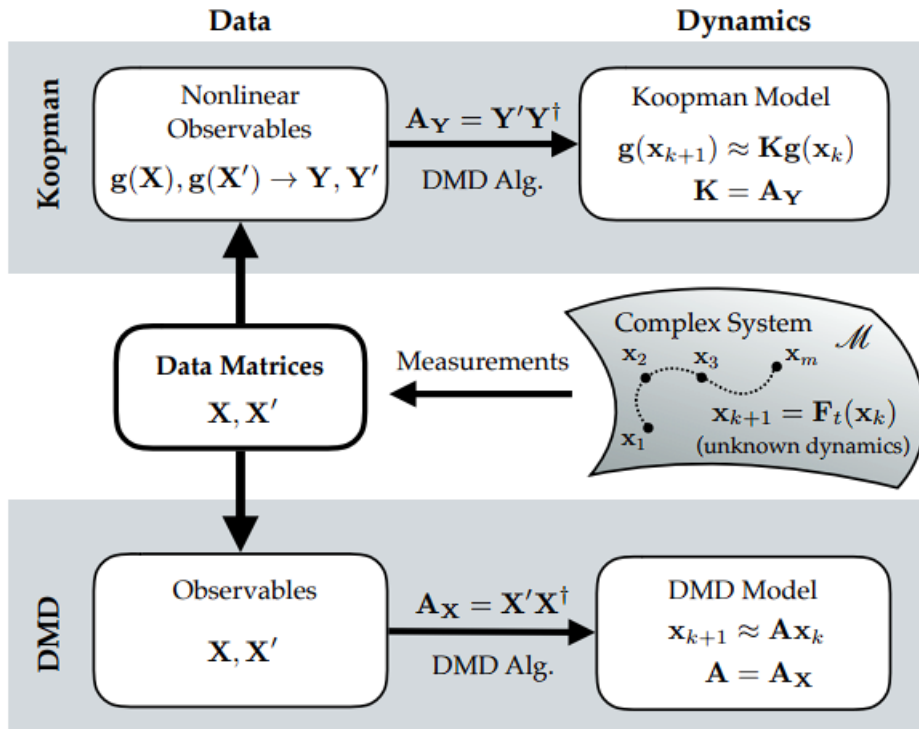
$$(Kh)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j \theta_j(x) \hat{\varphi}_j,$$

odnosno, evolucija opažaja h Koopmanovim operatorom je jednaka množenjem s odgovarajućim svojstvenim vrijednostima.

Činjenica da konačnodimenzionalni linearni operator (1.2) dobiven DMD algoritmom aproksimira beskonačnodimenzionalni Koopmanov operator (1.19) je ilustrirana na Slici 1.3. Precizni dokaz o tome da su DMD modovi i svojstvene vrijednosti aproksimacije Koopmanovih modova i svojstvenih vrijednosti se može naći u [13]. Ključnu ulogu ima odabir funkcija opažaja.

U slučaju dinamičkog sustava u kontinuiranom vremenu (1.7), postoji više Koopmanovih operatora \mathcal{K}_t koji čine polugrupu. Svaki od njih je povezan s funkcijom \mathbf{f} u vremenu t . Detalji se mogu pronaći u [1]. Infinitesimalni generator te polugrupe je

$$\mathcal{K}h = \nabla h \cdot \mathbf{f}. \quad (1.20)$$



Slika 1.3: (Preuzeto iz [5]). Oznake su kao na Slici 1.2 s time da je s X' označena matrica Y u (1.8).

Kao i kod operatora \mathcal{A} u (1.12), *kontinuirane Koopmanove svojstvene vrijednosti* su $\hat{\omega}_j = \ln \hat{\lambda}_j / \Delta t$. Za kraj ovog potpoglavlja navest ćemo jedan primjer koji demonstrira sposobnost Koopmanovog operatora da uhvati nelinearnu dinamiku u terminima linearnog operatora na nelinearnim mjerenjima (opažajima) stanja x .

Primjer 1.9. Promotrimo sljedeći nelinearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi u dvije varijable

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 - 3x_1^2. \end{aligned}$$

Ako promotrimo restrikciju Koopmanovog operatora na potprostor razapet opažajima $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ i $z_3 = x_1^2$, dobijemo linearni dinamički sustav

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

U prethodnom primjeru skup $\text{span}\{z_1, z_2, z_3\} = \text{span}\{x_1, x_2, x_1^2\}$ nazivamo *opazivim potprostorom*. U tom slučaju, Koopmanov operator djeluje samo na taj potprostor, odnosno na funkcije van njega djeluje trivijalno. Opazivi potprostori su obično beskonačnodimenzionalni, stoga se do matrice formulacije Koopmanovog operatora kao u prethodnom primjeru u praksi gotovo nikad ne dolazi.

1.3 DMD u mehanici fluida

Prije primjene DMD-a u mehanici fluida, iz koje je sama metoda i proizašla, prvo ćemo dati kratak pregled centralnih jednadžbi koje opisuju tok fluida [6].

Navier-Stokesov sustav

$$\rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u + \nabla p = f, \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1.22)$$

opisuje gibanje i tlak inkompresibilnog viskoznog fluida. Nepoznate funkcije su brzina $u : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ i tlak $p : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Gustoća vanjske volumne sile je $f : \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, a $\rho > 0$ predstavlja gustoću mase fluida. Parametar $\mu > 0$ je koeficijent dinamičke viskoznosti. Oznaka $\nabla \cdot$ predstavlja operator divergencije div , a $(u \cdot \nabla)u$ je oznaka za $(\nabla u)u$. Kako bi jednadžba (1.21) bila dobro postavljena, dodaju se još početni uvjeti $u(d, 0) = u_0$, $d \in \mathbb{R}^3$, te odgovarajući rubni, ovisno o prostornoj domeni.

Napomena 1.10. Još jedna važna veličina u mehanici fluida je *vrtiložnost* $w = \nabla \times u = \text{rot } u$ koja opisuje lokalnu kružnu (rotacijsku) promjenu gibanja fluida. Kod tokova u dvodimenzionalnim domenama, vrtiložnost se može poistovjetiti sa skalarnom funkcijom $\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ jer je za $u = (u_1, u_2, 0)$, $w = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = (0, 0, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$.

Uvodimo još jednu veličinu koja se, ovisno o primjeru, može definirati na razne načine. Ovdje prezentiramo onu iz [5] gdje je prostorna domena cilindar. Ta veličina je *Reynoldsov broj*

$$Re = \frac{DU_\infty}{\nu},$$

gdje je D promjer cilindra, a U_∞ karakteristična brzina toka. Parametar $\nu = \mu/\rho$ je koeficijent kinematičke viskoznosti. Reynoldsov broj predstavlja omjer inercijalnih i viskoznih sila. Granica između laminarnog i turbulentnog toka je $Re_{crit} \approx 47$ nakon čega tok ode u kritično stanje koje rezultira laminarnim vrtiložnim prolijevanjem (eng. *vortex shedding*). Vrtiložno prolijevanje je oscilatorni tok koji nastaje kada fluid naiđe na prepreku. Ta pojava stvara alternirajući tok. Inače, fluidi teže k gibanju u područje nižeg tlaka.

Želimo sustav (1.21) prikazati u bezdimenzionalnom obliku koji će sadržavati Reynoldsov broj Re jer tokove sa sličnim Reynoldsovim brojem smatramo sličnima. U tu svrhu

uvodimo novu varijablu $\tilde{d} = d/D$ koja predstavlja prostornu koordinatu. $T = D/U_\infty$ je karakteristična vremenska skala pomoću koje definiramo novo vrijeme $\tilde{t} = t/T$. Još uvodimo i novu brzinu $\tilde{u} = u/U_\infty$. U konačnici, dobivamo sustav

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla_{\tilde{d}})\tilde{u} = -\nabla_{\tilde{d}}\tilde{p} + \frac{1}{Re}\Delta_{\tilde{d}}\tilde{u}, \quad (1.23)$$

$$\nabla_{\tilde{d}} \cdot \tilde{u} = 0, \quad (1.24)$$

gdje je $\tilde{p} = p/\rho U_\infty^2$, a ovdje smo uzeli da je funkcija desne strane $f = 0$.

Navier-Stokesove jednadžbe (1.21) precizno opisuju gibanje i tlak fluida, no teško ih je direktno koristiti u praksi što metode vođene podacima čini sve zanimljivijim. U posljednje vrijeme, razvoj senzora je omogućio detaljna mjerenja raznih fizikalnih veličina poput topline, gustoće, brzine itd. Jedna od tehnika za mjerenje tih veličina je PIV (eng. *Particle Image Velocimetry*) koja je postala standard u inženjerstvu, no nije idealna. Naime, ovisi o kvaliteti senzora, kamera te samog prijenosa podataka. Alternativu čini tehnika CFD (eng. *Computational Fluid Dynamics*) koja ima bolje rezultate, no u idealnim uvjetima, tj. boljim geometrijama.

Jedna od prvih metoda koja se pojavila je prava ortogonalna dekompozicija (POD). Isključivo na temelju podataka, tj. uzoraka u određenim vremenskim koracima, POD, koristeći SVD, pronalazi najbolji potprostor puno manje dimenzije u kojem se podaci nalaze. POD je generalno prihvaćen zbog jednostavnosti interpretacije i široke primjene. Za razliku, od POD-a, DMD producira i svojstvene vrijednosti koje govore o tome kako modovi evoluiraju kroz vrijeme. Zbog povezanosti s Koopmanovim operatorom, DMD daje nadu da će dobro uhvatiti nelinearnu dinamiku koju čini nelinearni sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kao što je Navier-Stokesov sustav.

Primjer 1.11. U ovom primjeru promatramo fluid Reynoldsovog broja $Re = 100$ u dvodimenzionalnoj domeni, odnosno pravokutniku $\mathcal{D} = [-1, 8] \times [-2, 2]$. U tom se pravokutniku nalazi prepreka kružnog oblika sa središtem u ishodištu i polumjera 0.5. Pravokutnik \mathcal{D} diskretiziramo na mrežu 450×200 .

Promatrana veličina u ovom primjeru neće biti brzina, nego vrtložnost w . Prema Napomeni 1.10, vrtložnost u dvodimenzionalnoj domeni poistovjećujemo sa skalarnom funkcijom. Ukratko, skalarnu funkciju, u trenutku t_k , na diskretiziranoj dvodimenzionalnoj domeni možemo prikazati matrično kao

$$\begin{bmatrix} w(d_{1,1}, t_k) & w(d_{1,2}, t_k) & \dots & w(d_{1,449}, t_k) \\ w(d_{2,1}, t_k) & w(d_{2,2}, t_k) & \dots & w(d_{2,449}, t_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(d_{199,1}, t_k) & w(d_{199,2}, t_k) & \dots & w(d_{199,449}, t_k) \end{bmatrix},$$

gdje s d označavamo prostornu koordinatu. Gornju matricu posložimo u jedan veliki vektor

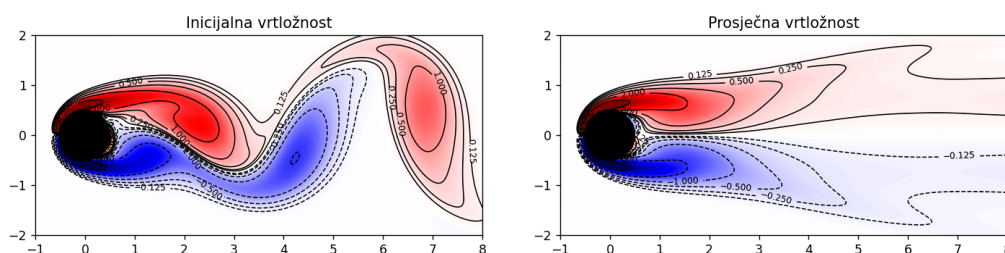
$$x_k = \begin{bmatrix} w(d_{1,1}, t_k) \\ w(d_{1,2}, t_k) \\ \vdots \\ w(d_{2,1}, t_k) \\ \vdots \\ w(d_{199,449}, t_k) \end{bmatrix}$$

dimenzije $n = 449 \cdot 199 = 89351$. Svaki takav vektor predstavlja jedan uzorak očitani u trenutku t_k .

Uzet ćemo 151 uzorak s vremenskim korakom $\Delta t = 0.02$ čime je zadovoljen CFL uvjet [3]. Uzorke numeriramo počevši od nule jer x_0 predstavlja početni uvjet (Slika 1.4 (lijevo)), stoga je $m = 150$. Dobivene podatke posložimo u matrice

$$X = [x_0 \dots x_{m-1}], \quad Y = [x_1 \dots x_m]$$

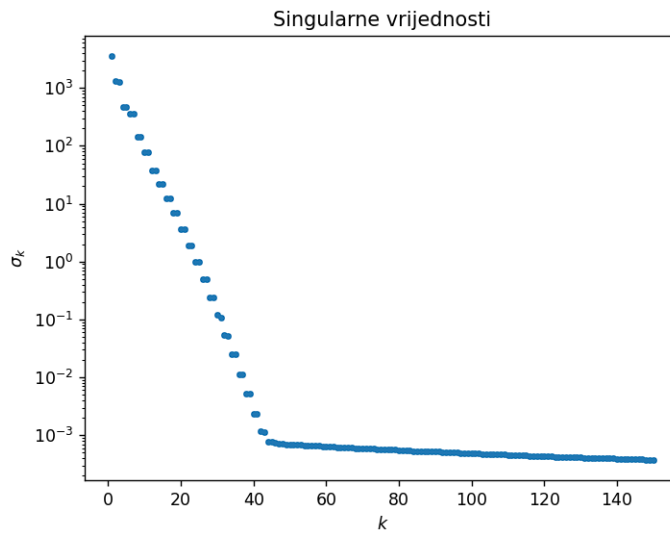
te ih prosljedimo u DMD algoritam.



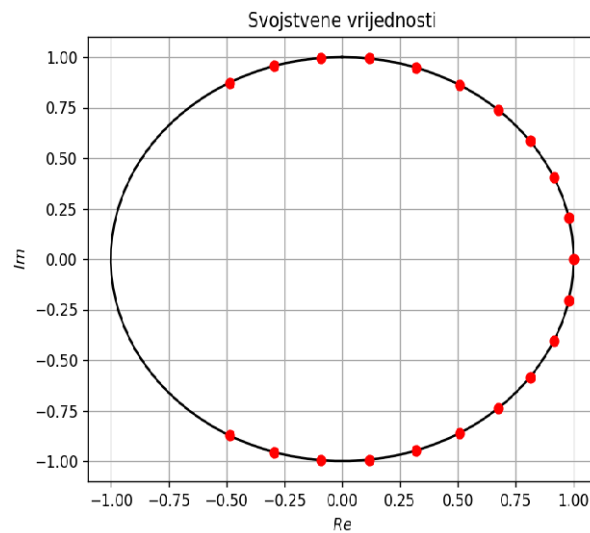
Slika 1.4: Na lijevoj strani je prikazan početni uvjet x_0 , a na desnoj prosječna vrtložnost x_{avg} .

Prije samog DMD-a, napravimo SVD matrice X (Slika 1.5). Vidimo da nakon 43. singularne vrijednosti, dodavanjem novih uzoraka ne poboljšavamo reducirani potprostor, no mi ćemo uzeti još manju reduciranu dimenziju $r = 21$ te u korak 2 Algoritma 1.3 ući s tako skraćenim SVD-om koji će voditi na matricu \tilde{A} reda 21. Uočimo još da svi modovi, osim prvog, dolaze u energetskim parovima.

Na Slici 1.7 se nalazi prvih osam izračunatih DMD modova ne računajući konjugirane kompleksne parove. Prisjetimo se, ako je v svojstveni vektor realne matrice pridružen svojstvenoj vrijednosti λ , onda je $i \bar{v}$ svojstveni vektor te matrice s pripadnom svojstvenom vrijednošću $\bar{\lambda}$. Matrica X u ovom primjeru jest realna te joj sve kompleksne svojstvene vrijednosti dolaze u konjugiranim kompleksnim parovima. Uočimo kako je prvi mod slijeva na Slici 1.7 sličan prosječnoj vrtložnosti (Slika 1.4 (desno)). Taj mod se ne mijenja

Slika 1.5: Singularne vrijednosti matrice X .

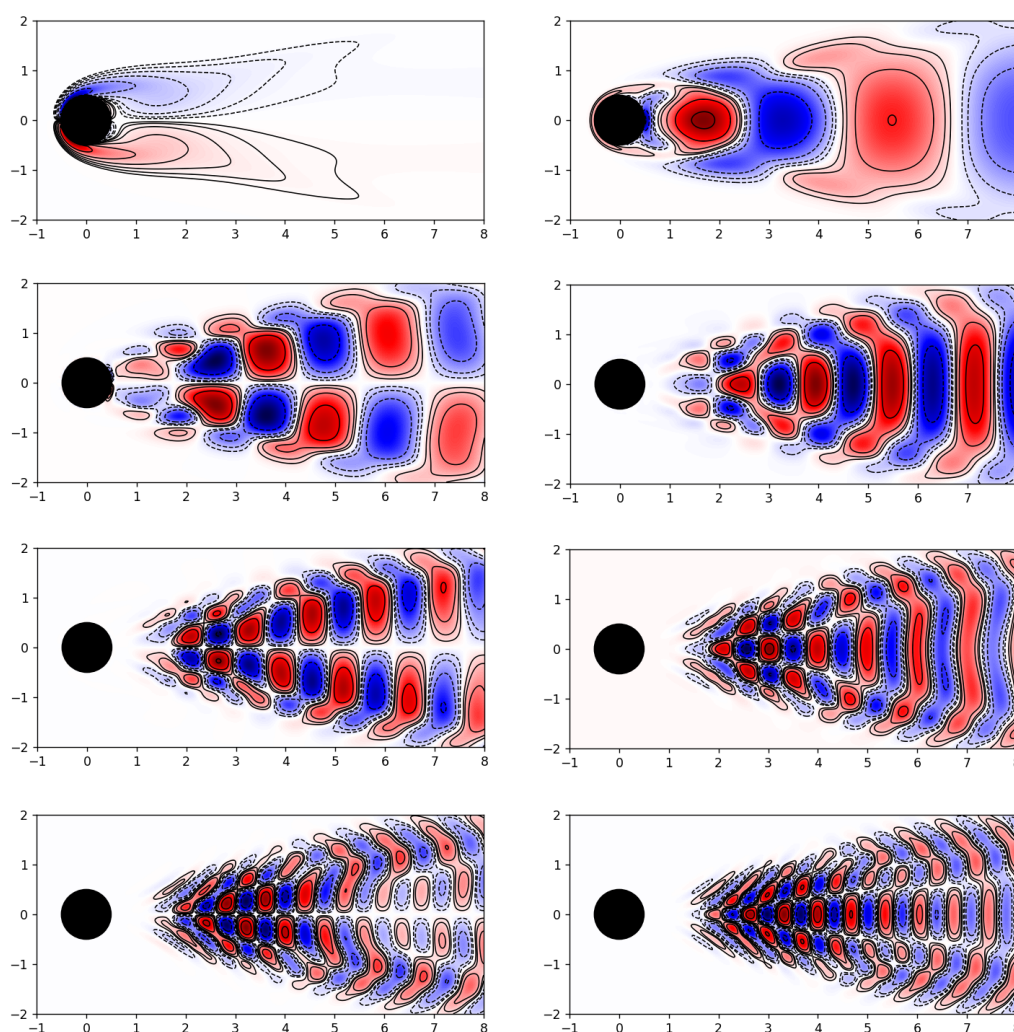
kroz vrijeme jer ima pripadnu svojstvenu vrijednost jednaku 1 koja je jedina realna. Odnosno, komponenta u prikazu vektora x_k oblika (1.11) koja pripada tom modu se ne mijenja. Štoviše, na Slici 1.7 vidimo kako modovi postaju sve detaljniji te se nakon određenog broja ne uočava neka razlika. Da smo uzeli neki manji r , na primjer 15, došli bismo do istih zaključaka što se tiče opisivivanja promatranog fluida.



Slika 1.6: DMD svojstvene vrijednosti promatranog fluida u Primjeru 1.11.

Na Slici 1.6 se nalaze DMD svojstvene vrijednosti. Primijetimo da su sve na jediničnoj kružnici što povlači da je aproksimativni linearni operator dobiven iz DMD-a unitaran, odnosno da čuva normu. Samim time, tok oscilira, tj. ima neku periodičnost. Ukoliko bi neka svojstvena vrijednost bila po modulu manja od 1, onda bi se tok u smjeru pripadnog moda prigušio nakon nekog vremena, a ako bi neka svojstvena vrijednost po modulu bila veća od 1, onda bi pripadni tok u smjeru tog moda eskalirao.

U [5] se nalaze informacije o prikupljanju podataka.



Slika 1.7: DMD modovi promatranog fluida u Primjeru 1.11.

1.4 Primjeri

U ovom potpoglavlju prezentiramo još par primjera u kojima se koristi DMD. U Primjeru 1.12 ćemo vidjeti važnost Teorema 1.6 jer podaci neće biti linearno konzistentni, a u Primjerima 1.13 i 1.14 imamo signale s istim frekvencijama, no u jednom će DMD biti samo djelomično uspješan.

Primjer 1.12 (Stojni valovi). Kako je svaki DMD mod vezan za neku svojstvenu vrijednost koja predstavlja faktor rasta ili frekvenciju, DMD se često koristi za analizu oscilatornih ponašanja bilo da je riječ o linearnoj ili nelinearnoj dinamici. Promotrimo stojne valove

$$x_k = \cos(k\mu)q, \quad k = 0, \dots, m,$$

gdje je $q \in \mathbb{R}^n$ fiksna, a μ parametar. Neka je matrica X sačinjena od stupaca x_0, \dots, x_{m-1} , a matrica Y od stupaca x_1, \dots, x_m .

Matrica X je maksimalno ranga 1 jer je za $k\mu = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, $x_k = 0$ za svaki $k = 0, \dots, m$, a ne može biti ranga većeg od 1 jer je svaki stupac u X jednak αq , za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Shodno tome, SVD će u većini slučajeva dati samo jednu singularnu vrijednost različitu od nule te će matrica \tilde{A} biti dimenzije 1×1 . U tom je slučaju jedina svojstvena vrijednost $\lambda \in \mathbb{R}$ jer je X realna.

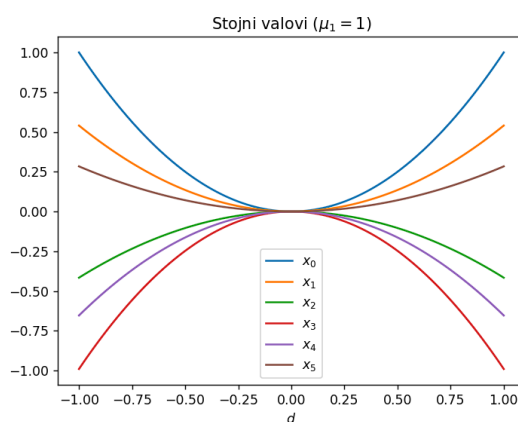
Neka je $x = (\cos 0, \cos \mu, \cos 2\mu, \dots)^T$ i $y = (\cos \mu, \cos 2\mu, \cos 3\mu, \dots)^T$. Tada vrijedi da je

$$X = qx^T, \quad Y = qy^T.$$

Uzmimo sada vektor $v = (-\cos \mu, 1, 0, \dots, 0)^T$. Vrijedi da je $x^T v = 0$, stoga je $v \in \mathcal{N}(X)$. Međutim, $y^T v = -\cos^2 \mu + \cos 2\mu = \sin^2 \mu$, što povlači da $v \notin \mathcal{N}(Y)$ ako je $\mu \neq l\pi$, za neki $l \in \mathbb{Z}$. Slijedi da matrica Y nije linearno konzistentna s matricom X , a lako se pokaže da u slučaju $\mu = l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, jest.

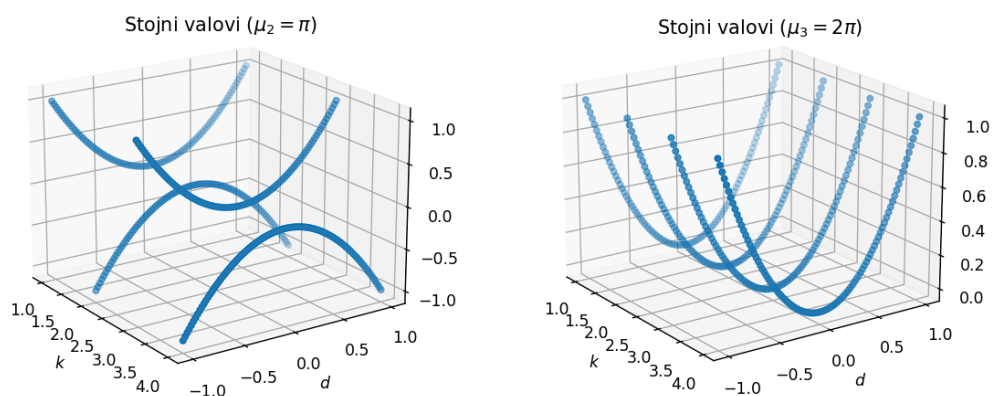
Neka je prostorna domena $[-1, 1]$ s korakom $\Delta d = 0.02$. Promotrimo tri slučaja. U prvom, uzmimo parametar $\mu_1 = 1$ koji nije multiplikator broja π (Slika 1.8). U tom slučaju, matrica Y nije linearno konzistentna s matricom X . Međutim, DMD producira svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 0.56$ te kontinuiranu $\omega_1 = -11.54$, no ti brojevi nemaju nikakvu interpretaciju te koristeći njih, zajedno s DMD modom, ne možemo rekonstruirati stanja sustava kao na Slici 1.8 jer nisu zadovoljeni uvjeti Teorema 1.6. Iako su podaci linearni, ne postoji operator A takav da vrijedi (1.2).

U druga dva slučaja uzmimo parametre $\mu_2 = \pi$ i $\mu_3 = 2\pi$ (Slika 1.9). Za njih je matrica Y linearno konzistentna s matricom X . Stanja x_k , za $\mu_2 = \pi$, samo mijenjaju predznak i DMD vraća točnu svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -1$. U slučaju $\mu_3 = 2\pi$, stanja x_k su konstantna, tj. jednaka q i DMD ponovno vraća točnu svojstvenu vrijednost $\lambda_3 = 1$. Valovi na Slici 1.9 (lijevo) osciliraju frekvencijom 37.69 jer im je pripadna kontinuirana svojstvena vrijednost $\omega_2 = 37.69i$. Valovi na Slici 1.9 (desno) ne osciliraju jer im je



Slika 1.8: Stojni valovi s parametrom $\mu_1 = 1$. Početni uvjet je $x_0 = q = (d_1^2, \dots, d_n^2)$, $n = 100$, gdje su d_i , $i = 1, \dots, n$ čvorovi prostorne mreže.

kontinuirana svojstvena vrijednost $\omega_3 = 0$. U oba slučaja, DMD uspješno rekonstruira sustav koristeći pripadne DMD svojstvene vrijednosti i modove.



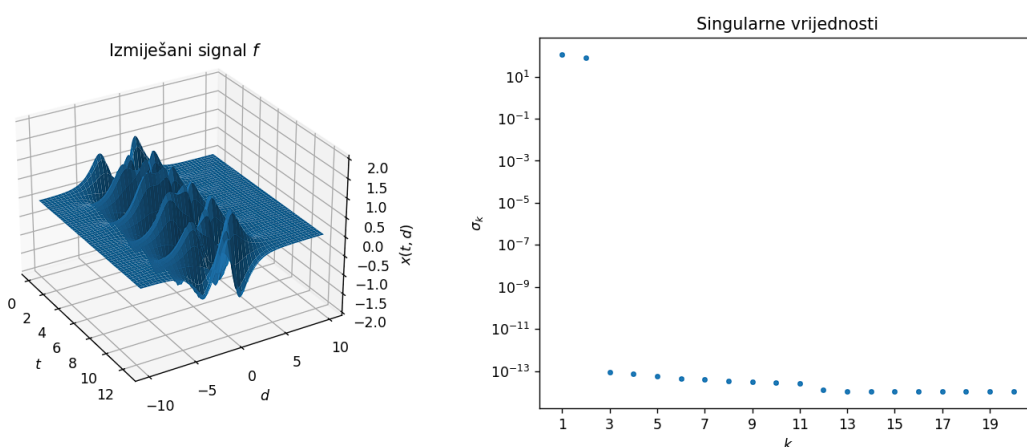
Slika 1.9: Stojni valovi s parametrom $\mu_2 = \pi$ (lijevo) i $\mu_3 = 2\pi$ (desno). Početni uvjet je isti kao i na Slici 1.8.

Primjer 1.13. Koristeći dva signala

$$f_1(t, d) = \text{sech}(d + 3) \exp(i2.3t), \quad (1.25)$$

$$f_2(t, d) = 2\text{sech}(d) \tanh(d) \exp(i2.8t), \quad (1.26)$$

konstruirajmo jedan, f , koji je jednak zbroju prethodna dva (Slika 1.10 (lijevo)). Prvi je frekvencije $\omega_1 = 2.3$, a drugi $\omega_2 = 2.8$. Želimo pokazati sposobnost DMD-a da prepozna te dvije frekvencije, odnosno dva signala različitih frekvencija.



Slika 1.10: Signal f koji je nastao miješanjem signala f_1 i f_2 i njegov SVD bez zadnjeg vremenskog koraka.

Prostorna domena je $[-L, L]$, $L = 10$, a vremenska $[0, T]$, $T = 4\pi$. Diskretizacija je napravljena s $n = 400$ prostornih točaka te $m = 200$ vremenskih. SVD pripadne matrice X (Slika 1.10 (desno)) prepoznaje dvije singularne vrijednosti različite od nule. DMD će uspješno rekonstruirati zadani signal rangom 2 te će zaista vratiti dvije kontinuirane DMD svojstvene vrijednosti $\omega_1 = 2.3$ i $\omega_2 = 2.8$.

Primjer 1.14. DMD ovisi o uspješnosti SVD-a. Ako SVD ima neke nedostatke, DMD će ih naslijediti. Jedan od dobro poznatih nedostataka SVD-a je neefikasno rukovođenje s podacima koji se translataju ili rotiraju u vremenu. Kod takvih podataka, SVD ne nalazi "pravi" rang matrice, nego vraća (puno) veći.

Uočimo taj fenomen na konkretnom primjeru. Promotrimo ponovno dva signala (1.25) i (1.26), no ovdje se prvi signal translata konstantnom brzinom, odnosno imamo

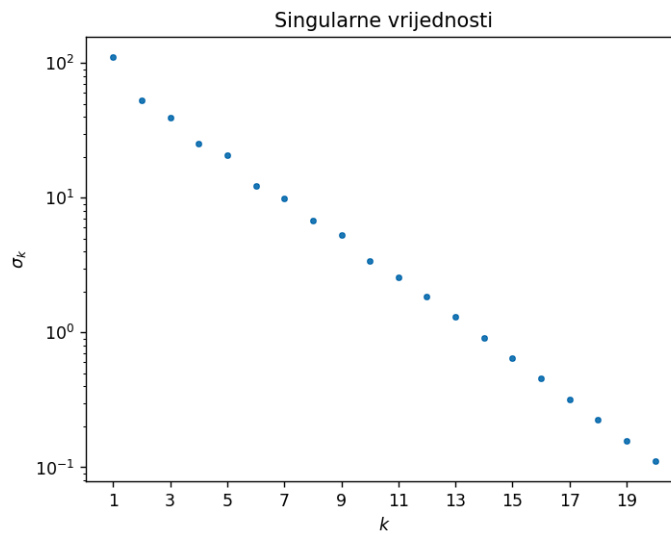
$$f_1(t, d) = \text{sech}(d + 6 - t) \exp(i2.3t).$$

Signal f_2 ostaje isti. Ponovno DMD radimo na izmiješanom signalu $f = f_1 + f_2$ (Slika 1.12 (gore lijevo)). Kao i prije, frekvencije su $\omega_1 = 2.3$ i $\omega_2 = 2.8$.

Iz SVD-a pripadne matrice vidimo da imamo značajno više singularnih vrijednosti većih od nule, otprilike deset (Slika 1.11).

Zadani signal ćemo rekonstruirati koristeći tri različita ranga: $r = 2$ (Slika 1.12 (gore desno)), $r = 5$ (Slika 1.12 (dolje lijevo)) i $r = 10$ (Slika 1.12 (dolje desno)). Rang $r = 2$ više nije dobar kao u prethodnom primjeru jer je pripadni relativni rezidual

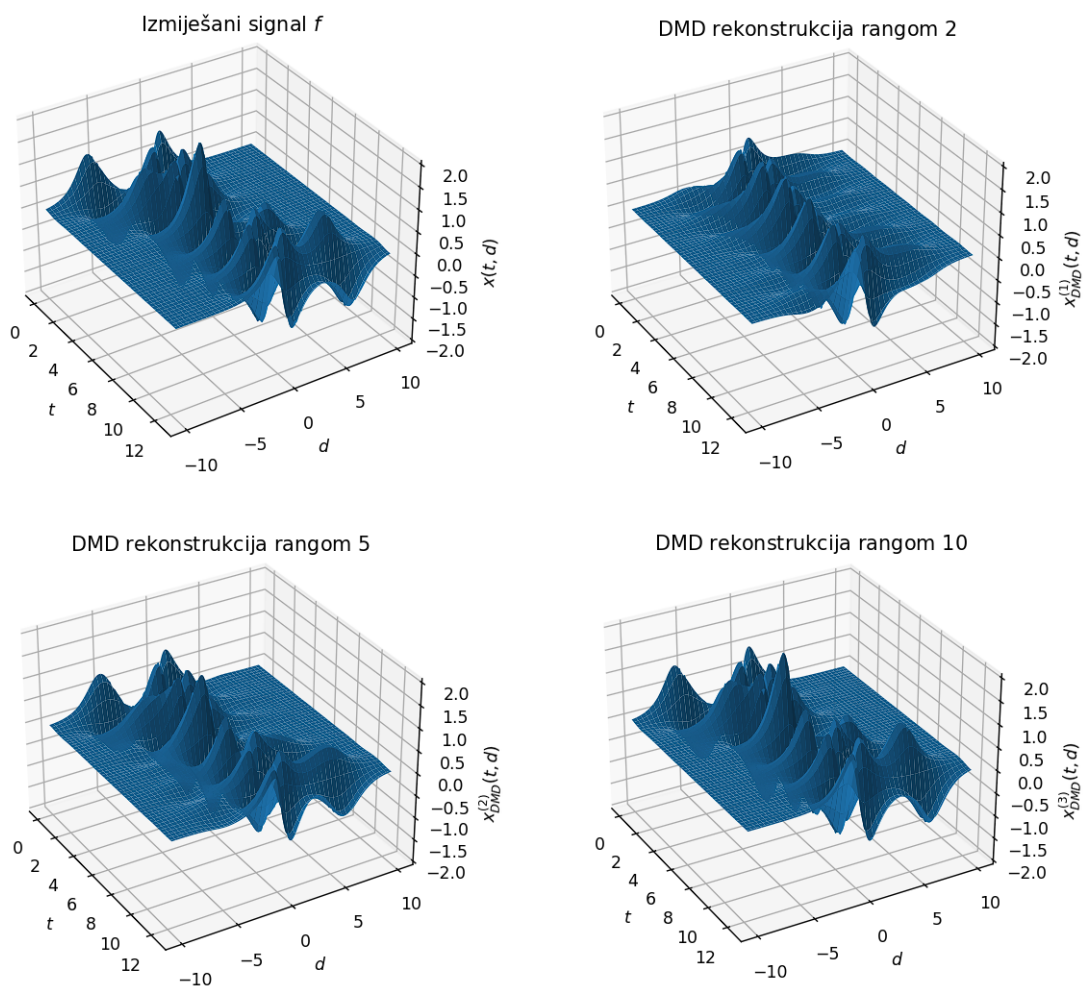
$$\frac{\|X - X_{\text{dmd}}^{(1)}\|_F}{\|X\|_F} = 0.58, \quad (1.27)$$



Slika 1.11: Singularne vrijednosti matrice uzoraka izmiješanog signala.

gdje je X matrica u kojoj su spremljeni uzorci zadanog signala, a matrica $X_{\text{dmd}}^{(1)}$ je pripadna DMD rekonstrukcija. Ni rang $r = 5$ nije puno bolji jer daje relativni rezidual 0.25, definiran analogno kao u (1.27). Međutim, tek je $r = 10$ pravi izbor jer je u tom slučaju relativni rezidual 0.001, definiran analogno kao u (1.27). Iako smo ovdje očekivali samo dva DMD moda, zbog SVD-a su umjetno nastali dodatni. Jedan način kako se taj problem može riješiti je korištenje mrDMD-a (eng. *multiresolution DMD*) [5].

Pripadne frekvencije su $\omega_1 = 2.75$ i $\omega_2 = 2.26$ u signalu ranga 2. U signalu ranga 5 su, najbliže točnima, $\omega_1 = 2.93$, $\omega_2 = 2.66$ i $\omega_3 = 2.29$, a u signalu ranga 10, $\omega_1 = 2.79$, $\omega_2 = 2.47$ i $\omega_3 = 2.13$.

Slika 1.12: Izmiješani signal f i njegova rekonstrukcija rangom 2, 5 i 10.

Poglavlje 2

DMD u teoriji upravljanja

2.1 Formulacija DMDC strukture

DMD s upravljanjem (eng. *DMD with control*) osim uzoraka, tj. mjerenja stanja sustava u nekim vremenskim koracima, koristi i uzorke nekakvog ulaza. Ulazi u sustav često predstavljaju nekakvu vanjsku silu na koju nemamo utjecaj. U tom je slučaju ulaz obično konstantan u vremenu. Međutim, taj ulaz se može modificirati dodavanjem raznih *upravljača (kontrolera)* kako bismo sustav, odnosno stanje sustava, doveli u stabilno stanje. Tada ulaz gotovo uvijek ovisi o vremenu. Detalji vezani za teoriju upravljanja se mogu pronaći u Dodatku A.

Kao i DMD, DMDC nastoji samo na osnovu uzoraka dati jasniji uvid u dinamiku sustava davanjem svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti. DMDC je također povezan s Koopmanovim operatorom koji daje teorijsku pozadinu ove tehnike modeliranja dinamičkih sustava vođeno podacima.

Slično kao u (1.9), na osnovu uzoraka nastojimo modelirati sustav u obliku:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2.1)$$

gdje je, kao i prije, x_k stanje sustava, a u_k predstavlja ulaz. Kao i ranije, osim modela u diskretnom vremenu, postoji i ekvivalentna reprezentacija u kontinuiranom. Više o tome u Dodatku A. U gornjoj jednadžbi stanje je $x_k \in \mathbb{R}^n$, a ulaz $u_k \in \mathbb{R}^p$. Matrica stanja je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a matrica ulaza $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Operator A opisuje dinamiku autonomnog sustava, onaj za kojeg je $u_k = 0$ za svaki k , a operator B karakterizira utjecaj ulaza u_k na buduće stanje x_{k+1} .

Matrice uzoraka stanja su

$$X = [x_0 \dots x_{m-1}], \quad Y = [x_1 \dots x_m], \quad (2.2)$$

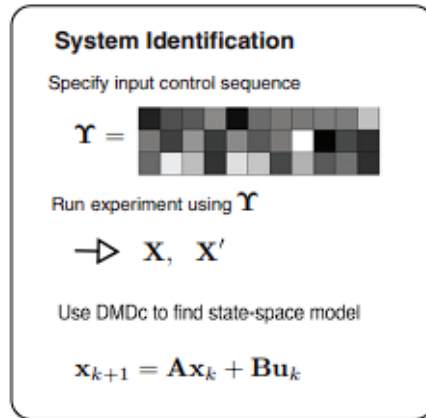
a matrica uzoraka ulaza je

$$\Upsilon = [u_0 \dots u_{m-1}]. \quad (2.3)$$

Ilustracija opisanog postupka je prikazana na Slici 2.1. (2.1) u matričnoj formulaciji ima oblik:

$$Y = AX + B\Upsilon. \quad (2.4)$$

U teoriji upravljanja imamo još jednu jednadžbu $y_k = Cx_k$, gdje y_k predstavlja izlaz iz sustava. Matrica C je često identiteta, što će u ovom poglavlju biti slučaj.



Slika 2.1: (Preuzeto iz [5]). Za određene ulaze specificirane u matrici Υ , pokrenemo eksperiment da dobijemo stanja X . Te podatke iskoristimo za dobivanje modela (2.1). Oznaka X' predstavlja matricu Y .

U rješavanju ovog problema imamo dva pristupa. Prvo promotrimo slučaj kada je matrica B poznata, odnosno kada znamo točno kako svaki ulaz utječe na stanje sustava u svakom vremenskom koraku. Tada ćemo (2.4) preoblikovati u

$$Y - B\Upsilon = AX \quad (2.5)$$

te primijenimo DMD algoritam 1.3, samo što ćemo umjesto matrice Y proslijediti matricu $Y - B\Upsilon$.

Sada promotrimo situaciju kada je i matrica B nepoznata. U tu svrhu, zapišimo (2.4) kao

$$Y = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Upsilon \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

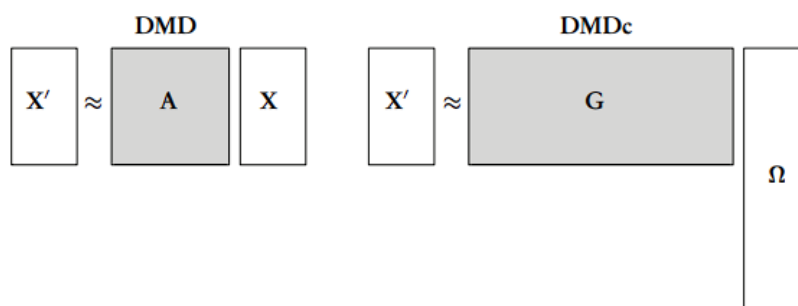
Definicija DMDC-a je vrlo slična Definiciji 1.1:

Definicija 2.1. Za podatke dane u (2.2) i (2.3), definiramo operator

$$G = YD^\dagger, \quad (2.7)$$

gdje je D^\dagger pseudoinverz matrice $D = [X^T \ \Upsilon^T]^T$. Dekompozicija na dinamičke modove s upravljanjem (DMDC) trojke (X, Υ, Y) je svojstvena dekompozicija matrice \hat{A} koja se sastoji od prvih n stupaca matrice G .

Matrica $G \in \mathbb{R}^{n \times (n+p)}$ ima svojstvo da minimizira Frobeniusovu normu $\|Y - GD\|_F$, gdje je $Y \in \mathbb{R}^{n \times m}$, a $D \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m}$. Svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti iz prethodne definicije također zovemo DMD modovi i DMD svojstvene vrijednosti. Ako s \hat{B} označimo matricu koja se sastoji od posljednjih p stupaca matrice G , onda je $G = [\hat{A} \ \hat{B}]$ te su baš te matrice, \hat{A} i \hat{B} , ako postoje, one kojima želimo rekonstruirati sustav oblika (2.1). Ilustracija DMD i DMDC postavke je prikazana na Slici 2.2. Kao i ranije, dekompoziciju ekvivalentnu onoj iz Definicije 2.1 možemo ostvariti pomoću SVD-a, što prikazujemo u Algoritmu 2.2.



Slika 2.2: (Preuzeto iz [5]). Ilustracija dimenzija podataka i matrica DMD-a i DMDC-a. Oznake: $X' \rightarrow Y$, $\Omega \rightarrow D$.

Algoritam 2.2 (DMDC). Ulaz: X, Υ, Y .

1. Napraviti matricu $D = [X^T \ \Upsilon^T]^T$.
2. Izračunati reducirani (ekonomični) SVD matrice D , $D = U\Sigma V^*$ i označiti $U = [U_1^T \ U_2^T]^T$, $U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{p \times n}$.
3. Izračunati SVD matrice Y , $Y = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^*$.
4. Izračunati matricu $\tilde{A} = \hat{U}^* Y V \Sigma^{-1} U_1^* \hat{U}$.
5. Izračunati svojstvene parove $(\tilde{\varphi}, \lambda)$ matrice \tilde{A} . Svaka svojstvena vrijednost λ različita od nule je DMD svojstvena vrijednost.
6. DMD mod koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ je dan kao

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} Y V \Sigma^{-1} U_1^* \hat{U} \tilde{\varphi}.$$

Izlaz: φ , λ .

Svi komentari nakon Algoritma 1.3 se odnose i na ovaj algoritam uz još nekoliko detalja. Primijetimo da u 3. koraku u prethodnom algoritmu nismo mogli koristiti matricu U umjesto \hat{U} za redukciju dimenzije kao u DMD-u. Prvenstveno zato što dimenzije nisu usklađene, a i da koristimo U_1 ne bismo radili dobru stvar pošto U_1 nije ortogonalna te matrica \tilde{A} tada ne bi bila projekcija matrice A na nižedimenzionalni potprostor. Jedna od opcija jest korištenje odgovarajućeg projektora, no jednostavniji i smisleniji način je korištenje matrice \hat{U} jer ona sadrži sve izlazne podatke, za razliku od matrice X ili D , a i ortogonalna je te su im dimenzije usklađene. Naravno i u matrici \hat{U} je ideja odrezati na nekom \hat{r} . Obično će \hat{r} biti manji od rezanja r u U iz Algoritma 2.2.

U Algoritmu 2.2 možemo izračunati i reducirani operator $\tilde{B} = \hat{U}^* Y V \Sigma^{-1} U_2^*$ koji zajedno s \tilde{A} čini reducirani model ROM (eng. *Reduced Order Model*)

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}u_k,$$

gdje je $\tilde{x} = \hat{U}^* x \in \mathbb{R}^{\hat{r}}$. Reducirani operatori su $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\hat{r} \times \hat{r}}$ i $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{\hat{r} \times p}$.

Primjer 2.3. Promotrimo primjer u kojem bez bilo kakvog ulaza imamo nestabilan sustav, ali ga s ulazom u obliku upravljača stabiliziramo. DMDc ima sposobnost prepoznati nestabilnu dinamiku koja ima stabilizirajući upravljač. Konkretno, neka je dan sustav u diskretnom vremenu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad (2.8)$$

koji bi u slučaju $u_k = 0$ bio nestabilan jer postoji svojstvena vrijednost po modulu veća od 1, konkretno 1.5. Primijetimo da je matrica A dijagonalna, stoga su joj svojstvene vrijednosti dijagonalni elementi. Međutim mi dodajemo ulaz $u_k = Kx_1$, $K = -1$, s upravljačem koji svojstvenu vrijednost 1.5 prebacuje strogo unutar jediničnog kruga, odnosno stabilizira ju.

Umjetno generiramo uzorke koristeći (2.8) s početnim uvjetom $x_0 = [4 \ 7]^T$. Pristupamo problemu na način da znamo matricu B , stoga radimo SVD matrice X s $m = 4$ uzorka te ubacujemo nju i modificiranu $Y = Y - B^T X$ u DMD algoritam. Dobijemo točnu matricu sustava, a da smo radili DMD samo na podacima X i Y , dobili bismo matricu stanja

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Time pokazujemo da DMD, za razliku od DMDc-a, nije sposoban naći pravu dinamiku sustava bez kontrole. DMD već vidi stabilan sustav te samim time vraća stabilnu matricu.

2.2 Poveznica s Koopmanovim operatorom

U ovom potpoglavlju dajemo kratak pregled o generalizaciji Koopmanovog operatora na sustave s ulazom. *Koopmanov operator s ulazima i upravljanjem* (eng. *Koopman with Inputs and Control (KIC)*) $K : H \rightarrow H$ definiramo kao

$$(Kh)(x, u) = h(\mathbf{F}(x, u), *), \quad (2.9)$$

gdje je dinamički sustav u diskretnom vremenu zadan kao

$$x_{k+1} = \mathbf{F}(x_k, u_k).$$

H je Hilbertov prostor opažaja $h : M \times N \rightarrow \mathbb{C}$. Ovdje su $M \subseteq \mathbb{R}^n$ i $N \subseteq \mathbb{R}^p$ glatke mnogostrukosti.

U (2.9), izraz $*$ možemo definirati na dva načina:

1. $* = 0$: Ulazi se ne mijenjaju kroz vrijeme. Mogu predstavljati na primjer neku vanjsku silu nad kojom nemamo kontrolu.
2. $* = u$: Ulazi se mijenjaju kroz vrijeme. Na primjer, kao u (2.8), ulaz u može ovisiti o stanju x .

Analogno kao u Koopmanovoj teoriji za DMD, možemo promatrati svojstveni problem

$$(K\theta_j)(x, u) = \hat{\lambda}_j \theta_j(x, u), \quad j = 1, 2, \dots$$

Pretpostavimo da su opažaji $h_i \in \text{span}\{\theta_j : j = 1, 2, \dots\}$ za svaki $i = 1, \dots, n$. Tada za vektorski opažaj $h = (h_1, \dots, h_n)^T$ vrijedi

$$h(x, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x, u) \hat{\varphi}, \quad (2.10)$$

gdje je $\hat{\varphi}$ Koopmanov mod. Primjenom Koopmanovog operatora (KIC) na (2.10) dobivamo:

$$(Kh)(x, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\lambda}_j \theta_j(x, u) \hat{\varphi}.$$

Poglavlje 3

Učenje nelinearne dinamike iz podataka

3.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju ćemo promatrati sustave parametriziranih nelinearnih običnih diferencijalnih jednačbi velike dimenzije koji najčešće dolaze iz prostorne diskretizacije neke parcijalne diferencijalne jednačbe koja ovisi o vremenu.

Pristup problemu je ovdje malo drukčiji od onog u DMD-u. Koristeći DMD smo htjeli izračunati dekompoziciju aproksimativnog linearnog operatora, a ovdje nam je cilj za određeni broj parametara, koji dobro reprezentiraju neki skup mogućih parametara, naučiti reducirane, općenito nelinearne, odnosno kvadratične operatore koji će se moći koristiti za računanje trajektorija s nekim novim parametrom [8]. Ideja je da ćemo korištenjem određenog broja parametara dohvatiti neku nižedimenzionalnu mnogostrukost na kojoj se nalaze trajektorije.

Neka je $\mu \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$, parametar te $t \in [0, T]$, $T > 0$, vrijeme. Nadalje, neka je $u : [0, T] \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ulaz, $x : [0, T] \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stanje i $y : [0, T] \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^q$ izlaz nekog dinamičkog sustava. Za vektor stanja $x(t; \mu) = (x_1(t; \mu), \dots, x_n(t; \mu))^T \in \mathbb{R}^n$, definiramo vektor

$$x(t; \mu)^2 = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t; \mu) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t; \mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^s, \quad (3.1)$$

gdje je

$$x^{(i)}(t; \mu) = x_i(t; \mu) \begin{bmatrix} x_1(t; \mu) \\ \vdots \\ x_i(t; \mu) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^i, \quad (3.2)$$

za $i = 1, \dots, n$. Vektor $x(t; \mu)^2$ sadrži sve dvočlane produkte komponenti vektora $x(t; \mu)$ po jednom, time je $s = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Analogno, za $2 < \alpha \in \mathbb{N}$, možemo definirati $x(t; \mu)^\alpha$

dimenzije $s = \binom{n+\alpha-1}{\alpha} \in \mathcal{O}(n^\alpha)$. Time vidimo da s raste eksponencijalno s redom α .

Sustav parametriziranih običnih diferencijalnih jednadžbi s nelinearnim članom koji je kvadratičan ima oblik:

$$\frac{d}{dt}x(t; \mu) = A(\mu)x(t; \mu) + F(\mu)x(t; \mu)^2 + B(\mu)u(t; \mu), \quad (3.3)$$

$$y(t; \mu) = C(\mu)x(t; \mu), \quad (3.4)$$

gdje je $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ operator stanja linearnog člana, a $F(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times s}$ nelinearnog. $B(\mu) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ je operator ulaza, a $C(\mu) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ izlaza. Početni uvjet $x(0; \mu) = x_0(\mu) \in \mathbb{R}^n$ je zadan, a matrice su nepoznate. Analogni izvod se može napraviti s nelinearnim članom višeg reda.

Odabiremo ekvidistantnu mrežu $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ vremenske domene $[0, T]$ s korakom $\Delta t > 0$ u kojoj ćemo računati stanja, ulaze i izlaze. Definiramo matricu stanja

$$X(\mu) = [x_1(\mu) \dots x_m(\mu)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

s odgovarajućim ulazima

$$\Upsilon(\mu) = [u(t_1; \mu) \dots u(t_m; \mu)] \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

i izlazima

$$Y(\mu) = [y_1(\mu) \dots y_m(\mu)] \in \mathbb{R}^{q \times m}.$$

Napomenimo da su diskretizirana stanja $x_1(\mu), \dots, x_m(\mu)$ i diskretizirani izlazi $y_1(\mu), \dots, y_m(\mu)$ izračunati u vremenima t_1, \dots, t_m koristeći vremenski korak Δt , a ulazi spremljeni u matrici $\Upsilon(\mu)$ su isti kao i kod originalnog kontinuiranog modela. Nadalje, pretpostavljamo da diskretizirana stanja $x_k(\mu)$ u L^2 normi konvergiraju k originalnom stanju $x(t_k; \mu)$ kada $\Delta t \rightarrow 0$, za sve $k = 1, \dots, m$.

Uzmimo sada l parametara $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathcal{P}$ te neka su $X(\mu_1), \dots, X(\mu_l) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrice stanja, $\Upsilon(\mu_1), \dots, \Upsilon(\mu_l) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrice ulaza, $Y(\mu_1), \dots, Y(\mu_l) \in \mathbb{R}^{q \times m}$ matrice izlaza i $x_0(\mu_1), \dots, x_0(\mu_l) \in \mathbb{R}^n$ početni uvjeti. Označimo s U_r , $r < n$, matricu u kojoj su spremljeni vektori POD baze matrice dobivene spajanjem:

$$[x_0(\mu_1) X(\mu_1) \dots x_0(\mu_l) X(\mu_l)] \in \mathbb{R}^{n \times (ml+l)}. \quad (3.5)$$

Kada bismo imali pristup matricama $A(\mu_j)$, reducirane operatore $\hat{A}(\mu_j)$ bismo dobili Galerkinovom projekcijom:

$$\hat{A}(\mu_j) = U_r^* A(\mu_j) U_r \in \mathbb{R}^{r \times r}.$$

Tada je $\hat{B}(\mu_j) = U_r^* B(\mu_j) \in \mathbb{R}^{r \times p}$ i $\hat{C}(\mu_j) = C(\mu_j) U_r \in \mathbb{R}^{q \times r}$. Neka je $c = \binom{r+1}{2} = \frac{r(r+1)}{2}$. Reducirani operator stanja nelinearnog člana $\hat{F}(\mu_j) \in \mathbb{R}^{r \times c}$ se dobiva tako da se prvo $F(\mu_j) \in$

$\mathbb{R}^{n \times s}$ transformira u tenzor dimenzije $n \times n \times n$ te se onda napravi Galerkinova projekcija na svaku dimenziju zasebno i na kraju se projicirani tenzor reda $r \times r \times r$ transformira u matricu reda $r \times c$. Analogno se projicira i početni uvjet $\hat{x}_0(\mu_j) = U_r^* x_0(\mu_j)$. U konačnici, dobivamo reducirani model

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t; \mu) = \hat{A}(\mu) \hat{x}(t; \mu) + \hat{F}(\mu) \hat{x}(t; \mu)^2 + \hat{B}(\mu) u(t; \mu), \quad (3.6)$$

$$\hat{y}(t; \mu) = \hat{C}(\mu) \hat{x}(t; \mu), \quad (3.7)$$

Međutim, što ako nam nisu dostupne matrice A , B i F ? U nastavku ćemo opisati kako ćemo isključivo na temelju matrica X , Υ , Y i POD baze U_r dobiti matrice \hat{A} , \hat{B} i \hat{F} koje ćemo zajedničkim imenom nazivati operatorima učenja dinamike (eng. *operators inference*). Ponašajmo se kao da imamo samo jedan parametar μ radi jednostavnije notacije: $x(t_k; \mu_j) \rightarrow x_k$, $x_0(\mu) \rightarrow x_0$, $u(t_k; \mu_j) \rightarrow u_k$, $y(t_k; \mu_j) \rightarrow y_k$, $X(\mu_j) \rightarrow X$, $Y(\mu_j) \rightarrow Y$, $\Upsilon(\mu_j) \rightarrow \Upsilon$, $A(\mu_j) \rightarrow A$ itd.

Prvo, projicirajmo originalna stanja $x_k \in \mathbb{R}^n$ na POD bazu U_r . Ta nova stanja su

$$\tilde{x}_k = U_r^* x_k \in \mathbb{R}^r, \quad k = 1, \dots, m,$$

koje spremamo u matricu $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{r \times m}$. Analogno konstruiramo i matricu

$$\tilde{X}^{(i)} = [\tilde{x}_1^{(i)} \dots \tilde{x}_m^{(i)}] \in \mathbb{R}^{i \times m}, \quad (3.8)$$

za $i = 1, \dots, r$, gdje su vektori $\tilde{x}_k^{(i)} \in \mathbb{R}^i$ dobiveni iz vektora \tilde{x}_k na analogan način kao u (3.2).

Za vremensku diskretizaciju opisanu ranije, stavimo da je $\dot{\tilde{x}}_k \in \mathbb{R}^r$ aproksimacija derivacije $\frac{d}{dt} \hat{x}(t_k)$ koja konvergira u L^2 normi kada $\Delta t \rightarrow 0$. Definiramo *operatore učenja dinamike* $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{r \times p}$ i $\tilde{F} \in \mathbb{R}^{r \times c}$ kao rješenje optimizacijskog problema

$$\min_{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{r \times p}, \tilde{F} \in \mathbb{R}^{r \times c}} \sum_{k=1}^m \|\dot{\tilde{x}}_k - \tilde{A} \tilde{x}_k - \tilde{F} \tilde{x}_k^2 - \tilde{B} u_k\|_2^2, \quad (3.9)$$

što znači da ako je vrijednost funkcije cilja jednaka nuli, operatori učenja dinamike zadovoljavaju jednadžbe

$$\dot{\tilde{x}}_k = \tilde{A} \tilde{x}_k + \tilde{F} \tilde{x}_k^2 + \tilde{B} u_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.10)$$

Matricu podataka definiramo kao

$$D = [\tilde{X}^T \ \Upsilon^T \ (\tilde{X}^{(1)})^T \ \dots \ (\tilde{X}^{(r)})^T]^T \in \mathbb{R}^{(r+p+c) \times m}. \quad (3.11)$$

Matrica derivacija je

$$R = [\dot{\tilde{x}}_1 \ \dots \ \dot{\tilde{x}}_m] \in \mathbb{R}^{r \times m}. \quad (3.12)$$

Promotrimo blok-stupčanu particiju matrice \tilde{F} :

$$\tilde{F} = [\tilde{F}^{(1)} \dots \tilde{F}^{(r)}] \in \mathbb{R}^{r \times c},$$

gdje je blok $\tilde{F}^{(i)} \in \mathbb{R}^{r \times i}$, $i = 1, \dots, r$. Tada je (3.9) ekvivalentno problemu

$$\min_{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{r \times p}, \tilde{F}^{(1)} \in \mathbb{R}^{r \times 1}, \dots, \tilde{F}^{(r)} \in \mathbb{R}^{r \times r}} \left\| R - \tilde{A}\tilde{X} - \tilde{B}\Upsilon - \sum_{i=1}^r \tilde{F}^{(i)}\tilde{X}^{(i)} \right\|_F^2. \quad (3.13)$$

Koristeći matrice D , R i G (3.13) možemo zapisati kao

$$\min_{G \in \mathbb{R}^{r \times (r+p+c)}} \|D^T G^T - R^T\|_F^2, \quad (3.14)$$

gdje je tražena matrica $G = [\tilde{A} \ \tilde{B} \ \tilde{F}^{(1)} \ \dots \ \tilde{F}^{(r)}]$. Problem (3.14) se može razdvojiti u r nezavisnih problema najmanjih kvadrata u $\|\cdot\|_2$ normi [7]. Time dobivamo

$$\min_{g_i \in \mathbb{R}^{r+p+c}} \|D^T g_i - r_i\|_2^2, \quad i = 1, \dots, r, \quad (3.15)$$

gdje su g_i i r_i retci matrice G , odnosno R .

Teorem 3.1. *Neka je dan reducirani model (3.6) i neka su $\hat{x}(t_1), \dots, \hat{x}(t_m)$ reducirana stanja u vremenima t_1, \dots, t_m koja zadovoljavaju*

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t_k) = \hat{A}\hat{x}(t_k) + \hat{F}\hat{x}(t_k)^2 + \hat{B}u(t_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.16)$$

Definiramo reduciranu trajektoriju $\hat{X} = [\hat{x}(t_1) \ \dots \ \hat{x}(t_m)] \in \mathbb{R}^{r \times m}$ i matrice $\hat{X}^{(1)}, \dots, \hat{X}^{(r)}$ analogno kao u (3.8). Neka je $\hat{D} \in \mathbb{R}^{(r+p+c) \times m}$ matrica podataka dobivena iz reduciranih trajektorija:

$$\hat{D} = \left[\hat{X}^T \ \Upsilon^T \ (\hat{X}^{(1)})^T \ \dots \ (\hat{X}^{(r)})^T \right]^T$$

te neka je $\hat{R} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ pripadna matrica derivacija

$$\hat{R} = \left[\frac{d}{dt}\hat{x}(t_1) \ \dots \ \frac{d}{dt}\hat{x}(t_m) \right].$$

Ako \hat{x}_k u L^2 normi konvergira k $\frac{d}{dt}\hat{x}(t_k)$ kada $\Delta t \rightarrow 0$, za svaki $k = 1, \dots, m$, i ako matrice podataka \hat{D} i D imaju puni retčani rang $r + p + c$ za sve $\Delta t > 0$ i $r \leq n$, onda, za svaki $\varepsilon > 0$, postoje $r \leq n$ i vremenski korak $\Delta t > 0$ takvi da je

$$\|\tilde{A} - \hat{A}\|_F < \varepsilon.$$

Isti zaključak vrijedi za operatore \tilde{B} i \tilde{F} .

Dokaz. Pogledati [8]. □

Teorem 3.1 pokazuje da operatori učenja konvergiraju k reduciranim operatorima dobivenim iz Galerkinove projekcije kada $\Delta t \rightarrow 0$, stoga će ti naučeni operatori naslijediti svojstva reduciranih operatora. Posebno, ako je reducirani model interno stabilan, onda će model dobiven naučenim operatorima dinamike također biti interno stabilan.

Za operator učenja dinamike izlaza $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q \times r}$ promotrimo problem

$$\min_{\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q \times r}} \|\tilde{X}^T \tilde{C}^T - \tilde{Y}^T\|_F^2, \quad (3.17)$$

gdje se \tilde{C} dobije po stupcima kao u (3.15).

Korolar 3.2. *Promotrimo iste postavke kao u Teoremu 3.1. Ako \tilde{X} ima puni reččani rang r za svaki $r \leq n$ i $\Delta t > 0$, tada, za svaki $\varepsilon > 0$, postoje $r \leq n$ i $\Delta t > 0$ takvi da je*

$$\|\tilde{C} - \hat{C}\|_F < \varepsilon.$$

Dokaz. Pogledati [8]. □

Gornja razmatranja sada možemo objediniti u algoritam za učenje nelinearne dinamike na temelju izmjerenih stanja dinamičkog sustava.

Algoritam 3.3 (Operatori učenja dinamike). Ulaz: $x_0, X, \Upsilon, Y, U_r, \Delta t$.

1. Projicirati $\tilde{x}_0 = U_r^* x_0$ i $\tilde{X} = U_r^* X$.
2. Napraviti matrice $\tilde{X}^{(1)}, \dots, \tilde{X}^{(r)}$ prema formuli (3.8).
3. Napraviti matricu

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{X}^T & \Upsilon^T & (\tilde{X}^{(1)})^T & \dots & (\tilde{X}^{(r)})^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(r+p+c) \times m}.$$

4. Napraviti matricu

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_0 & \dots & \tilde{x}_m - \tilde{x}_{m-1} \\ \Delta t & \dots & \Delta t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times m}.$$

5. Za svaki redak r_i matrice R , riješiti problem najmanjih kvadrata

$$\min_{g_i \in \mathbb{R}^{r+p+c}} \|D^T g_i - r_i\|_2^2, \quad i = 1, \dots, r.$$

6. Formirati matricu G s retcima g_i .
7. Operatori $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{F}^{(1)}, \dots, \tilde{F}^{(r)}$ se dobiju iz matrice G kao u (3.14) te je $\tilde{F} = [\tilde{F}^{(1)} \dots \tilde{F}^{(r)}]$.
8. Riješiti problem najmanjih kvadrata za \tilde{C} prema formuli (3.17).

Izlaz: $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{F}$.

3.2 Primjeri i usporedba s DMD-om

Za učenje reduciranog modela, DMD projicira podatke na reduciranu bazu, zatim traži linearan operator koji najbolje pristaje tim reduciranim podacima, u smislu najmanjih kvadrata. Slično, operatori učenja dinamike pronalaze linearan ili polinoman operator za reducirane podatke. Međutim, ako originalna dinamika nije linearna ili polinomna, onda DMD i operatori učenja mogu dati netočne rezultate. Pristup opisan u ovom poglavlju uzima u obzir i modele koje ovise o parametru, dok DMD tipično uzima modele neovisne o parametru. Ideja je da uvođenjem kvadratičnog člana dobijemo bolju aproksimaciju, odnosno točnije rješenje problema najmanjih kvadrata.

Primjer 3.4. Neka je $\mathcal{D} = [0, 1]$ prostorna domena te $[0, T]$, $T = 1$, vremenska, a $\mathcal{P} = [0.1, 10]$ parametarska. Promatrimo parametriziranu jednodimenzionalnu difuzijsku jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, d; \mu) - \mu \frac{\partial^2}{\partial d^2} x(t, d; \mu) = 0, \quad (3.18)$$

gdje je $t \in [0, T]$, $d \in \mathcal{D}$ i $\mu \in \mathcal{P}$. Dirichletovi rubni uvjeti su $x(t, 0; \mu) = x(t, 1; \mu) = 1$.

Diskretizacija prostorne domene \mathcal{D} i korištenje podijeljenih razlika u (3.18) na razmak od $\Delta d = 2^{-7}$ vodi k $n-1 = 127$ parametriziranih linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{d}{dt} x(t; \mu) = A(\mu)x(t; \mu) + B(\mu)u(t), \quad (3.19)$$

gdje je $A(\mu) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Operator ulaza $B(\mu) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ opisuje utjecaj Dirichletovih rubnih uvjeta koji su konstantni u oba ruba, time je zadan ulaz $u(t) = 1$ za svaki $t \in [0, T]$. Početni uvjet je $x_0(\mu) = 0$. Izlaz iz sustava $y(t; \mu)$ je aritmetička sredina vektora $x(t; \mu)$ (Slika 3.2). Jednadžbu (3.18) (Slika 3.1) i (3.19) rješavamo implicitnom Eulerovom metodom s vremenskim korakom $\Delta t = 10^{-3}$.

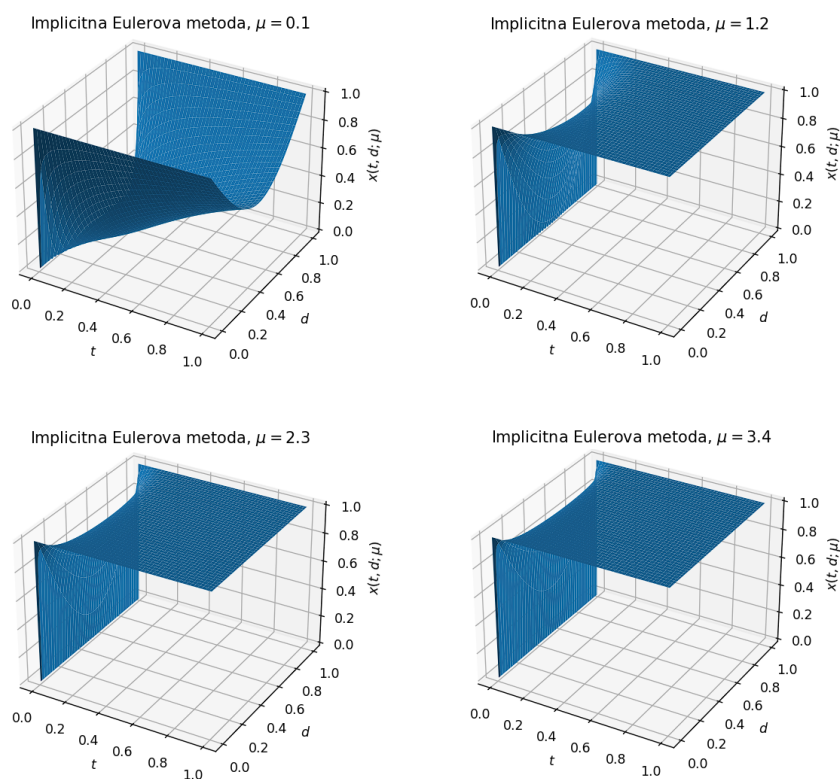
Uzimamo $l = 10$ parametara ekvidistantno distribuiranih u \mathcal{P} . Neka su $X(\mu_1), \dots, X(\mu_l) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times m}$, $m = 10^3$, matrice trajektorija, $Y(\mu_1), \dots, Y(\mu_l) \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $q = 1$, matrice izlaza i $\Upsilon = [1 \dots 1] \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $p = 1$, matrica ulaza. Primijetimo da su operatori $A(\mu_j)$ i $B(\mu_j)$ te matrice $X(\mu_j)$ i $Y(\mu_j)$ ovisne o parametru μ_j , za $j = 1, \dots, l$, a ulazi Υ i početni uvjeti nisu.

Nakon što napravimo SVD matrice $X_p = [x_0(\mu_1) \ X(\mu_1) \ \dots \ x_0(\mu_l) \ X(\mu_l)]$ (Slika 3.3), biramo $w = 8$ POD modova koje ćemo koristiti za učenje operatora dinamike.

Na Slici 3.4 je prikazana relativna greška stanja X_{infer} i izlaza Y_{infer} koji su rekreirani naučenim operatorima dinamike, za svaki $r \leq n$:

$$\sqrt{\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \frac{\|U_r^* X(\mu_j) - X_{\text{infer}}\|_F^2}{\|U_r^* X(\mu_j)\|_F^2}}, \quad \sqrt{\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \frac{\|Y(\mu_j) - Y_{\text{infer}}\|_F^2}{\|Y(\mu_j)\|_F^2}},$$

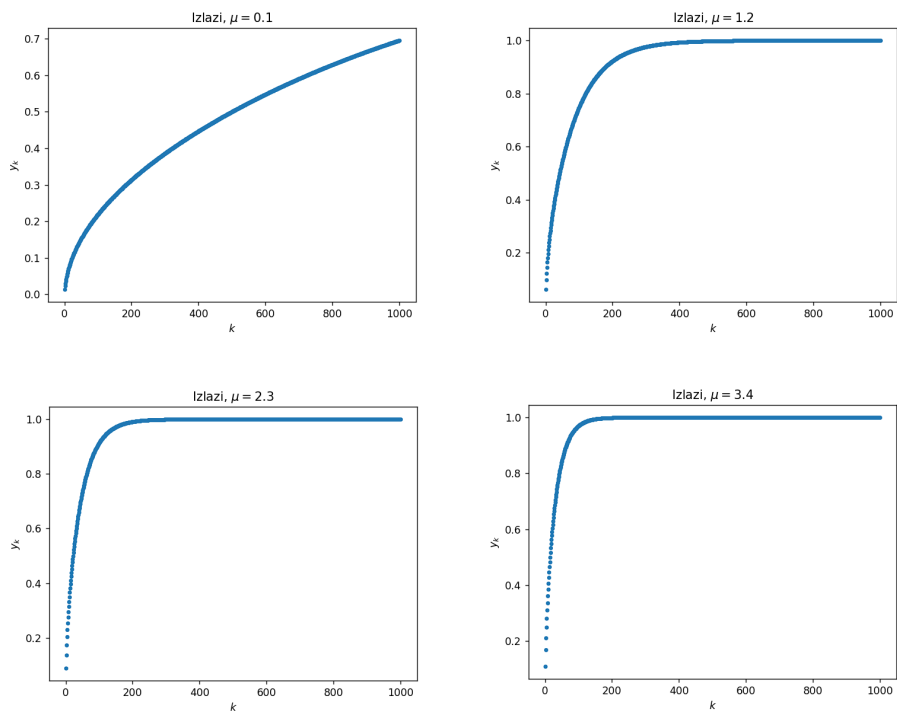
U_r predstavlja POD bazu.



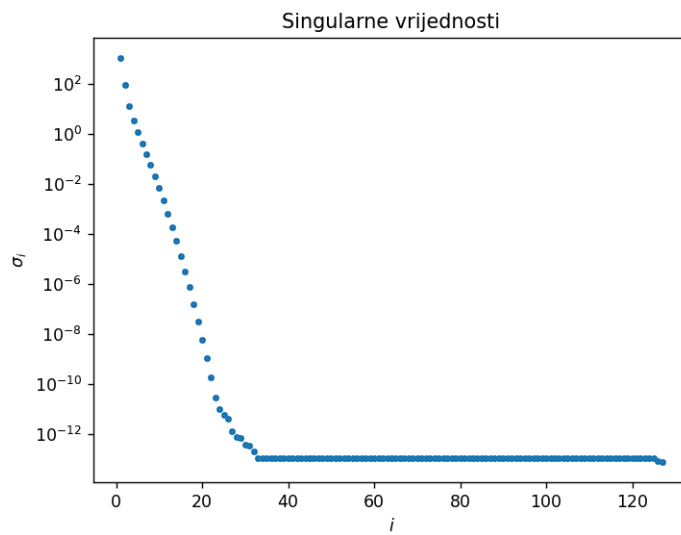
Slika 3.1: Rješenja jednadžbe (3.18) korištenjem implicitne Eulerove metode.

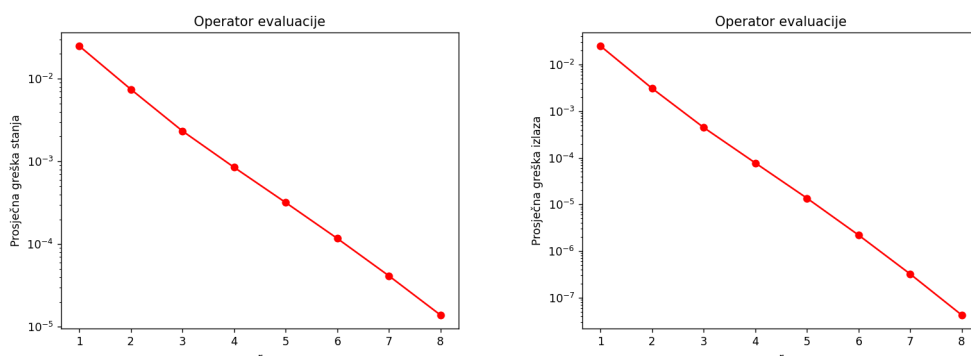
Kako je originalni sustav (3.18) linearan i ulaz je konstantan u vremenu, DMD bi trebao dati jednake rezultate kao i naučeni operatori dinamike. Međutim, kad računamo DMD, pripadni uzorci sadrže i početne i rubne uvjete. Početni uvjet je u tom slučaju $x_0 = (1, 0, \dots, 0, 1)^T$. Primijetimo da u vrhovima imamo skok kojeg DMD prilikom rekonstrukcije izgadi i time daje nešto slabiju aproksimaciju od naučenih operatora, ali i dalje značajnu (Slika 3.5). Unatoč toj opasci, ima smisla promatrati takav početni i rubni uvjet. Na primjer, ako promatramo žicu koja je na početku temperature nula te ju krenemo grijati na vrhovima.

Kada smo izračunali operatore $A(\mu_j)$, $B(\mu_j)$ i $C(\mu_j)$, za $j = 1, \dots, l$, računanje trajektorija i izlaza sustava novih parametra $\mu_{j+1}, \dots, \mu_{j+5}$ radimo linearnom interpolacijom po elementima za $r = 8$. Novi parametri su uzeti na slučajnan način iz uniformne distribucije u \mathcal{P} . Time smo izračunali nove matrice $A(\mu_{j+1}), \dots, A(\mu_{j+5})$, $B(\mu_{j+1}), \dots, B(\mu_{j+5})$ i $C(\mu_{j+1}), \dots, C(\mu_{j+5})$. Takvom interpolacijom dobijemo prosječnu relativnu grešku $\sim 10^{-4}$. Greška je reda veličine manja nego na Slici 3.4, no može se poboljšati korištenjem splajn interpolacije.

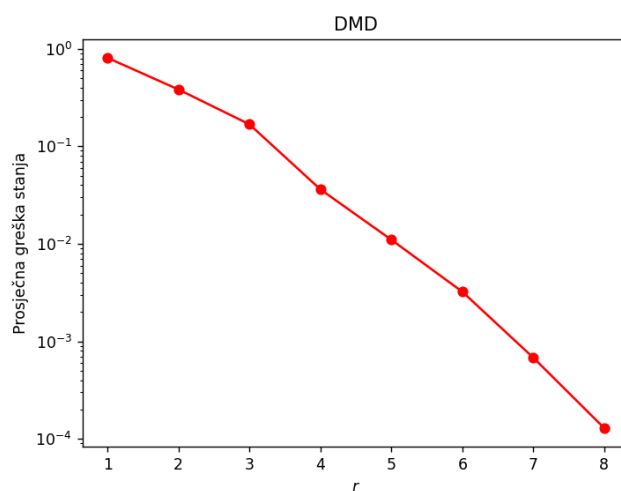


Slika 3.2: Izlazi iz sustava.

Slika 3.3: Singularne vrijednosti matrice X_p .



Slika 3.4: Prosječna greška stanja i izlaza rekreiranih naučenim operatorima.



Slika 3.5: Prosječna greška stanja rekreiranih DMD-om.

Primjer 3.5. U ovom primjeru ćemo promotriti Burgersovu jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial t}x(t, d; \mu) + x(t, d; \mu)\frac{\partial}{\partial d}x(t, d; \mu) - \mu\frac{\partial^2}{\partial d^2}x(t, d; \mu) = 0. \quad (3.20)$$

Primijetimo da (3.20) ima nelinearni član. Ako pretpostavimo da rješenje od (3.20) ima oblik

$$x = -2\mu\frac{w_d}{w}, \quad (3.21)$$

tada w zadovoljava difuzijsku jednadžbu (3.18) [4] [11]. (3.21) se zove *Hopf-Coleova transformacija*.

Prostorna domena je $\mathcal{D} = [0, 1]$, vremenska $[0, T]$, $T = 1$, a parametarska $\mathcal{P} = [0.1, 1]$. Ako je početni uvjet

$$x(0, d; \mu) = \sin(\pi d)$$

i rubni

$$x(t, 0; \mu) = x(t, 1; \mu) = 0,$$

onda je za funkciju w pripadni početni uvjet

$$w(0, d; \mu) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi\mu}(1 - \cos(\pi d))\right),$$

a rubni

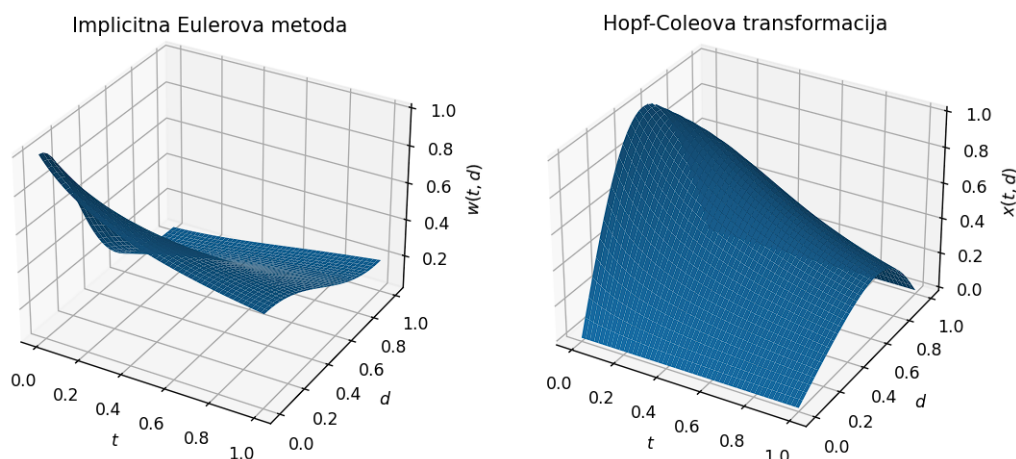
$$w_d(t, 0; \mu) = w_d(t, 1; \mu) = 0. \quad (3.22)$$

Primijetimo da su rubni uvjeti (3.22) Neumannovi. Ako stavimo da je mreža diskretizacije širine $\Delta d = 2^{-5}$, tada dobivamo 31 nelinearnu običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d}{dt}x(t; \mu) = A(\mu)x(t; \mu) + F(\mu)x(t; \mu)^2 + B(\mu)u(t), \quad (3.23)$$

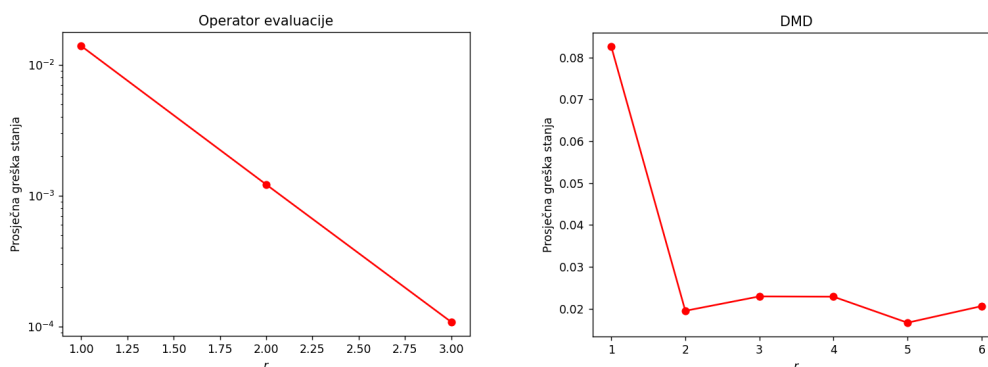
gdje je $A(\mu) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ te $F(\mu) \in \mathbb{R}^{(n-1) \times c}$, $c = \frac{(n-1)n}{2}$. Pripadni ulazi su $u(t) = 0$, za svaki $t \in [0, T]$, zbog homogenih Dirichletovih rubnih uvjeta.

U ovom primjeru su nam izlazni jednaki stanjima te promatramo samo jedan parametar $\mu = 0.1$. Uzevši vremenski korak $\Delta t = 10^{-4}$, pripadna difuzijska jednadžba za funkciju w je riješena implicitnom Eulerovom metodom (Slika 3.6 (lijevo)).



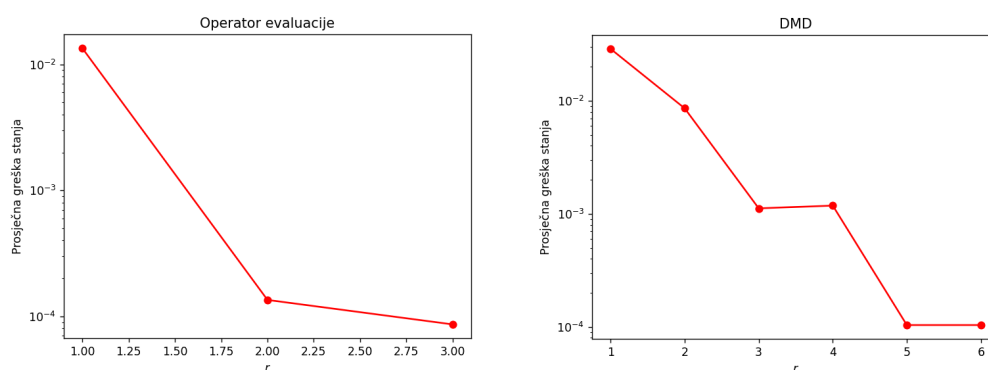
Slika 3.6: Rješenje difuzijske jednadžbe za nepoznatu funkciju w (lijevo) i Hopf-Coleova transformacija (desno).

Pripadne greške stanja rekonstruiranih pomoću naučenih operatora i DMD-a se mogu vidjeti na Slici 3.7. Primijetimo da je već za $r = 3$, greška $\sim 10^{-4}$, dok DMD ne uspijeva dobiti manju grešku od $\sim 10^{-2}$. Sustav (3.23) je riješen eksplicitnom Eulerovom metodom, stoga zbog velikog kondicijskog broja matrice podataka, vremenski korak $\Delta t = 10^{-4}$ nije dovoljan za računanje s većom dimenzijom.



Slika 3.7: Greške stanja dobivenih rekonstrukcijom naučenih operatora dinamike (lijevo) i pomoću DMD-a (desno).

Ako stavimo $n = 2^7$, onda vidimo da DMD puno bolje rekonstruira stanja (Slika 3.8 (desno)) čak i ako je $m = 5$. Kod operatora učenja dinamike je i dalje $m = 10^4$. Kod uvođenja DMD-a je spomenuto da je općenito $n \gg m$. Na Slici 3.6 (desno) vidimo da su uzorci skoro linearno zavisni te preveliki vremenski korak ne dovodi do ispravnog rješenja. Štoviše, vidimo da je za uspješnost DMD-a potrebna puno veća prostorna mreža, za razliku od operatora učenja jer DMD radi linearnu aproksimaciju.



Slika 3.8: Greške stanja dobivenih rekonstrukcijom naučenih operatora dinamike (lijevo) i pomoću DMD-a (desno).

3.3 *Lift & Learn* metoda

Za razliku od DMD-a koji proizvodi linearnu aproksimaciju, *Lift & Learn* metoda nastoji pronaći transformaciju koordinata kojom će nelinearni dinamički sustav pretvoriti u kvadratični. Razlog tomu je što će taj novi kvadratični model biti konačnodimenzionalan. U Primjeru 1.9 smo vidjeli transformaciju koordinata u kojoj je početni nelinearni dinamički sustav postao linearan, ali i konačnodimenzionalan što je iznimno rijetka situacija. Egzistencija transformacije koordinata koji sustav čine kvadratičnim nije univerzalno zagarantirana, dok je za Koopmanov operator egzistencija transformacije koordinata koji sustav čine linearnim pokazana u [13]. *Lift & Learn* metoda, prezentirana u [9], je noviji pristup za razliku od Koopmanove teorije i DMD-a za koje je već razvijena teorija.

U ovom potpoglavlju promatramo sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{\partial s}{\partial t} = f(s), \quad (3.24)$$

opisanih u prvom poglavlju te njegov pripadni semidiskretizirani model, odnosno sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{f}(x). \quad (3.25)$$

Neka su x_k uzorci, odnosno rješenja od x u vremenima t_k , za $k = 1, \dots, m$. Posložimo ih u matricu

$$X = [x_1 \dots x_m] \in \mathbb{R}^{nd_s \times m}. \quad (3.26)$$

U X mogu biti i uzorci od višestrukih simulacija, na primjer, s različitim početnim uvjetima. Napravimo SVD od $X = U\Sigma V^*$ i s U_r označimo POD bazu od $r \leq n$ elemenata. Reducirano stanje definiramo s $\hat{x} = U_r^* x$ te time dobivamo reducirani model

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = U_r^* \mathbf{f}(U_r \hat{x}). \quad (3.27)$$

Kada funkcija \mathbf{f} nema neku specifičnu strukturu, njezino računanje može biti jako skupo jer su domena i kodomena \mathbb{R}^{nd_s} , a n je najčešće jako velik jer predstavlja prostornu diskretizaciju neke parcijalne diferencijalne jednadžbe. Međutim, ako je (3.24) oblika

$$\frac{\partial s}{\partial t} = a(s) + h(s), \quad (3.28)$$

gdje je a linearna, a h kvadratična funkcija, i ako je

$$\frac{d}{dt} x = Ax + H(x \otimes x) \quad (3.29)$$

diskretizacija od (3.28), gdje je $A \in \mathbb{R}^{nd_s \times nd_s}$ i $H \in \mathbb{R}^{nd_s \times n^2 d_s^2}$, a \otimes označava Kroneckerov produkt po stupcima, tj. za vektor $b \in \mathbb{R}^l$,

$$b \otimes b = [b_1^2 \ b_1 b_2 \ \dots \ b_1 b_l \ b_2 b_1 \ b_2^2 \ \dots \ b_2 b_l \ \dots \ b_l^2]^T \in \mathbb{R}^{l^2},$$

a za matricu $B = [b_1 \ \dots \ b_m] \in \mathbb{R}^{l^2}$ imamo Khatri-Raoov produkt

$$B \odot B = [b_1 \otimes b_1 \ \dots \ b_m \otimes b_m] \in \mathbb{R}^{l^2 \times m},$$

onda (3.29) možemo prikazati u reduciranom obliku

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = \hat{A} \hat{x} + \hat{H}(\hat{x} \otimes \hat{x}), \quad (3.30)$$

gdje su $\hat{A} = U_r^* A U_r$ i $\hat{H} = U_r^* H (U_r \odot U_r)$ reducirani operatori. Međutim, u mnogim situacijama, operatori A i H nisu dostupni, stoga reducirani operatori moraju biti izračunati na druge načine.

Lift & Learn je metoda za učenje kvadratičnog reduciranog modela dinamičkog sustava opisanog nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama. Tražimo transformaciju u kojoj promatrana parcijalna diferencijalna jednačba ima kvadratičnu strukturu. Rezultat je kvadratični reducirani model za originalni sustav kojeg je moguće efikasno računati.

Definicija 3.6. Preslikavanje

$$\mathcal{T} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{d_w}, \quad d_w \geq d_s, \quad (3.31)$$

zovemo *preslikavanje dizanja* (eng. *lifting map*) jednačbe (3.24) ako je zadovoljeno sljedeće:

1. \mathcal{T} je diferencijalno u s s ograničenom derivacijom. Odnosno, ako je \mathcal{J} Jakobijan od \mathcal{T} u s , tada je

$$\sup_{s \in \mathcal{S}} \|\mathcal{J}(s)\| \leq M, \quad (3.32)$$

za neki $M > 0$.

2. Podignuta stanja $w(d, t) = \mathcal{T}(s(d, t))$ zadovoljavaju

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a(w) + h(w), \quad (3.33)$$

gdje su

$$a(w) = \begin{bmatrix} a_1(w) \\ \vdots \\ a_{d_w}(w) \end{bmatrix}, \quad h(w) = \begin{bmatrix} h_1(w) \\ \vdots \\ h_{d_w}(w) \end{bmatrix},$$

za neke linearne funkcije a_j i kvadratične h_j , $j = 1, \dots, d_w$.

Novo d_w -dimenzionalno stanje $w(d, t)$ zovemo *podignuto stanje* (eng. *lifted state*).

Prvi uvjet u gornjoj definiciji će biti važan kod ocjene greške. Mogli smo Definiciju 3.6 proširiti i na polinomne članove višeg reda, dodati konstantu i još dodati ulaze kao u prethodnom poglavlju, ali ćemo se u ovom radu držati forme (3.33). Sljedeća definicija će nam biti važna kod uvođenja vremenskih derivacija:

Definicija 3.7. Za dano preslikavanje dizanja \mathcal{T} , preslikavanje

$$\mathcal{T}^\dagger : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{S} \quad (3.34)$$

zovemo *inverzno preslikavanje dizanja* ako je diferencijabilno u w s ograničenom derivacijom na \mathcal{W} i ako vrijedi $\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}(s) = s$, za sve $s \in \mathcal{S}$.

Primjer 3.8. Za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -e^s,$$

definiramo pomoćnu varijablu $-e^s$ i pripadna preslikavanja

$$\mathcal{T} : s \mapsto \begin{bmatrix} s \\ -e^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = w, \quad \mathcal{T}^\dagger : w \mapsto w_1.$$

Tada je

$$\frac{\partial s}{\partial t} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -e^s \end{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -e^s \end{bmatrix} (-e^s) = \begin{bmatrix} w_2 \\ w_2^2 \end{bmatrix}.$$

Da bismo transformirali model u kvadratični, moramo znati jednadžbe originalnog modela. Međutim, dovoljno je imati uzorke samo za diskretizirani originalni model. Kada ih imamo, na njih primijenimo diskretno preslikavanje dizanja T koje je definirano primjenom preslikavanja \mathcal{T} na točke prostorne diskretizacije. Taj T možda i ne znamo, ali nagađamo neke funkcije koje bi se mogle pojaviti u podignutim koordinatama, ovisno o problemu. Time smo umjetno generirali nove uzorke potencijalno kvadratičnog modela na kojeg možemo primijeniti operatore učenja dinamike iz potpoglavlja 3.1 kako bismo dobili reducirane operatore.

Nakon što smo uveli potrebne definicije i pokazali jednostavni primjer, krenimo na metodu. Prvo sakupljamo podatke iz originalnog diskretiziranog modela (3.25), potom za svaki stupac u (3.26) primijenimo preslikavanje dizanja da dobijemo matricu

$$W = [w_1 \dots w_m] = [T(x_1) \dots T(x_m)] \in \mathbb{R}^{nd_w \times m}, \quad (3.35)$$

Napravimo SVD od $X = U\Sigma V^*$ s pripadnom POD bazom U_r da dobijemo reducirana stanja $\hat{X} = U_r^* X \in \mathbb{R}^{r \times m}$.

Kako bismo naučili operatore reduciranog podignutog modela, potrebni su nam i podaci vremenskih derivacija. Za svaki \hat{w}_k ,

$$w_{\text{proj},k} = U_r \hat{w}_k = U_r U_r^* w_k \in \mathbb{R}^{nd_w}$$

predstavlja projekciju podignutog stanja na potprostor razapet POD bazom. S T^\dagger označimo diskretnu verziju od \mathcal{T}^\dagger , izvrijednjenu u svakoj točki prostorne diskretizacije. Pretpostavljamo da je baza U_r dovoljno bogata tako da je T^\dagger definiran za svaki $w_{\text{proj},k}$. Pomoću T^\dagger dobivamo diskretno nepodignuto stanje

$$x_{\text{proj},k} = T^\dagger(w_{\text{proj},k}).$$

Iz (3.25) slijedi da je

$$\dot{x}_{\text{proj},k} = \mathbf{f}(T^\dagger(w_{\text{proj},k})). \quad (3.36)$$

Neka je $J(x) \in \mathbb{R}^{nd_w \times nd_s}$ Jakobijan od T u x . Korištenjem lančanog pravila, dobivamo

$$\dot{w}_{\text{proj},k} = J(x_{\text{proj},k}) \dot{x}_{\text{proj},k}. \quad (3.37)$$

Podaci vremenskih derivacija u reduciranom prostoru su dobiveni projiciranjem jednadžbe (3.37) natrag na POD bazu:

$$\hat{w}_k = U_r^* J(x_{\text{proj},k}) \dot{x}_{\text{proj},k} = U_r^* (J(T^\dagger(U_r U_r^* w_k)) \mathbf{f}(T^\dagger(U_r U_r^* w_k))). \quad (3.38)$$

Time smo dobili matricu

$$\hat{W} = [\hat{w}_1 \dots \hat{w}_m]. \quad (3.39)$$

Kada smo izračunali sve potrebne matrice, za dobivanje nepoznatih matrica u (3.30) koristimo operatore učenja dinamike opisanih u potpoglavlju 3.1. Napomenimo da smo operator H mogli definirati kao u 3.1.

Sljedeći teorem govori o ocjeni greške *Lift & Learn* metode. Detaljna analiza se može pronaći u [9].

Teorem 3.9. *Neka su σ_i singularne vrijednosti matrice uzoraka W . Tada je rezidual naučenih operatora koristeći *Lift & Learn* metodu ograničen:*

$$\min_{\hat{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \hat{H} \in \mathbb{R}^{r \times r^2}} \frac{1}{m} \left\| \hat{W}^T \hat{A}^T + (\hat{W} \odot \hat{W})^T \hat{H}^T - \hat{W}^T \right\|_F^2 \leq (C_0 n^{\frac{1}{2}-p} + (C_1 + C_2) \varepsilon)^2,$$

gdje je $\varepsilon^2 = \sum_{i=r+1}^{nd_w} \sigma_i^2$ te su $C_0, C_1, C_2 \geq 0$ konstante. Broj p je red diskretizacije (3.25) jednadžbe (1.6).

Dokaz. Pogledati [9]. □

Primjer 3.10. FitzHugh-Nagumov sustav se koristi za proučavanje oscilatornih dinamika koje se pojavljuju u modeliranju električnih impulsa u kardiološkom i neurološkom sustavu. Postao je jedan od osnovnih primjera za nelinearnu redukciju modela.

FitzHugh-Nagumove jednadžbe predstavljaju pojednostavljen neuronski model s dva stanja:

$$\begin{aligned}\gamma \frac{\partial s_1}{\partial t} &= \gamma^2 \frac{\partial^2 s_1}{\partial d^2} - s_1^3 + 1.1s_1^2 - 0.1s_1 + s_2 + 0.05, \\ \frac{\partial s_2}{\partial t} &= 0.5s_1 - 2s_2 + 0.05,\end{aligned}$$

gdje s_1 reprezentira napon, a s_2 oporavak napona (eng. *voltage recovery*). Uzmimo još da je parametar $\gamma = 0.015$. Prostorna domena je $[0, 1]$, a vremenska $[0, 4]$. Početni uvjeti su nula za oba stanja, a Neumannovi rubni su

$$\left. \frac{\partial s_1}{\partial d} \right|_{d=0} = g(t), \quad \left. \frac{\partial s_1}{\partial d} \right|_{d=1} = 0,$$

gdje je g ulaz koji predstavlja stimulans neurona.

Iako bismo operatore učenja mogli primijeniti na sustave s polinomnim članom trećeg reda, želimo sustav svesti na kvadratičnu formu zbog efikasnosti računanja. Prisjetimo se da složenost računanja potencije vektora stanja raste eksponencijalno s redom polinoma. U tu svrhu, definiramo preslikavanje

$$\mathcal{T} : \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Podignuti sustav je dan jednadžbama

$$\begin{aligned}\gamma \frac{\partial w_1}{\partial t} &= \gamma^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial d^2} - w_1 w_3 + 1.1w_1^2 - 0.1w_1 + w_2 + 0.05, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} &= 0.5w_1 - 2w_2 + 0.05, \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} &= 2w_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ &= \frac{2}{\gamma} \left(\gamma^2 w_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial d^2} - w_3^2 + 1.1w_1 w_3 - 0.1w_3 + w_1 w_2 + 0.05w_1 \right).\end{aligned}$$

Početni uvjeti za sva tri podignuta stanja moraju biti nula kako bi bili konzistentni s početnim uvjetima originalnih stanja. Štoviše, za rubne uvjete vrijedi sljedeće:

$$\left. \frac{\partial w_3}{\partial d} \right|_{d=0} = 2w_1 g(t), \quad \left. \frac{\partial w_3}{\partial d} \right|_{d=1} = 0.$$

Time smo originalni sustav sveli na kvadratični na kojeg možemo primijeniti metodu učenja operatora dinamike. Uz linearni i kvadratični član, pojavljuje se još i konstanta, ulaz i bilinearni član:

$$\frac{d\hat{w}}{dt} = \hat{A}\hat{w} + \hat{H}(\hat{w} \otimes \hat{w}) + \hat{N}\hat{w}g(t) + \hat{B}g(t) + \hat{C},$$

gdje su $\hat{A}, \hat{N} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\hat{H} \in \mathbb{R}^{r \times r^2}$ i $\hat{B}, \hat{C} \in \mathbb{R}^r$.

Dodatak A

Uvod u teoriju upravljanja

U ovom dodatku dajemo kratak pregled teorije upravljanja koja se često javlja u primjenama DMD-a i operatora učenja dinamike [2].

Teorija upravljanja proučava linearne, vremenski invarijantne (LTI) dinamičke sustave koji predstavljaju neki fizikalni sustav koji se mijenja kroz vrijeme. Takvi se sustavi, označimo ih s G , sastoje od ulaza u , stanja x te izlaza y . Ukratko, sustav G , opisan sustavom linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi, transformira ulazni signal u u izlazni y .

Jedan od osnovnih ciljeva teorije upravljanja je odrediti ulaz u u svrhu dobivanja željenog izlaza y . Obično takav postupak zahtjeva promjenu dinamike sustava dodavanjem tzv. *upravljača (kontrolera)* koji manipulira ulazom u .

LTI sustav u vremenskoj domeni je oblika

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.1})$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (\text{A.2})$$

gdje je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrica stanja, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matrica ulaza, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ matrica izlaza te $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ matrica ulaza-izlaza. Za vrijeme $t \in [0, +\infty)$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ je stanje, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ulaz te $y(t) \in \mathbb{R}^q$ izlaz sustava. Početni uvjet $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je zadan.

Autonomni sustavi su oni sustavi kod kojih nema ulaza, odnosno $u(t) = 0$:

$$\dot{x} = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (\text{A.3})$$

Propozicija A.1. Rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (A.3) je

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

Definicija A.2. Sustav (A.3) je *interno (unutarnje) stabilan* ako je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

za svaki $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Propozicija A.3. *Sustav (A.3) je interno stabilan ako i samo ako je $Re\lambda < 0$ za svaki λ iz spektra od A .*

Definicija A.4. Matrice sa svojstvom $Re\lambda < 0$ za svaki λ iz spektra od A se zovu *Hurwitzove* ili *stabilne*.

Propozicija A.5. *Rješenje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (A.1) je*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau) d\tau.$$

Napomena A.6. Rješenje sustava (A.2) je

$$y(t) = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

Time opisujemo kako sustav preslikava ulaz u u izlaz y .

Česti zadatak teorije upravljanja je dovesti sustav, ako to već nije, u stabilno stanje. Na primjer, kod aviona želimo održavati smjer leta pod utjecajem vjetrova. Prije uvođenja pojma upravljača (kontrolera) treba nam nekoliko drugih pojmova.

Definicija A.7. Za sustav (A, B) (A.1) definiramo *matricu upravljivosti*

$$C(A, B) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B].$$

Kažemo da je (A, B) *upravljiv* ako je $\text{rank}(C(A, B)) = n$.

Napomena A.8. Svojstvo "biti upravljiv" je generičko, tj. skup svih sustava (A, B) koji su upravljivi je gust u skupu svih uređenih parova $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p}$.

Za dano preslikavanje $u \mapsto y$ postoji puno tzv. *realizacija sustava*, tj. izbora matrica A, B, C, D koje zadovoljavaju (A.1) i (A.2). Jednu klasu realizacija možemo dobiti transformacijom koordinata regularnom matricom T . Neka je $\tilde{x}(t) = Tx(t)$, $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$ te $\tilde{C} = CT^{-1}$, tada dobivamo novu realizaciju sustava

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), & \tilde{x}(0) &= \tilde{x}_0, \\ y(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + Du(t), \end{aligned}$$

Propozicija A.9. *Sustav (A, B) je upravljiv ako i samo ako je sustav (TAT^{-1}, TB) , za regularnu matricu T , upravljiv.*

Prethodna propozicija slijedi iz činjenice da je $\text{rank}(C(TAT^{-1}, TB)) = \text{rank}(C(A, B))$ zbog toga što je T regularna. Želimo naći realizaciju sustava iz koje je odmah očito je li on upravljiv. Shodno tome, imamo sljedeći teorem:

Teorem A.10. *Neka je sustav (A, B) takav da je $\text{rank}(C(A, B)) = r$. Tada postoji transformacija koordinata T takva da je*

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{r \times p}.$$

Nadalje, par $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ je upravljiv. Kažemo da je par (\tilde{A}, \tilde{B}) u formi upravljivosti.

Sada možemo razdvojiti upravljiva i neupravljiva stanja:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1(t) + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2(t) + \tilde{B}_1u(t), \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2(t). \quad (\text{A.5})$$

Jednadžba (A.5) uopće ne ovisi o ulazu te predstavlja neupravljivi dio sustava. Ako \tilde{A}_{22} nije Hurwitzova, ne možemo stabilizirati sustav jer $\tilde{x}_2(t) \not\rightarrow 0$, za $t \rightarrow \infty$, bez obzira na ulaz u . To motivira sljedeću definiciju:

Definicija A.11. *Neka je dan sustav (A, B) . Ako je \tilde{A}_{22} iz forme upravljivosti Hurwitzova, kažemo da je (A, B) stabilizabilan.*

Pokazat ćemo da tada možemo pronaći u takav da $x(t) \rightarrow 0$, za $t \rightarrow \infty$. Fokusirajmo se trenutno na sustav (A.1), odnosno stavljamo $C = I$ te $D = 0$. Stabilizirat ćemo sustav pomoću povratne sprege (eng. *state feedback*)

$$u(t) = Fx(t),$$

gdje je $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Tada dobivamo sustav

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

koji je interno stabilan ako i samo ako je matrica $A + BF$ Hurwitzova. Ukratko, za zadane A i B trebamo naći F takav da je $A + BF$ Hurwitzova. Odgovor nam daje sljedeći teorem:

Teorem A.12. *Ako je (A, B) stabilizabilan, onda postoji F takav da je $A + BF$ Hurwitzova.*

Ukoliko sustav nije stabilizabilan, onda možemo upravljati samo s upravljivim stanjima ako uopće postoje. Odnosno, samo upravljiva stanja možemo stabilizirati.

Umjesto kontinuiranih sustava, gdje stanja, ulazi i izlazi ovise o vremenu, u praksi se često javljaju sustavi kojima je vrijeme diskretizirano:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad x_0 \text{ zadan}, \quad (\text{A.6})$$

$$y_k = Cx_k + Du_k. \quad (\text{A.7})$$

Teorem A.13. *Rješenje sustava (A.6) je*

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u_i,$$
$$y_k = C A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-1-i} B u_i + D u_k.$$

Definicija A.14. Sustav (A.6) je *diskretno stabilan* ako sva stanja x_k konvergiraju u nulu za svaki početni uvjet x_0 , uz ulaz $u_k = 0$, za svaki $k = 1, 2, \dots$

Propozicija A.15. *Sustav (A.6) je diskretno stabilan ako i samo ako je $|\lambda| < 1$, za svaki λ iz spektra od A .*

Literatura

- [1] M. Budišić, R. Mohr i I. Mezić, *Applied Koopmanism*, Chaos Interdiscip. J. Nonlinear Sci. **22** (2012), br. 4.
- [2] Z. Bujanović, *Uvod u teoriju upravljanja, bilješke s predavanja*, PMF - Matematički odsjek (2021).
- [3] R. Courant, K. Friedrichs i H. Lewy, *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBM Journal of Research and Development **11** (1967), br. 2, 215–234.
- [4] S. Kutluay, A. R. Bahadir i A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods*, Journal of Computational and Applied Mathematics **103** (1999), 251–261.
- [5] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton i J. L. Proctor, *Dynamic Mode Decomposition*, SIAM, 2016.
- [6] I. Pažanin, *Mehanika fluida, bilješke s predavanja*, PMF - Matematički odsjek (2023).
- [7] B. Peherstorfer i K. Willcox, *Dynamic data-driven reduced-order models*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **291** (2015), br. 0, 21–41.
- [8] ———, *Data-driven operator inference for nonintrusive projection-based model reduction*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **306** (2016), 196–215.
- [9] E. Qian, B. Kramer, B. Peherstorfer i K. Willcox, *Lift & Learn: Physics-informed machine learning for large-scale nonlinear dynamical systems*, Physica D: Nonlinear Phenomena **406** (2020).
- [10] P. J. Schmid, *Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data*, Journal of Fluid Mechanics **656** (2010), 5–28.
- [11] V. K. Srivastava i U. Bhardwaj, *Numerical Solutions to Burgers' Equations*, (2011), <https://www.researchgate.net/publication/236005898>.

- [12] J. H. Tu et al, *On dynamic mode decomposition: Theory and applications*, Journal of Computational Dynamics **1** (2014), br. 2, 391–421.
- [13] M. O. Williams, I. G. Kevrekidis i C. W. Rowley, *A Data-Driven Approximation of the Koopman Operator: Extending Dynamic Mode Decomposition*, Journal of Nonlinear Science (2015), 1307–1346.

Sažetak

U ovom radu su prezentirane dvije metode za modeliranje dinamičkih sustava vođenih podacima. Prva je dekompozicija na dinamičke modove (DMD) koja, za zadane podatke, nastoji pronaći najbolji linearni operator u smislu najmanjih kvadrata. Uspostavlja se veza s Koopmanovim operatorom. Između ostalih, pokazuje se primjena DMD-a u teoriji upravljanja. Druga metoda je bazirana na učenju operatora dinamike koji daju nelinearni polinomni aproksimativni model također metodom najmanjih kvadrata. Metode su uspoređene na dva numerička eksperimenta. Rad zaključujemo uvođenjem metode *Lift & Learn* koja daje alternativu DMD-u za rukovođenje nelinearnim dinamičkim sustavima.

Summary

This thesis presents two methods for modelling data-driven dynamical systems. First is dynamic mode decomposition (DMD) that creates a linear operator which tries to fit data in the least square sense. Connection with Koopman operator has been established. Among others, applications in control theory have been shown. The second method is based on operator inference that produces a nonlinear polynomial approximate model, also in the least square sense. These methods are compared on two numerical experiments. The thesis is concluded by introducing the *Lift & Learn* method which gives an alternative to the DMD for handling nonlinear dynamical systems.

Životopis

Rođen sam 22. listopada 1999. u Puli, gdje sam završio Osnovnu školu Tone Peruška nakon koje upisujem Gimnaziju Pula. Za vrijeme srednje škole sam bio na brojnim matematičkim natjecanjima te sam nakon položene državne mature 2018. upisao preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija 2021., upisujem diplomski studij Primijenjena matematika na istom fakultetu. Tijekom studija sam pohađao stručnu praksu Ericsson Nikola Tesla Summer Camp 2022. U budućnosti se planiram baviti numeričkom matematikom i znanstvenim računanjem.