Miquelov teorem

Novosel, Tena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tena Novosel

MIQUELOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Marija Galić

Zagreb, veljača, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojoj mentorici, doc. dr. sc. Mariji Galić na uloženom vremenu, strpljenju, razumijevanju i stručnoj pomoći prilikom izrade ovog diplomskog rada. Najveće hvala mami, tati, sestri i prijateljima na neizmjernoj podršci i ljubavi koju su mi pružili tijekom studiranja. Posebno se zahvaljujem divnim kolegicama, a prije svega i prijateljicama Zrinki, Dragani i Hani na uzajamnoj pomoći, svakoj riječi podrške i osmijehu.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Trokut **2**
1.1 Osnovni pojmovi 2

2 Miquelov teorem **8**
2.1 Miquelov teorem 8
2.2 Dokaz Miquelovog teorema 10

3 Miquelova točka i Miquelov trokut **13**
3.1 Miquelova točka i kutovi 13
3.2 Svojstva Miquelovog trokuta 19
3.3 Generalizacija Neubergovog teorema 22

4 Varijacije i generalizacije Miquelovog teorema **25**
4.1 Simsonov teorem 25
4.2 Miquel–Steinerov teorem o potpunom četverostranu 28
4.3 Generalizacije Miquelovog teorema na više od tri kružnice 31

Bibliografija **35**

Uvod

Geometrija je grana matematike koja proučava prostorne oblike, njihov položaj i svojstva te međusobne odnose. Kroz povijest matematičari su istraživali različite aspekte geometrije i razvijali teoreme i metode koje se primjenjuju u raznim područjima znanosti i tehnologije. Jedan od zanimljivih teorema u geometriji je Miquelov teorem.

Miquelov teorem nazvan je prema francuskom matematičaru Auguste Miquelu (1816.–1851.) koji ga je formulirao u 19. stoljeću. Teorem se odnosi na geometrijske konstrukcije koje uključuju tri kružnice koje se sijeku u tri točke. Glavna ideja Miquelovog teorema je da, iako se veličina i položaj kružnica mijenjaju, odnos između njihovog središnjeg kuta i središta kružnica ostaje isti.

U prvom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove potrebne za ostatk rada te iskazati i dokazati tvrdnje o njihovim ključnim svojstvima.

Drugo poglavlje započet ćemo iskazom Miquelovog teorema i reći što su to Miquelova točka, Miquelove kružnice te Miquelov trokut. Nakon toga, dokazat ćemo Miquelov teorem.

U trećem poglavlju ćemo razraditi neka zanimljiva svojstva vezana uz Miquelovu točku i Miquelov trokut kao što su sukladnost kutova, sličnost trokuta i položaj Miquelove točke u odnosu na Miquelov trokut. Navest ćemo i pojam nožišnog trokuta te Neubergov teorem, a zatim i dokazati generalizaciju Nebuergovog teorema.

U posljednjem poglavlju iskazat ćemo i dokazati Simsonov teorem i definirati Simsonov pravac. Iskazat ćemo Miquel–Steinerov teorem o potpunom četverostranu, a zatim ćemo proučiti generalizacije Miquelovog teorema na više od tri kružnice.

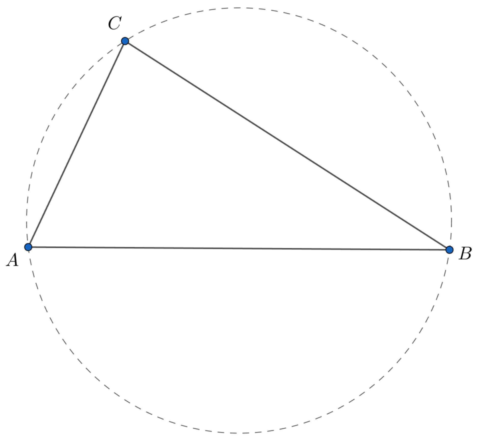
Poglavlje 1

Trokut

1.1 Osnovni pojmovi

U ovom ćemo se poglavlju prisjetiti nekih pojmova iz geometrije koje ćemo uvelike koristiti u ostatku ovog rada. Započnimo s definicijom opisane kružnice trokuta te simetrale dužine.

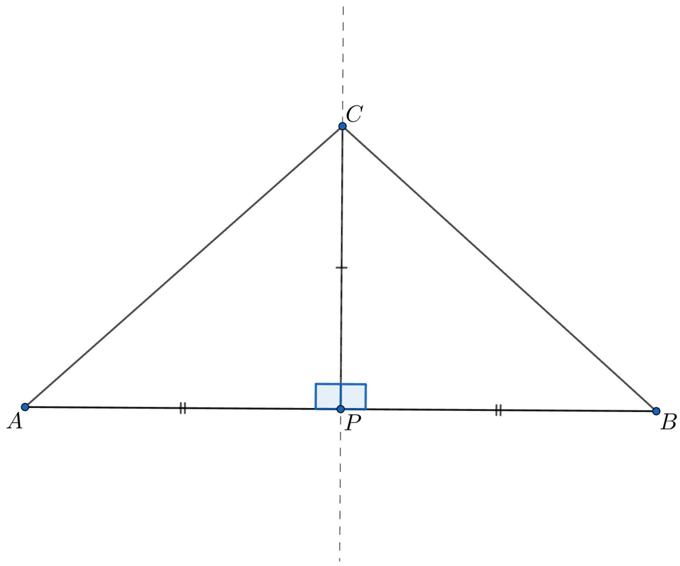
Definicija 1.1.1. ***Opisana kružnica*** *trokuta je kružnica koja prolazi vrhovima trokuta.*



Slika 1.1: Opisana kružnica trokutu ABC

Definicija 1.1.2. ***Simetrala dužine*** *je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.*

Propozicija 1.1.3. *Točka C se nalazi na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AC| = |BC|$.*



Slika 1.2: Sukladnost trokuta prema SKS poučku

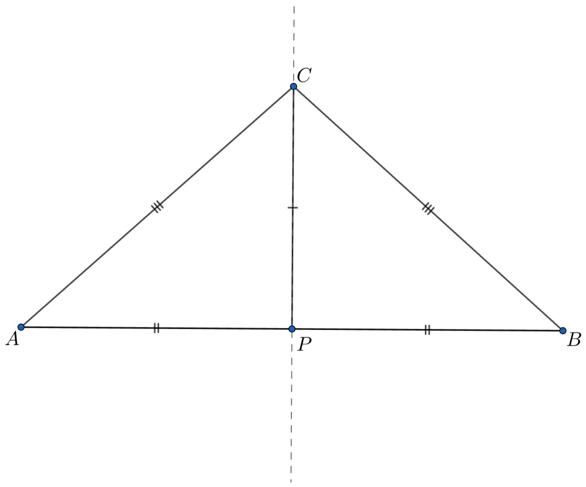
Dokaz. Dokažimo prvi smjer. Označimo s C točku koja pripada simetrali dužine $\overline{AB}$ te s P polovište dužine $\overline{AB}$ (Slika 1.2). Znamo da je $|AP| = |PB|$, $\overline{PC}$ je zajednička stranica trokuta APC i CPB te, budući da je simetrala dužine pravac okomit na tu dužinu, vrijedi $\angle APC = \angle CPB = 90°$.

Prema SKS poučku o sukladnosti trokuta, trokuti APC i CPB su sukladni, iz čega slijedi da su i stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ sukladne, što smo i htjeli dokazati.

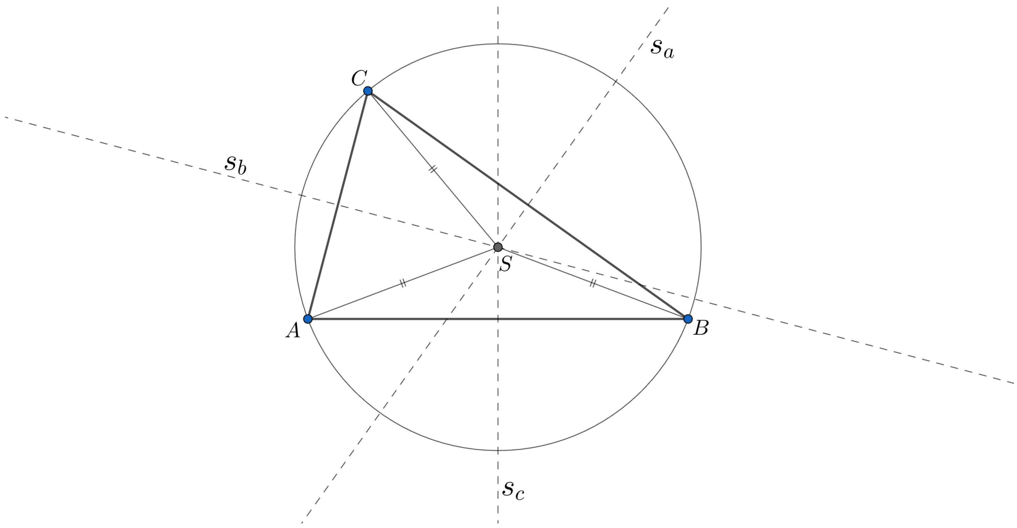
Dokažimo i drugi smjer. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$ te C točka sa svojstvom $|AC| = |BC|$. Promotrimo trokute APC i CPB (Slika 1.3). Zajednička stranica oba trokuta je $\overline{PC}$ te vrijedi $|AC| = |BC|$ i $|AP| = |PB|$. Stoga su trokuti APC i CPB sukladni prema SSS poučku o sukladnosti trokuta odakle slijedi $\angle APC = \angle CPB$. Navedeni kutovi su sukuti pa vrijedi $\angle APC = \angle CPB = 90°$.

Konačno, pravci PC i AB su okomiti i PC prolazi točkom P, pa je PC simetrala dužine $\overline{AB}$, iz čega zaključujemo da točka C pripada simetrali dužine $\overline{AB}$. □

Teorem 1.1.4. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki i ta je točka središte tom trokutu opisane kružnice.*



Slika 1.3: Sukladnost trokuta prema SSS poučku



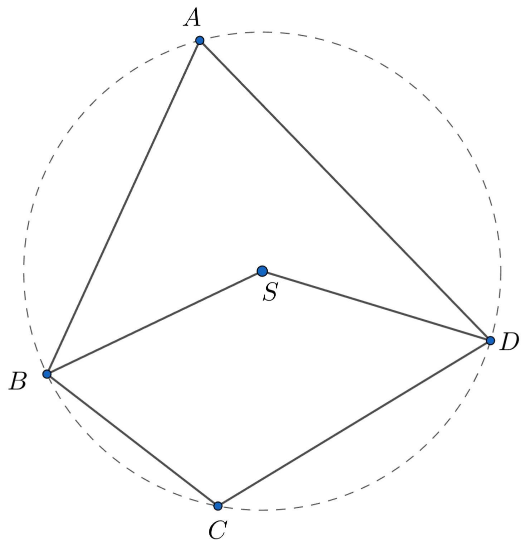
Slika 1.4: Sjecište simetrala stranica trokuta

Dokaz. Neka je dan trokut ABC te neka su s_a i s_b simetrale stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ koje se sijeku u točki S (Slika 1.4). Prema Propoziciji 1.1.3 slijedi $|SB| = |SC|$ i $|SC| = |SA|$. Stoga vrijedi $|SB| = |SA|$, pa se točka S nalazi i na simetrali s_c stranice $\overline{AB}$. Zaključujemo da je točka S jednako udaljena od točaka A, B, C pa je S središte tom trokutu opisane kružnice.

Obrnuto, ako kružnica prolazi svim vrhovima trokuta, onda je njezino središte S jednako udaljeno od vrhova pa S pripada simetralama stranica. □

Definicija 1.1.5. ***Tetivni četverokut*** *je četverokut kojemu se može opisati kružnica.*

Teorem 1.1.6. *Četverokut je tetivni ako i samo ako mu je zbroj nasuprotnih (unutarnjih) kutova jednak* $180°$.



Slika 1.5: Tetivni četverokut $ABCD$

Dokaz. Kako bismo dokazali dani teorem, koristimo se poučkom o obodnom i središnjem kutu. Za nasuprotne kutove $\angle DAB$ i $\angle BCD$ u tetivnom četverokutu $ABCD$ (Slika 1.5) vrijedi:

$$\angle DAB = \frac{1}{2}\angle DSB,$$
$$\angle BCD = \frac{1}{2}\angle DSB,$$

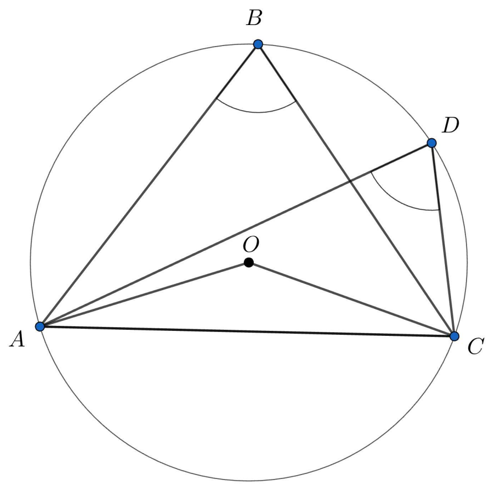
a zatim zbrajanjem slijedi

$$\frac{1}{2}\Big(\angle DSB + \angle BSD\Big) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Analogno se dokazuje da je $\angle CDA + \angle ABC = 180°$. □

Definicija 1.1.7. ***Konciklične točke*** *su točke koje leže na istoj kružnici.*

Lema 1.1.8. *Točke* A, B, C *i* D *su konciklične ako i samo ako je* $\angle ABC = \angle ADC$.



Slika 1.6: Konciklične točke A, B, C, D

Dokaz. Pokažimo prvo jedan smjer. Dane su konciklične točke A, B, C, D te O središte kružnice kao na Slici 1.6. Želimo dokazati da vrijedi $\angle ABC = \angle ADC$. Znamo da je središnji kut luka kružnice dvostruko veći od pripadnog obodnog kuta, odakle slijedi

$$\angle CBA = \frac{1}{2}\angle COA \tag{1.1}$$

i

$$\angle CDA = \frac{1}{2}\angle COA. \tag{1.2}$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi

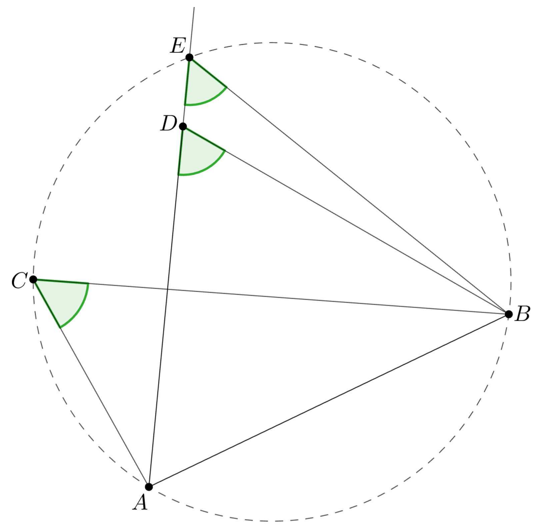
$$\angle CBA = \frac{1}{2}\angle COA = \angle CDA, \tag{1.3}$$

odnosno $\angle CBA = \angle CDA$, što smo htjeli i dokazati.

Pokažimo sada i drugi smjer. Neka je zadana kružnica koja prolazi točkama A, B i C, a koja ne prolazi točkom D. Nadalje, pretpostavimo da vrijedi $\angle BCA = \angle BDA$. Tada kružnica siječe pravac AD u nekoj drugoj točki E (Slika 1.7). Iz činjenice da je $\angle BCA =$

$\angle BEA$ (obodni kutovi nad istim kružnim lukom AB) te iz pretpostavke $\angle BCA = \angle BDA$ slijedi jednakost $\angle BDA = \angle BEA$.

Jednakost nam kaže da je u trokutu BED vanjski kut jednak unutarnjem nesusjednom kutu, što nije moguće budući da pravci DB i DE nisu paralelni. Dakle, kružnica prolazi kroz točku D, stoga su sve četiri točke A, B, C i D konciklične. □



Slika 1.7: Drugi smjer dokaza leme o kocikličnosti točaka

Poglavlje 2

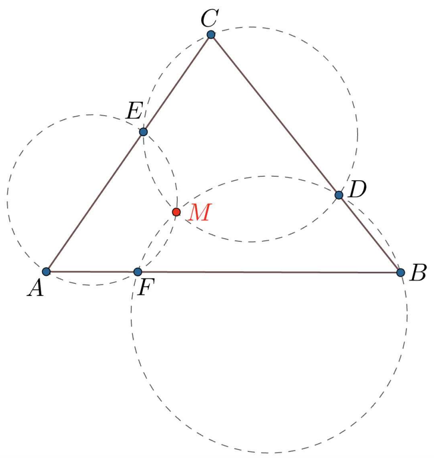
Miquelov teorem

U ovom ćemo poglavlju iskazati i dokazati Miquelov teorem.

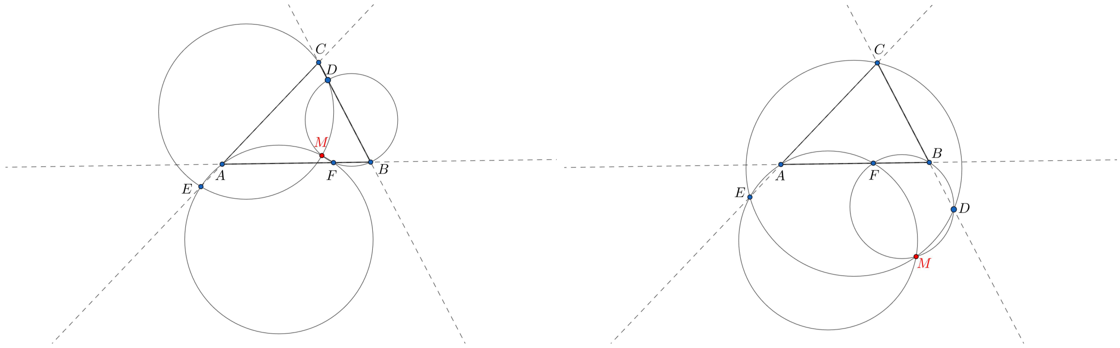
2.1 Miquelov teorem

Teorem 2.1.1 (Miquelov teorem)**.** *Neka je dan trokut ABC i neka su D, E i F bilo koje točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ ili njihovim produžetcima, redom. Tada se kružnice opisane trokutima AFE, BDF i CED sijeku u jednoj točki.*

Odabrane točke se mogu nalaziti na dužinama $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$ (Slika 2.1) ili bilo gdje na pravcima BC, CA i AB (Slika 2.2).

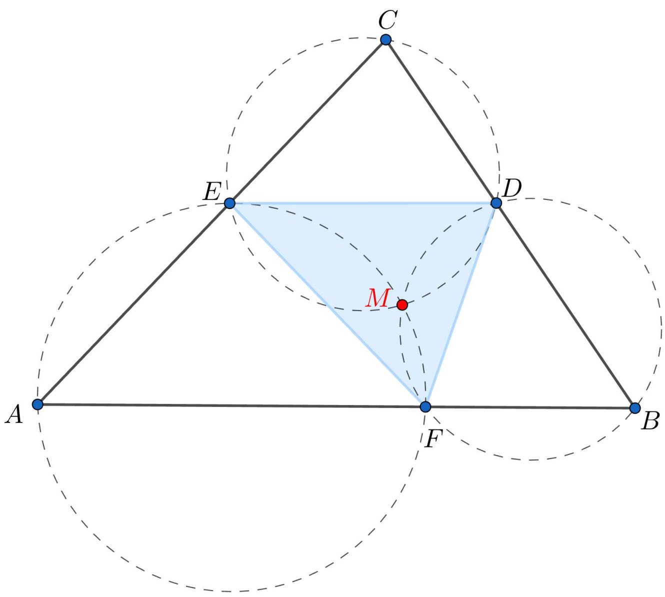


Slika 2.1: Točke se nalaze na stranicama trokuta



Slika 2.2: Točke se nalaze na produžetcima stranica trokuta

Definicija 2.1.2. *Točka u kojoj se sijeku kružnice opisane trokutima AFE, BDF i CED zove se* ***Miquelova točka*** *trokuta ABC. Trokut određen točkama D, E i F naziva se* ***Miquelov trokut*** *trokuta ABC. Kružnice opisane trokutima AFE, BDF i CED zovemo* ***Miquelove kružnice*** *trokuta ABC.*

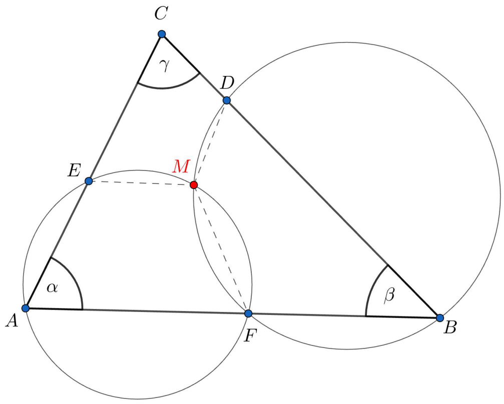


Slika 2.3: Miquelova točka, Miquelov trokut i Miquelove kružnice

2.2 Dokaz Miquelovog teorema

Dokaz Miquelovog teorema podijelit ćemo na dva slučaja u ovisnosti o položaju točke M.

Dokaz. 1. slučaj – Točka M nalazi se unutar trokuta ABC.



Slika 2.4: Točka M nalazi se unutar trokuta

Neka je točka M unutar $\triangle ABC$ (Slika 2.4). Označimo s D, E, F točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, redom te $\angle EAF = \alpha$, $\angle FBD = \beta$, $\angle DCE = \gamma$. Neka se dvije kružnice EAF i FBD sijeku u točki M. Moramo pokazati da i kružnica DCE također prolazi točkom M. Pogledajmo tetivni četverokut $BDMF$. Za nasuprotne kutove vrijedi

$$\angle EAF + \angle FME = 180^\circ \implies \angle FME = 180^\circ - \alpha. \tag{2.1}$$

Također, u tetivnom četverokutu $FBDM$ vrijedi

$$\angle FBD + \angle DMF = 180^\circ \implies \angle FMD = 180^\circ - \beta. \tag{2.2}$$

Zbrajanjem (2.1) i (2.2) slijedi

$$\angle FME + \angle FMD = 360^\circ - (\alpha + \beta).$$

Znamo da vrijedi $\angle FME + \angle DMF + \angle EMD = 360^\circ$ pa imamo jednakost

$$360^\circ - (\alpha + \beta) + \angle EMD = 360^\circ \implies \angle EMD = \alpha + \beta.$$

Zbroj unutarnjih kutova trokuta jednak je 180°, odnosno vrijedi

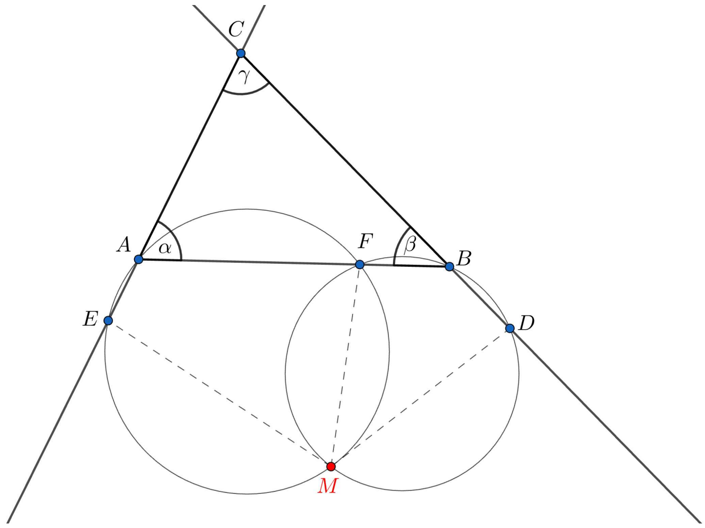
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$\angle EMD = 180^\circ - \gamma$$

iz čega direktno slijedi da je četverokut $DCEM$ tetivni te točka M leži na kružnici određenoj točkama D, C, E.

2. slučaj – Točka M nalazi se izvan trokuta ABC.



Slika 2.5: Točka M nalazi se izvan trokuta

Neka je točka M izvan trokuta ABC (Slika 2.5). Označimo s D, E, F točke na pravcima BC, CA, AB redom te $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Neka se dvije kružnice FAE i DBF sijeku u točki M. Moramo pokazati da i kružnica DCE također prolazi točkom M.

Pogledajmo tetivni četverokut $AEMF$. Za nasuprotne kutove vrijedi

$$\angle FAE + \angle EMF = 180^\circ \implies \angle EMF = 180^\circ - \angle FAE.$$

Budući da su $\angle FAE$ i $\angle CAF$ sukuti, vrijedi

$$\angle FAE = 180^\circ - \angle CAF = 180^\circ - \alpha.$$

Također, u tetivnom četverokutu $DBFM$ imamo

$$\angle DBF + \angle FMD = 180^\circ \implies \angle FMD = 180^\circ - \angle DBF.$$

Slično, kutovi $\angle DBF$ i $\angle FBC$ su sukuti, pa slijedi

$$\angle DBF = 180^\circ - \angle FBC = 180^\circ - \beta.$$

Zbrajanjem $\angle EMF$ i $\angle FMD$, te korištenjem tvrdnje da je zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu jednaka 180°, dobivamo

$$\begin{aligned}\angle EMF + \angle FMD &= 180^\circ - \angle FAE + 180^\circ - \angle DBF \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) \\ &= \alpha + \beta \\ &= 180^\circ - \gamma.\end{aligned}$$

Konačno, vrijedi jednakost

$$\angle EMF + \angle FMD = 180^\circ - \gamma$$

iz čega slijedi da je četverokut $DCEM$ tetivni, odnosno vrhovi četverokuta $DCEM$ su konciklične točke te točka M leži na sve tri Miquelove kružnice.

$\square$

Poglavlje 3

Miquelova točka i Miquelov trokut

Miquelov trokut posjeduje značajna svojstva koja proizlaze iz geometrijskih relacija unutar njega. Upoznajmo se s nekim svojstvima.

3.1 Miquelova točka i kutovi

Pogledajmo najprije u kakvom su odnosu Miquelova točka i Miquelov trokut.

Teorem 3.1.1. *Dan je trokut ABC i Miquelova točka M trokuta ABC. Tada vrijedi:*

(i) Ako se Miquelova točka M nalazi unutar trokuta ABC, tada se nalazi i unutar Miquelovog trokuta DEF.

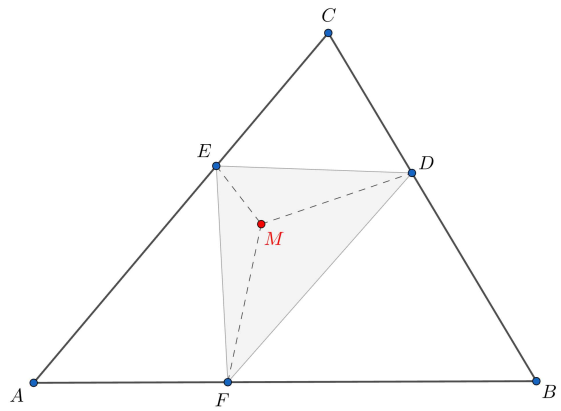
(ii) Ako se Miquelova točka M nalazi izvan trokuta ABC, tada se nalazi i izvan Miquelovog trokuta DEF.

Dokaz. Neka je dan trokut ABC, pripadni Miquelov trokut $\triangle DEF$ i pripadna Miquelova točka M trokuta ABC.

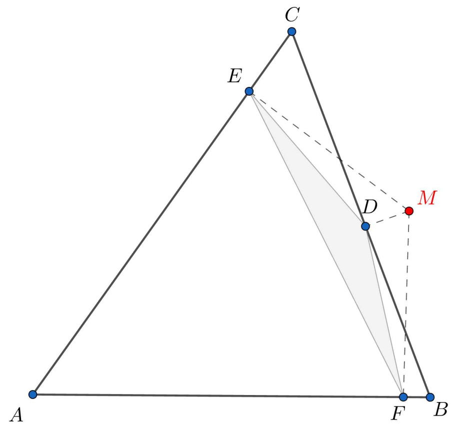
(i) Točka M se nalazi unutar trokuta ABC (Slika 3.1). Uočimo da je

$$\angle DMF + \angle EMD + \angle FME = 360°.$$

Jednakost vrijedi jer su kutovi s lijeve strane jednakosti suplementarni unutarnjim kutovima trokuta ABC, odnosno kutovima $\angle FBD$, $\angle DCE$ i $\angle EAF$, redom ($FBDM$ je tetivni četverokut pa vrijedi $\angle DMF = 180° - \angle FBD$. Analogno za $\angle MFE$ i $\angle EMD$). Stoga se Miquelova točka M nalazi i unutar trokuta DEF.



Slika 3.1: Miquelova točka M se nalazi unutar trokuta ABC



Slika 3.2: Miquelova točka M se nalazi izvan trokuta ABC

(ii) Ako se točka M nalazi izvan trokuta ABC (Slika 3.2), onda želimo dokazati da vrijedi

$$\angle FME + \angle FMD + \angle DME < 360^\circ.$$

Neka su veličine kutova $\angle FMD$ i $\angle DME$ jednake veličinama unutarnjih kutova $\angle CAB$ i $\angle ABC$, dok je treći kut $\angle FME$ suplementaran trećem unutarnjem kutu trokuta, odnosno vrijedi $\angle FME = 180^\circ - \angle ACB$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\angle FME + \angle FMD + \angle DME &= (180^\circ - \angle BCA) + \angle CAB + \angle ABC \\
&= 180^\circ - \angle BCA + \angle BCA - \angle BCA + \angle CAB + \angle ABC \\
&= 180^\circ - 2\angle BCA + (\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA) \\
&= 180^\circ - 2\angle BCA + 180^\circ \\
&= 360^\circ - 2\angle BCA \\
&< 360^\circ.
\end{aligned}$$

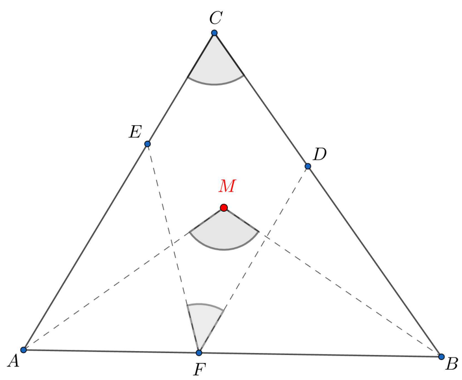
Konačno, točka M se nalazi izvan $\triangle DEF$.

□

Idući nam teorem govori o vezi između kutova polaznog trokuta, pripadnog Miquelovog trokuta i Miquelove točke.

Teorem 3.1.2. *Dan je trokut ABC i pripadajući Miquelov trokut DEF te Miquelova točka M. Vrijedi*

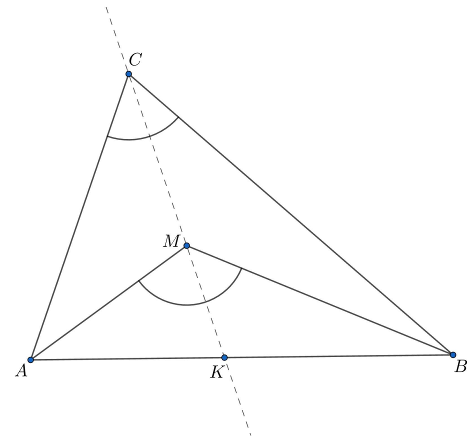
$$\angle BMA = \angle EFD + \angle BCA.$$



Slika 3.3: Veza između kutova

Dokaz. Neka pravac CM dijeli kut $\angle BMA$ na dva dijela, $\angle KMA$ i $\angle BMK$ (Slika 3.4) . Iz tvrdnje da je mjera vanjskog kuta trokuta jednaka zbroju mjera dvaju unutarnjih kutova koji s tim kutom nemaju zajednički vrh, vrijede sljedeće jednakosti

$$\angle KMA = \angle CAM + \angle MCA,$$

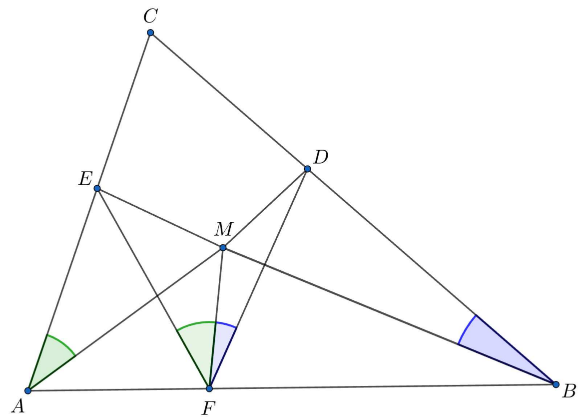


Slika 3.4: Pravac CM dijeli kut $\angle BMA$ na dva jednaka dijela

$$\angle BMK = \angle MBC + \angle BCM.$$

Sada slijedi

$$\angle BMA = \angle BMK + \angle KMA = \angle MBC + \angle BCM + \angle CAM + \angle MCA = \angle CAM + \angle BCA + \angle MBC.$$



Slika 3.5: Jednaki kutovi u tetivnim četverokutima

Tetivni četverokuti $AFME$ i $FBDM$ (Slika 3.5) daju jednakost kutova $\angle EAM = \angle EFM$ te $\angle MFD = \angle MBD$, iz čega slijedi

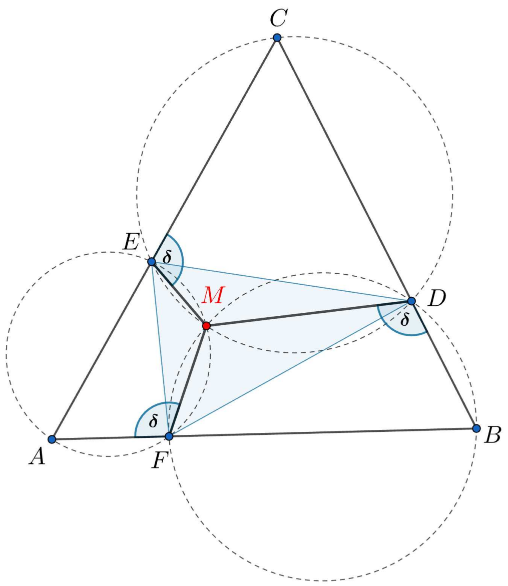
$$\angle EFD = \angle EFM + \angle MFD,$$

te konačno

$$\angle BMA = \angle BCA + (\angle CAM + \angle MBC) = \angle BCA + \angle EFD,$$

što smo željeli i dokazati. □

Teorem 3.1.3. *Dužine koje spajaju Miquelovu točku s vrhovima Miquelovog trokuta zatvaraju sukladne kutove sa stranicama polaznog trokuta.*



Slika 3.6: Sukladni kutovi sa stranicama trokuta

Dokaz. Za dani trokut ABC, pripadni Miquelov trokut DEF i Miquelovu točka M kao na Slici 3.6, želimo dokazati da vrijedi

$$\angle CEM = \angle AFM = \angle BDM = \delta$$

te

$$\angle MDC = \angle MEA = \angle MFB = 180^\circ - \delta.$$

Znamo da je četverokut $FBDM$ tetivni iz čega slijedi da su kutovi $\angle MFB$ i $\angle BDM$ suplementarni. Analogno vrijedi i za kutove $\angle FBD$ i $\angle DMF$ (Slika 3.6). Dakle, vrijedi

$$\angle BDM = \angle AFM.$$

Analogno dokazujemo i da vrijedi $\angle AFM = \angle CEM$, te konačno

$$\angle BDM = \angle MFA = \angle CEM = \delta.$$

Budući da je kut BDM suplementaran kutu MDC, slijedi

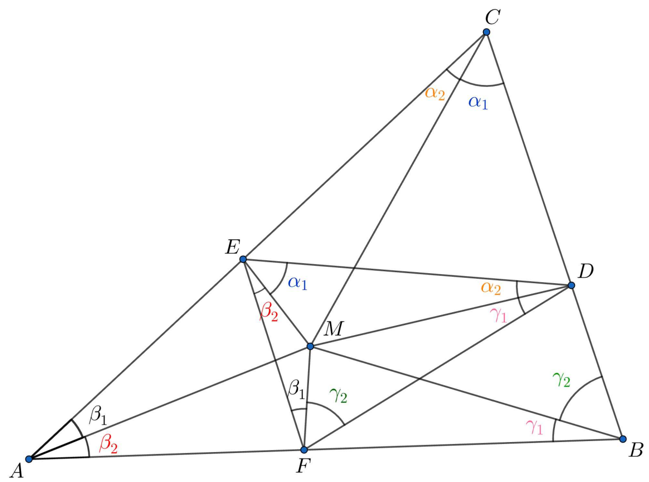
$$\angle MDC = 180^\circ - \delta.$$

Analogno vrijedi za preostale kutove pa zaključujemo da vrijedi jednakost

$$\angle MEA = \angle MFB = \angle MDC = 180^\circ - \delta.$$

□

Teorem 3.1.4. *Ako je Miquelova točka M središte trokutu ABC opisane kružnice, onda je točka M ortocentar Miquelovog trokuta DEF.*



Slika 3.7: Miquelova točka M je ortocentar trokuta

Dokaz. Neka je M središte trokutu ABC upisane kružnice. Tada, prema Teoremu 3.1.2 vrijedi $\alpha_2 = \beta_1, \beta_2 = \gamma_1, \gamma_2 = \alpha_1$ (Slika 3.7). Slijedi jednakost

$$\gamma_2 + \gamma_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \beta_2 + \alpha_2 = 90^\circ$$

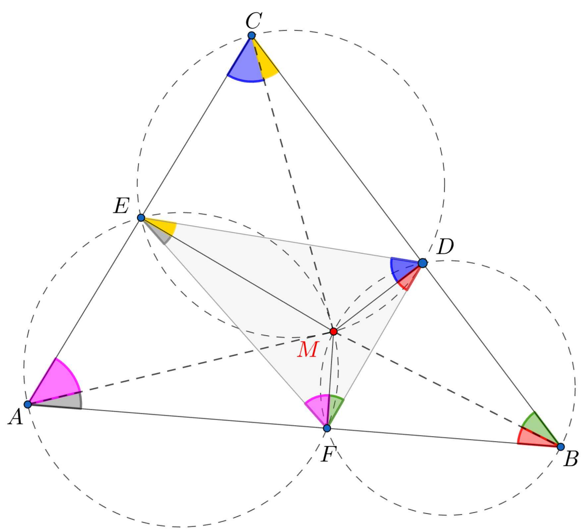
te slijedi da su pravci EM i FD okomiti. Analognim postupkom dokazujemo okomitost pravaca FM i ED te DM i EF, što povlači da je točka M ortocentar trokuta DEF. □

3.2 Svojstva Miquelovog trokuta

Teorem 3.2.1. *Dan je trokut ABC, međusobno različite točke D, E i F na stranicama trokuta i Miquelova točka M. Za kutove Miquelovog trokuta DEF vrijede sljedeće jednakosti:*

$$\angle FDE = \angle FBM + \angle MCE, \quad \angle DEF = \angle DCM + \angle MAF, \quad \angle EFD = \angle EAM + \angle MBD.$$

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja – kada je Miquelova točka M unutar trokuta ABC i kada je izvan trokuta ABC. Dokazat ćemo samo prvi slučaj, dok se drugi dokazuje analogno.



Slika 3.8: Veza kutova danog trokuta ABC i Miquelovog trokuta DEF

Neka je točka M unutar trokuta ABC (Slika 3.8). Budući da su točke A, F, M i E konciklične, prema Lemi 1.1.8 vrijedi

$$\angle EAM = \angle EFM,$$
$$\angle MEF = \angle MAF.$$

Analogno, točke F, B, D i M te M, D, C i E su konciklične pa vrijedi

$$\angle MFD = \angle MBD,$$
$$\angle FBM = \angle FDM,$$
$$\angle DCM = \angle DEM,$$
$$\angle MDE = \angle MCE.$$

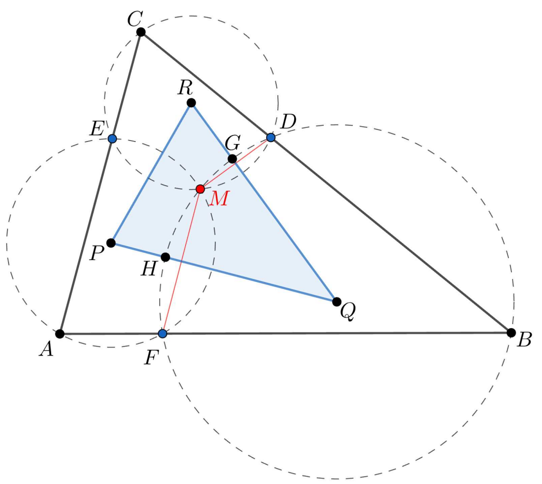
Nadalje, vrijedi

$$\angle EFD = \angle EFM + \angle MFD = \angle EAM + \angle MBD.$$

Analogno se dokažu i preostale jednakosti. □

Teorem 3.2.2. *Središta Miquelovih kružnica danog trokuta određuju trokut sličan danom trokutu.*

Dokaz. Dan je trokut ABC te međusobno različite točke D, E i F na stranicama trokuta ABC. Označimo s M Miquelovu točku te s P, Q, R središta kružnica određenih točkama A, F, E i F, B, D i D, C, E, redom (Slika 3.9). Uočimo da svake dvije kružnice imaju po dvije



Slika 3.9: Slični trokuti ABC i PQR

zajedničke tetive $\overline{MF}$, $\overline{ME}$ i $\overline{MD}$. Označimo s G i H sjecišta dužina $\overline{RQ}$ i $\overline{QP}$ i kružnice sa središtem u Q, redom.

Dalje, pravac RQ je okomit na tetivu $\overline{MD}$ i raspolavlja ju. Slijedi da je taj pravac simetrala dužine $\overline{MD}$. Stoga slijedi jednakost $\angle MQG = \angle GQD$. Analogno, $\angle FQH = \angle HQM$. Pogledajmo čemu je jednaka veličina kuta $\angle HQG$. Imamo

$$\angle HQG = \angle HQM + \angle MQG = \frac{1}{2}\angle FQM + \frac{1}{2}MQD = \frac{1}{2}(\angle FQM + \angle MQD) = \frac{1}{2}\angle FQD.$$

Po teoremu o središnjem i obodnom kutu vrijedi

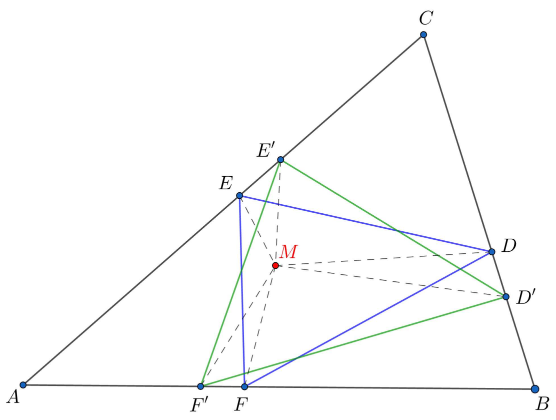
$$\angle FQD = 2\angle FBD.$$

Koristeći prethodne dvije jednakosti slijedi

$$\angle FQD = 2\angle FBD \implies \angle FBD = \frac{1}{2}\angle FQD \implies \angle FBD = \angle HQG.$$

Analogno dokazujemo i $\angle QRP = \angle BCA$ što povlači da je trokut PQR sličan danom trokutu ABC, odnosno vrijedi $\triangle PQR \sim \triangle ABC$. □

Teorem 3.2.3. *Dva trokuta upisana u isti trokut sa zajedničkom Miquelovom točkom su slična.*



Slika 3.10: Slični trokuti koji imaju zajedničku Miquelovu točku

Dokaz. Dan je trokut ABC te njemu upisani $\triangle DEF$ i $\triangle D'E'F'$ sa zajedničkom Miquelovom točkom M (Slika 3.10). Prema Teoremu 3.1.3 vrijedi:

$$\angle ME'A = \angle MF'B,$$

$$\angle CEM = \angle MFB,$$

iz čega slijedi $\triangle MF'F \sim \triangle ME'E$. Analogno, $\triangle ME'E \sim \triangle MD'D$. Prema tome,

$$\angle FMF' = \angle EME' = \angle DMD'$$

iz čega slijede sljedeće jednakosti:

$$\angle F'ME' = \angle FME,$$
$$\angle D'MF' = \angle DMF,$$
$$\angle E'MD' = \angle EMD.$$

Iz sličnosti trokuta slijede omjeri stranica

$$\frac{|MF|}{|MF'|} = \frac{|ME|}{|ME'|} = \frac{|MD|}{|MD'|}.$$

Prisjetimo se: dva su trokuta slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne i odgovarajući kutovi jednake veličine. Slijedi

$$\begin{aligned}\triangle F'ME' &\sim \triangle FME,\\ \triangle D'MF' &\sim \triangle DMF,\\ \triangle E'MD' &\sim \triangle EMD.\end{aligned}$$

Konačno, iz

$$\frac{|F'E'|}{|FE|} = \frac{|F'M|}{|FM|}$$

i

$$\frac{|F'D'|}{|FD|} = \frac{|F'M|}{|FM|}$$

slijedi

$$\frac{|F'E'|}{|FE|} = \frac{|F'D|}{|FD|}.$$

Analogno slijedi

$$\frac{|D'E'|}{|DE|} = \frac{|F'D'|}{|FD|}$$

što povlači $\triangle FDE \sim \triangle F'D'E'$. □

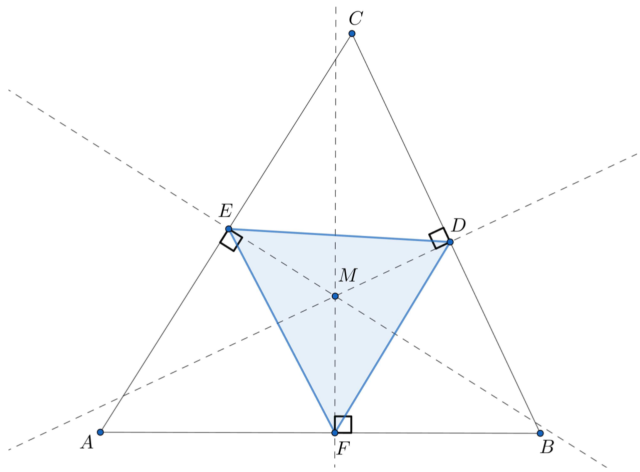
3.3 Generalizacija Neubergovog teorema

Neubergov teorem nam daje jedno važno svojstvo nožišnih trokuta, a mi ćemo u ovom potpoglavlju dokazati njegovu generalizaciju koja je usko vezana uz Miquelovu točku (i pripadni Miquelov trokut).

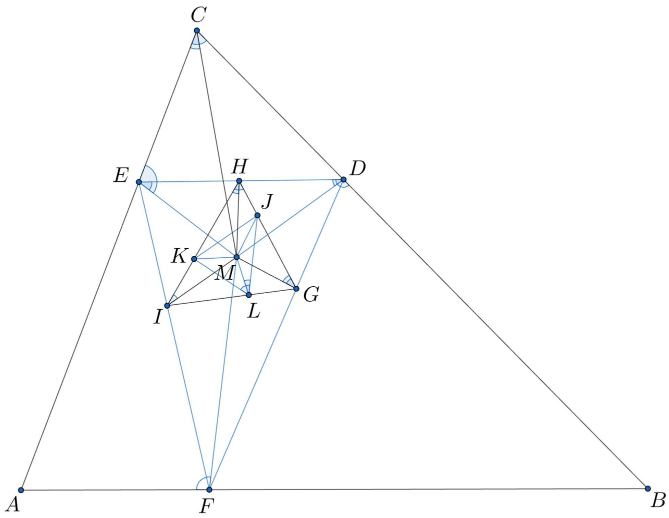
Definicija 3.3.1. *Trokut čiji su vrhovi nožišta okomica iz fiksne točke M unutar trokuta ABC na svaku od njegovih stranica AB, BC i CA nazivamo nožišni trokut ili pedalni trokut s obzirom na dani trokut ABC.*

Nožišni trokuti imaju mnoga zanimljiva svojstva, a o jednom svojstvu govori sljedeći teorem.

Teorem 3.3.2 (Neubergov teorem)**.** *Ako je konstruiran niz nožišnih trokuta s obzirom na istu točku M, tada je treći nožišni trokut sličan početnom trokutu ABC.*



Slika 3.11: Nožišni trokut



Slika 3.12: Generalizacija Neubergovog teorema

Neubergov teorem možemo generalizirati konstruiranjem dužina iz točke M na stranice trokuta ABC tako da te dužine zatvaraju jednake kutove (koji ne moraju biti pravi) sa stranicama tog trokuta kao na Slici 3.12, odnosno da vrijedi $\angle MFB = \angle MDC = \angle MEA$. No, te jednakosti će uvijek vrijediti ako je M Miquelova točka trokuta ABC, odnosno ako je trokut DEF Miquelov trokut (vidi Teorem 3.1.3).

Dakle, neka je trokut DEF Miquelov trokut. Iz iste točke M, unutar prvog Miquelovog trokuta, konstruirajmo drugi Miquelov trokut GHI. Zatim konstruirajmo i treći Miquelov trokut JKL unutar drugoga. Tada je treći Miquelov trokut JKL sličan polaznom trokutu ABC (Slika 3.12).

Dokažimo sada ovu generalizaciju.

Dokaz. Konstruirajmo dužine iz točke M na stranice trokuta ABC, DEF i GHI te nacrtajmo dužinu $\overline{MC}$. Budući da su trokuti DEF, GHI i JKL Miquelovi trokuti, slijedi da su četverokuti $CEMD$, $HMGD$, $JMLG$ tetivni. Vrijedi

$$\angle MCE = \angle MDE = \angle MGH = \angle MLJ.$$

Analogno dokazujemo da vrijedi

$$\angle DCM = \angle KLM.$$

Stoga

$$\angle BCA = \angle DCM + \angle MCE = \angle KLM + \angle MLJ = \angle KLJ.$$

Na isti način dokazujemo jednakosti $\angle CAB = \angle LJK$ te $\angle ABC = \angle JKL$. □

Napomenimo još da je ova generalizacija posebna jer se niz tih Miquelovih trokuta može konstruirati potpuno proizvoljno. Mogli bismo pretpostaviti da kut koji zatvara dužina s jednim krajem u točki M sa stranicama drugog trokuta mora biti jednak kutu koji zatvara dužina s jednim krajem u točki M sa stranicama prvog trokuta, no to uopće ne mora biti tako, odnosno odabir Miquelovih trokuta je proizvoljan.

Poglavlje 4

Varijacije i generalizacije Miquelovog teorema

4.1 Simsonov teorem

U ovom potpoglavlju vidjet ćemo da su nožišta okomica iz Miquelove točke na stranice trokuta kolinearna ako i samo ako se Miquelova točka nalazi na trokutu opisanoj kružnici. Ta činjenica zapravo je posljedica jednog zanimljivog teorema poznatijeg kao Simsonov teorem.

Simsonov teorem možda se pogrešno pripisuje škotskom matematičaru Robertu Simsonu (1687.–1768.) jer postoje zapisi koji pokazuju da je taj teorem ustvari dokazao William Wallace 1799. godine, no ne postoje zapisi koji tvrde da je nastavio Simsonova proučavanja.

Teorem 4.1.1 (Simsonov teorem)**.** *Nožišta okomica povučenih iz bilo koje točke trokutu opisane kružnice na stranice trokuta (ili na njihove produžetke) su kolinearna.*

Dokaz. Neka je P točka unutar kuta $\angle ABC$ trokuta ABC i neka su L, M, N projekcije od P na stranice ili produžetke stranica BC, CA, AB redom (Slika 4.1). Kružnice čiji su promjeri PA i PC prolaze parovima točaka M i N te M i L, pa slijedi

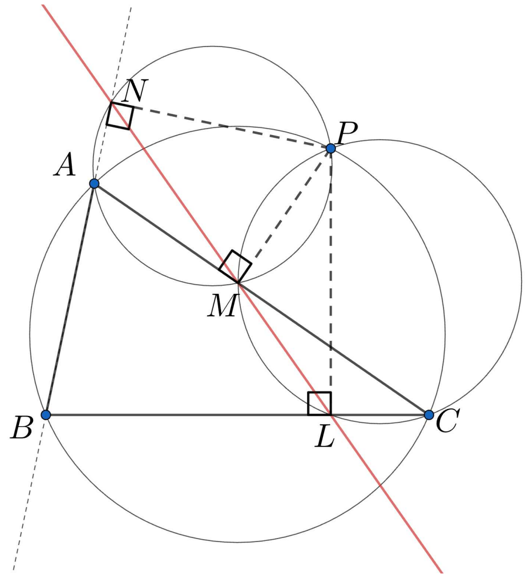
$$\angle APN = \angle AMN, \quad \angle CPL = \angle CML, \quad \angle ABC + \angle CPA = 180^\circ. \tag{4.1}$$

Pretpostavimo da P leži na kružnici opisanoj trokutu ABC. Kut $\angle APC$ je tada suplementaran kutu $\angle ABC$ pa slijedi

$$\angle CPA = \angle LPN.$$

Oduzimajući jednake kutove od kuta $\angle CPN$ slijedi

$$\angle CPN - \angle CPA = \angle CPN - \angle LPN,$$



Slika 4.1: Simsonov teorem

odnosno

$$\angle APN = \angle CPL,$$

te iz (4.1) slijedi

$$\angle AMN = \angle CML.$$

Dakle, točke L, M, N su kolinearne. □

Definicija 4.1.2. *Pravac koji prolazi nožištima okomica iz točke P na stranice trokuta ABC, pri čemu je P točka na opisanoj kružnici trokuta, zove se* ***Simsonov pravac*** *točke P u odnosu na trokut ABC.*

Zanimljivo je da vrijedi i obrat Simsonovog teorema.

Teorem 4.1.3. *Zadani su trokut ABC i točka P. Neka su L, M, N nožišta okomica iz P na pravce BC, CA, AB redom. Ako su točke L, M, N kolinearne, onda P leži na kružnici opisanoj trokutu ABC.*

Dokaz. Točka P leži na kružnici opisanoj trokutu ABC ako i samo ako vrijedi

$$\angle CPA = 180^\circ - \angle ABC. \tag{4.2}$$

Promotrimo četverokut $LPNB$ (Slika 4.1). Kako je zbroj nasuprotnih kutova pri vrhovima L i N ovog četverokuta jednak $180°$, slijedi jednakost

$$\angle LPN + \angle NBL = 180°,$$

pa je uvjet (4.2) ekvivalentan jednakosti

$$\angle CPA = \angle LPN. \tag{4.3}$$

Oduzimanjem $\angle LPA$ vidimo da je (4.3) ekvivalentno jednakosti

$$\angle CPL = \angle APN. \tag{4.4}$$

Četverokut koji sadrži par nasuprotnih pravih kutova je tetivni, tj. njegov vrhovi leže na kružnici. Štoviše, druga dva vrha su krajnje točke promjera te kružnice. Dakle, svaki od četverokuta $ANPM, BNPL$ i $CLMP$ je tetivni. Budući da je četverokut $CLMP$ tetivni, slijedi

$$\angle CML = \angle CPL. \tag{4.5}$$

Također, četverokut $ANPM$ je tetivni pa imamo

$$\angle AMN = \angle APN. \tag{4.6}$$

Iz (4.5) i (4.6) zaključujemo da je (4.4) ekvivalentno

$$\angle CML = \angle AMN. \tag{4.7}$$

Konačno, (4.7) vrijedi ako i samo ako su točke L, M, N kolinearne. □

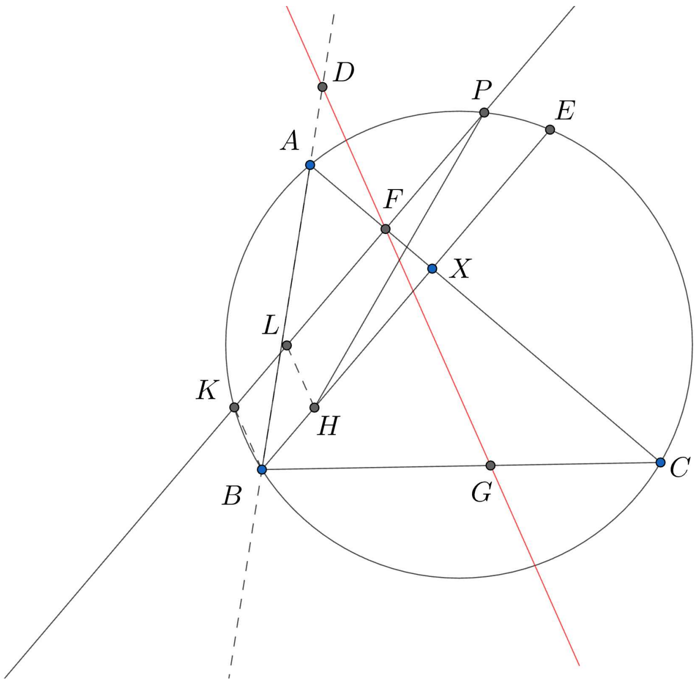
Teorem 4.1.4. *Dan je trokut ABC i točka P na njemu opisanoj kružnici. Simsonov pravac točke P raspolavlja dužinu $\overline{HP}$, gdje je H ortocentar trokuta ABC.*

Dokaz. Neka je E točka sjecišta pravca BH na kojem leži visina i opisane kružnice trokuta ABC. Označimo sjecište pravca PF i kružnice s K. Nacrtajmo pravac paralelan s BK kroz H te on neka siječe pravac PK u točki L. Iz paralelograma $BHLK$ slijedi $|HL| = |PE|$ te iz paralelnih pravaca KP i BE slijedi $|HL| = |BK|$. Konačno, $HLPE$ je jednakokračni trapez.

Polovište dužine $\overline{HE}$ je X (prisjetimo se da točke simetrične ortocentru trokuta u odnosu na pravce određene stranicama trokuta pripadaju opisanoj kružnici trokuta) što povlači da je FX okomit na HE. Stoga, F je polovište dužine $\overline{LP}$.

Nadalje, točke P, F, G, C su konciklične točke što povlači $\angle PFG = \angle PCG$. Znamo također da vrijedi $\angle GCP = \angle PKB$. Stoga, $\angle PFG = \angle PKB$ te je pravac FG paralelan pravcu KB i GFD paralelan pravcu LH.

Ako pravac prolazi polovištem stranice trokuta PLH i paralelan je drugoj stranici trokuta, onda siječe i treću stranicuu trokuta. Konačno, pravac GFD raspolavlja dužinu $\overline{PH}$. □



Slika 4.2: Simsonov pravac točke P

Posljedica Simsonovog teorema i njegovog obrata je sljedeći korolar vezan uz Miquelovu točku kojeg ćemo koristiti u dokazivanju Miquel–Steinerovog teorema o potpunom četverostranu.

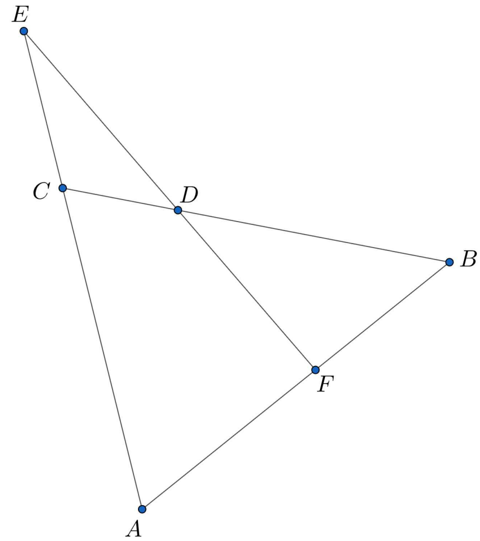
Korolar 4.1.5. *Nožišta okomica iz Miquelove točke na stranice trokuta su kolinearna ako i samo ako se Miquelova točka nalazi na trokutu opisanoj kružnici.*

4.2 Miquel–Steinerov teorem o potpunom četverostranu

Definirajmo najprije potpuni četverostran, a zatim dokažimo Miquel–Steinerov teorem o potpunom četverostranu.

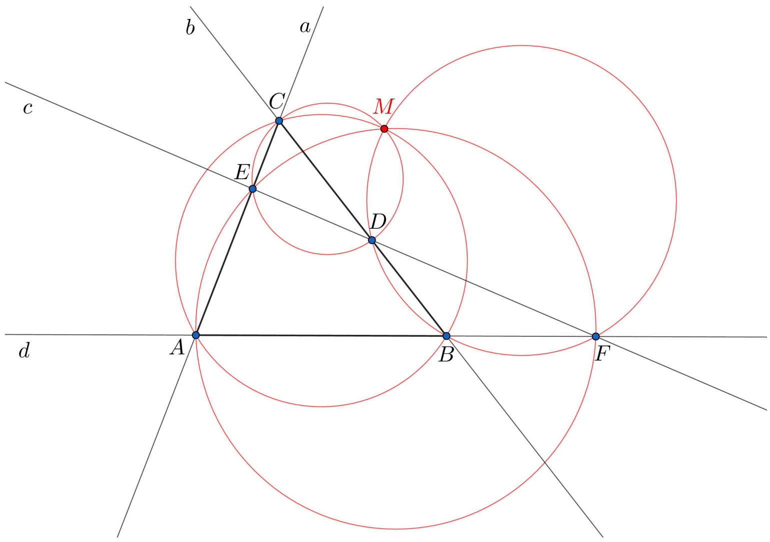
Definicija 4.2.1. ***Potpuni četverostran*** *je skup od četiri pravca, od kojih nikoja tri ne prolaze kroz istu točku, i šest točaka, u kojima se sijeku po dva od tih četiriju pravaca. Ta četiri pravca su stranice, a tih šest točaka su vrhovi potpunog četverostrana.*

Teorem 4.2.2 (Miquel–Steinerov teorem o potpunom četverostranu)**.** *Dana su četiri pravca od kojih se svaka dva sijeku u jednoj točki. Svaka tri pravca određuju četiri trokuta čije*



Slika 4.3: Potpuni četverostran

opisane kružnice prolaze istom točkom. Točku presijecanja zovemo ***Miquelova točka potpunog četverostrana****.*



Slika 4.4: Miquelova točka potpunog četverostrana

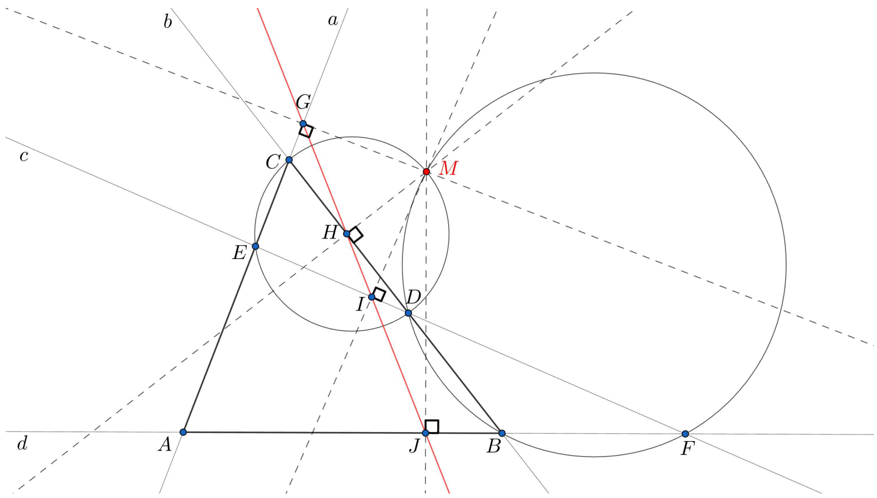
Uočimo, Miquel–Steinerov teorem o potpunom četverostranu je zapravo slučaj kada su točke D, E, F iz Miquelovog teorema kolinearne. Teorem kaže da u tom slučaju Miquelova točka M leži na opisanoj kružnici trokuta ABC.

Dokažimo sada Miquel–Steinerov teorem.

Dokaz. Svake dvije kružnice koje se sijeku imaju dvije točke sjecišta i potrebno ih je razlikovati. Neka je M točka presjeka kružnica opisanih trokutima ΔCDE i ΔDFB. Zatim, neka su točke G, H, I i J nožišta okomica iz M na pravce a, b, c i d redom. Budući da M leži na kružnici opisanoj trokutu CDE, slijedi da su nožišta G, H, I kolinearna i leže na Simsonovom pravcu točke M za trokut CDE. Analogno, nožišta H, I, J leže na Simsonovom pravcu točke M s obzirom na trokut DFB. Budući da su H i I zajedničke točke tih dvaju Simsonovih pravaca, zaključujemo da se radi o istom pravcu.

Na analogan način se pokaže kako točke G, H, I i J leže i na Simsonovom pravcu točke M s obzirom na trokut AFE i na Simsonovom pravcu točke M s obzirom na trokut ABC.

Budući da samo točke na opisanoj kružnici trokuta imaju pripadni Simsonov pravac, točka M mora ležati na svakoj od opisanih kružnica četiriju trokuta, odnosno M je njihovo sjecište.



Slika 4.5: Miquel–Steinerov teorem

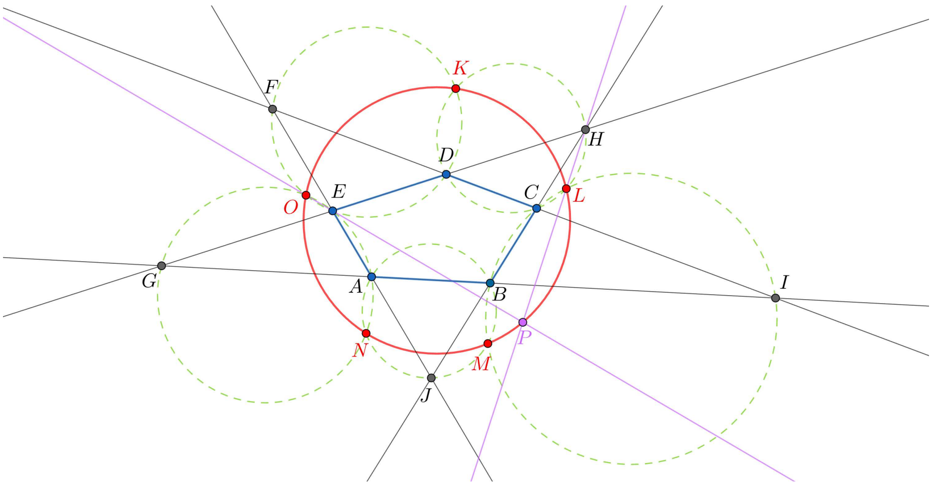
□

Ovaj je rezultat najavio, u dva retka, Jakob Steiner u izdanju Gergonneovih *Annales de Mathématiques* iz 1827./1828., ali je detaljan dokaz dao Auguste Miquel.

4.3 Generalizacije Miquelovog teorema na više od tri kružnice

U ovom potpoglavlju navesti ćemo još neke zanimljive tvrdnje o koncikličnosti točaka koje pružaju dublji uvid i generalizaciju Miquelovog teorema na veći broj kružnica i točaka.

Teorem 4.3.1 (Miquelov teorem o peterokutu)**.** *Zadan je konveksni peterokut. Produžimo stranice peterokuta tako da formiramo pet trokuta, po jedan sa stvake strane peterokuta. Ako nacrtamo trokutima opisane kružnice, slijedi da točke sjecišta susjednih kružnica, koja su različita od vrhova početnog peterokuta, leže na istoj kružnici.*



Slika 4.6: Miquelov teorem o peterokutu

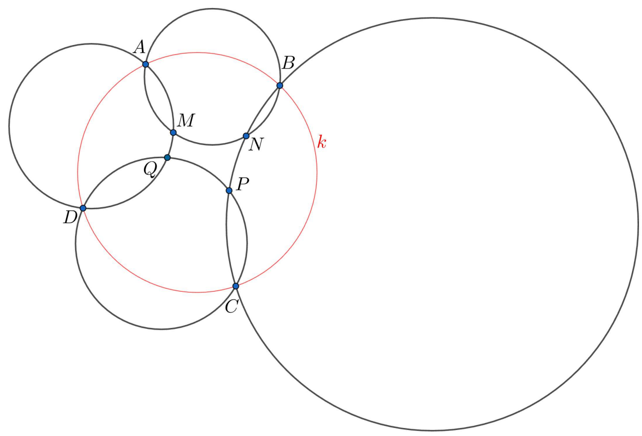
Dokaz. Želimo dokazati da točka K leži na kružnici određenoj točkama N, L, O. Promotrimo kružnicu određenu točkama G, B i H te četverokute $GHJA$ i $HGIC$. Tada, prema Teoremu 4.2.2, kružnica sadrži točke N i L (Slika 4.6).

Kružnice NLH, NLO i NEO sijeku se u točki N. Pravac EH sadrži točku G, točku sjecišta kružnica NLH i NEO različitu od N. Lako se pokaže da se pravci OE i HL međusobno sijeku u točki P, koja leži na kružnici NLO (koncikličnost točaka pokaže se pomoću Leme 1.1.8).

Promotrimo trokut EPH i uočimo da točke O, L, D leže na pravcima EP, PH, HE, redom. Prema Miquelovom teoremu znamo da se kružnice POL, EDO, HLD sijeku u istoj točki, tj. točki K. Konačno, kružnica NLO sadrži točku K, što je ujedno i točka u kojoj se sijeku kružnice EDF i CHD. Analogno dokazujemo da kružnica NLO sadrži točku M. Naposlijetku, dokazali smo da točke M, L, K, O i N leže na istoj kružnici. □

Spomenimo još jedan teorem koji nosi Miquelovo ime – Miquelov teorem o 6 kružnica.

Teorem 4.3.2 (Miquelov teorem o 6 kružnica)**.** *Dane su četiri točke A, B, C, D na kružnici k i četiri druge kružnice koje prolaze kroz dvije uzastopne točke od ove četiri. Tada druge sjecišne točke, M, N, P, Q, ovih kružnica također leže na kružnici.*



Slika 4.7: Miquelov teorem o 6 kružnica

Dokaz. Neka su A, B, C, D točke koje leže na kružnici k (Slika 4.7). To znači da je četverokut $ABCD$ upisan kružnici k, odnosno da je tetivni četverokut te da vrijedi

$$\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ.$$

Neka su M, N, P, Q druge točke sjecišta kao na Slici 4.7. Slijedi da su četverokuti $AMNB$, $BNPC$, $CPQD$, $DQMA$ upisani u kružnice (tetivni četverokuti) te vrijedi

$$\begin{aligned} \angle DCP + \angle PQD &= 180^\circ, \\ \angle PCB + \angle BNP &= 180^\circ, \\ \angle MAD + \angle DQM &= 180^\circ, \\ \angle BAM + \angle MNB &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Zbrajanjem odgovarajućih članova jednadžbi slijedi

$$\angle MQP + \angle PNM + \angle DCB + \angle BAD = 720^\circ.$$

Znamo da $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$, pa slijedi

$$\angle MQP + \angle PNM = 540^\circ.$$

Napomenimo da koristimo zapis za kutove koji zadržavaju orijentaciju u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, što znači da je MNP različito od PNM te

$$\angle MNP + \angle PNM = 360^\circ.$$

Daljnim izračunom slijedi

$$\begin{aligned}
\angle PNM + \angle MQP &= 360^\circ - \angle PNM + 360^\circ \\
&= 720^\circ - (\angle PNM + \angle MQP) \\
&= 720^\circ - 540^\circ \\
&= 180^\circ
\end{aligned}$$

Konačno, četverokut $MNPQ$ je tetivni četverokut, odnosno M, N, P, Q leže na kružnici. □

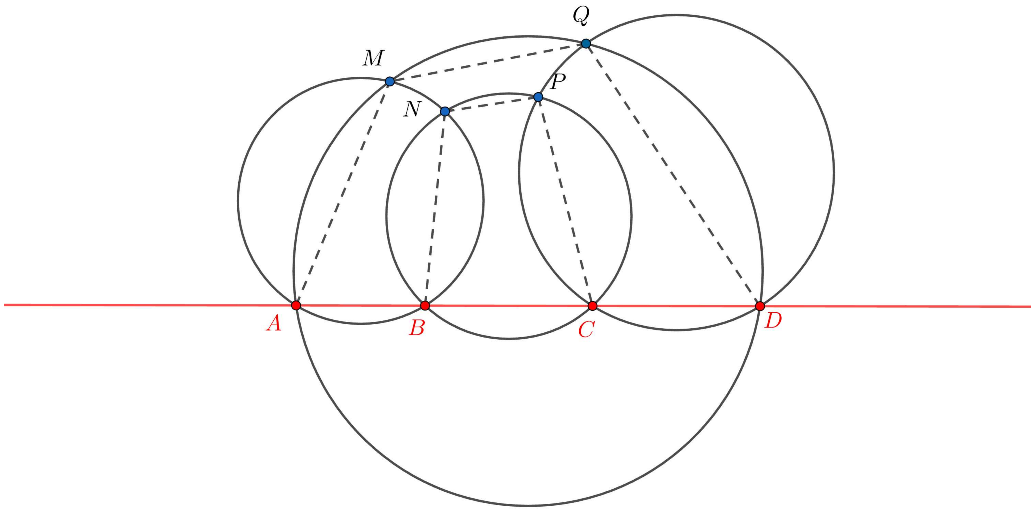
Sljedeći se teorem može promatrati kao poseban slučaj prethodnog Miquelovog teorema o 6 kružnica ako se pravac promatra kao kružnica s beskonačnim radijusom. Dakle, umjesto koncikličkih točaka, uzmimo sjecišne točke koje su kolinearne.

Teorem 4.3.3. *Dane su četiri točke A, B, C, D koje leže na istom pravcu i četiri kružnice koje prolaze kroz dvije uzastopne točke od ove četiri. Tada druge sjecišne točke ovih kružnica M, N, P, Q također leže na kružnici.*

Dokaz. Uočimo da su četverokuti $ABNM, BCPN, CDQP, ADQM$ tetivni.

To povlači da su sljedeće jednadžbe ekvivalentne:

$$\begin{aligned}
\angle QMA + \angle ADQ &= 180^\circ \\
\Leftrightarrow (\angle NMA + \angle QMN) + \angle CDQ &= 180^\circ \\
\Leftrightarrow \angle NMA + \angle QMN + 180^\circ - \angle QPC &= 180^\circ \\
\Leftrightarrow \angle NMA + \angle QMN - (360^\circ - \angle CPQ)) &= 0^\circ \\
\Leftrightarrow \angle NMA + \angle QMN + \angle CPQ &= 360^\circ \\
\Leftrightarrow \angle NMA + \angle QMN + \angle NPQ + \angle CPN &= 360^\circ \\
\Leftrightarrow \angle NMA + \angle QMN + \angle NPQ + 180^\circ - \angle NBC &= 360^\circ \\
\Leftrightarrow \angle NMA + \angle QMN + \angle NPQ - (180^\circ - \angle ABN) &= 180^\circ \\
\Leftrightarrow \angle NMA + \angle QMN + \angle NPQ + \angle ABN - 180^\circ &= 180^\circ \\
\Leftrightarrow \angle QMN + \angle NPQ + (\angle ABN + \angle NMA) - 180^\circ &= 180^\circ \\
\Leftrightarrow \angle QMN + \angle NPQ + 180^\circ - 180^\circ &= 180^\circ \\
\Leftrightarrow \angle QMN + \angle NPQ &= 180^\circ.
\end{aligned}$$



Slika 4.8: Miquelov teorem o 6 kružnica – poseban slučaj

Konačno, četverokut $MNPQ$ je tetivni iz čega slijedi da točke M, N, P, Q leže na istoj kružnici. $\square$

Bibliografija

[1] N. Altshiller-Court. College Geometry: *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Dover Publications, Inc., New York, 1952.

[2] W. K. Clifford. *Synthetic Proof of Miquel's Theorem*. In: Mathematical Papers. Ed. Robert Tucker, 1882. Reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, 38-55, 1967.

[3] M. De Villiers. *From Nested Miquel Triangles to Miquel Distances.* The Mathematical Gazette, 86(507): 390-395, 2002.

[4] R. Honsberger. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* Mathematical Association of America, Washington, DC, 1995.

[5] R. Johnson. *Advanced Euclidean Geometry.* Dover Publications, Inc., New York, 1960.

[6] A. Miquel. T*héorèmes de Géométrie.* Journal de mathématiques pures et appliquées 3, 485-487, 1838.

[7] V. Prasolov. *Pedal Triangle and Isogonal Conjugacy*, 2000.

[8] M. Riegel. *Simson's Theorem*, dostupno na: `https://www.whitman.deu/mathematics/SeniorProjectArchive/2006/riegelmj.pdf`(pristupljeno: studeni, 2023.)

[9] V. Volenec, *Dva Steinerova teorema o potpunom četverostranu*, Osječki matematički list, Vol.20, br. 2, 2020.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavamo Miquelov teorem i njegove varijante. Rad započinjemo uvođenjem osnovnih geometrijskih pojmova potrebnih za razradu Miquelovog teorema. Nakon iskaza, prezentiramo detaljan i precizan dokaz Miquelovog teorema. U ostatku rada detaljnije proučavamo Miquelovu točku, Miquelovu kružnicu i Miquelov trokut te neka njihova svojstva i međusobne odnose. Proučavamo generalizaciju Neubergovog teorema, iskazujemo i dokazujemo Simsonov teorem te definiramo Simsonov pravac. Rad završavamo interestantnim pregledom nekih generalizacija Miquelovog teorema na više od tri kružnice.

Summary

In this thesis, we study Miquel's theorem and its variants. We begin with an introduction of basic geometric terms essential to develop Miquel's theorem. After the statement, we present a detailed and precise proof of Miquel's theorem. In the rest of the thesis, we study Miquelov's point, Miquel's circle and Miquel's triangle in detail and some of their properties and mutual relationships. We study the generalization of Neuberg's theorem, state and prove Simson's theorem and define Simson's line. At the end of the thesis, we present an interesting overview of some generalizations of Miquel's theorem on more than three circles.

Životopis

Tena Novosel rođena je 26. svibnja 1997. godine u Karlovcu. Započela je školovanje 2004. godine u Osnovnoj školi Banija, nastavlja ga 2012. godine upisivanjem općeg smjera Gimnazije Karlovac te ga 4 godine kasnije završava s odličnim uspjehom. 2016. godine nastavlja školovanje kada upisuje preddiplomski studij Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu i 2021. godine postaje sveučilišna prvostupnica edukacije matematike. Iste godine upisuje diplomski studij Matematika, smjer nastavnički na istom fakultetu.