

# Youngovi tabloi i kristali

---

Leljak, Sara

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:432902>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-11**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Sara Leljak

**YOUNGOVI TABLOI I KRISTALI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
izv.prof.dr.sc. Slaven Kožić

Zagreb, studeni 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Liejeve algebre i kvantne grupe</b>	<b>3</b>
1.1 Liejeve algebre . . . . .	3
1.2 Kvantne grupe i njihove reprezentacije . . . . .	8
<b>2 Uvod u teoriju kristalnih baza</b>	<b>11</b>
2.1 Kashiwarini operatori . . . . .	11
2.2 Tenzorski produkt . . . . .	14
2.3 Kristali . . . . .	15
<b>3 Youngovi tabloi i kristali</b>	<b>19</b>
3.1 Kvantna grupa $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ . . . . .	19
3.2 Kategorija $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$ . . . . .	20
3.3 Youngove tablice i kristali . . . . .	21
3.4 Kristalni grafovi za $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module . . . . .	29
3.5 Dekompozicija tenzorskog produkta . . . . .	33
3.6 $U_q(B_3)$ -kristali . . . . .	37
<b>Bibliografija</b>	<b>45</b>

# Uvod

Tijekom proteklih sto godina otkriveno je da postoji bliska veza između teorije reprezentacija i kombinatorike. Teoriju reprezentacija smatramo relativno novom granom matematike budući da je njeno promatranje počelo u 20. stoljeću. Youngove tablice su sveprisutni kombinatorni objekti koji imaju važnu ulogu u teoriji reprezentacija, geometriji i algebri.

U ovom radu ćemo se fokusirati na proučavanje veze između teorije kristalnih baza konačnodimenzionalnih  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modula i kombinatorike Youngovih dijagrama i Youngovih tablica pri čemu će nam od posebne važnosti biti pojam dopustivog očitavanja. Kristalni graf konačnodimenzionalnog ireducibilnog  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modula bit će prikazan pomoću skupa semistandardnih Youngovih tablica određenog oblika. Korištenjem pravila tenzorskog produkta za Kashiwarine operatore, dat ćemo kombinatorno pravilo za dekompoziciju tenzorskog produkta konačnodimenzionalnih  $U(\mathfrak{gl})$ -modula u direktnu sumu ireducibilnih komponenti.

U prvom poglavlju slijedit ćemo gradivo iz knjiga [2] i [1]. Kako bismo mogli precizno prezentirati glavne rezultate ovog rada, prvo ćemo uvesti pojam Liejeve algebre. Liejeve algebre izvorno su se razvile kao sredstvo proučavanja lokalnih svojstava Liejevih grupa. Uz Liejevu algebru, važno je uvesti i pojam Liejeve podalgebre. Zatim uvodimo pojam reprezentacije Liejeve algebre te ćemo vidjeti da su reprezentacije određena istaknuta klasa homomorfizama Liejevih algebri. Sljedeće ćemo definirati pojam univerzalne omotačke algebre, Cartanove matrice, težinske rešetke te dualne težinske rešetke. Na kraju poglavlja ćemo se fokusirati na kvantne grupe i njihove reprezentacije pri čemu ćemo opisati konstrukciju asocijativne algebre iz zadanih generatora i relacija te, pomoću nje, uvesti pojam kvantne grupe  $U_q(\mathfrak{g})$  pridružene Liejevoj algebri  $\mathfrak{g}$ . Prvenstveno će nas zanimati teorija reprezentacija tih kvantnih grupa. Kao što ćemo vidjeti u kasnijim poglavljima, moduli iz kategorije  $\mathcal{O}^q$  te kategorije  $\mathcal{O}_{int}^q$  usko su povezani s teorijom kristalnih baza.

U drugom poglavlju se fokusiramo na gradivo iz knjige [2]. Teoriju kristalnih baza za kvantne grupe uveo je Kashiwara pa na početku poglavlja definiramo Kashiwarine operatore koji su nam važni kako bismo razvili teoriju kristalnih baza  $U_q(\mathfrak{g})$ -modula iz kategorije  $\mathcal{O}_{int}^q$ . Od velike važnosti će nam biti pojam kristalne rešetke, kristalne baze i kristalnog grafa. Nadalje, navodimo teorem o tenzorskom produktu kristala koji nam predstavlja jednu od kombinatornih značajki kristalnih baza. Na kraju poglavlja ćemo proučavati kris-

tale. Kristali su određeni kombinatorni objekti koje pridružujemo reprezentacijama kvantnih grupa. Prikazujemo ih usmjerenim grafovima čiji su bridovi različitih boja, dok njihove vrhove realiziramo pomoću Youngovih tablica.

U trećem, ujedno i zadnjem poglavlju, također ćemo slijediti gradivo iz knjige [2]. Na početku poglavlja uvodimo pojam kvantne grupe  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$  i pripadne kategorije  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$ . Glavni cilj ovog poglavlja će biti uspostaviti vezu između  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristala i Youngovih dijagrama. Od posebne važnosti su nam definicija Youngovog dijagrama i kosog Youngovog dijagrama. Prvo ćemo definirati, a zatim ćemo i na primjeru vidjeti što znači pojam dalekoistočnog i srednjeistočnog očitavanja koji će nam biti ključni za uspostavljanje veze između Youngovih dijagrama i kristala. Uz te pojmove, važnu ulogu ima i dopustivo očitavanje. Zatim ćemo proučiti kristalne grafove za  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module te ćemo navesti nekoliko važnih teorema koje ćemo ujedno i dokazati. Na kraju rada ćemo se baviti  $U_q(B_3)$ -kristalima. Dat ćemo primjere nekih kristala tog tipa te će nam glavni cilj biti prikazati razlike koje se javljaju prilikom realizacije kristala za Liejeve algebre drugih tipova.

# Poglavlje 1

## Liejeve algebre i kvantne grupe

U cijelom ovom radu, osim ako nije drugačije navedeno,  $\mathbb{C}$  će označavati polje kompleksnih brojeva. U ovom poglavlju navodimo neke osnovne pojmove i rezultate, bez dokaza, iz teorije Liejevih algebri te pripadnih kvantnih grupa te slijedimo izlaganje iz knjiga [1], [3] i iz poglavlja 1, 2 i 3 knjige [2].

### 1.1 Liejeve algebre

Jedan od glavnih pojmova koji će nam biti potreban u ovom radu je pojam Liejeve algebre.

**Definicija 1.1.1.** *Liejeva algebra nad poljem  $\mathbb{C}$  je vektorski prostor  $\mathfrak{g}$  zajedno s operacijom  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  koja se obično označava s  $(x, y) \rightarrow [x, y]$  i zove komutator, takvom da su za sve  $x, y, z \in \mathfrak{g}$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ispunjeni sljedeći uvjeti:*

- (1)  $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha [x, z] + \beta [y, z]$ ,
- (2)  $[x, \alpha y + \beta z] = \alpha [x, y] + \beta [x, z]$ ,
- (3)  $[x, x] = 0$ ,
- (4)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ .

Svojstvo (4) se naziva Jacobijev identitet. Iz svojstva (3) imamo

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

što povlači

$$[x, y] = -[y, x] \quad \text{za sve } x, y \in \mathfrak{g}.$$

**Definicija 1.1.2.** *Za Liejevu algebru  $\mathfrak{h}$  kažemo da je Liejeva podalgebra od  $\mathfrak{g}$  ako je zadovoljeno sljedeće:*

- (1)  $\mathfrak{h}$  je vektorski potprostor od  $\mathfrak{g}$ ,  
 (2) ako su  $x, y \in \mathfrak{h}$ , tada je  $[x, y]$  također u  $\mathfrak{h}$ .

**Primjer 1.1.1.**

- (1) Neka je  $A$  asocijativna algebra nad  $\mathbb{C}$  te na  $A$  definiramo

$$[a, b] = ab - ba \quad \text{za sve } a, b \in A.$$

Tada zadana operacija zadovoljava antikomutativnost, Jacobijev identitet i bilinearnost pa je par  $(A, [, ])$  Liejeva algebra. Stoga se svaka asocijativna algebra može pretvoriti u Liejevu algebra.

- (2) Neka je  $V$  vektorski prostor nad  $\mathbb{C}$ . Označimo sa  $\text{End } V$  skup svih linearnih operatora na  $V$ . Na  $\text{End } V$  definiramo

$$[x, y] = xy - yx \quad \text{za sve } x, y \in \text{End } V.$$

Tada  $\text{End } V$  postaje Liejeva algebra koja se naziva **opća linearna Liejeva algebra** i označava sa  $\mathfrak{gl}(V)$ . Ako je  $V = \mathbb{C}^n$ , tada opću linearnu Liejevu algebra označavamo sa  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

- (3) Neka je  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr } x = 0\}$  potprostor od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  koji se sastoji od matrica s tragom nula. Tada je  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  Liejeva podalgebra od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  koju nazivamo **specijalna linearna Liejeva algebra**.

Sljedeći cilj nam je uvesti pojam reprezentacije Liejeve algebre. Kao što ćemo vidjeti, reprezentacije su određena istaknuta klasa homomorfizama Liejevih algebri.

**Definicija 1.1.3.** Neka su  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{g}'$  Liejeve algebre. **Homomorfizam** s  $\mathfrak{g}$  u  $\mathfrak{g}'$  je linearno preslikavanje  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  koje zadovoljava

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \text{za sve } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Sasvim analogno možemo uvesti i pojam homomorfizma asocijativnih algebri:

**Definicija 1.1.4.** Neka su  $A$  i  $A'$  asocijativne algebre. **Homomorfizam asocijativnih algebri** s  $A$  u  $A'$  je linearno preslikavanje  $\phi : A \rightarrow A'$  koje zadovoljava

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad \text{za sve } x, y \in A.$$

U slučaju kada su  $A$  i  $A'$  asocijativne algebre s jedinicom, dodatno ćemo podrazumijevati da homomorfizam zadovoljava  $\phi(1) = 1$ .

**Definicija 1.1.5. Reprezentacija** Liejeve algebre  $\mathfrak{g}$  na kompleksnom vektorskom prostoru  $V$  je homomorfizam Liejevih algebri  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .



**Primjer 1.1.2.** Neka je  $\mathfrak{g}$  Liejeva algebra. Definiramo preslikavanje  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  koje zadovoljava

$$(ad x)(y) = [x, y] \quad \text{za sve } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Tada je  $ad$  homomorfizam Liejevih algebra koji se naziva **adjungirana reprezentacija** od  $\mathfrak{g}$ .

U sljedeće dvije definicije vidjet ćemo kako umjesto pojma reprezentacije algebra možemo promatrati i pojam modula.

**Definicija 1.1.6.** Neka je  $\mathfrak{g}$  Liejeva algebra. Vektorski prostor  $V$  naziva se  **$\mathfrak{g}$ -modul** ako postoji preslikavanje  $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ , označeno s  $(x, v) \mapsto x \cdot v$ , koje, za sve  $x, y \in \mathfrak{g}$ ,  $v, w \in V$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , zadovoljava sljedeća svojstva:

- (1)  $(\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha(x \cdot v) + \beta(y \cdot v)$ ,
- (2)  $x \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(x \cdot v) + \beta(x \cdot w)$ ,
- (3)  $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$ .

**Definicija 1.1.7.** Vektorski prostor  $V$  naziva se **modul za asocijativnu algebru**  $A$  ili kraće,  $A$ -modul, ako postoji preslikavanje  $A \times V \rightarrow V$ , označeno s  $(x, v) \mapsto x \cdot v$ , koje, za sve  $x, y \in A$ ,  $v, w \in V$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , zadovoljava sljedeća svojstva:

- (1)  $(\alpha x + \beta y) \cdot v = \alpha(x \cdot v) + \beta(y \cdot v)$ ,
- (2)  $x \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(x \cdot v) + \beta(x \cdot w)$ ,
- (3)  $(xy) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$ .

**Definicija 1.1.8.** Neka je  $\mathfrak{g}$  Liejeva algebra. Ako su  $V$  i  $W$   $\mathfrak{g}$ -moduli, tada **homomorfizam  $\mathfrak{g}$ -modula** definiramo kao preslikavanje  $\phi : V \rightarrow W$ , koje zadovoljava  $\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v)$  za sve  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $v \in V$ . Ako je  $W$  potprostor od  $\mathfrak{g}$ -modula  $V$ , tada kažemo da je  $W$  **podmodul** od  $V$  ako

$$x \cdot W \subset W, \quad \text{za svaki } x \in \mathfrak{g}.$$

**Definicija 1.1.9.** Za  $\mathfrak{g}$ -modul  $V$  kažemo da je **ireducibilan** ako ima točno dva podmodula:  $0$  i  $V$ .

Pojmovi homomorfizma modula, podmodula te ireducibilnosti analogno se mogu uvesti i za asocijativnu algebru.

**Primjer 1.1.3.** (1) Neka je  $W$  podmodul  $\mathfrak{g}$ -modula  $V$ . Tada je kvocijentni prostor  $V/W$   $\mathfrak{g}$ -modul s operacijama na  $\mathfrak{g}$  danim s

$$x \cdot (v + W) = x \cdot v + W \quad \text{za } x \in \mathfrak{g}, v \in V.$$

Preslikavanje  $V \rightarrow V/W$  koje svaki vektor  $v \in V$  šalje u  $v + W$  zovemo kanonski epimorfizam i ono je jedan primjer homomorfizma, odnosno epimorfizma modula.

(2) Trodimenzionalna prosta Liejeva algebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$  ima bazu

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

koja zadovoljava

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Neka je  $V$  konačnodimenzionalan ireducibilan modul nad  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Može se dokazati da se prostor  $V$  može zapisati kao direktna suma svojstvenih potprostora

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} V_\lambda, \quad \text{gdje je } V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda v\}.$$

Primijetimo da je

$$e \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+2},$$

$$f \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda-2}.$$

Budući da je  $V$  konačnodimenzionalan, postoji ne-nul vektor  $v_0 \in V_\lambda$ , za neki  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , takav da je  $e \cdot v_0 = 0$ . Neka je  $v_j = \frac{1}{j!} f_0^j \cdot v_0$  za  $j \geq 0$ . Tada imamo

$$\begin{aligned} h \cdot v_j &= (\lambda - 2j)v_j, \\ f \cdot v_j &= (j + 1)v_{j+1}, \\ e \cdot v_j &= (\lambda - j + 1)v_{j-1}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

pri čemu s  $v_{-1}$  označavamo nulvektor. Iz ireducibilnosti vidimo da je dimenzija od  $V$  jednaka  $\lambda + 1$ .

U primjeru 1.1.1 vidjeli smo kako od asocijativne algebre uvijek možemo napraviti Liejevu algebru. Sljedeća, bitno složenija konstrukcija, omogućava nam da Liejevoj algebri pridružimo asocijativnu algebru. Valja istaknuti kako je takva asocijativna algebra u pravilu znatno veća od originalne Liejeve algebre. Primjerice, univerzalna omotačka algebra trodimenzionalne Liejeve algebre  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  je beskonačnodimenzionalna.

**Definicija 1.1.10.** Neka je  $\mathfrak{g}$  Liejeva algebra nad poljem  $\mathbb{C}$ . **Univerzalna omotačka algebra** od  $\mathfrak{g}$  je uređeni par  $(U(\mathfrak{g}), i)$  koji zadovoljava sljedeće:

(1)  $U(\mathfrak{g})$  je asocijativna algebra s jedinicom nad  $\mathbb{C}$ ,

(2)  $i : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$  je linearno preslikavanje koje zadovoljava

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \quad \text{za sve } x, y \in \mathfrak{g}.$$

(3) Za svaku asocijativnu algebru s jedinicom  $A$  nad  $\mathbb{C}$  i svako linearno preslikavanje  $j : \mathfrak{g} \rightarrow A$  takvo da  $j([x, y]) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$ , za sve  $x, y \in \mathfrak{g}$ , postoji jedinstveni homomorfizam algebri  $\theta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$  takav da  $\theta \circ j = i$ .

Na kraju ove točke, prisjetit ćemo se definicije generalizirane Cartanove matrice te još nekih s njom blisko povezanih pojmova.

**Definicija 1.1.11.** Neka je  $I$  konačan skup indeksa. Kvadratna matrica  $A = a_{ij}$  ( $i, j \in I$ ) s vrijednostima u  $\mathbb{Z}$  koja, za sve  $i, j \in I$ , zadovoljava sljedeće relacije naziva se **generalizirana Cartanova matrica**:

- (1)  $a_{ii} = 2$  za sve  $i \in I$ ,
- (2)  $a_{ij} \leq 0$  ako je  $i \neq j$ ,
- (3)  $a_{ij} = 0$  ako  $i$  samo ako  $a_{ji} = 0$ .

Ako postoji dijagonalna matrica  $D = \text{diag} \{s_i \mid i \in I\}$  za sve  $s_i \in \mathbb{Z}_{>0}$  takva da je  $DA$  simetrična, tada za matricu  $A$  kažemo da je **simetrizabilna**.

**Primjer 1.1.4.** Neki primjeri Cartanovih matrica su:

- (1)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (2)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (3)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Neka je  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{C}h_i$  Abelova Liejeva algebra, tj. Liejeva algebra takva da je  $[x, y] = 0$  za sve  $x, y \in \mathfrak{h}$ , dimenzije jednake kardinalitetu skupa  $I$ . Neka  $\mathfrak{h}^*$  označava dualni prostor od  $\mathfrak{h}$ , odnosno prostor svih linearnih funkcionala na  $\mathfrak{h}$ .

**Definicija 1.1.12.** *Dualna težinska rešetka pridružena Cartanovoj matrici  $A$ , označena s  $P^\vee$ , je slobodna Abelova grupa ranga  $2|I| - r(A)$  s bazom*

$$\{h_i \mid i \in I\} \cup \{d_s \mid s = 1, \dots, |I| - r(A)\}$$

pri čemu  $r(A)$  označava rang matrice  $A$ . Također, možemo definirati **težinsku rešetku** od  $A$  kao

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(P^\vee) \in \mathbb{Z}\}.$$

Neka je  $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\}$  i odaberimo linearno nezavisan podskup  $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$  tako da

$$\alpha_j(h_i) = a_{ij}, \quad \alpha_j(d_s) = 0 \text{ ili } 1$$

za  $i, j \in I, s = 1, \dots, |I| - r(A)$ . Elemente iz  $\Pi$  i  $\Pi^\vee$  nazivamo redom **prosti korijeni** i **prosti kokorijeni**.

## 1.2 Kvantne grupe i njihove reprezentacije

Fiksirajmo varijablu  $q$  koju ćemo zvati kvantni parametar. Neka je  $\mathbb{C}(q)$  oznaka za polje svih racionalnih funkcija u  $q$  s kompleksnim koeficijentima.

**Definicija 1.2.1.** *Neka je  $n \in \mathbb{Z}$ . Element  $[n]_q$  naziva se  **$q$ -cijeli broj** i definiran je s*

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Definirajmo  **$q$ -faktorijele**  $s$

$$[0]_q! = 1 \text{ i } [n]_q! = [n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [1]_q \text{ za } n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Štoviše, ako je  $n \geq m \neq 0$ , tada je kvantni analogon binomnih koeficijenata dan s

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q! [n-m]_q!}$$

i zovemo ga  **$q$ -binomni koeficijent**.

Opisat ćemo konstrukciju asocijativne algebre iz zadanih generatora i relacija. Ona će nam biti potrebna kako bismo uveli kvantne grupe. Neka je  $G$  neprazan skup, a s  $V$  označimo kompleksan vektorski prostor čiju će bazu činiti sve riječi nad  $G$ . Praznu riječ označimo sa 1. Na prostoru  $V$  definiramo množenje kao konkatenciju. Odnosno, ako su  $x_{i_1} \dots x_{i_n}$  i  $y_{i_1} \dots y_{i_m}$  dvije riječi, tada njihov produkt definiramo s

$$(x_{i_1} \dots x_{i_n}) \cdot (y_{i_1} \dots y_{i_m}) = x_{i_1} \dots x_{i_n} y_{i_1} \dots y_{i_m}.$$

Može se dokazati da proširenjem po linearnosti dobivamo bilinearnu operaciju na  $V$  koja je asocijativna te ima jedinicu 1. Takvu asocijativnu algebru s jedinicom nazivamo slobodna algebra nad  $G$ . Označimo ju s  $F$ . Za nju vrijedi univerzalno svojstvo koje govori da za svaku asocijativnu algebru s jedinicom  $M$  i za svaku funkciju  $\psi : G \rightarrow M$  postoji jedinstveni homorfizam asocijativnih algebri s jedinicom  $\phi : F \rightarrow M$  takav da je  $\psi = \phi \iota$ , pri čemu  $\iota$  označava inkluziju  $G \rightarrow F$ . Ako su  $x_i \in F$ ,  $i \in K$  elementi od  $F$  te  $R$  obostrani ideal u  $F$  generiran svim  $x_i$ ,  $i \in K$ , tada je  $F/R$  asocijativna algebra s jedinicom generirana skupom  $G$  i relacijama  $x_i = 0$ ,  $i \in K$ .

Neka je  $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$  simetrizabilna generalizirana Cartanova matrica s pripadnom matricom  $D = \text{diag}(s_i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid i \in I)$  kao u definiciji 1.1.11 i neka je  $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$  petorka pridružena matrici  $A$ . U nastavku ćemo definirati kvantnu grupu  $U_q(\mathfrak{g})$ .

**Definicija 1.2.2.** *Kvantna grupa  $U_q(\mathfrak{g})$  pridružena petorci  $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$  je asocijativna algebra s jedinicom nad  $\mathbb{C}(q)$  generirana elementima  $e_i, f_i$  ( $i \in I$ ) i  $q^h$  ( $h \in P^\vee$ ) sa sljedećim relacijama:*

- (1)  $q^0 = 1, q^h q^{h'} = q^{h+h'}$  za  $h, h' \in P^\vee$ ,
- (2)  $q^h e_i q^{-h} = q^{\alpha_i(h)} e_i$  za  $h \in P^\vee$ ,
- (3)  $q^h f_i q^{-h} = q^{-\alpha_i(h)} f_i$  za  $h \in P^\vee$ ,
- (4)  $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$  za  $i, j \in I$ ,
- (5)  $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = 0$  za  $i \neq j$ ,
- (6)  $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0$  za  $i \neq j$ .

gdje je  $q_i = q^{s_i}$  i  $K_i = q^{s_i h_i}$ .

Sada ćemo uvesti neke osnovne pojmove iz teorije reprezentacija kvantnih grupa.

**Definicija 1.2.3.**  $U_q(\mathfrak{g})$ -modul  $V^q$  naziva se **težinski modul** ako je

$$V^q = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda^q, \text{ gdje je } V_\lambda^q = \{v \in V^q \mid q^h v = q^{\lambda(h)} v \text{ za svaki } h \in P^\vee\}.$$

- (1) Nenulvektor  $v \in V_\lambda^q$  naziva se **težinski vektor** težine  $\lambda$ .

- (2) Vektor  $v$  težine  $\lambda$  naziva se **maksimalni vektor težine**  $\lambda$  ako je  $e_i v = 0$  za svaki  $i \in I$ .
- (3) Ako je  $V_\lambda^q \neq 0$ , tada za  $\lambda$  kažemo da je **težina** od  $V^q$  i za  $V_\lambda^q$  kažemo da je **težinski potprostor** pridružen  $\lambda \in P$ .
- (4) Skup težina  $U_q(\mathfrak{g})$ -modula označava se s  $wt(V)$ .

**Definicija 1.2.4.** Za  $\mu, \lambda \in P$  kažemo da je  $\mu$  manji od  $\lambda$  i pišemo  $\mu \leq \lambda$  ako je  $\lambda - \mu$  suma prostih korijena.

**Definicija 1.2.5.** *Kategorija*  $\mathcal{O}^q$  sastoji se od težinskih modula  $V^q$  nad  $U_q(\mathfrak{g})$  s konačnodimenzionalnim težinskim potprostorima za koje postoji konačan broj elemenata  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$  takvih da

$$wt(V^q) \subset D(\lambda_1) \cup \dots \cup D(\lambda_s),$$

gdje je  $D(\lambda) = \{\mu \in P \mid \mu \leq \lambda \text{ za } \lambda \in P\}$ .

Primijetimo da je  $D(\lambda)$  konus s vrhom u  $\lambda$ .

**Definicija 1.2.6.** Neka je  $A$  asocijativna algebra i  $V$   $A$ -modul. Kažemo da je  $x \in A$  **lokalno nilpotentan** na  $V$  ako za svaki  $v \in V$  postoji pozitivan broj  $N$  takav da vrijedi  $x^N \cdot v = 0$ .

Sljedeća kategorija modula bit će nam ključna prilikom uvođenja kristalnih baza u sljedećem poglavlju.

**Definicija 1.2.7.** *Kategorija*  $\mathcal{O}_{int}^q$  sastoji se od  $U_q(\mathfrak{g})$ -modula  $V^q$  koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- (1)  $V^q$  ima težinsku dekompoziciju  $V^q = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda^q$ , gdje je

$$V_\lambda = \{v \in V^q \mid q^h v = q^{\lambda(h)} v \text{ za sve } h \in P^\vee\}$$

i dimenzija od  $V_\lambda^q$  je konačna za sve  $\lambda \in P$ ,

- (2) postoji konačan broj elemenata  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in P$  takvih da

$$wt(V^q) \subset D(\lambda_1) \cup \dots \cup D(\lambda_s),$$

- (3) svi  $e_i$  i  $f_i$  ( $i \in I$ ) su lokalno nilpotentni na  $V^q$ .

Kategorija  $\mathcal{O}_{int}^q$  sastoji se od svih modula iz kategorije  $\mathcal{O}^q$  koji imaju svojstvo (3) iz definicije 1.2.7.

# Poglavlje 2

## Uvod u teoriju kristalnih baza

U ovom poglavlju slijedimo izlaganje iz poglavlja 4 knjige [2].

### 2.1 Kashiwarini operatori

U ovom potpoglavlju razvit ćemo teoriju kristalnih baza  $U_q(\mathfrak{g})$ -modula iz kategorije  $\mathcal{O}_{int}^q$ . Započet ćemo navođenjem važne leme koja nam daje egzistenciju Kashiwarinih operatora. Navodimo je bez dokaza te se njen dokaz može pronaći u knjizi [2].

**Lema 2.1.1.** *Neka je  $M$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$ , gdje je  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ . Tada za svaki  $i \in I$ , težinski vektor  $u \in M_\lambda$  ( $\lambda \in \text{wt}(M)$ ) možemo zapisati kao*

$$u = u_0 + f_i u_1 + f_i^{(2)} u_2 + \dots + f_i^{(N)} u_N,$$

gdje je  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  i  $u_k \in M_{\lambda + k\alpha_i} \cap \ker e_i$  za svaki  $k = 0, 1, \dots, N$ .

**Definicija 2.1.1.** *Neka je  $M$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$ . **Kashiwarini operatori**  $\tilde{e}_i$  i  $\tilde{f}_i$  ( $i \in I$ ) na  $M$  su definirani s*

$$\tilde{e}_i u = \sum_{k=1}^N f_i^{(k-1)} u_k, \quad \tilde{f}_i u = \sum_{k=0}^N f_i^{(k+1)} u_k. \quad (2.1)$$

Propoziciju navodimo bez dokaza te se njen dokaz može pronaći u knjizi [2].

**Propozicija 2.1.1.** *Neka je  $M$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$ , gdje je  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$ . Tada vrijedi:*

- (i)  $\tilde{e}_i M_\lambda = e_i M_\lambda \subset M_{\lambda + \alpha_i}$ ,  $\tilde{f}_i M_\lambda = f_i M_\lambda \subset M_{\lambda - \alpha_i}$ , za sve  $i \in I$  i  $\lambda \in P$ .
- (ii) Kashiwarini operatori  $\tilde{e}_i$  i  $\tilde{f}_i$  komutiraju s homomorfizmima  $U_q(\mathfrak{g})$ -modula.

Polju svih racionalnih funkcija  $\mathbb{C}(q)$  pridružit ćemo prsten

$$\mathbf{A}_0 = \{g/h \mid g, h \in \mathbb{C}(q), h(0) \neq 0\}.$$

**Definicija 2.1.2.** Neka je  $M$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$ . Slobodni  $\mathbf{A}_0$ -podmodul  $\mathcal{L}$  od  $M$  je *kristalna rešetka* ako vrijedi

- (1)  $\mathbb{C}(q) \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathcal{L}_\lambda \cong M_\lambda^q$  za svaki  $\lambda \in \text{wt}(M)$ ,
- (2)  $\mathcal{L} = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathcal{L}_\lambda$ , gdje je  $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} \cap M_\lambda$  za svaki  $\lambda \in P$ ,
- (3)  $\tilde{e}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ ,  $\tilde{f}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$  za svaki  $i \in I$ .

Sada ćemo definirati pojam kristalne baze, koji zajedno s pojmom kristalnog grafa, čija definicija slijedi odmah iza, predstavlja glavni pojam koji proučavamo u radu.

**Definicija 2.1.3.** *Kristalna baza*  $U_q(\mathfrak{g})$ -modula  $M$  u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$  je par  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  za koji vrijedi

- (1)  $\mathcal{L}$  je kristalna rešetka od  $M$ ,
- (2)  $\mathcal{B}$  je baza nad  $\mathbb{C}$  od  $\mathcal{L}/q\mathcal{L} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathcal{L}$ ,
- (3)  $\mathcal{B} = \bigsqcup_{\lambda \in P} \mathcal{B}_\lambda$ , gdje je  $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda/q\mathcal{L}_\lambda)$ ,
- (4)  $\tilde{e}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$ ,  $\tilde{f}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \cup \{0\}$  za svaki  $i \in I$ ,
- (5) za svaki  $b, b' \in \mathcal{B}$  i  $i \in I$  vrijedi  $\tilde{f}_i b = b'$  ako i samo ako  $b = \tilde{e}_i b'$ .

Kanonsko preslikavanje  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/q\mathcal{L}$  označavat ćemo s  $x \mapsto \bar{x}$ .

**Definicija 2.1.4.** Neka je  $M$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modul iz kategorije  $\mathcal{O}_{int}^q$ . Neka je  $\mathcal{B}$  skup vrhova te definiramo obojenu strelicu boje  $i$  u  $\mathcal{B}$  tako da

$$b \xrightarrow{i} b' \text{ ako i samo ako } \tilde{f}_i b = b' \text{ (} i \in I \text{)}.$$

Tada tako dobiveni usmjereni graf  $\mathcal{B}$  nazivamo *kristalni graf* od  $M$ .

Sljedeći primjer prikazuje kristalnu rešetku i kristalni graf za poznatu kvantnu grupu  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

**Primjer 2.1.2.**  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  je kvantna grupa generirana elementima  $e, f$  i  $K^\pm$  i relacijama

$$KeK^{-1} = q^2e, \quad KfK^{-1} = q^{-2}f, \quad ef - fe = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$



U notaciji definicije 1.2.2 imamo

$$I = \{1\}, \quad e = e_1, \quad f = f_1, \quad K = q^{h_1}$$

te imamo samo relacije (1) – (4) jer se preostale dvije ne odnose na tu kvantnu grupu zbog toga što je skup indeksa  $I$  premali.

Za  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , neka  $V(m)$  označava  $(m+1)$ -dimenzionalni ireducibilni  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modul s bazom  $\{u, fu, \dots, f^{(m)}u\}$ , gdje je

$$eu = 0, \quad Ku = q^m u, \quad f^{(k)}u = \frac{1}{[k]_q!} f^k u \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Definiramo

$$\mathcal{L}(m) = \bigoplus_{k=0}^m \mathbf{A}_0 f^{(k)}u, \quad \mathcal{B}(m) = \{\bar{u}, \overline{fu}, \dots, \overline{f^{(m)}u}\},$$

gdje  $\overline{f^{(k)}u}$  predstavlja sliku od  $f^{(k)}u$  s obzirom na kanonsko preslikavanje  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}/q\mathcal{L}$ . Iz definicije Kashiwarinih operatora imamo

$$\tilde{e}f^{(k)}u = f^{(k-1)}u \quad \text{i} \quad \tilde{f}f^{(k)}u = f^{(k+1)}u.$$

Stoga je  $\mathcal{L}(m)$  kristalna rešetka od  $V(m)$ . Štoviše,  $\mathcal{B}(m)$  je baza nad  $\mathbb{C}$  od

$$\mathcal{L}(m)/q\mathcal{L}(m) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbf{A}_0} \mathcal{L}(m).$$

Sada je jednostavno provjeriti da je  $(\mathcal{L}(m), \mathcal{B}(m))$  kristalna baza od  $V(m)$ . Kristalni graf  $\mathcal{B}(m)$  je

$$\bar{u} \rightarrow \overline{fu} \rightarrow \overline{f^{(2)}u} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{f^{(m)}u}.$$

Može se dokazati da svaki  $U_q(\mathfrak{g})$ -modul iz kategorije  $\mathcal{O}_{int}^q$  ima jedinstvenu (do na izomorfizam) kristalnu bazu. Ona se može konstruirati na sljedeći način. Neka je  $\lambda \in P$  dominantna integralna težina i neka je  $V(\lambda)$  ireducibilan  $U_q(\mathfrak{g})$ -modul najveće težine s najvećom težinom  $\lambda$  i vektorom najveće težine  $v_\lambda$ . Neka je  $\mathcal{L}(\lambda)$  slobodni  $\mathbf{A}_0$ -podmodul od  $V(\lambda)$  razapet vektorima oblika  $\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_r} v_\lambda$  ( $r \geq 0, i_k \in I$ ) i stavimo

$$\mathcal{B}(\lambda) = \left\{ \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_r} v_\lambda + q\mathcal{L}(\lambda) \in \mathcal{L}(\lambda)/q\mathcal{L}(\lambda) \mid r \geq 0, i_k \in I \right\} \setminus \{0\}.$$

## 2.2 Tenzorski produkt

U ovom dijelu ćemo opisati jednu od kombinatornih značajki kristalnih baza, a to je tenzorski produkt. Da bismo uveli tenzorski produkt kristalnih baza, trebat ćemo preslikavanja iz sljedeće definicije.

**Definicija 2.2.1.** Neka je  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$  s kristalnom bazom  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ . Za  $i \in I$  i  $b \in \mathcal{B}_\lambda$  ( $\lambda \in P$ ), definiramo preslikavanja  $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}$  sa

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(b) &= \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \in \mathcal{B}\}, \\ \varphi_i(b) &= \max\{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i^k b \in \mathcal{B}\}.\end{aligned}$$

**Primjer 2.2.1.** Za  $\mathcal{B}(2)$ , iz primjera 2.1.2, je kristalni graf oblika

$$\bar{u} \rightarrow \overline{fu} \rightarrow \overline{f^{(2)}u}$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(\bar{u}) &= 0, & \varepsilon_i(\overline{fu}) &= 1, & \varepsilon_i(\overline{f^{(2)}u}) &= 2, \\ \varphi_i(\bar{u}) &= 2, & \varphi_i(\overline{fu}) &= 1, & \varphi_i(\overline{f^{(2)}u}) &= 0.\end{aligned}$$

Idući teorem navodimo bez dokaza te se njegov dokaz može pronaći u knjizi [2].

**Teorem 2.2.2.** Neka je  $M_j$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$  i neka je  $(\mathcal{L}_j, \mathcal{B}_j)$  kristalna baza od  $M_j$  ( $j = 1, 2$ ). Označimo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$  i  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ . Tada je  $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$  kristalna baza od  $M_1 \otimes_{\mathbb{C}(q)} M_2$ , gdje je djelovanje Kashiwarinih operatora  $\tilde{e}_i$  i  $\tilde{f}_i$  na  $\mathcal{B}$  ( $i \in I$ ) dano s

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2), \end{cases} \\ \tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) &= \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2). \end{cases}\end{aligned}$$

Stoga, vrijedi

$$\begin{aligned}wt(b_1 \otimes b_2) &= wt(b_1) + wt(b_2), \\ \varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) &= \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, wt(b_1) \rangle), \\ \varphi_i(b_1 \otimes b_2) &= \max(\varphi_i(b_2), \varphi_i(b_1) + \langle h_i, wt(b_2) \rangle), \\ b_1 \otimes 0 &= 0 \otimes b_2 = 0.\end{aligned}$$

Pišemo  $b_1 \otimes b_2$  za  $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ .

Kristalni graf  $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$  od  $M_1 \otimes M_2$  s Kashiwarinim operatorima definiranim u propoziciji 2.1.1 označavamo s  $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ . Sada ćemo pokazati kako ga možemo odrediti.

**Primjer 2.2.3.** *Neka je  $V(2)$  trodimenzionalan ireducibilan  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modul, kao u primjeru 2.1.2 uz  $m = 2$ , i  $(\mathcal{L}(2), \mathcal{B}(2))$  kristalna baza od  $V(2)$ . Tada u nastavku vidimo kako izgleda kristalni graf  $\mathcal{B}(2) \otimes \mathcal{B}(2)$ .*

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{u} \otimes \bar{u} & \longrightarrow & \overline{fu} \otimes \bar{u} & \longrightarrow & \overline{f^{(2)}u} \otimes \bar{u} \\
 & & & & \downarrow \\
 \bar{u} \otimes \overline{fu} & \longrightarrow & \overline{fu} \otimes \overline{fu} & & \overline{f^{(2)}u} \otimes \overline{fu} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bar{u} \otimes \overline{f^{(2)}u} & & \overline{fu} \otimes \overline{f^{(2)}u} & & \overline{f^{(2)}u} \otimes \overline{f^{(2)}u}
 \end{array}$$

Na grafu prvo čitamo stupce, a zatim retke. Znači da je, na primjer,  $\overline{f^{(2)}u} \otimes \overline{fu}$  vektor u trećem stupcu i drugom retku.

Dekompozicija kristalnog grafa  $\mathcal{B}(2) \otimes \mathcal{B}(2)$  na disjunktne unije njegovih povezanih komponenti se podudara s dekompozicijom  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modula  $V(2) \otimes V(2)$  na direktnu sumu njegovih ireducibilnih komponenti,

$$V(2) \otimes V(2) \cong V(4) \oplus V(2) \oplus V(0).$$

## 2.3 Kristali

Neka je  $I$  konačan skup indeksa,  $A = (a_{ij})$  generalizirana Cartanova matrica reda  $|I|$  te neka su  $\Pi$  ( $\Pi^\vee$ ) skup prostih korijena (kokorijena) i  $P$  ( $P^\vee$ ) težinska rešetka (dualna težinska rešetka). Sljedećom definicijom ćemo pojmu kristalne baze pridružiti određeni usmjereni obojeni graf, kojeg ćemo nazivati kristalom.

**Definicija 2.3.1.** *Kristal pridružen petorci  $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$  je svaki skup  $\mathcal{B}$  takav da postoje preslikavanja  $wt : \mathcal{B} \rightarrow P$ ,  $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{0\}$  i  $\varepsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  ( $i \in I$ ) za koja vrijede sljedeća svojstva:*

- (1)  $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, wt(b) \rangle$  za svaki  $i \in I$ ,
- (2)  $wt(\tilde{e}_i b) = wt b + \alpha_i$  ako je  $\tilde{e}_i b \in \mathcal{B}$ ,
- (3)  $wt(\tilde{f}_i b) = wt b - \alpha_i$  ako je  $\tilde{f}_i b \in \mathcal{B}$ ,
- (4)  $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$ ,  $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$  ako je  $\tilde{e}_i b \in \mathcal{B}$ ,

$$(5) \quad \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \quad \varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1 \text{ ako je } \tilde{f}_i b \in \mathcal{B},$$

$$(6) \quad \tilde{f}_i b = b' \text{ ako i samo ako } b = \tilde{e}_i b' \text{ za } b, b' \in \mathcal{B}, i \in I,$$

$$(7) \quad \text{ako } \varphi_i(b) = -\infty \text{ za } b \in \mathcal{B} \text{ tada } \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0.$$

U tom slučaju kažemo da je  $\mathcal{B}$   $U_q(\mathfrak{g})$ -kristal, gdje s  $U_q(\mathfrak{g})$  označavamo kvantnu grupu pridruženu  $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ . Neka je

$$\mathcal{B}_\lambda = \{b \in \mathcal{B} \mid \text{wt}(b) = \lambda\}$$

tako da je  $\mathcal{B} = \sqcup_{\lambda \in P} \mathcal{B}_\lambda$ . Za  $U_q(\mathfrak{g})$ -kristal kažemo da je **semiregularan** ako za sve  $b \in \mathcal{B}$  i  $i \in I$ , vrijedi

$$\varepsilon_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \in \mathcal{B}\}, \quad \varphi_i(b) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i^k b \in \mathcal{B}\}.$$

Primijetimo kako pojam semiregularnosti osigurava da su preslikavanja  $\varepsilon_i$  i  $\varphi_i$  usklađena s pripadnim preslikavanjima iz definicije 2.2.1. Nadalje, kao što ćemo vidjeti u nastavku, pojam kristala predstavlja kombinatornu strukturu koja je prirodno pridružena pojmu kristalne baze.

### Primjer 2.3.1.

(1) Može se dokazati da je kristalni graf  $\mathcal{B}$   $U_q(\mathfrak{g})$ -modula u kategoriji  $\mathcal{O}_{\text{int}}^q U_q(\mathfrak{g})$ -kristal.

(2) Za  $\lambda \in P$ , neka je  $T_\lambda = \{t_\lambda\}$  jednočlan skup. Za  $i \in I$ , definiramo

$$\text{wt}(t_\lambda) = \lambda, \quad \tilde{e}_i t_\lambda = \tilde{f}_i t_\lambda = 0, \quad \varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty.$$

Tada je  $T_\lambda$   $U_q(\mathfrak{g})$ -kristal.

(3) Za  $i \in I$ , neka je dan skup  $\mathcal{B}^{(i)} = \{b_i(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$  i definiramo

$$\begin{aligned} \text{wt}(b_i(n)) &= n\alpha_i, \\ \tilde{e}_j(b_i(n)) &= \begin{cases} b_i(n+1) & \text{ako je } j = i \\ 0 & \text{ako je } j \neq i, \end{cases} \\ \tilde{f}_j(b_i(n)) &= \begin{cases} b_i(n-1) & \text{ako je } j = i \\ 0 & \text{ako je } j \neq i, \end{cases} \\ \varepsilon_j(b_i(n)) &= \begin{cases} -n & \text{ako je } j = i \\ -\infty & \text{ako je } j \neq i, \end{cases} \\ \varphi_j(b_i(n)) &= \begin{cases} n & \text{ako je } j = i \\ -\infty & \text{ako je } j \neq i. \end{cases} \end{aligned}$$

Tada je  $\mathcal{B}^{(i)}U_q(\mathfrak{g})$ -kristal.

**Definicija 2.3.2.** Tenzorski produkt  $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$  kristala  $\mathcal{B}_1$  i  $\mathcal{B}_2$  je Kartezijev produkt  $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$  čija je kristalna struktura definirana s

- (1)  $wt(b_1 \otimes b_2) = wt(b_1) + wt(b_2)$ ,
- (2)  $\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varepsilon_i(b_1), \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, wt(b_1) \rangle)$ ,
- (3)  $\varphi_i(b_1 \otimes b_2) = \max(\varphi_i(b_2), \varphi_i(b_1) + \langle h_i, wt(b_2) \rangle)$ ,
- (4)  $\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2), \end{cases}$
- (5)  $\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{ako je } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2), \end{cases}$
- (6)  $b_1 \otimes 0 = 0 \otimes b_2 = 0$ .

Element  $(b_1, b_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$  ćemo označavati s  $b_1 \otimes b_2$ .

Valja istaknuti kako je gornja definicija tenzorskog produkta kristala usklađena s tenzorskim produktom modula, tj., preciznije, s teoremom 2.2.2.

**Primjer 2.3.2.**

- (1) Neka je  $\mathcal{B}_j$  kristalni graf od  $U_q(\mathfrak{g})$ -modula  $M_j$  u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^q$  ( $j = 1, 2$ ). Tada je  $U_q(\mathfrak{g})$ -kristalna struktura na  $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$  dana u teoremu 2.2.2.
- (2) Za svaki  $U_q(\mathfrak{g})$ -kristal  $\mathcal{B}$ , kristalna struktura na  $\mathcal{B} \otimes T_\lambda$  je dana s

$$\begin{aligned} wt(b \otimes t_\lambda) &= wt(b) + \lambda, \\ \tilde{e}_i(b \otimes t_\lambda) &= \tilde{e}_i b \otimes t_\lambda, \quad \tilde{f}_i(b \otimes t_\lambda) = \tilde{f}_i b \otimes t_\lambda, \\ \varepsilon_i(b \otimes t_\lambda) &= \varepsilon_i(b), \quad \varphi_i(b \otimes t_\lambda) = \varphi_i(b) + \langle h_i, \lambda \rangle. \end{aligned}$$

Slično, kristalna struktura na  $T_\lambda \otimes \mathcal{B}$  je dana s

$$\begin{aligned} wt(t_\lambda \otimes b) &= \lambda + wt(b), \\ \tilde{e}_i(t_\lambda \otimes b) &= t_\lambda \otimes \tilde{e}_i b, \quad \tilde{f}_i(t_\lambda \otimes b) = t_\lambda \otimes \tilde{f}_i b, \\ \varepsilon_i(t_\lambda \otimes b) &= \varepsilon_i(b) - \langle h_i, \lambda \rangle, \quad \varphi_i(t_\lambda \otimes b) = \varphi_i(b). \end{aligned}$$

**Definicija 2.3.3.** Neka su  $\mathcal{B}_1$  i  $\mathcal{B}_2$  kristali pridruženi  $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ . **Kristalni morfizam**  $\psi : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  je preslikavanje koje ide s  $\mathcal{B}_1 \cup \{0\}$  u  $\mathcal{B}_2 \cup \{0\}$  takvo da

(1)  $\psi(0) = 0$ ,

(2) ako je  $b \in \mathcal{B}_1$  i  $\psi(b) \in \mathcal{B}_2$ , tada

$$\text{wt}(\psi(b)) = \text{wt}(b), \quad \varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b), \quad \varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b),$$

za svaki  $i \in I$ ,

(3) ako su  $b, b' \in \mathcal{B}_1$ ,  $\psi(b), \psi(b') \in \mathcal{B}_2$  i  $\tilde{f}_i b = b'$ , tada je  $\tilde{f}_i \psi(b) = \psi(b')$  i  $\psi(b) = \tilde{e}_i \psi(b')$ , za svaki  $i \in I$ .

Iako za kristalni morfizam koristimo oznaku  $\psi : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ , domena i kodomena tog preslikavanja dodatno sadrže i nulu.

# Poglavlje 3

## Youngovi tabloi i kristali

U ovom poglavlju slijedimo izlaganje iz poglavlja 7 i 8 knjige [2].

### 3.1 Kvantna grupa $U_q(\mathfrak{gl}_n)$

Prisjetimo se, opća linearna Liejeva algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  je Liejeva algebra svih  $n \times n$  matrica nad  $\mathbb{C}$  uz komutator

$$[X, Y] = XY - YX$$

za  $X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

Neka je  $E_{i,j}$  elementarna matrica koja ima 1 na mjestu  $(i, j)$ , a 0 inače. Neka je  $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$  skup indeksa i uvedimo oznake

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \quad \text{za } i \in I.$$

Opća linearna Liejeva algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  je generirana elementima  $e_i, f_i$  ( $i \in I$ ),  $E_{j,j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), dok je specijalna linearna Liejeva algebra  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  podalgebra od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  generirana elementima  $e_i, f_i, h_i$  ( $i \in I$ ).

Maksimalna toralna podalgebra od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  je definirana s  $\mathfrak{h} = \mathbb{C}E_{1,1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}E_{n,n}$ , tj. to je komutativna podalgebra svih dijagonalnih matrica. Za svaki  $i = 1, 2, \dots, n$  definiramo linearno preslikavanje  $\epsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  sa

$$\epsilon_i(h) = \lambda_i, \quad \text{gdje je } h = \text{diag}(\lambda_j \mid j = 1, \dots, n) \in \mathfrak{h}.$$

Za  $h = \text{diag}(\lambda_j \mid j = 1, \dots, n) \in \mathfrak{h}$  i  $i, j = 1, \dots, n$  vrijedi

$$[h, E_{i,j}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j} = (\epsilon_i - \epsilon_j)(h)E_{i,j}$$

Stoga će opća linearna Liejeva algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  imati trokutastu dekompoziciju

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) &= \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi_-} \mathfrak{g}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Phi_+} \mathfrak{g}_\alpha \right) \\ &= \left( \bigoplus_{i>j} \mathbb{C}E_{i,j} \right) \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}E_{i,i} \right) \oplus \left( \bigoplus_{i<j} \mathbb{C}E_{i,j} \right),\end{aligned}$$

gdje  $\Phi_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j\}$  (odnosno,  $\Phi_- = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i > j\}$ ) zovemo skupovima svih pozitivnih korijena (odnosno, negativnih korijena) od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

Linearni funkcionali dani s

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

su prosti korijeni, a slobodna Abelova grupa  $Q = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_{n-1}$  je korijenska rešetka od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

Rešetka  $P = \mathbb{Z}\epsilon_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\epsilon_n$  koja leži unutar  $\mathfrak{h}^*$  je **težinska rešetka** od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , dok je  $P^\vee = \mathbb{Z}E_{1,1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}E_{n,n}$  **dualna težinska rešetka** od  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Iduća definicija je samo specijalan slučaj definicije 1.2.2.

**Definicija 3.1.1.** *Kvantna grupa  $U_q(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}))$  je asocijativna algebra s 1 nad  $\mathbb{C}(q)$  generirana elementima  $e_i, f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) i  $q^h$  ( $h \in P^\vee$ ) i sljedećim relacijama:*

1.  $q^0 = 1, \quad q^h q^{h'} = q^{h+h'} \quad \text{za sve } h, h' \in P^\vee,$
2.  $q^h e_i q^{-h} = q^{\alpha_i(h)} e_i, \quad q^h f_i q^{-h} = q^{-\alpha_i(h)} f_i,$
3.  $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad \text{pri čemu je } K_i = q^{h_i},$
4.  $e_i^2 e_j - (q + q^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0 \quad \text{za } |i - j| = 1,$
5.  $f_i^2 f_j - (q + q^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0 \quad \text{za } |i - j| = 1,$
6.  $e_i e_j - e_j e_i = f_i f_j - f_j f_i = 0 \quad \text{za } |i - j| > 1.$

## 3.2 Kategorija $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$

**Definicija 3.2.1.** *Kategorija  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  se sastoji od konačnodimenzionalnih  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modula  $M$  s težinskom dekompozicijom  $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$  tako da je  $\text{wt}(M) \subset P_{\geq 0}$ . Morfizmi u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  su homomorfizmi  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modula.*



Neka je  $V = \mathbb{C}(q)v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}(q)v_n$   $n$ -dimenzionalni vektorski prostor nad  $\mathbb{C}(q)$  kojem je baza  $v_1, \dots, v_n$ . Definirajmo  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -**djelovanje** na  $V$  sa

$$\begin{aligned} q^h v_j &= q^{\epsilon_j(h)} v_j \text{ za } h \in P^\vee, j = 1, \dots, n, \\ e_i v_j &= \begin{cases} v_i & \text{ako je } j = i + 1, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases} \\ f_i v_j &= \begin{cases} v_{i+1} & \text{ako je } j = i, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tada je  $V$   $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modul koji se naziva **vektorska reprezentacija** od  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ . Neka je  $\mathcal{L} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{A}_0 v_j$  i  $\mathbf{B} = \{ \boxed{j} = v_j + q\mathcal{L} \mid j = 1, 2, \dots, n \}$ . Tada je  $(\mathcal{L}, \mathbf{B})$  kristalna baza od  $V$  sa kristalnim grafom

$$\mathbf{B} : \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{n-2} \boxed{n-1} \xrightarrow{n-1} \boxed{n}.$$

Vektorska reprezentacija  $V$  je primjer  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modula najveće težine u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  koje ćemo definirati u nastavku. Kristalni graf  $\mathbf{B}$  će imati glavnu ulogu u konstrukciji konkretnih realizacija kristalnih grafova za konačnodimenzionalne ireducibilne  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$ .

**Primjer 3.2.1.** *Vektorska reprezentacija  $V$  je  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modul najveće težine s najvećom težinom  $\epsilon_i$  i vektorom najveće težine  $v_1$ . Budući da su  $\epsilon_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) težine od  $V$ , on pripada kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$ .*

Definiramo **dominantne integralne težine** sa

$$P_{\geq 0}^+ = \{ \lambda = \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + \lambda_n \epsilon_n \neq 0 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0 \}.$$

Sljedeći teorem, kojeg navodimo bez dokaza, kaže nam da su ireducibilni moduli iz kategorije  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  parametrizirani dominantnim integralnim težinama.

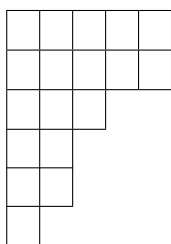
**Teorem 3.2.2.** *Za svaki  $\lambda = \lambda_1 \epsilon_1 + \cdots + \lambda_n \epsilon_n \in P_{\geq 0}^+$ , postoji jedinstveni ireducibilan  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modul  $V(\lambda)$  u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$ . Obrnuto, svaki konačnodimenzionalan ireducibilan  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  ima oblik  $V(\lambda)$  za neku dominantnu integralnu težinu  $\lambda \in P_{\geq 0}^+$ .*

### 3.3 Youngove tablice i kristali

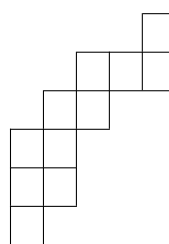
Cilj ove točke je uspostaviti vezu između  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristala i Youngovih dijagrama.

**Definicija 3.3.1.**

- (1) *Youngov dijagram* je kolekcija kvadratića koji su raspoređeni u redove poravnate ulijevo, pri čemu se broj kvadratića u svakom retku smanjuje odozgo prema dolje.
- (2) *Kosi Youngov dijagram* je dijagram dobiven uklanjanjem manjeg Youngovog dijagrama iz većeg koji ga sadrži pri čemu je prvi redak manjeg dijagrama sadržan u prvom retku većeg dijagrama. Isto vrijedi i za prve stupce.



Slika 3.1: Youngov dijagram



Slika 3.2: Kosi Youngov dijagram

**Definicija 3.3.2.**

- (1) Za kvadratić u kosom Youngovom dijagramu kažemo da je **uklonjiv** ako desno i ispod njega nema kvadratića.
- (2) Mjesto gdje se kvadratić može dodati u kosi Youngov dijagram kako bi se stvorio uklonjivi kvadratić većeg kosog Youngovog dijagrama naziva se **uvučeni kut**.

**Definicija 3.3.3.** *Youngova tablica* je (kosi) Youngov dijagram ispunjen brojevima na način da se u svakom kvadratiću nalazi jedan broj. **Semistandardna tablica** je tablica dobivena iz (kosog) Youngovog dijagrama popunjavanjem svih polja brojevima  $1, 2, \dots, n$  tako da:

- (1) brojevi u svakom retku rastu,
- (2) brojevi u svakom stupcu strogo rastu.

Za tablicu  $T$  definiramo njenu **težinu** kao

$$wt(T) = k_1\epsilon_1 + \dots + k_n\epsilon_n$$

pri čemu  $k_i$  označava broj vrijednosti  $i$  koje se pojavljuju u  $T$ .

**Definicija 3.3.4.** *Oblik* tablice je linearna kombinacija težina  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  takva da je koeficijent uz svaki  $\epsilon_i$  upravo broj kvadratića u  $i$ -tom retku tablice.

**Primjer 3.3.1.** *Ako semistandardna Youngova tablica ima oblik*

$$\lambda = 4\epsilon_1 + 3\epsilon_2 + \epsilon_3$$

*i težinu*

$$\mu = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 2\epsilon_4,$$

*onda u nastavku možemo vidjeti kako ona izgleda.*

1	1	2	4
2	3	3	
4			

*Ova tablica nije jedinstvena tablica oblika  $\lambda$  i težine  $\mu$  budući da je*

1	1	2	4
2	3	4	
3			

*također tablica s istim oblikom i težinom.*

**Primjer 3.3.2.** *Semistandardna tablica*

1	2	2	3	4
2	3	3		
3	4			
4				

*ima oblik*

$$\lambda = 5\epsilon_1 + 3\epsilon_2 + 2\epsilon_3 + \epsilon_4$$

*i težinu*

$$\mu = \epsilon_1 + 3\epsilon_2 + 4\epsilon_3 + 3\epsilon_4.$$

Neka je  $Y$  (kosi) Youngov dijagram i neka je  $N$  broj kvadratića u  $Y$ . Skup svih semistandardnih tablica oblika  $Y$  označavamo s  $\mathfrak{B}(Y)$ . Sljedeća definicija omogućit će nam kasnije da Youngovim tablicama pridružimo kristale.

**Definicija 3.3.3.**

- (1) **Dalekoistočno očitavanje** semistandardne tablice  $T \in \mathfrak{B}(Y)$  ide kroz stupce od vrha prema dolje i s desna na lijevo.
- (2) **Srednjeistočno očitavanje** semistandardne tablice  $T \in \mathfrak{B}(Y)$  ide po redovima s desna na lijevo i od vrha prema dolje.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} = \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{4}$$

Slika 3.3: Dalekoistočno očitavanje

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} = \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{4} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{4}$$

Slika 3.4: Srednjeistočno očitavanje

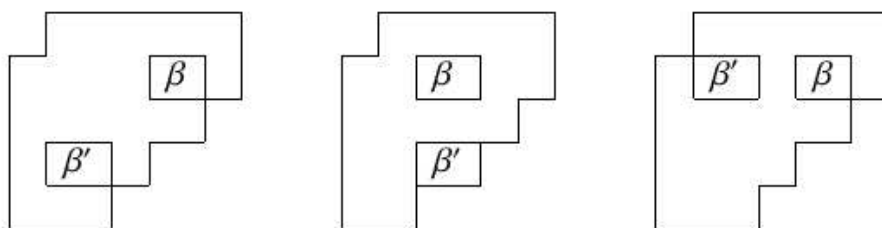
**Definicija 3.3.5.** Neka su  $\beta$  i  $\beta'$  dva kvadratića u  $T \in \mathfrak{B}(Y)$  na mjestima  $(i, j)$ , odnosno  $(i', j')$ . Kažemo da je  $\beta$  **strogo viši** od  $\beta'$  ako  $\beta \neq \beta'$ ,  $i \leq i'$  i  $j \geq j'$ .

Neka je  $\mathbf{B}$  kristal za vektorsku reprezentaciju od  $\mathfrak{gl}_n$ .

**Definicija 3.3.6.** Za očitavanje  $\psi : \mathfrak{B}(Y) \rightarrow \mathbf{B}^{\otimes N}$  kažemo da je **dopustivo** ako se  $\beta$  pojavljuje u očitavanju prije  $\beta'$  uvijek kad je  $\beta$  stogo viši od  $\beta'$ .

Na primjer, dalekoistočno i srednjeistočno očitavanje su dopustiva.

Neka su  $\beta$  i  $\beta'$  dva kvadratića u  $T$  na mjestima  $(i, j)$ , odnosno  $(i', j')$ . Kažemo da su  $\beta$  i  $\beta'$  u usporedivom položaju ako je bilo koji od njih strogo viši od drugog.

Slika 3.5:  $\beta$  je strogo viši od  $\beta'$ 

**Teorem 3.3.4.** *Neka je  $Y$  (kosi) Youngov dijagram i neka je  $\mathfrak{B}(Y)$  skup svih semistandardnih tablica oblika  $Y$ .*

- (1) *Za svako dopustivo očitavanje  $\psi : \mathfrak{B}(Y) \rightarrow \mathbf{B}^{\otimes N}$ , skup  $\psi(\mathfrak{B}(Y)) \cup \{0\}$  je zatvoren na djelovanje Kashiwarinih operatora  $\tilde{e}_i$  i  $\tilde{f}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). Stoga, dopustivo očitavanje definira  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristalnu strukturu na  $\mathfrak{B}(Y)$ .*
- (2) *Inducirana  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristalna struktura na  $\mathfrak{B}(Y)$  ne ovisi o izboru dopustivog očitavanja.*

*Dokaz.* Neka je  $\psi : \mathfrak{B}(Y) \rightarrow \mathbf{B}^{\otimes N}$  dopustivo očitavanje. Fiksirajmo  $i \in I = \{1, 2, \dots, n-1\}$  i neka je  $T \in \mathfrak{B}(Y)$  semistandardna tablica. Najprije ćemo dokazati da su tablice  $\tilde{e}_i T$  i  $\tilde{f}_i T$  neovisne o izboru  $\psi$ .

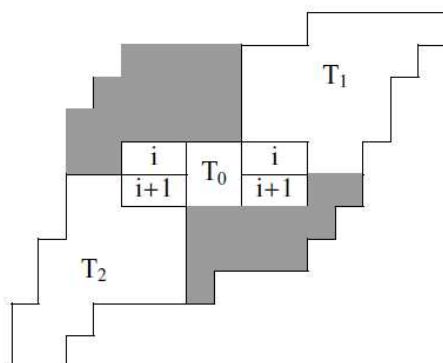
Pretpostavimo da  $T$  sadrži pravokutnu podtablicu s dva reda tako da se gornji red sastoji od kvadratića  $\boxed{i}$ , a donji red od  $\boxed{i+1}$  što možemo vidjeti na slici 3.6.

$$T_0 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \boxed{i} & \dots & \boxed{i} \\ \hline \boxed{i+1} & \dots & \boxed{i+1} \\ \hline \end{array}$$

Slika 3.6:  $i$ -trivijalni pravokutnik

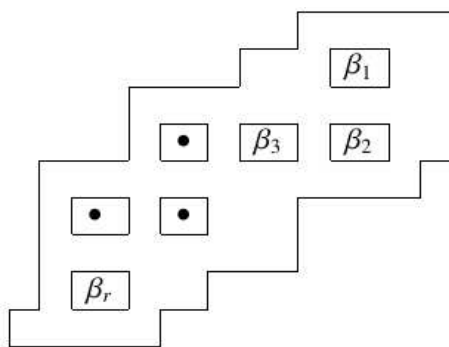
Takav pravokutnik naziva se  $i$ -trivijalni pravokutnik jer imamo  $\tilde{e}_i T_0 = \tilde{f}_i T_0 = 0$ . Pretpostavimo da je  $T_0$  maksimalne veličine među svim takvim pravokutnicima.

Neka je  $T_1$  podtablica od  $T$  koja se sastoji od kvadratića koji su strogo viši od kvadratića  $\boxed{i}$  koji se nalazi u gornjem desnom kutu od  $T_0$ . Nadalje, neka je  $T_2$  podtablica od  $T$  koja se sastoji od kvadratića koji su strogo niži od kvadratića  $\boxed{i+1}$  koji se nalazi u donjem lijevom kutu od  $T_0$  kao na slici 3.7.

Slika 3.7: Podtablice  $T_1$  i  $T_2$ 

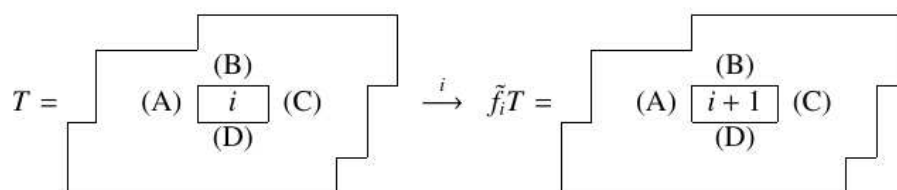
Budući da je  $T$  semistandardna tablica i  $T_0$  je maksimalna, ne postoji kvadratić  $\boxed{i}$  u osjenčanom području od  $T$ . Stoga se za bilo koje dopustivo očitavanje od  $T$ ,  $T$  može promatrati kao  $U_q(\mathfrak{g}_{(i)})$ -kristal  $T_1 \otimes T_0 \otimes T_2$ , gdje je  $U_q(\mathfrak{g}_{(i)})$  podalgebra od  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$  koju generiraju  $e_i, f_i$  i  $K_i^{\pm 1}$ . Štoviše, budući da je  $\tilde{e}_i T_0 = \tilde{f}_i T_0 = 0$ ,  $T$  možemo promatrati kao  $U_q(\mathfrak{g}_{(i)})$ -kristal  $T_1 \otimes T_2$ .

Ponavljajući gornji argument, možemo pretpostaviti da se kvadratići  $\boxed{i}$  i  $\boxed{i+1}$  pojavljuju samo na usporedivim pozicijama, osim u  $i$ -trivijalnim pravokutnicima kao na slici 3.8.

Slika 3.8: Usporedivi položaji  $\beta_1, \dots, \beta_r$ 

Stoga, za svako dopustivo očitavanje,  $T$  se može promatrati kao  $\beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_r$ , gdje je  $\beta_k = \boxed{i}$  ili  $\boxed{i+1}$ , a svi leže u usporedivim položajima pa stoga  $\tilde{e}_i T$  i  $\tilde{f}_i T$  ne ovise o izboru dopustivog očitavanja  $\psi$ .

Preostaje pokazati da je  $\tilde{e}_i T, \tilde{f}_i T \in \mathcal{B}(Y) \cup \{0\}$ . Pretpostavimo da  $\tilde{f}_i T \neq 0$ . U tom slučaju,  $\tilde{f}_i$  preslikava neki kvadratić  $b = \boxed{i}$  u  $\boxed{i+1}$ .

Slika 3.9: Preslikavanje kvadratića pomoću  $\tilde{f}_i$ 

Neka je  $b' = \boxed{j}$  kvadratić koji leži na jednom od četiri mjesta (A), (B), (C), (D) oko  $b = \boxed{i}$  kao na slici 3.9. Ako  $b'$  leži na (A) ili (B), tada  $j \leq i$  jer je  $T$  semistandardna tablica. Stoga se nema što dokazivati. Ako  $b'$  leži na (C), tada je  $j \geq i+1$ . Ako je  $j = i+1$ , tada prema pravilu tenzorskog produkta,  $\tilde{f}_i$  ne može djelovati na  $b$ . Stoga je  $j \geq i+2$ . Ako  $b'$  leži na (D), tada je  $j \geq i$ . Da je  $j = i$ , tada bi, prema pravilu tenzorskog produkta,  $\tilde{f}_i$  djelovao na  $b'$ , a ne na  $b$ . Stoga moramo imati  $j \geq i+1$ . Slijedi da je  $\tilde{f}_i T$  također semistandardna tablica.

Slično se može provjeriti da je  $\tilde{e}_i T \in \mathcal{B}(Y) \cup \{0\}$ , čime je dokaz završen.  $\square$

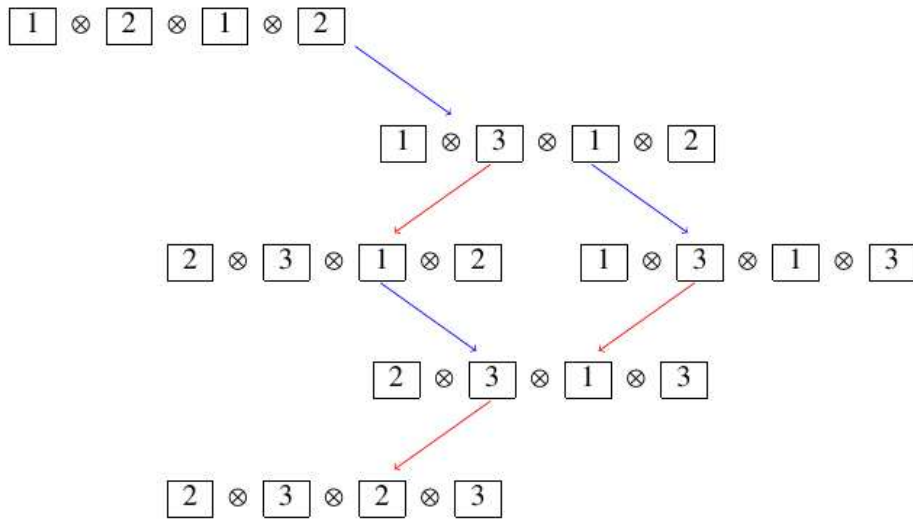
**Primjer 3.3.5.** Neka je  $n = 3$  i  $Y = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ . Tada je kristal  $\mathbf{B}$  jednak

$$\mathbf{B} : \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3}$$

$i$

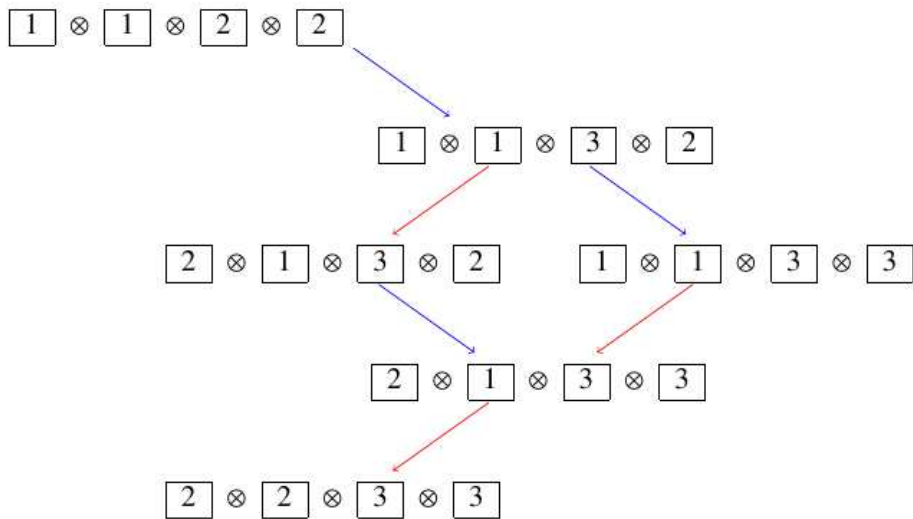
$$\mathcal{B}(Y) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} \right\}.$$

Za dalekoistočno očitavanje,  $U_q(\mathfrak{gl}_3)$ -kristalna struktura na  $\mathcal{B}(Y)$  je dana na slici 3.10.



Slika 3.10:  $U_q(\mathfrak{gl}_3)$ -kristalna struktura na  $\mathcal{B}(Y)$  dobivena dalekoistočnim očitavanjem

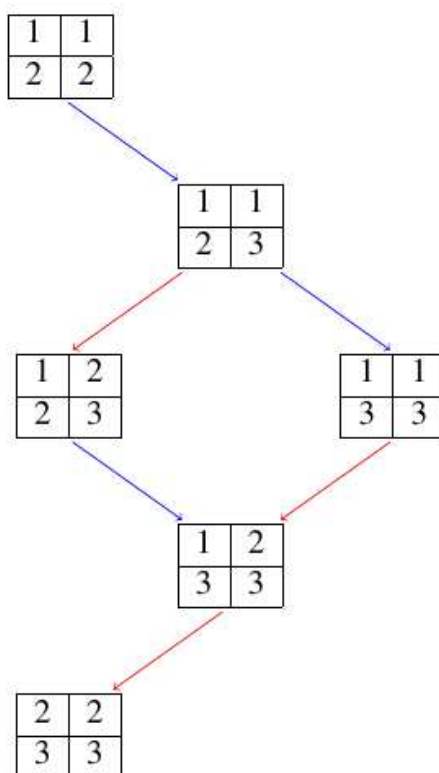
S druge strane, rezultat dobiven srednjeistočnim očitavanjem vidimo na slici 3.11.



Slika 3.11:  $U_q(\mathfrak{gl}_3)$ -kristalna struktura na  $\mathcal{B}(Y)$  dobivena srednjeistočnim očitavanjem

Ako svaki vektor u  $\mathbf{B}^{\otimes 4}$  izrazimo kao semistandardnu tablicu, tada se oba kristala podudaraju što vidimo na slici 3.12.



Slika 3.12:  $U_q(\mathfrak{gl}_3)$ -kristalna struktura na  $\mathcal{B}(Y)$ 

### 3.4 Kristalni grafovi za $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module

Na početku ovog potpoglavlja prisjetimo se teorema 3.2.2 koji nam kaže da je svaki konačnodimenzionalan ireducibilan  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  oblika  $V(\lambda)$  za neku dominantnu integralnu težinu  $\lambda = \lambda_1 \epsilon_1 + \dots + \lambda_n \epsilon_n \in P_{\geq 0}^+$ . Neka je  $\lambda$  neka particija ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ) i neka je  $Y$  odgovarajući Youngov dijagram koji ima  $\lambda_i$  kvadratića u  $i$ -tom retku. Neka  $\mathcal{B}(Y)$  označava skup svih semistandardnih tablica oblika  $Y$  na kojem je definirana  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristalna struktura nekim dopustivim očitavanjem.

**Teorem 3.4.1.** *Neka je  $\lambda = \lambda_1 \epsilon_1 + \dots + \lambda_n \epsilon_n \in P_{\geq 0}^+$  dominantna integralna težina i  $V(\lambda)$  konačnodimenzionalan ireducibilan  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modul u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  najveće težine  $\lambda$ . Tada je kristalni graf  $\mathcal{B}(\lambda)$  od  $V(\lambda)$  izomorfan  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristalu  $\mathcal{B}(Y)$  koji se sastoji od svih semistandardnih tablica oblika  $Y$ .*

*Dokaz.* Neka je  $N = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ . Tada je  $\mathbf{B}^{\otimes N}$  disjunktna unija komponenti povezanosti, od kojih je svaka izomorfna  $\mathcal{B}(\mu)$  za neki  $\mu \in P_{\geq 0}^+$ , što nam daje particiju od  $N$ . Dakle, da

bismo dokazali teorem, dovoljno je dokazati da je  $\mathcal{B}(Y)$  izomorfna jednoj od komponenti povezanosti koja sadrže vektor najveće težine  $\lambda$ . Definirajmo  $T_Y$  kao tablicu koju možemo vidjeti na slici 3.13<sup>1</sup>.

$$T_Y = \begin{array}{|c|} \hline 1 \cdots \cdots 1 \ 1 \\ \hline 2 \cdots \cdots 2 \\ \hline \vdots \\ \hline n \cdots n \\ \hline \end{array}$$

Slika 3.13: Youngova tablica  $T_Y$

Tvrdimo da je  $\mathcal{B}(Y)$  izomorfan komponenti povezanosti od  $\mathbf{B}^{\otimes N}$  koja sadrži  $T_Y$ . Jasno je da je težina od  $T_Y$  jednaka  $\lambda$ . Prema bliskoistočnom očitavanju,  $T_Y$  možemo očitati kao na slici 3.14.

$$\underbrace{1 \cdots 1}_{\lambda_1} \otimes \underbrace{2 \cdots 2}_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{n \cdots n}_{\lambda_n}$$

Slika 3.14:  $T_Y$  prema bliskoistočnom očitavanju

Budući da je  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$  za svaki  $i \in I$ , po pravilu tenzorskog produkta, imamo  $\tilde{e}_i T_Y = 0$  za svaki  $i \in I$ . Dakle, to je vektor najveće težine  $\lambda$ .

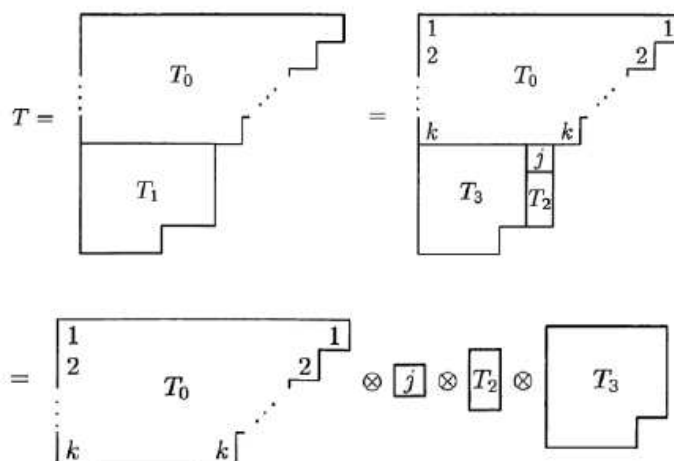
Ostaje pokazati da za svaku semistandardnu tablicu  $T \in \mathcal{B}(Y)$  postoje  $i_1, \dots, i_r \in I$  takvi da je  $\tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_r} T = T_Y$ . Ekvivalentno, dovoljno je pokazati da ako je  $\tilde{e}_i T = 0$  za svaki  $i \in I$ , tada je  $T = T_Y$ .

Neka je  $T \in \mathcal{B}(Y)$  i pretpostavimo da je  $\tilde{e}_i T = 0$  za svaki  $i \in I$ . Neka je  $k$  najveći nenegativan cijeli broj takav da je prvih  $k$  redova od  $T$  isto kao oni od  $T_Y$ .

Pretpostavimo da je  $k < n$ . Označimo s  $T_0$  podtablicu od  $T$  koja se sastoji od prvih  $k$  redova od  $T$  i s  $T_1$  podtablicu od  $T$  koja se sastoji od kvadratića ispod  $T_0$ . Neka je  $b = \boxed{j}$  kvadratić koji leži u gornjem desnom kutu od  $T_1$ , neka  $T_2$  bude stupac koji se sastoji od kvadratića neposredno ispod  $b = \boxed{j}$  i neka  $T_3$  označava podtablicu od  $T$  koja se sastoji od stupaca od  $T_1$  koji su lijevo od  $T_2$ . Stoga možemo  $T$  prikazati kao na slici 3.15<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Slika preuzeta iz knjige [2]

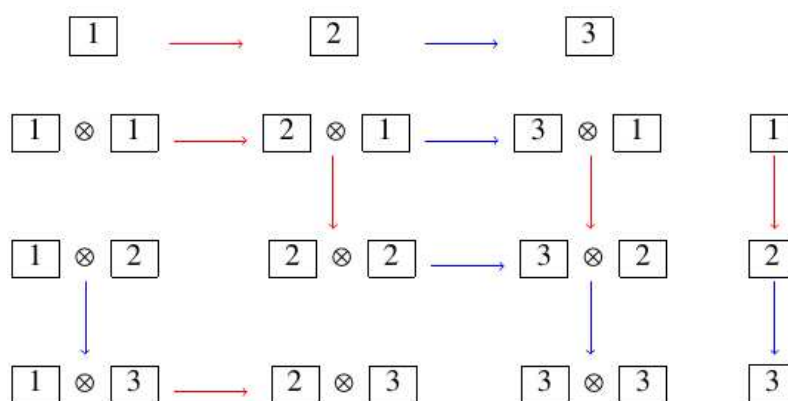
<sup>2</sup>Slika preuzeta iz knjige [2]



Slika 3.15:  $T \in \mathcal{B}(Y)$

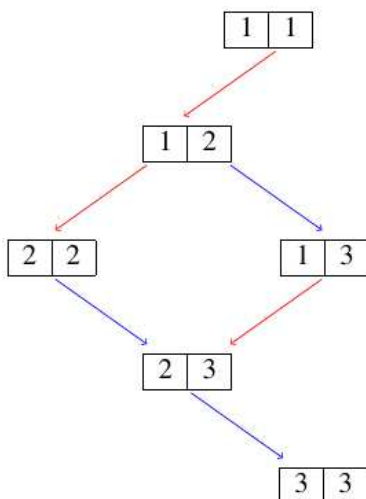
Zbog maksimalnosti od  $k$ , mora vrijediti  $j > k + 1$ . S druge strane, budući da je  $\tilde{e}_i T = 0$  za svaki  $i \in I$ , prema pravilu tenzorskog produkta, mora vrijediti  $\tilde{e}_i(T_0 \otimes \boxed{j}) = 0$  za svaki  $i \in I$ , što povlači  $\tilde{e}_i T_0 = 0$  i  $\varphi_i(T_0) \geq \varepsilon_i(\boxed{j})$  za svaki  $i \in I$ . Posebno, imamo  $\varepsilon_i(\boxed{j}) = 0$  za svaki  $i \geq k + 1$ . Stoga, zaključujemo da je  $j \leq k + 1$ , što je kontradikcija. Slijedi da je  $k = n$  i  $T = T_Y$ .  $\square$

**Primjer 3.4.2.** Neka je  $n = 3$ . Tenzorski produkt dvije kopije kristala za vektorsku reprezentaciju od  $\mathfrak{gl}_3$  sastoji se od dvije komponente koje vidimo na slici 3.16.



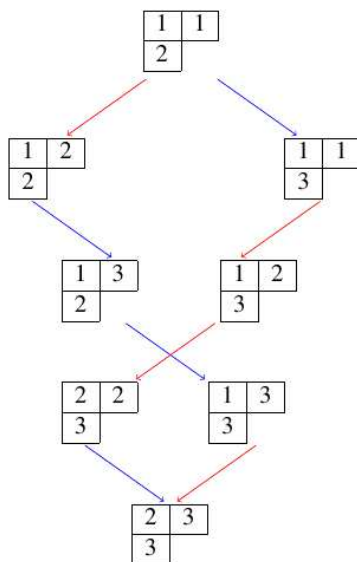
Slika 3.16: Tenzorski kvadrat kristala vektorske reprezentacije od  $U_q(\mathfrak{gl}_3)$

Vidimo da jedna komponenta ima 6 vrhova i najveća težina joj je  $\lambda = 2\epsilon_1$ , dok druga komponenta ima tri vrha i njena najveća težina je  $\mu = \epsilon_1 + \epsilon_2$ . Ukoliko vrhove u komponenti težine  $\lambda = 2\epsilon_1$  označimo odgovarajućim Youngovim tablicama dobivamo kristal sa slike 3.17.

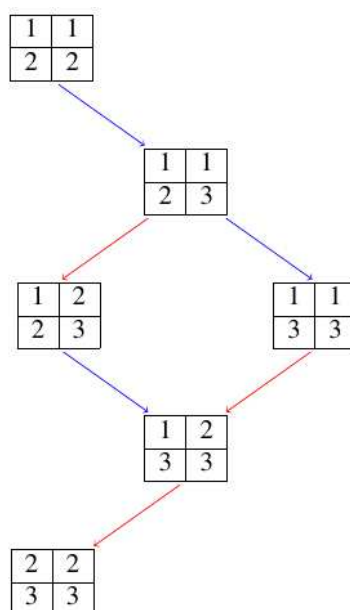


Slika 3.17: Kristalni graf  $\mathcal{B}(\lambda)$  za  $\lambda = 2\epsilon_1$

Kristali sa slike 3.18 i slike 3.19 se mogu odrediti na sličan način.



Slika 3.18: Kristalni graf  $\mathcal{B}(\lambda)$  za  $\lambda = 2\epsilon_1 + \epsilon_2$

Slika 3.19: Kristalni graf  $\mathcal{B}(\lambda)$  za  $\lambda = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2$ 

### 3.5 Dekompozicija tenzorskog produkta

Sada ćemo opisati kombinatorno pravilo rastavljanja tenzorskog produkta konačnodimenzionalnih  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modula u kategoriji  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  na direktnu sumu ireducibilnih podmodula. Neka su  $\lambda = \lambda_1\epsilon_1 + \dots + \lambda_n\epsilon_n$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ) i  $\mu = \mu_1\epsilon_1 + \dots + \mu_n\epsilon_n$  ( $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ ) dominantne integralne težine te  $Y$  i  $Y'$  Youngovi dijagrami oblika  $\lambda$  i  $\mu$ . Rastavljanje tenzorskog produkta  $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y')$   $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristala na komponente povezanosti je ekvivalentno pronalaženju svih maksimalnih vektora u  $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y')$ . Prvo promotrimo slučaj kada je  $\mu = \epsilon_1$ . Tada je  $\mathcal{B}(\mu) = \mathbf{B}$  kristalni graf vektorske reprezentacije.

Maksimalni vektor u  $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathbf{B}$  je oblika  $T_Y \otimes \boxed{j}$  s težinom  $\lambda + \epsilon_j$ , gdje je  $T_Y$  najveći vektor u  $\mathcal{B}(Y)$  i  $\boxed{j}$  zadovoljava  $\varepsilon_i(\boxed{j}) \leq \lambda(h_i) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$  za svaki  $i = 1, \dots, n-1$ . Budući da

$$\varepsilon_i(\boxed{j}) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } j = i + 1, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

moramo imati  $\lambda_{j-1} - \lambda_j > 0$ , što povlači da postoji uvučeni kut u  $j$ -tom retku od  $Y$ . Prema tome, svakom uvučenom kutu pridružujemo komponentu  $\mathcal{B}(Y[j])$ , gdje  $Y[j]$  označava Youngov dijagram dobiven iz  $Y$  dodavanjem kvadratića u  $j$ -ti redak. Općenitije, neka  $Y[j]$

označava dijagram dobiven iz  $Y$  dodavanjem kvadratića u  $j$ -ti redak i ako  $Y[j]$  nije Youngov dijagram, tada  $\mathcal{B}(Y[j])$  označava nul-kristal, odnosno prazan skup. Time smo dokazali sljedeći teorem.

**Teorem 3.5.1.** *Neka je  $\lambda = \lambda_1\epsilon_1 + \dots + \lambda_n\epsilon_n$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ) dominantna integralna težina i neka je  $Y$  Youngov dijagram pridružen  $\lambda$ . Tada postoji  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristalni izomorfizam*

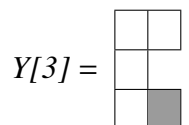
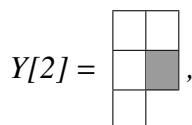
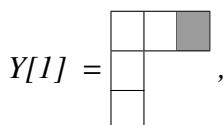
$$\mathcal{B}(Y) \otimes \mathbf{B} \cong \bigoplus_{\boxed{j} \in \mathcal{B}} \mathcal{B}(Y[j]),$$

gdje  $\bigoplus$  označava direktnu sumu kristala, tj. njihovu disjunktну uniju.

**Primjer 3.5.2.** *Neka je  $n = 3$  i  $\lambda = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ . Tada je  $Y =$*



*i vrijedi*



*Primijetimo da  $Y[3]$  nije Youngov dijagram pa njega ne uzimamo u obzir u direktnoj sumi. Stoga, dobivamo*

$$\mathcal{B}(Y) \otimes \mathbf{B} \cong \mathcal{B} \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \right) \oplus \mathcal{B} \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \right).$$

U općem slučaju, neka je  $\mu = \mu_1\epsilon_1 + \dots + \mu_n\epsilon_n$  ( $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ ) dominantna integralna težina i  $Y'$  odgovarajući Youngov dijagram. Tada se  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristal  $\mathcal{B}(Y')$  može ugraditi u  $\mathbf{B}^{\otimes N}$  dopustivim očitavanjem, gdje je  $N = \mu_1 + \dots + \mu_n$ . Neka je  $T \otimes T' \in \mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y')$  maksimalni vektor i pišemo  $T' = \boxed{j_1} \otimes \dots \otimes \boxed{j_N} \in \mathbf{B}^{\otimes N}$ . Vrijedi da je  $T = T_Y$  i  $T_Y \otimes \boxed{j_1} \otimes \dots \otimes \boxed{j_r}$  maksimalni vektor za sve  $r = 1, 2, \dots, N$ . Označimo s  $Y[j_1, \dots, j_r]$  dijagram dobiven iz  $Y[j_1, \dots, j_{r-1}]$  dodavanjem kvadratića u  $j_r$ -ti redak i neka je  $\mathcal{B}(Y[j_1, \dots, j_r]) = \emptyset$ , osim ako je  $Y[j_1, \dots, j_k]$  Youngov dijagram za svaki  $k = 1, 2, \dots, r$ .

Kao što smo vidjeli u raspravi prije teorema 3.5.3,  $T_Y \otimes \boxed{j_1} \otimes \dots \otimes \boxed{j_N}$  je maksimalni vektor u  $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y') \subset \mathcal{B}(Y) \otimes \mathbf{B}^{\otimes N}$  ako i samo ako je  $Y[j_1, \dots, j_k]$  Youngov dijagram za svaki  $k = 1, 2, \dots, N$ . Stoga dobivamo sljedeće kombinatorno pravilo rastavljanja tenzorskog produkta  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristala u disjunktну uniju komponenti povezanosti.

**Teorem 3.5.3.** Neka su  $\lambda = \lambda_1\epsilon_1 + \dots + \lambda_n\epsilon_n$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ) i  $\mu = \mu_1\epsilon_1 + \dots + \mu_n\epsilon_n$  ( $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ ) dominantne integralne težine te  $Y$  i  $Y'$  Youngovi dijagrami. Tada postoji  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristalni izomorfizam

$$\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{B}(Y') \cong \bigoplus_{\substack{j_1 \otimes \dots \otimes j_N \\ \in \mathcal{B}(Y')}} \mathcal{B}(Y[j_1, j_2, \dots, j_N]),$$

gdje je  $N = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ .

**Primjer 3.5.4.** Kristal za vektorsku reprezentaciju od  $\mathfrak{gl}_3$  je

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3}.$$

Težine kvadratića u tom kristalu su

$$\text{wt}(\boxed{1}) = \epsilon_1, \quad \text{wt}(\boxed{2}) = \epsilon_2, \quad \text{wt}(\boxed{3}) = \epsilon_3.$$

Na slici 3.16 možemo vidjeti tenzorski produkt dvije kopije kristala za vektorsku reprezentaciju  $\mathfrak{gl}_3$ . Najveća težina komponente sa šest vrhova je  $\lambda = 2\epsilon_1$ , dok je najveća težina komponente s tri vrha jednaka  $\mu = \epsilon_1 + \epsilon_2$ . Iz toga slijedi

$$\mathcal{B}(\boxed{\phantom{1}}) \otimes \mathcal{B}(\boxed{\phantom{1}}) \cong \mathcal{B}(\boxed{\phantom{1}}\boxed{\phantom{1}}) \oplus \mathcal{B}(\boxed{\phantom{1}}\phantom{\phantom{1}}}).$$

**Primjer 3.5.5.** Neka je  $n = 3$ ,  $\lambda = 2\epsilon_1 + \epsilon_2$  i  $\mu = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2$ . Tada je

$$Y = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad i \quad Y' = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array},$$

te se, koristeći dalekoistočno očitavanje, kristal  $\mathcal{B}(Y')$  sastoji od sljedećih vektora:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} = \boxed{1} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$$

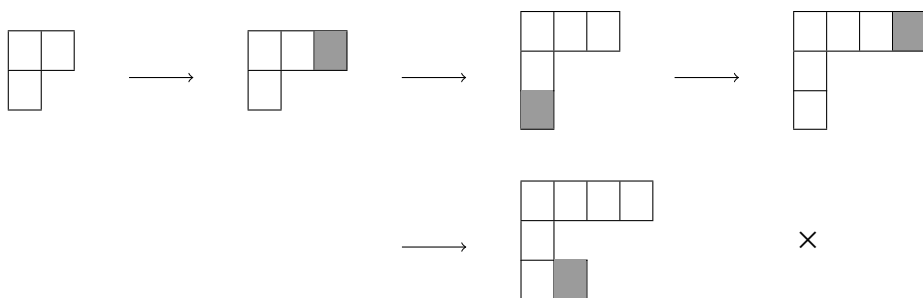
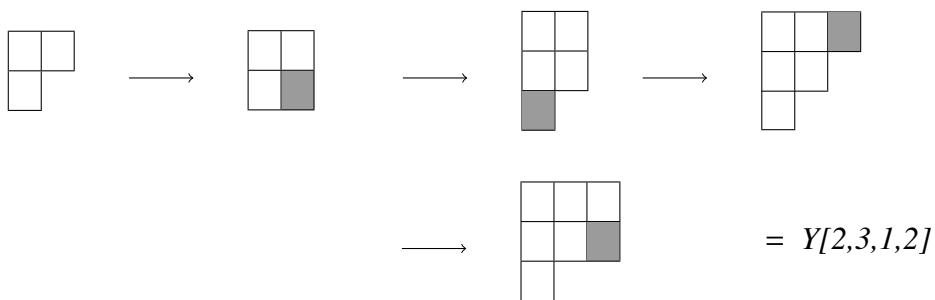
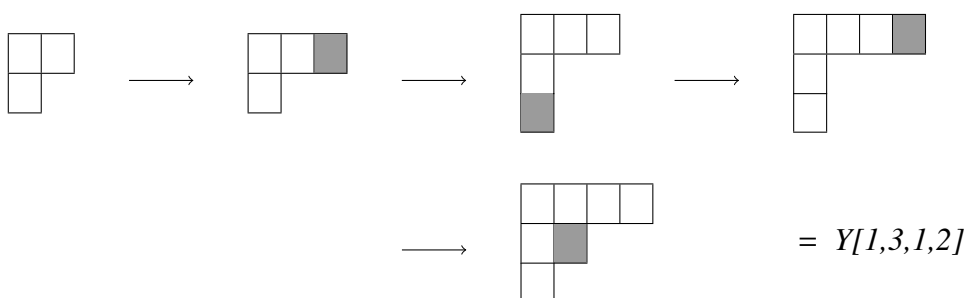
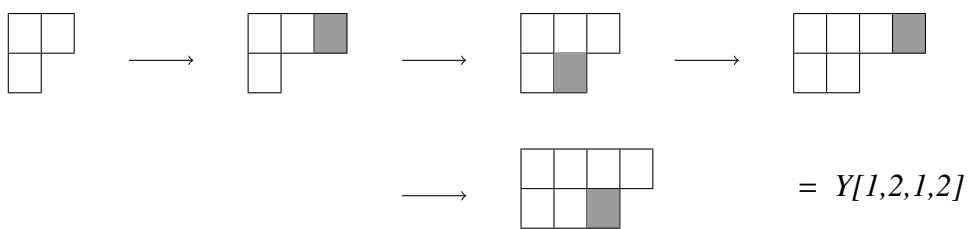
$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{2}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \boxed{1} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3}$$

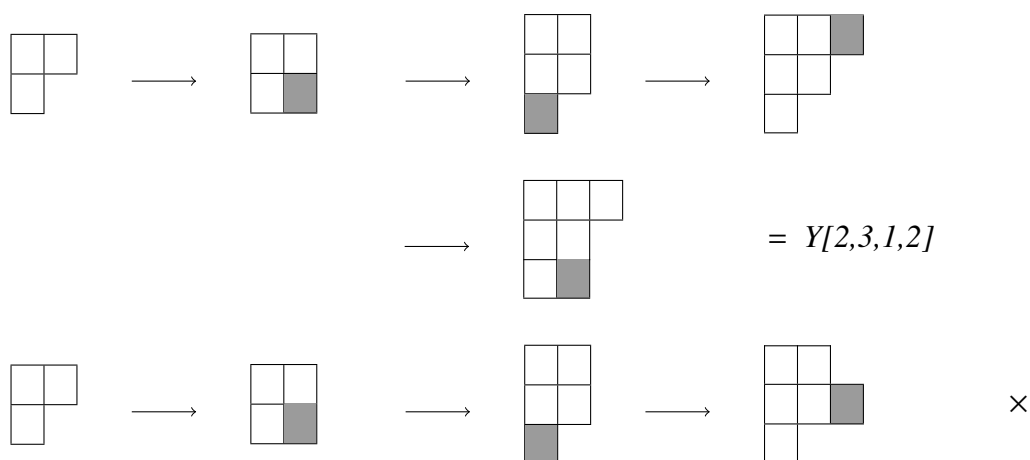
$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{1} \otimes \boxed{3}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \boxed{2} \otimes \boxed{3} \otimes \boxed{2} \otimes \boxed{3}.$$

Stoga, imamo sljedeće:







pri čemu nam  $\times$  označava da dobiveni dijagram nije Youngov dijagram pa ga ne uzimamo u obzir u direktnoj sumi.

Tada, po teoremu 3.5.3 dobivamo izomorfizam

$$\mathcal{B}\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}\right) \otimes \mathcal{B}\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}\right) \cong \mathcal{B}\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right) \oplus \mathcal{B}\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right) \\ \oplus \mathcal{B}\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right) \oplus \mathcal{B}\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right).$$

### 3.6 $U_q(B_3)$ -kristali

U ovom potpoglavlju ćemo dati primjere  $U_q(B_3)$ -kristala pri čemu će nam glavni cilj biti demonstrirati razlike koje se javljaju prilikom realizacije kristala za Liejeve algebre drugih tipova. Neka je  $\mathfrak{g}$  konačnodimenzionalna prosta Liejeva algebra tipa  $B_3$ . Tada se  $\mathfrak{g}$  može realizirati kao specijalna ortogonalna Liejeva algebra

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(7, \mathbb{C}) = \mathfrak{so}_7 = \left\{ T = \begin{pmatrix} A & B & a \\ C & D & b \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \in M_{77}(\mathbb{C}) \mid \right. \\ \left. \begin{array}{l} A, B, C, D \in M_{33}(\mathbb{C}), a, b \in M_{31}(\mathbb{C}), c, d \in M_{13}(\mathbb{C}), \\ A^t = -D, B^t = -B, C^t = -C, a^t = -d, b^t = -c \end{array} \right\}.$$

Neka  $E_{ij}$  označava  $7 \times 7$  elementarnu matricu koja ima 1 na mjestu  $(i, j)$  i nule na ostalim

mjestima. Definirajmo elemente

$$\begin{aligned} e_1 &= E_{12} - E_{54}, & e_2 &= E_{23} - E_{65}, & e_3 &= 2(E_{37} - E_{76}), \\ f_1 &= E_{21} - E_{45}, & f_2 &= E_{32} - E_{56}, & f_3 &= E_{73} - E_{67}, \\ h_1 &= E_{11} - E_{22} - E_{44} + E_{55}, & h_2 &= E_{22} - E_{33} - E_{55} + E_{66}, \\ h_3 &= 2(E_{33} - E_{66}). \end{aligned}$$

Tada, kao Liejeva algebra,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(7, \mathbb{C})$  je generirana s  $e_i, f_i, h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Uvedimo linearne funkcionalne  $\epsilon_i : M_{77}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\epsilon_i(T) = t_{ii}, \quad T = (t_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Prosti korijeni i fundamentalne težine su dani s

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \epsilon_1 - \epsilon_2, & \alpha_2 &= \epsilon_2 - \epsilon_3, & \alpha_3 &= \epsilon_3, \\ w_1 &= \epsilon_1, & w_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2, & w_3 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3). \end{aligned}$$

Koristeći ovu notaciju možemo zapisati Cartanovu petorku za specijalnu ortogonalnu Liejevu algebru  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(7, \mathbb{C})$  kao

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \\ \Pi &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, & \Pi^\vee &= \{h_1, h_2, h_3\}, \\ P &= \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2 \oplus \mathbb{Z}w_3, & P^\vee &= \mathbb{Z}h_1 \oplus \mathbb{Z}h_2 \oplus \mathbb{Z}h_3. \end{aligned}$$

Algebra  $U_q(\mathfrak{so}_7)$  je definirana kao kvantna grupa pridružena  $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$  koju smo definirali u 1.2.2. Fiksirajmo sedmerodimenzionalni vektorski prostor

$$V = \left( \bigoplus_{j=1}^3 \mathbb{C}(q)v_j \right) \oplus \mathbb{C}(q)v_0 \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^3 \mathbb{C}(q)v_{\bar{j}} \right)$$

i neka je  $N = \{1, 2, 3, 0, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\}$  skup indeksa za vektore baze od  $V$  na kojem je zadan linearni uređaj takav da vrijedi

$$1 < 2 < 3 < 0 < \bar{3} < \bar{2} < \bar{1}.$$

Direktnim računom može se provjeriti da je  $V$   $U_q(\mathfrak{so}_7)$ -modul s djelovanjem danim s

$$q^h v_j = q^{\langle h, \text{wt}(v_j) \rangle} v_j \quad \text{za } h \in P^\vee, j \in \mathbb{N},$$

$$e_i v_j = \begin{cases} v_i & \text{ako je } j = i + 1, i = 1, 2, \\ v_{\overline{i+1}} & \text{ako je } j = \overline{i}, i = 1, 2, \\ v_0 & \text{ako je } j = \overline{3}, i = 3, \\ [2]_q v_3 & \text{ako je } j = 0, i = 3, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$f_i v_j = \begin{cases} v_{i+1} & \text{ako je } j = i, i = 1, 2, \\ v_{\overline{i}} & \text{ako je } j = \overline{i+1}, i = 1, 2, \\ v_0 & \text{ako je } j = 3, i = 3, \\ [2]_q v_{\overline{3}} & \text{ako je } j = 0, i = 3, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

gdje je

$$\text{wt}(v_j) = \begin{cases} \epsilon_j & \text{za } j = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{za } j = 0, \\ -\epsilon_j & \text{za } j = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}. \end{cases}$$

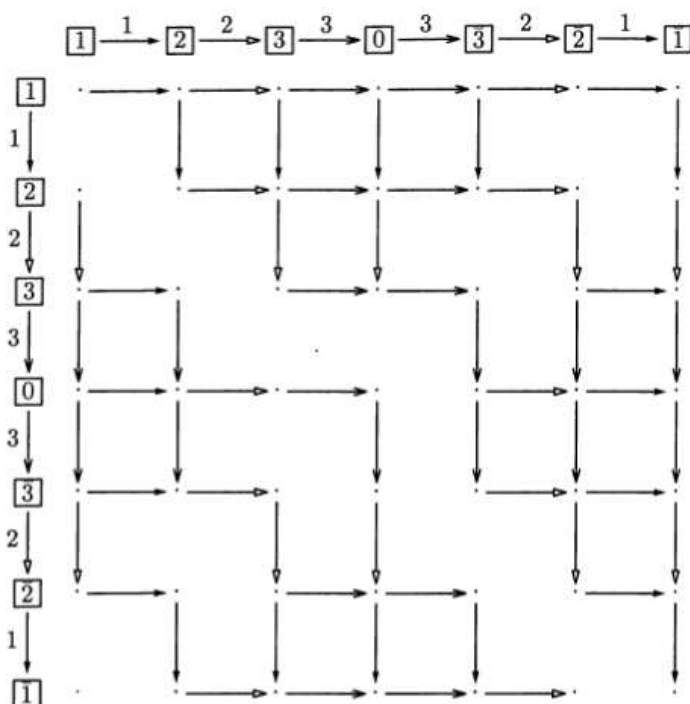
Tada  $V$  nazivamo **vektorska reprezentacija** od  $U_q(\mathfrak{so}_7)$ . Neka je  $\mathcal{L} = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_0 v_j$  i  $\mathbf{B} = \{[\mathbf{j}] = v_j + q\mathcal{L} \mid j \in \mathbb{N}\}$ . Tada je  $(\mathcal{L}, \mathbf{B})$  kristalna baza od  $V$  s kristalnim grafom

$$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \boxed{0} \xrightarrow{3} \boxed{\overline{3}} \xrightarrow{2} \boxed{\overline{2}} \xrightarrow{1} \boxed{\overline{1}}.$$

Primjetimo da je  $\mathbf{B} = \mathcal{B}(w_1) = \mathcal{B}(\epsilon_1)$  i

$$\text{wt}([\mathbf{j}]) = \epsilon_j, \quad \text{wt}([\mathbf{0}]) = 0, \quad \text{wt}([\overline{\mathbf{j}}]) = -\epsilon_j \quad \text{za } j = 1, 2, 3.$$

Promotrimo tenzorski produkt  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$  prikazan na slici 3.20.

Slika 3.20:  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$  za  $U_q(\mathfrak{su}_7)$ 

Umjesto označavanja strelica različitim bojama, koristit ćemo različite vrhove strelica kako bismo ih razlikovali kao na slici 3.20<sup>3</sup>. Sa slike 3.20, možemo vidjeti da je

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} = \mathcal{B}(w_1) \otimes \mathcal{B}(w_1) = \mathcal{B}(2w_1) \oplus \mathcal{B}(w_2) \oplus \mathcal{B}(0),$$

pri čemu  $\mathcal{B}(2w_1)$  odgovara gornjem trokutastom dijelu slike 3.20,  $\mathcal{B}(w_2)$  je povezana komponenta koja ispunjava veći dio donjeg trokutastog dijela, a  $\mathcal{B}(0)$  je izolirana točka u donjem lijevom kutu. Najveća težina  $2w_1 = 2\epsilon_1$  odgovara Youngovom dijagramu  $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$  i

$w_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$  odgovara  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$ . Koristeći sliku 3.20 možemo provjeriti da je

$$\mathcal{B}(2w_1) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline b & a \\ \hline \end{array} \mid a \geq b, (a, b) \neq (0, 0) \right\},$$

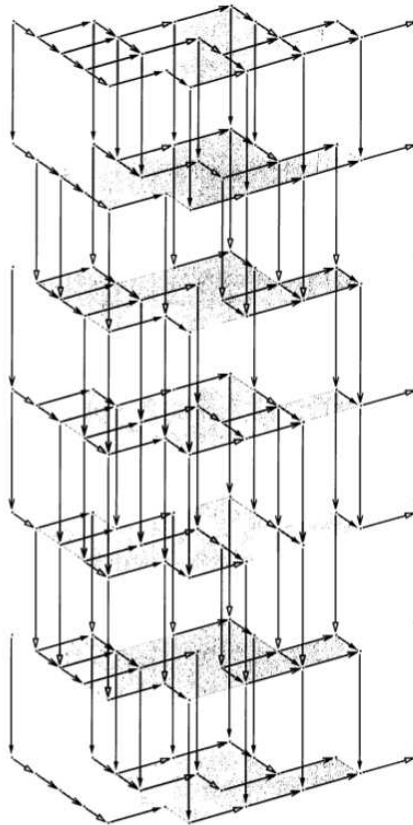
$$\mathcal{B}(w_2) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \mid a < b \text{ ili } a = b = 0, (a, b) \neq (1, \bar{1}) \right\}.$$

Promotrimo dekompoziciju tenzorskog produkta kristala

<sup>3</sup>Slika preuzeta iz knjige [2]

$$\mathcal{B}(w_2) \otimes \mathbf{B} = \mathcal{B}(w_1 + w_2) \oplus \mathcal{B}(2w_3) \oplus \mathcal{B}(w_1)$$

kao što je prikazano na slici 3.21<sup>4</sup>.



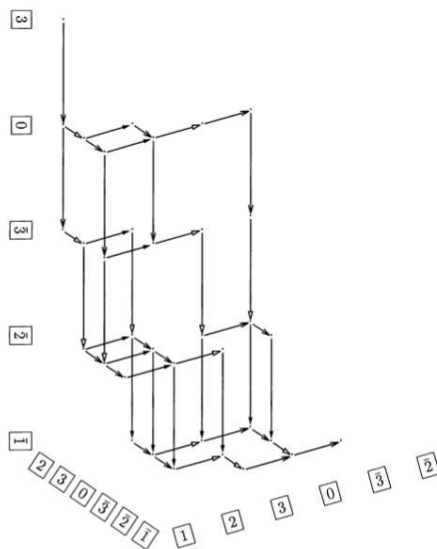
Slika 3.21:  $\mathcal{B}(w_2) \otimes \mathcal{B}$  za  $U_q(\mathfrak{su}_7)$

Izdvojimo komponentu povezanosti koja sadrži  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}$  i koja je izomorfna  $\mathcal{B}(2w_3) = \mathcal{B}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$ . Primijetimo da najveća težina  $2w_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$  odgovara Youngovom dijagramu  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ . Dakle, uz pomoć slike 3.22<sup>5</sup>, koja je izdvojena iz slike 3.21 radi lakšeg pregleda, vidimo da je

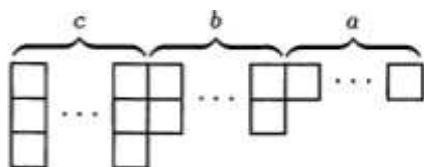
<sup>4</sup>Slika preuzeta iz knjige [2]

<sup>5</sup>Slika preuzeta iz knjige [2]

$$\mathcal{B}(2w_3) = \left\{ \begin{array}{c|l} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{l} a < b < c \text{ s jednakostima dopuštenim za nule,} \\ (a, c) \neq (1, \bar{1}), (a, b) \neq (2, \bar{2}), (b, c) \neq (2, \bar{2}) \end{array} \end{array} \right\}$$

Slika 3.22:  $\mathcal{B}(2w_3)$  za  $U_q(\mathfrak{sl}_7)$ 

Uzmimo proizvoljnu integralnu dominantnu težinu oblika  $\lambda = aw_1 + bw_2 + 2cw_3$ . Htjeli bismo joj pridružiti Youngov dijagram sa slike 3.23<sup>6</sup>



Slika 3.23: Youngov dijagram

i željeli bismo realizirati kristalni graf  $\mathcal{B}(\lambda)$  kao skup  $\mathcal{B}(Y)$  Youngovih dijagrama s elementima skupa  $N = \{1, 2, 3, 0, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\}$  koji zadovoljavaju određene uvjete. Ovdje je kristalna struktura dana dalekoistočnim očitavanjem. To jest, za Youngovu tablicu  $T \in \mathcal{B}(Y)$ , prema

<sup>6</sup>Slika preuzeta iz knjige [2]

dalekoistočnom očitavanju, promatramo  $T$  kao element od

$$\mathcal{B}(w_1)^{\otimes a} \otimes \mathcal{B}(w_2)^{\otimes b} \otimes \mathcal{B}(2w_3)^{\otimes c} \subset \mathbf{B}^{\otimes N},$$

gdje je  $N = a + 2b + 3c$ , a djelovanje Kashiwarinih operatora definiramo pravilom tenzorskog produkta. Tada će se kristalni graf  $\mathcal{B}(\lambda)$  identificirati s komponentom povezanosti maksimalnog vektora težine  $\lambda$  u

$$\mathcal{B}(w_1)^{\otimes a} \otimes \mathcal{B}(w_2)^{\otimes b} \otimes \mathcal{B}(2w_3)^{\otimes c} \subset \mathbf{B}^{\otimes N}.$$

Dakle, kako bismo odredili kristalni graf  $\mathcal{B}(\lambda)$ , potrebno je pronaći preostale uvjete koji mogu karakterizirati skup  $\mathcal{B}(Y)$ . Valja istaknuti kako je ovo glavna razlika u odnosu na određivanje kristala za Liejevu algebru  $\mathfrak{gl}_n$ , gdje su nam se vrhovi pripadnog kristala sastojali od svih semistandardnih Youngovih tablica određenog oblika, tj. nisu nam bili potrebni dodatni uvjeti kao u prethodnim primjerima. Upravo zbog toga nemamo uniformnu realizaciju kristala pomoću Youngovih dijagrama za sve proste Liejeve algebre, već je potrebno takve realizacije određivati slučaj po slučaj. Realizacije kristala za preostale klasične Liejeve algebre, koje su upravo zbog spomenute komplikacije nešto zahtjevnije za odrediti, mogu se također pronaći u knjizi [2].





# Bibliografija

- [1] Paul Moritz Cohn, *Universal Algebra*, New York - Evanston - London - Tokyo, Harper Row - John Weatherhill, 1965.
- [2] Jin Hong, Seok-Jin Kang, *Introduction to quantum groups and crystal bases*, American Mathematical Society, 2002.
- [3] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, University of Massachusetts, Amherst, USA, 1980.



# Sažetak

Glavni cilj ovog rada bio je proučiti vezu između teorije kristalnih baza konačnodimenzionalnih  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modula i kombinatorike Youngovih dijagrama i Youngovih tablica. U prvom poglavlju proučili smo osnovne pojmove i rezultate iz područja Liejevih algebri te reprezentacija pripadnih kvantnih grupa. U drugom poglavlju smo uveli Kashiwarine operatore i pojam kristalne baze pomoću kojih smo zatim iskazali teorem o tenzorskom produktu kristala te ilustrirali njegove primjene na konkretnim primjerima. U trećem poglavlju smo se bavili Youngovim tablicama i kristalima pri čemu nam je glavni cilj bio proučiti vezu između  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristala, koji su pridruženi  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modulima iz kategorije  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$ , i Youngovih dijagrama. Preciznije, demonstrirali smo kako se spomenuta veza realizira primjenom dopustivih očitavanja na semistandardne Youngove tablice. Napokon, koristeći dobivenu realizaciju  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -kristala pomoću Youngovih tablica, dokazali smo teorem o dekompoziciji tenzorskog produkta pripadnih modula. Na kraju poglavlja smo proučavali  $U_q(B_3)$ -kristale, dali primjere nekih kristala tog tipa i prikazali razlike do kojih dolazi prilikom realizacije kristala Liejevih algebri drugih tipova.



# Summary

The main goal of this thesis was to study the connection between the crystal basis theory of finite dimensional  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules and combinatorics of Young diagrams and Young tableaux. In the first chapter we studied basic concepts and results from the field of Lie algebras and representations of related quantum groups. In the second chapter we introduced Kashiwara's operators and the notion of crystal basis, which we used to state the tensor product theorem for crystals and illustrated its applications with concrete examples. In the third chapter we considered Young tableaux and crystals and our main goal was to study the connection between  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -crystals, which are associated with  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules from category  $\mathcal{O}_{int}^{\geq 0}$  and Young diagrams. More precisely, we demonstrated how the mentioned connection is realized by applying admissible readings to semistandard Young tableaux. Finally, using the obtained realization of the  $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -crystals via Young tableaux, we proved the tensor product decomposition theorem for the corresponding modules. At the end of the chapter, we studied  $U_q(B_3)$ -crystals, gave examples of some crystals of that type and showed some differences that occur in realizations of crystals for Lie algebras of other types.



# Životopis

Moje ime je Sara Leljak i rođena sam 07.11.1998. u gradu Ptuju u Republici Sloveniji. Pohađala sam Osnovnu školu Đurmanec i nakon toga od 2013. do 2017. godine opću gimnaziju u Srednjoj školi Krapina. 2017. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Studij sam završila 2021. godine i nastavila sam obrazovanje upisom Diplomskog studija Financijske i poslovne matematike na istom fakultetu.