

Efektivna teorija polja formacije kozmoloških struktura

Sladoljev, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:266709>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-16**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Sladoljev

EFEKTIVNA TEORIJA POLJA FORMACIJE
KOZMOLOŠKIH STRUKTURA

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Ivan Sladoljev

Diplomski rad

**Efektivna teorija polja formacije
kozmoških struktura**

Voditelj diplomskog rada: Dr. Zvonimir Vlah

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2024.

Ovom se prilikom od srca zahvaljujem svom mentoru dr. Zvonimiru Vlahu, koji me uveo u svijet kozmologije te me opremio vrijednim vještinama i znanjem za daljnji život u znanosti. Također se zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima, koji su mi bili oslonac i podrška kroz najteže dane studiranja te mi omogućili da uspijem u svom cilju postajanja znanstvenikom.

Sažetak

Postoje mnoge dobre teorije za opisivanje evolucije polja materije na velikim udaljenostima te postupni nastanak struktura kozmičke mreže. Najpoznatija od njih je standardna perturbacijska teorija (SPT), koja razvija polje kontrasta materije $\delta(x, t)$ u red po faktoru skale $a(t)$ te perturbativnim pristupom opisuje dinamiku nastanka struktura na velikim skalama. Ovakav razvoj dobro opisuje spektar snage na velikim skalama ($r \approx 100$ Mpc) te neke od nelinearnih pojava, poput širenja i pomicanja BAO vrha [23]. No veliki problem takvog pristupa jest da ispod $r \approx 10$ Mpc [21] interakcija različitih modova polja materije postaje nelinearna te je nemoguće precizno primijeniti perturbacijsku teoriju. Stoga ćemo u ovom radu proučavati efektivne perturbacijske teorije. Posebno ćemo se fokusirati na Eulerovu (EFTLSS) i Lagrangeovu (LEFTLSS) efektivnu perturbacijsku teoriju te ćemo pokazati kako integracijom preko dinamike malih (nelinearnih) skala dobivamo puno preciznije predikcije za spektar snage na velikim skalama. Na početku ćemo detaljno izvesti jednadžbe i rješenja dva klasična perturbacijska pristupa, odnosno standardne (SPT) i Lagrangeove (LPT) perturbacijske teorije. Također ćemo pokazati ekvivalenciju njihovih rješenja, odnosno da n -ti red SPT-a konvergira LPT Zeldovich aproksimaciji. Cjelokupne izvode radit ćemo u jednoj dimenziji što nam, osim egzaktnosti konačnog rješenja, omogućuje lakšu numeričku provjeru rezultata. Bitno je za naglasiti kako radom u jednoj dimenziji možemo reproducirati sve predikcije 3D teorija. Usporedbom dobivenih izvoda perturbacijskih teorija s rješenjem numeričkih simulacija pokazat ćemo kako SPT i LPT loše aproksimiraju nelinearni spektar snage tamne materije. Nakon toga ćemo uvesti efektivni formalizam tih teorija te pokazati kako filtriranjem višim momenta Vlasovljeve jednadžbe dobivamo preciznija rješenja za nelinearni spektar snage. Rješavajući dinamičke jednadžbe koje ovise samo o ugađenim poljima izvest ćemo puni $1 - loop$ spektar te sve slobodne parametre i protučlanove. Pokazat ćemo kako tim slobodnim parametrima možemo modelirati male skale preko kojih smo filtrirali i na taj način bolje opisati dinamiku na velikim skalama. Fokusirat ćemo se i na ovisnosti tih parametara o skali preko koje filtriramo, kao i pokazati način određivanja efektivnih parametara direktno iz teorije. Cilj ovog rada jest pokazati bolji način modeliranja spektra snage za razvoj velikih struktura te pokazati kako radom u jednoj dimenziji možemo brže i lakše doći do istih rezultata kao i u 3D.

Ključne riječi: SPT, LPT, Efektivna teorija polja, Strukture na velikim skalama

Effective field theory of Large Scale Structure formation

Abstract

We have a good understanding of the cosmic dynamics that govern the evolution of matter on large scales. But on scales smaller than 10 Mpc, due to the extremely nonlinear nature of the interactions, many of our best theories for modeling Large Scale Structures (such as the Eulerian standard perturbation theory (SPT)) have had trouble describing the precise evolution of matter density fields. The biggest problem of SPT is that it treats all scales as if they were perturbative, even if they're not. This warrants a new approach for probing into the small scale dynamics of matter fields and subsequent formation of the Large Scale Structures. In this thesis we will tackle those problems by looking at Lagrangian and Eulerian effective perturbation theories, that had recent success in tackling these problems by filtering out small scale behaviour and modeling it with new free parameters. We will be working in a simplified 1D case of gravitationally interacting sheets, to reduce the number of calculations needed but still show all the important behaviors as in 3D. In this thesis, we will firstly derive the full standard Lagrangian and Eulerian formulation and show that the n -th-order Eulerian perturbation theory converges to the Zeldovich approximation (linear order LPT) as $n \rightarrow \infty$, although this is only true for linear scales up to shell crossing. We will also show how LPT and SPT fails to recover the true nonlinear power spectrum calculated through numerical simulations. We will then focus heavily on effective formulation in Eulerian and Lagrangian space. We will fully derive the 1-loop extensions of both the EFT and LFT by smoothing the higher multipole moments of Vlasov's equation. By using dynamical equations that depend only on smoothed fields with small RMS, we will show how they describe the dynamics on large scales better than standard theories. We will also derive all the counterterms and free parameters, tackle their cutoff dependency and show how to extend the range over which perturbation theory is percent-level accurate. The goal is to show that 1D solutions are interesting to study as they yield the same result as in 3D, with considerably simplified derivations.

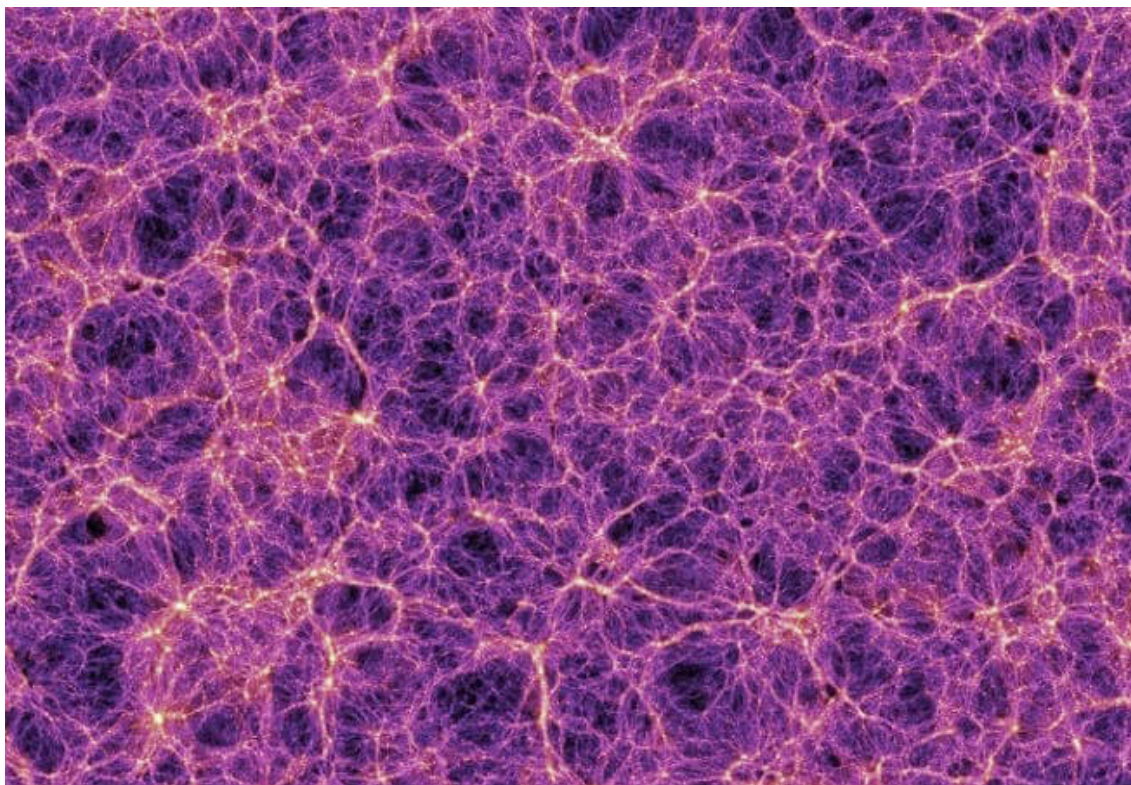
Keywords: Large Scale Structure, SPT, LPT, Effective field theory

Sadržaj

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Uvod | 1 |
| 1.1 | Kozmičke strukture i njihov nastanak | 2 |
| 2 | Standardna perturbacijska teorija (SPT) | 7 |
| 2.1 | Standardna perturbacijska teorija (SPT) u jednoj dimenziji | 12 |
| 2.2 | Spektar snage i CAMB kod | 15 |
| 3 | Efektivna teorija polja razvoja struktura na velikim skalama | 23 |
| 3.1 | Različiti koeficijenti pri aproksimaciji nesavršenog fluida | 29 |
| 3.2 | Rješavanje EFT jednadžbi | 30 |
| 3.3 | Ovisnost o parametru Λ | 35 |
| 3.4 | Opis razvoja struktura na velikim skalama | 36 |
| 4 | Lagrangeova perturbacijska teorija (LPT) | 38 |
| 4.1 | Zeldovich aproksimacija | 40 |
| 4.2 | Ekvivalencija funkcija jezgri za SPT i LPT | 41 |
| 4.3 | Derivacija SPT iz LPT | 43 |
| 5 | Efektivna teorija polja u Lagrangeovoj formulaciji | 44 |
| 5.1 | Perturbativno rješenje LEFTLSS | 47 |
| 6 | Zaključak | 50 |
| | Literatura | 52 |

1 Uvod

Prolazeći kroz život, svakodnevno možemo primijetiti kako je naš svijet prepun kompleksnih interakcija, kaotičnih događaja te nepredvidivih ishoda. No ako umjesto naše perspektive, sagledamo svemir na velikim skalama ($r \geq 100$ Mpc), primijetit ćemo kako u njemu zapravo vlada relativni sklad. Čak i najburniji kozmički događaji, poput eksplozija supernova ili spajanja crnih rupa koji definiraju većinu današnjih astrofizičkih opservacija, na tim skalama postaju nezamjetni u cjelokupnoj dinamici svemira. Materija je na takvim skalama gotovo homogena i izotropno raspodijeljena po svemiru, u skladu s osnovnim kozmološkim načelom. Zbog toga se $r = 100$ Mpc također naziva i granica homogenosti [17]. No čak i na takvim grandioznim skalama opažamo strukture kozmičke materije. Materija na velikim skalama nije naime potpuno nasumično raspoređena po prostoru, već je grupirana u filamentarne strukture, koji se često nazivaju i *kozmička mreža* (eng: *cosmic web*). Takve strukture unutar sebe sadržavaju milijarde različitih galaksija i superskupova. Sliku ovih struktura na skali $r = 250$ Mpc vidimo na slici 1.1.



Slika 1.1: Prikaz polja gustoće tamne materije dobivenih numeričkim simulacijama [16]. Isječak je širok 750 Mpc/h te dubok 15 Mpc/h. Područja sa povećanom gustoćom materije prikazana su svjetlijim bojama. Iz slike je jasno vidljivo kako je materija na velikim skalama grupirana u filamentarne strukture slične neuronima.

Uz skupove galaksija, koji predstavljaju najgušće dijelove kozmičkih struktura, te filamente koji spajaju različite skupove, na slici vidimo i praznine (eng: *voids*), koje su područja bez velikih nakupina galaksija. Takva područja su posebno bitna za kozmološka mjerenja jer pomažu pri testiranju gravitacijskih teorija na područjima bez velikih utjecaja okolne materije na pozadinsku metriku.

1.1 Kozmičke strukture i njihov nastanak

Točan razlog nastanka ovakvih kozmičkih struktura još je uvijek nepoznat zbog kompleksnih interakcija velikog broja čestica koje je veoma teško analitički opisati. Također, velika limitacija u verificiranju različitih teorija jest preciznost eksperimentalnih mjerenja, primjerice SDSS-a [19] ili MUSE-a [18]. Stoga se pretpostavke često uspoređuju i s numeričkih simulacijama, koje omogućuju lakše podešavanje početnih uvjeta te testiranje većeg broja kozmoloških teorija. Trenutačne najpreciznije teorije govore kako ove superstrukture prvotno nastaju amplifikacijom kvantnih fluktuacija u primordijalnom svemiru [13] te postupnim gravitacijskim sažimanjem materije oko centara istih. Naime, uzmimo za pretpostavku da je rani svemir bio homogen, s prosječnom gustoćom materije $\bar{\rho}$. Ta je pretpostavka valjana jer mjerenja pozadinskog mikrovalnog zračenja (eng: *CMB - Cosmic Microwave Background*) pokazuju da je odstupanje od homogenosti u ranom svemiru nakon rekombinacije (otprilike 380 000 godina nakon Big Banga) bilo reda veličine $\approx 10^{-5}$ [2]. Takvo odstupanje je izuzetno malo te dodatno potvrđuje pretpostavku homogenosti našeg svemira. Ukoliko se tada zbog kvantnih fluktuacija u primordijalnom Gaussijanskom polju materije na nekom prostoru pojavi povećana gustoća materije, ona će početi jače gravitacijski privlačiti okolnu materiju. S vremenom će stoga, zbog neprestanog privlačenja dodatne materije, gusta područja postajati sve gušća. Numeričkim simulacijama se pokazalo da će takva gusta područja također interagirati s drugim područjima povećane gustoće, te će nakon dovoljno dugo vremena (nakon brojnih sudara i daljnjih spajanja) nastati kozmičke strukture kakve vidimo danas. Takav proces zove se *bottom – up* proces stvaranja kozmoloških struktura [32]. S druge strane, zbog konstantnog širenja svemira, cjelokupna će se gustoća materije u svemiru smanjivati s $1/a^3$, gdje je a faktor ekspanzije svemira. Ta dva efekta igraju bitnu ulogu u nastanku struktura u ranom svemiru. Rijetka područja, koja nemaju dovoljno materije unutar svog volumena da

se suprotstave širenju svemira, će stoga postupno postajati sve rjeđa i rjeđa. Ovakav proces možemo jednostavno opisati. Uzmimo proizvoljnu sferu radijusa R ispunjenu materijom, tako da je njena gustoća ρ zadana s

$$\rho(t) = \tilde{\rho}(t)[1 + \delta(t)], \quad (1.1)$$

gdje je $\delta(t)$ tzv. kontrast gustoće koji mjeri odstupanje od prosjeka gustoće u svemiru. Ako je δ pozitivan, volumen unutar sfere će biti gušći od prosjeka, dok je za $\delta < 0$ promatrani volumen rjeđi od ostatka svemira. U većini je situacija odmak od prosječne gustoće veoma malen ($|\delta| \ll 1$) pa ponašanje materije možemo opisati linearnom evolucijom. Akceleracija zbog gravitacijskog privlačenja mase unutar sfere radijusa R dana je Newtonovim zakonom

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{G}{R^2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho R^3 \right) = -\frac{4\pi}{3} G \tilde{\rho} R (1 + \delta). \quad (1.2)$$

S obzirom da radimo na velikim udaljenostima te da je $|\delta| \ll 1$, možemo zanemariti Einsteinove popravke te se zaustaviti na Newtonovoj formulaciji gravitacije. Iz formule (1.2) jasno vidimo da se za pozitivnu vrijednost kontrasta δ sfera radijusa R smanjuje ($\ddot{R} < 0$), odnosno kolapsira u samu sebe. Što je gustoća materije na nekom području veća (odnosno što je parametar δ veći), to će ovaj proces biti brži. S obzirom na to da δ po definiciji ne može biti manja od -1, u limitu u kojem sfera ne obuhvaća nikakvu masu dobivamo $\ddot{R} = 0$. Sada pomoću zakona očuvanja mase unutar sfere $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 = \text{const.}$ te s pretpostavkom da se radi o barionskoj materiji (odnosno da $\tilde{\rho}(t) \sim 1/a^3(t)$), možemo povezati radijus R s faktorom širenja svemira

$$R(t) \sim \tilde{\rho}(t)^{-1/3} [1 + \delta(t)]^{-1/3} \sim a(t) [1 + \delta(t)]^{-1/3}. \quad (1.3)$$

Vidimo da, ako je sfera gušća od prosjeka ($\delta > 0$), taj dio prostora će se širiti sporije od ostatka svemira - koji se širi faktorom $a(t)$. Ovo je upravo činjenica koju smo objasnili na početku uvoda. Gušća područja će se zbog gravitacijske interakcije opirati širenju svemira, dok su rjeđa područja, zbog slabije međusobne interakcije, u nemogućnosti suprotstaviti se širenju svemira te će postupno postajati sve rjeđa i rjeđa (u odnosu na ostatak svemira). Formulu (1.3) za male δ možemo razviti u red

te potom derivirati. Dobivamo formulu

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\ddot{\delta} - \frac{2}{3}\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}, \quad (1.4)$$

koju možemo ponovno ubaciti na lijevu stranu jednadžbe (1.2) kako bi dobili

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\ddot{\delta} - \frac{2}{3}\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = -\frac{4\pi}{3}G\tilde{\rho}(1 + \delta). \quad (1.5)$$

Iz ove jednadžbe možemo vidjeti daljnji razvoj varijacija gustoće, tj. pratiti njihovu evoluciju u vremenu. Kao što smo do sad vidjeli, kontrast gustoće $\delta(t)$ je glavni faktor pri određivanju dinamike sustava. Stoga ćemo se u nastavku ovog rada koristiti upravo δ kao varijablu prilikom evolucije sustava.

Za $\delta = 0$ (potpuno homogen svemir) formula (1.5) daje $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G\tilde{\rho}$, što je točan opis Friedmanove jednadžbe za homogeni i izotropni svemir koji sadrži samo materiju bez pritiska [17]. Pomoću ove relacije možemo se riješiti članova s desne i lijeve strane jednadžbe (1.5) koji nisu proporcionalni s δ . Puni relativistički raspis jednadžbe (1.5) tada izgleda

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}\Omega_m H^2 \delta = 0, \quad (1.6)$$

pri čemu je $H = \dot{a}/a$ Hubbleov parametar koji opisuje stopu širenja svemira, a $\Omega_m = \frac{\tilde{\epsilon}_m}{\epsilon_c} = \frac{8\pi G\tilde{\epsilon}_m}{3c^2 H^2}$ omjer gustoće energije materije ϵ_m naspram kritične gustoće energije svemira ϵ_c . Drugi član u jednadžbi ($\sim H\dot{\delta}$) se često zove i Hubbleovo trenje (eng: *Hubble friction*), jer se opire rastu perturbacija gustoće u širećem svemiru. Iz ove jednadžbe možemo promatrati različita rješenja za evoluciju polja gustoće. Ukoliko se svemir ne bi širio (tj. kada je $H = 0$), dobivamo oscilatorna rješenja jednadžbe (1.6)

$$\delta(t) \approx A_1 e^{c_s t/\lambda_J} + A_2 e^{-c_s t/\lambda_J}. \quad (1.7)$$

Pri tome važnu ulogu ima parametar $\lambda_J = c_s \left(\frac{\pi c^2}{G\tilde{\epsilon}}\right)^{1/2}$, poznat pod nazivom Jeansova duljina (c_s je brzina zvuka u promatranom mediju). Područja veća od Jeansove duljine urušavaju se zbog gravitacijskog sažimanja, dok je za područja manja od Jeansove duljine tlak materije dovoljno snažan da se opire gravitacijskom sažimanju pa dobivamo stabilne oscilacije materije.

Različite vrste materije drugačije pridonose razvoju struktura. Primjerice, u ranom svemiru je dominirala radijacija ($\Omega_m \ll 1$ i $H = \frac{1}{2t}$) te su fluktuacije gustoće rasle

logaritamski

$$\delta(t) \approx B_1 + B_2 \ln t. \quad (1.8)$$

U dalekoj budućnosti svemira će evolucijom dominirati kozmološka konstanta Λ pa će parametar gustoće obične materije opet biti zanemariv

$$\delta(t) \approx C_1 + C_2 e^{-2H_\Lambda t}. \quad (1.9)$$

Vidimo da će tada fluktuacije gustoće doseći konstantnu amplitudu, dok će prosječna gustoća energije trnuti s $\tilde{\epsilon}_m \sim e^{-3H_\Lambda t}$. Stoga fluktuacije gustoće poprimaju bitnu ulogu u razvoju galaksija i ostalih struktura jedino tijekom faze kada standardna materija dominira evolucijom svemira ($\Omega_m \approx 1$ te $H = \frac{2}{3t}$). Tada kao rješenje jednadžbe (1.6) dobivamo superpoziciju rastućeg i padajućeg moda

$$\delta(t) \approx D_1 t^{2/3} + D_2 t^{-1} \quad (1.10)$$

U našem radu ograničit ćemo se na promatranje Einstein-de Sitter kozmologije, tj. ravnog svemira ispunjenog samo materijom ($\Omega_M = 1$) te će nam rješenja poput (1.10) biti od iznimne važnosti.

Bitnu ulogu u razvoju ovih struktura ima i tamna materija. Naime, barionska materija počela je stvarati strukture tek nakon razvezivanja (eng: *decoupling*) od fotona. Kada bi barionska materija bila jedina vrsta nerelativističke materije u svemiru, perturbacije gustoće bi mogle početi znatno rasti tek na $z \approx 1100$ [17] (gdje je z crveni pomak) te do danas ne bi uspjele narasti na svoju trenutačnu veličinu. Tamna materija se zbog neinterakcije s fotonima počela sažimati puno ranije ($z \approx 3570$), te je stoga stvorila početne jezgre gravitacijskog potencijala u koje je standardna barionska materija kasnije upala. Na taj je način tamna materija stvorila temelje razvitka struktura koje danas opažamo. Iako je priroda tamne materije još uvijek nepoznata, neka mjerenja [14] predviđaju da je gustoća tamne materije i do 10^{50} čestica po Mpc^3 . U takvoj granici, čestična priroda tamne materije postaje zanemariva te hladnu tamnu materiju (eng: *CDM - Cold Dark Matter*) možemo opisati jednadžbama fluida. S obzirom na to da je hladna tamna materija nerelativistička, na skalama manjim od Hubbleovog radijusa možemo ju opisati jednadžbama gibanja Newtonovske gravitacije. U većini slučajeva, kontrast gustoće δ će biti puno veći od jedan. Stoga nastanak

i daljnji razvoj struktura nećemo moći opisati linearnom evolucijom (1.6), već će nam trebati perturbativno rješenje. Za potpuni opis evolucije materije u svemiru i formaciju struktura na velikim skalama (eng: *LSS – Large Scale Structure*), koristi se standardna perturbacijska teorija (SPT). Ona modelira tamnu materiju pomoću tekućine bez tlaka koja se giba u širećem svemiru te perturbativnim pristupom rješava Eulovu i Poissonovu jednadžbu. Yakov Zeldovich [15] je krajem 20. stoljeća predložio novi način rješavanja jednadžbi, u kojem se umjesto fiksnog vanjskog koordinatnog sustava, prebacujemo u koordinatni sustav koji prati elemente fluida. U takvom sustavu tražimo perturbativna rješenja polja pomaka između početnih i konačnih položaja čestica (ili elementa fluida). Takva "Lagrangeova" forma teorije pokazala se boljom u opisu gibanja velikih količina materije te formacije struktura na velikim skalama zbog svog razvoja po varijanci relativnog pomaka, za koji ćemo vidjeti da uzrokuje najveći nelinearni efekt pri razvoju kozmičkih struktura. No jedan od velikih problema standardne i Lagrangeove formulacije jest taj da tretira nelinearne modove kao da su perturbativni. Također, zbog vezanja modova dva UV (kratkovalna) moda mogu se vezati te proizvesti IR (dugovalni) mod i tako utjecati na dinamiku sustava na velikim skalama. Jedan od načina rješavanja ovog problema jest pomoću tehnika efektivne teorije polja. Korištenjem funkcije glađenja možemo integrirati jednadžbe gibanja te na taj način filtrirati dinamiku na malim skalama. Kao rezultat dobivamo efektivnu teoriju na velikim skalama, dok utjecaje nelinearnih valnih vektora modeliramo dodatnim parametrima. To nam daje puno precizniji opis dinamike koji je primjenjiviji na većem području od klasičnih teorija. Naime za prvi red popravki ($1 - loop$), efektivna perturbacijska teorija je precizna čak i do $k \approx 0.2h\text{Mpc}^{-1}$ [29], dok za drugi red popravki ($2 - loop$) ostaje precizna na $k \approx 0.7h\text{Mpc}^{-1}$. To je 2^6 puta preciznije od standardne perturbacijske teorije na $z = 0$ [22]. U ovom radu bavit ćemo se upravo tim efektivnim metodama te ćemo detaljno opisati formalizam koji stoji iza njih. U poglavlju 2. izvest ćemo jednadžbe gibanja standardne perturbacijske teorije, izračunati spektar snage do drugog reda popravki te ga usporediti s numeričkim simulacijama. U 3. poglavlju raspisat ćemo jednadžbe gibanja za efektivnu teoriju polja te pokazati kako se dobiveni spektar snage puno bolje slaže sa simulacijama. U poglavlju 4 uvest ćemo Lagrangeovu perturbacijsku teoriju te usporediti njene rezultate sa standardnom perturbacijskom teorijom, dok ćemo u poglavlju 5. pokazati rezultate za efektivnu Lagrangeovu teoriju.

2 Standardna perturbacijska teorija (SPT)

Kao što smo već naglasili, naš svemir je izrazito homogen na velikim skalama (većim od 100 Mpc). Pažljivijim promatranjem slike 1.1 možemo uočiti različite strukture, poput primjerice superskupova galaksija, koje su rezultat dugotrajne evolucije primordijalnih fluktuacija pojačanih gravitacijskim interakcijama obične i tamne materije u širećem svemiru. Standardna perturbacijska teorija (SPT, poznata i pod nazivom "Eulerova" perturbacijska teorija) opisuje grupiranje i evoluciju te kozmološke materije (sačinjene od barionske tvari i hladne tamne materije) rješavanjem Eulerovih jednadžbi i jednadžbi kontinuiteta. Krajnji cilj je opisivanje nastanka struktura na velikim skalama te praćenje njihovog daljnjeg razvitka u vremenu.

Kako bi došli do opisa ponašanja materije na velikim skalama te formacije struktura vidljivih na slici 1.1, moramo prvo izvesti jednadžbe gibanja za tijela u širećem svemiru. Ako imamo neko tijelo (locirano na poziciji \mathbf{r}) koje je okruženo s N čestica jednakih masa m , ono će se gibati po Newtonovom zakonu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = Gm \sum_i^N \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3}, \quad (2.11)$$

gdje je G Newtonova gravitacijska konstanta, a \mathbf{v} brzina promatranog tijela na poziciji \mathbf{r} . U našem slučaju, ta tijela mogu predstavljati kvante tamne materije ili običnu barionsku materiju. Također, kao i u uvodu, možemo se zadržati na Newtonovom gravitacijskom režimu jer su relativističke korekcije zanemarive na skalama koje mi proučavamo. U limesu $N \rightarrow \infty$, jednadžbu (2.11) možemo reformulirati kao

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi, \quad (2.12)$$

pri čemu je ϕ gravitacijski potencijal zadan preko lokalne gustoće mase $\rho(r)$:

$$\phi(\mathbf{r}) = G \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (2.13)$$

U ovom smo izvodu zanemarili sve sile osim gravitacije jer je upravo ona glavni način interakcije materije na velikim skalama. Jaka i slaba sila su izrazito kratkosežne te u režimu (od nekoliko stotina svjetlosnih godina) u kojem mi radimo, jedinu znatnu kontribuciju pridonosi gravitacijska sila. Naravno, prilikom razvoja i

evolucije kozmičkih struktura veliku ulogu ima i elektromagnetska sila, no važno je napomenuti da je gravitacijska interakcija jedini zasad zabilježeni način interakcije tamne materije s običnom tvari. Stoga izuzetno bitno precizno opisati upravo takav tip interakcije te ćemo se zato u ovom radu fokusirati samo na gravitacijsku interakciju.

Širenje našeg svemira opisujemo pomoću bezdimenzionalnog kozmološkog parametra $a(t)$. Stvarna koordinata \mathbf{r} je tada dana s $\mathbf{r} = a\mathbf{x}$, gdje je \mathbf{x} pozadinska sugibajuća koordinata (možemo ju zamisliti kao statični koordinatni sustav koji okružuje naš svemir). Faktor $a(t)$ nam govori koliko su se udaljenosti između dvije točke u svemiru promijenile tijekom vremena, a standardno se uzima norma $a(t_0) = 1$, gdje je t_0 sadašnje vrijeme. Zbog širenja svemira, jednadžbe gibanja najčešće zapisujemo pomoću konformalnog vremena τ , koje je povezano sa standardnim kozmičkim vremenom relacijom $dt = a(t)d\tau$. Brzina \mathbf{v} iz formule (2.12) se može u sugibajućim koordinatama zapisati kao

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial a}{a\partial\tau}\mathbf{x} + \frac{\partial\mathbf{x}}{a\partial\tau}a = \mathcal{H}\mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

pri čemu je $\mathcal{H} = aH = \dot{a}$ konformalna stopa ekspanzije, dok je $\mathbf{u} = \partial\mathbf{x}/\partial\tau$ tzv. svojstvena brzina. Kozmološki gravitacijski potencijal definiramo kao

$$\Phi(\mathbf{x}, \tau) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tau} + \phi(\mathbf{x}, \tau), \quad (2.15)$$

gdje prvi dio odgovara korekciji gravitacijskog potencijala zbog širenja svemira dok je ϕ dio isti kao u jednadžbi (2.13). Taj dio predstavlja stvarni gravitacijski doprinos zbog prisutne mase te zadovoljava Poissonovu jednadžbu

$$\nabla^2\phi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{3}{2}\Omega_m(\tau)\mathcal{H}^2(\tau)\delta(\tau, \mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Pritom smo definirali polje kontrasta δ (isto kao i u jednadžbi (1.1)) kao odstupanje od konstantne pozadinske gustoće $\tilde{\rho}$

$$\delta(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\rho(\tau, \mathbf{x}) - \tilde{\rho}}{\tilde{\rho}}. \quad (2.17)$$

Jednadžbu (2.12) sada možemo zapisati pomoću svojstvenog impulsa $\mathbf{p} = ma\mathbf{u}$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -am\nabla\phi(\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

Ova jednadžba predstavlja svojevrni drugi Newtonov zakon za gibanje čestica u gravitacijskom potencijalu u širećem svemiru. Za razliku od opisa gibanja čestica, evoluciju samog pozadinskog svemira, koji je homogen i izotropan, zapisujemo pomoću Friedmanovih jednadžbi:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tau} = \frac{\Omega_m(\tau)}{2}\mathcal{H}^2(\tau) + \frac{\Lambda}{3}a^2(\tau), \quad (2.19)$$

$$(\Omega_{tot}(\tau) - 1)\mathcal{H}^2(\tau) = k, \quad (2.20)$$

pri čemu su Ω_m omjer gustoće energije i kritične gustoće, Λ kozmološka konstanta te faktor zakrivljenosti $k=-1,0,1$ (ovisno o predznaku $\Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_\Lambda$).

Kako bi kompletirali opis ponašanja čestica u širećem svemiru, uz Friedmanove jednadžbe (2.19),(2.20) te Poissonovu jednadžbu (2.16) potrebna nam je i jednadžba kontinuiteta. Bitna stavka za napomenuti je kako mi ne znamo točna svojstva i ponašanje tamne materije izvan njenog gravitacijskog međudjelovanja s običnom materijom. Stoga postoje različite modeli za opisivanje tamne materije (aksioni, neutrini, primordijalne crne rupe i slično) [33]. Priroda i podrijetlo tamne materije je izrazito aktualna tema te predstavlja jedno od najistraživanijih kozmoloških pitanja današnjice. Mi ćemo tamnu materiju statistički opisivati pomoću jednadžbi nesudarajućeg (točnije neinteragirajućeg) fluida jer se takav opis dobro slaže s profilima gustoće mjerenih galaksija, pa tako i naše [20], te se uzima kao standardni opis tamne materije [31]. Skup čestica takvog fluida opisan je distribucijskom funkcijom f . Ona u sebi sadrži sve potrebne informacije za opis sustava, poput njegove lokacije i impulsa:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \sum_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\delta^3(\mathbf{p} - ma\mathbf{u}), \quad (2.21)$$

pri čemu suma ide po svim česticama u promatranom skupu. Naravno, zbog egzotičnosti tamne materije mi ne znamo da li se u jedinici volumena nalazi jedna ili stotine tisuća čestica tamne materije. Srećom, nas samo zanima ukupna masa kojom taj određeni volumen fluida doprinosi što nam omogućava da zanemarimo detaljniji uvid u prirodu tamne materije.

Kako bi dobili relaciju koja opisuje evoluciju fluida tamne materije, krenimo od pretpostavke da čestice, opisane funkcijom distribucije $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau)$, ne mogu nestati iz sustava, tj. da je distribucijska funkcija očuvana u vremenu. Tada imamo

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\tau} &= 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{p}}{ma} \cdot \nabla f - am \nabla \phi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ova nelinearna jednačba sedam varijabli poznata je pod nazivom Vlasovljeva jednačba te ju je veoma teško izravno riješiti [1]. Kako bi ju pojednostavili, razvijamo ju po n -tim momentima distribucijske funkcije, množeći relaciju (2.22) sa $\int d^3p p^n$. Nulti red Vlasovljeve jednačbe je tada dan sa

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3p \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{ma} \int d^3p \mathbf{p} \nabla f - am \int d^3p \nabla \phi \frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{1}{am} \int d^3p (\nabla[\mathbf{p}f] - f \nabla \mathbf{p}) - am \nabla \phi \int d^3p \frac{\partial f}{\partial p} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla[\rho \mathbf{u}] \\ &= \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \nabla[(1 + \delta) \mathbf{u}], \end{aligned} \quad (2.23)$$

pri čemu smo definirali različite momente funkcije f

$$\begin{aligned} \int d^3p f(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \rho(\tau, \mathbf{x}), \\ \frac{1}{am} \int d^3p \mathbf{p} f(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \rho(\tau, \mathbf{x}) \mathbf{u}(\tau, \mathbf{x}), \\ \frac{1}{a^2 m^2} \int d^3p p_i p_j f(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \rho(\tau, \mathbf{x}) \mathbf{u}_i(\tau, \mathbf{x}) \mathbf{u}_j(\tau, \mathbf{x}) + \sigma_{ij}(\tau, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vidimo da nulti moment distribucijske funkcije standardno odgovara gustoći ukupne mase sustava dok prvi i viši momenti opisuju impuls i njegovu distribuciju [3].

U jednačbi (2.23) smo u drugom redu zanemarili zadnji član jer je derivacija integrala jednaka nuli. Jednačba (2.23) također se naziva i jednačbom kontinuiteta za polje kontrasta δ te opisuje očuvanje materije prilikom njene evolucije kroz određeni

volumen. Nadalje, množeći jednadžbu (2.22) s $\int d^3p \mathbf{p}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3p f \mathbf{p} + \frac{1}{ma} \int d^3p \mathbf{p}^2 \nabla f - am \int d^3p \nabla \phi \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p} \\
&= \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial \tau} + \frac{1}{am} \int d^3p (\nabla[\mathbf{p}^2 f] - f \nabla \mathbf{p}^2) \\
&\quad - am \int d^3p \nabla \phi \left(\frac{\partial \mathbf{p} f}{\partial p} - f \right) \\
&= \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial \tau} + \nabla[\rho(\tau, \mathbf{x}) \mathbf{u}_i(\tau, \mathbf{x}) \mathbf{u}_j(\tau, \mathbf{x}) + \sigma_{ij}(\tau, \mathbf{x})] + \nabla \phi.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Ako od ove jednadžbe oduzmemo jednadžbu kontinuiteta (2.23) pomnoženu sa \mathbf{u} , dobivamo Eulerovu jednadžbu, koja opisuje interakciju materije u širećem prostoru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \mathcal{H} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \phi - \frac{1}{\rho} \nabla_j (\rho \sigma_{ij}). \tag{2.26}$$

Vidimo da se jednadžbe za n-ti red distribucijske funkcije uvijek vežu n-ti i n+1 moment. Primjerice, jednadžba kontinuiteta (2.23) veže nulti moment ρ te prvi moment \mathbf{u} , dok Eulerova jednadžba (2.26) veže prvi i drugi moment σ distribucijske funkcije. Prvi i treći član u Eulerovoj jednadžbi ($\partial_\tau + \mathbf{u} \cdot \nabla$), predstavljaju konvektivnu derivaciju, koja opisuje tok materije kroz prostor i njenu promjenu u vremenu. Drugi član predstavlja Hubbleov otpor, koji smanjuje brzinu gibanja materije proporcionalno s brzinom širenja svemira ($\sim \dot{a}$). Član koji sadrži ϕ opisuje gravitacijski utjecaj materije, dok zadnji član predstavlja tenzor stresa. Tenzor stresa σ u jednadžbama stanja savršenog fluida [3] opisuje odstupanje gibanja čestica od savršenog koherentnog toka. Stoga se najčešće uzima aproksimacija $\sigma_{ij} = 0$, koja je valjana daleko od prelaska Hubbleovog horizonta [4]. Na velikim skalama možemo dakle pretpostaviti da su fluktuacije perturbacija male te se često zadržavamo samo na linearnim članovima Eulerovih jednadžbi i jednadžbi kontinuiteta. No na malim skalama ($r < 10$ Mpc), ovakva linearna aproksimacija više ne vrijedi [21]. Zbog neinteragirajuće prirode tamne materije, putanje čestica u faznom prostoru prelaze jedna preko druge. U takvom režimu više ne vrijedi $\sigma_{ij} \approx 0$ te prelazimo iz koherentnog toka u turbulentni, što inducira dodatne nelinearnosti. Prelazak iz jednog režima u drugi zove se *shell – crossing*. Većina linearnih predikcija propada nakon *shell – crossing*-a te ta granica predstavlja veliku prepreku pri razvoju točnih teorija za opisivanje evolucije materije u svemiru. Kasnije ćemo pokazati da zbog dodatnog $k^2 P_L(k)$ člana,

efektivna teorija bolje prati nagib stvarnog spektra (dobivenog simulacijama) te modeliranjem efektivnih parametara (tako da oni u sebe inkorporiraju informacije o *shell – crossing*-u) produljuje područje na kojem se perturbacijska teorija može koristiti. Na taj način efektivna teorija ostaje precizna čak i nakon *shell – crossing*-a.

2.1 Standardna perturbacijska teorija (SPT) u jednoj dimenziji

Sada se zbog jednostavnosti možemo prebaciti u 1D. U jednoj dimenziji svi modovi valnih vektora orijentirani su u istom smjeru te se nalaze na infinitezimalno tankoj plohi. Zbog preferiranja jednog smjera ovakva pretpostavka ne poštuje kozmološko načelo statističke izotropnosti. No, unatoč tako visokoj stopi simetrije, 1D SPT vjerno prati i predviđa gotovo sva ponašanja 3D SPT-a. Kako bi reproducirali sve rezultate klasične teorije, primjerice gravitacijsku silu, moramo zbrojiti sve infinitezimalne plohe u području koje promatramo. Također, moramo uzeti u obzir da se te plohe međusobno šire zbog ekspanzije svemira te da im gustoća opada s a^{-2} [12]. Računanje perturbacijske teorije u jednodimenzionalnom režimu omogućuje nam da brže i lakše dođemo do rezultata koji možemo primijeniti i u 3D. Sve trodimenzionalne integrale d^3k možemo zamijeniti jednodimenzionalnim dk integralima, što omogućava izračune viših redova u računu smetnje. Primjerice, može se pokazati [12] da se računanjem 1D perturbacijske teorije uveliko smanjuje potrebna komputacijska snaga, tj. za istu preciznost rezultata potrebno je i do 1000 puta manje simulacija. Stoga je proučavanjem 1D SPT moguće lakše i detaljnije testirati više kozmoloških modela nego u 3D, gdje je potreban puno veći broj simulacija za isti rezultat [25]. Također, možemo pokazati da u jednoj dimenziji, rješenja ostaju egzaktna čak i prilikom *shell – crossinga*, što omogućuje precizno određivanje evolucije sustava. Eulerovu i Lagrangreovu perturbacijsku teoriju možemo u 1D izvrijediti do beskonačnog reda, no pokazat ćemo da se takvi izračuni ne poklapaju sa simulacijama na nelinearnim skalama jer su ove teorije loše pri izračunu dinamike oko kolabiranih (odnosno već formiranih) struktura. Unatoč tomu, jednodimenzionalna dinamika je zbog svoje jednostavnosti zanimljiva za proučavanje te vjerno opisuje ista ponašanja 3D perturbacijske teorije, poput vezanja različitih modova [24] ili pomicanja i razmazivanja BAO vrha [23].

Jednadžbu kontinuiteta i Eulerovu jednadžbu možemo sada u jednoj dimenziji napi-

sati s pomoću divergencije polja brzina $\theta(\tau, \mathbf{x}) = \nabla u$, pri čemu je $\nabla \equiv \partial_x$. U jednodimenzionalnom režimu svojstvena brzina u je skalarna veličina. Nadalje, divergencija polja brzina θ govori nam da li se tok svojstvene brzine sužava ili širi. Jednadžbe (2.23) i (2.26) u 1D poprimaju oblik

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \theta = -\nabla(\delta u), \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \mathcal{H}\theta + 4\pi G a^2 \tilde{\rho} \delta = -\nabla(u \nabla u), \quad (2.28)$$

pri čemu smo, da bi dobili izraz (2.28), prvo derivirali jednadžbu (2.26) te iskoristili Poissonovu jednadžbu (uz konvenciju $\nabla^2 \phi = -4\pi G a^2 \tilde{\rho} \delta$). Često nas, umjesto samog prostora i pozicija, zanimaju i energije čestica (odnosno impulsi čestica k). Zato je poželjno prebaciti se u impulsni prostor, korištenjem Fourierovog transformata, definiranog kao

$$\tilde{A}(k, \tau) = \int dx e^{-ikx} A(x, \tau). \quad (2.29)$$

Upotrebom Fourierovog transformata na jednadžbe (2.27) i (2.28) dobivamo sljedeće jednadžbe, napisane u impulsnom prostoru

$$\partial_\tau \tilde{\delta}(k) + \tilde{\theta}(k) = - \int \frac{dk'}{2\pi} \frac{k}{k'} \tilde{\theta}(k') \tilde{\delta}(k - k'), \quad (2.30)$$

$$\partial_\tau \tilde{\theta} + \mathcal{H} \tilde{\theta} + 4\pi G a^2 \tilde{\rho} \tilde{\delta}(k) = - \int \frac{dk'}{2\pi} \frac{k^2}{2k'(k - k')} \tilde{\theta}(k') \tilde{\theta}(k - k'). \quad (2.31)$$

Ovaj skup diferencijalno-integralnih jednadžbe rješavamo perturbativnim pristupom. Ukupna konačna rješenja su zadana pomoću razvoja linearnog rješenja po faktoru skale a . Linearno rješenje se dobiva rješavanjem lineariziranih jednadžbi (2.30) i (2.31)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\delta}_L}{\partial \tau} + \tilde{\theta}_L &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\theta}_L}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\tau) \tilde{\theta}_L &= -\nabla^2 \phi(k, \tau). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Rješenja ovih linearnih jednadžbi

$$\delta_L(k) = D_1^{(+)} A(k) + D_2^{(-)} B(k), \quad (2.33)$$

su zadana pomoću arbitrarnih funkcija $A(k)$ i $B(k)$ koje opisuju inicijalnu raspodjelu polja gustoće. Modovi $D^{(\pm)}$ opisuju rast i smanjenje fluktuacija gustoće u vremenu. Primjerice, za Einstein-de Sitter metriku ($\Omega_m = 1$) dobivamo $D^{(+)} = a$ te $D^{(-)} = a^{-3/2}$, slično kao i u jednadžbi (1.10). Za različite vrijednosti početnih uvjeta možemo dobiti različita linearna rješenja [5]. Mi ćemo se u našoj analizi ograničiti samo na najbrže rastući mod $D^{(+)}$, iz razloga jer je $a \sim \tau^2$ pa trnući mod $D^{(-)}$ naglo opada u vremenu te vrlo brzo postaje nezamjetan u analizi polja gustoće.

Ukupno rješenje polja kontrasta δ i divergencije polja brzina θ , dobivenih iz Eulerove i kontinuitetne jednadžbe, su u impulsnom prostoru dani kao linearna kombinacija osnovnog (linearnog) rješenja (2.33), uz zamjenu $D^{(+)} = a$

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(\tau, k) &= \sum_{m=1}^{\infty} a^m(\tau) \tilde{\delta}_L^{(m)}(k), \\ \tilde{\theta}(\tau, k) &= -\mathcal{H}(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} a^m(\tau) \tilde{\theta}_L^{(m)}(k).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Za rješenja kozmologija koje nisu Einstein-de Sitter možemo zadržati D^m umjesto a^m u razvoju. Uvrštavanjem ovog razvoja natrag u jednadžbe (2.30) i (2.31) dobivamo rješenja

$$\begin{pmatrix} \tilde{\delta}^{(n)}(\tau, k) \\ \tilde{\theta}^{(n)}(\tau, k) \end{pmatrix} = a^{-n} \int \frac{dk_1 \dots dk_n}{(2\pi)^{n-1}} \delta^D(\sum k_i - k) \begin{pmatrix} F_n(\{k_i\}) \\ G_n(\{k_i\}) \end{pmatrix} \tilde{\delta}_L(k_1) \dots \tilde{\delta}_L(k_n), \tag{2.35}$$

gdje je δ_L linearno polje kontrasta (rješenje (2.33)). Jezgre F_n i G_n su rekurzivne funkcije koje zadovoljavaju relacije

$$F_n = (2n + 1)X_n + Y_n, \quad G_n = 3X_n + nY_n, \tag{2.36}$$

pri čemu su

$$\begin{aligned}X_n &= \frac{1}{(2n + 3)(n - 1)} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(k_1 + \dots + k_n)}{(k_1 + \dots + k_m)} G_m(k_1, \dots, k_m) F_{n-m}(k_{m+1}, \dots, k_n), \\ Y_n &= \frac{1}{(2n + 3)(n - 1)} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(k_1 + \dots + k_n)^2}{(k_1 + \dots + k_m)(k_{m+1} + \dots + k_n)} G_m(k_1, \dots, k_m) \cdot \\ &\quad G_{n-m}(k_{m+1}, \dots, k_n).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Ako znamo da su $F_1 = G_1 = 1$, iz relacija (2.36) i (2.37) lako možemo izvesti neke od jezgri. Primjerice vidmo kako je $F_2(k_1, k_2) = \frac{(k_1+k_2)}{k_1} \left(\frac{5}{7} + \frac{(k_1+k_2)}{7k_2} \right)$ jednodimenzionalna verzija 3D jezgre iz [1] i [30].

2.2 Spektar snage i CAMB kod

S obzirom na to da nam je cilj proučavati ponašanje svemira na velikim skalama, teško je izravno mjeriti ponašanje polja $\delta(x)$ u svakoj točki prostora. Stoga, kao kod računanja svojstava plina u kutiji, pribjegavamo statističkom pristupu. Na taj način možemo sažeti cjelokupnu dinamiku sustava u nekoliko izmjerenih veličina. Najvažnija od njih jest korelacijska funkcija $\xi(r)$, koja je definirana kao prosjek ansambla $\langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle = \xi(r)$. Zbog homogenosti i izotropnosti svemira, korelacijska funkcija ovisi samo o modulu $|r|$. Korelatori su u impulsnom prostoru dani pomoću Fourierovog transformata (2.29)

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\delta}(k)\tilde{\delta}(k') \rangle &= \int dx dr \langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle e^{-i(k+k')\cdot x - ik'\cdot r} \\
&= \int dx dr \xi(r) e^{-i(k+k')\cdot x - ik'\cdot r} \\
&= \delta^D(k+k') \int dr \xi(r) e^{-ikr} \\
&= \delta^D(k+k') P(k),
\end{aligned} \tag{2.38}$$

pri čemu smo definirali spektar snage kao Fourierov transformat korelacijske funkcije

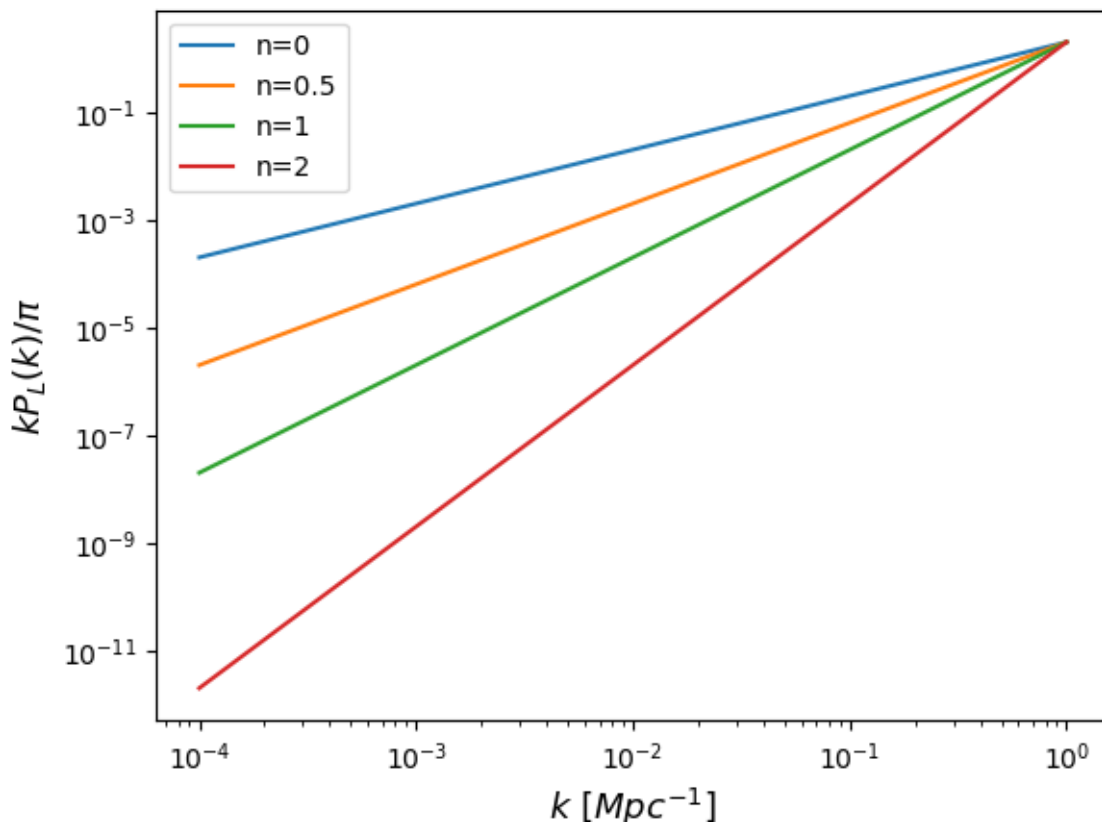
$$P(k) = \int dr \xi(r) e^{-ikr}. \tag{2.39}$$

Relacija (2.38) nam je veoma bitna je jer nam omogućuje da direktno promatramo kozmološke perturbacije mjerenjem spektra snage $P(k)$. Može se pokazati kako linearni spektar snage P_L u najjednostavnijoj aproksimaciji ima eksponencijalnu ovisnost o valnom broju k [4] te se za tamnu materiju najčešće modelira kao

$$\frac{k}{2\pi} P_L = \left(\frac{k}{k_{NL}} \right)^{n+1}, \tag{2.40}$$

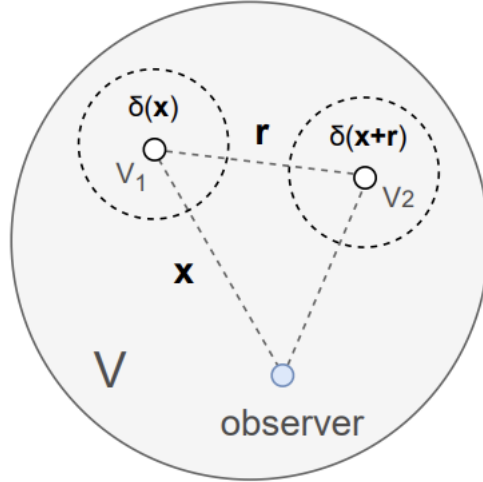
pri čemu je n spektralni indeks (Planck [2] podatci su pokazali kako $n \approx 1$), dok je k_{NL} nelinearni valni vektor koji određuje skalu na kojoj perturbacije postaju nelinearne (odnosno granicu na kojoj $\delta \gg 1$). Na slici 2.2 prikazan je spektar snage iz

relacije (2.40) u ovisnosti o različitim spektralnim indeksima. Iako je ovakav spektar snage izrazito lako analitički opisati, on ne prati najbolje stvarni spektar snage na malim skalama. Mi ćemo zato u našim izračunima koristiti spektar snage dobiven numeričkim izračunima Boltzmanovih jednažbi za gibanje čestica u perturbiranom svemiru [6] [31], o kojima ćemo više reći u nastavku. Također, važno je za napomenuti kako je na slici 2.2 (a i na svim ostalim slikama u ovom radu) umjesto običnog spektra snage grafirali bezdimenzionalni spektar $k \cdot P(k)/\pi$, što je standardna konvencija u kozmologiji.



Slika 2.2: Graf spektra snage $P_L(k)$ danog u relaciji (2.40), pri čemu smo fiksirali vrijednost parametra $k_{NL} = 1\text{Mpc}^{-1}$. Vidimo da se povećanjem spektralnog indeksa povećava nagib krivulje. Za negativne vrijednosti k ova funkcija ima simetričan oblik.

Spektar snage i korelacijska funkcija su tradicionalno izrazito važni za astrofizička istraživanja jer predstavljaju jedno od najplodnijih područja za prikupljanje kozmoloških podataka. Za temeljitije objašnjenje spektra snage u 3D, pogledajmo sliku 2.3. Na slici vidimo promatrača koji stoji unutar volumena V te dva kontrasta



Slika 2.3: Grafičko pojašnjenje korelacijske funkcije (2.38) [12]. Ako promatrač (eng: *observer*) na udaljenosti x promatra kontrast gustoće $\delta(x)$, korelacijska funkcija $\xi(r) = \langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle$ govori nam o vjerojatnosti pronalaska kontrasta gustoće $\delta(x+r)$ na udaljenosti $x+r$ od promatrača.

gustoće koji se nalaze unutar volumena V_1 i V_2 . U najjednostavnijem shvaćanju, spektar snage (odnosno korelacijska funkcija) govori nam, ako promatrač na udaljenosti x izmjeri kontrast gustoće $\delta(x)$, kolika je vjerojatnost da će na poziciji $x+r$ pronaći kontrast $\delta(x+r)$. Postoje brojni spektri snage koji se koriste u kozmologiji, no najpoznatiji je spektar snage mikrovalnog pozadinskog zračenja P_{CMB} . On se računa iz ξ_{CMB} , korištenjem formulom (2.39). ξ_{CMB} je definirana kao korelacijska funkcija između fluktuacija temperature

$$\xi_{CMB} = \langle \Delta T(\hat{n})\Delta T(\hat{n}') \rangle, \quad (2.41)$$

pri čemu je $\Delta T(\hat{n}) = \frac{T(\hat{n}) - T_0}{T_0}$ razlika temperature mikrovalnog zračenja izmjerene u smjeru \hat{n} (pri tome je T_0 prosječna temperatura usrednjena po cijelom nebu). Osim direktnih mjerenja, ovaj spektar snage može se u Λ CDM modelu izračunati korištenjem relacije

$$P_{CMB} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P_{\mathcal{R}}(k) |\mathcal{T}_l(k)|^2, \quad (2.42)$$

gdje je $P_{\mathcal{R}}$ spektar snage primordijalnih fluktuacija zakrivljenosti prostora, odnosno $|\mathcal{T}_l(k)|^2$, koja predstavlja transfer funkciju koja mapira evoluciju primordijalnih fluktuacija od ranih početaka svemira do današnjice. To znači da današnji spektar snage ovisi o početnim uvjetima svemira, evoluciji tih fluktuacija kroz vrijeme te interak-

ciji sa različitim vrstama materije. Ovakav proces je izrazito težak za analitičko rješavanje. Stoga postoje specificirani kodovi za modeliranje linearnog spektra snage koji numerički računaju linearizirane Boltzmanove jednačbe, poput onih u [30] i [31]. Takvi kodovi poznati su pod nazivom *Boltzmann code solvers*. Jedan od takvih kodova jest CAMB kod (*Code for Anisotropies in the Microwave Background*) [6]. CAMB kod je specijalno dizajniran za dobivanje spektra snage u kasnom sve-miru. Promjenom unosnih parametara (primjerice 6 Λ CDM parametra te gornje mase neutrina) možemo dobiti različite spektre snage za CMB, kao i za spektre tamne materije. U našem slučaju koristi ćemo parametre izračunate Planck [2] satelitom kako bi se rezultat podudaraao sa rezultatima numeričkih simulacija . Oni iznose $H_0 = 67.5$, $\omega_m = 0.022$, $\omega_c = 0.122$, $m_\nu = 0.06$, $\tau = 0.06$, $A_s = 2 \cdot 10^{-9}$ te $n_s = 0.965$. S obzirom da radimo u jednoj dimenziji, moramo renormalizirati orginalni CAMB spektar snage. Uzimamo slučaj u kojemu su svi modovi k usmjereni u jednoj dimenziji, odnosno

$$P_{1D} = P_{3D}(k_{||}) (2\pi)^2 \delta^D(\mathbf{k}_\perp), \quad (2.43)$$

gdje su $k_{||}$ modovi paralelni (odnosno okomiti k_\perp) na našu odabranu dimenziju. Ako iz notacije izbacimo ovisnosti o okomitom valnom vektoru te uzmemo $z = 0$, linearni spektar snage koji ćemo mi koristiti u našim izračunima iznosi

$$P_L(k) = \frac{k^2}{2\pi} P_{CAMB}(k) \quad (2.44)$$

Uz CAMB kod, također ćemo koristiti i rezultate PM (*Particle Mesh*) simulacija [4] za provjeru valjanosti naših rješenja. PM kodovi [26] postavljaju čestice u čvorišta pozadinske mreže te računaju daljnju evoluciju sustava rješavajući Hamiltonijan interakcije, određujući tako poziciju čestica u kasnijim trenutcima. Varirajući broj čestica, gustoću mreže te vremenski odmak između izračuna Hamiltonijana, moguće je postići veliku preciznost simulacijskih rezultata u odnosu na eksperimentalna mjerenja [25]. Simulacija koju mi koristimo [4] za provjeru rezultata koristi 10^8 čvorišta uz 10^7 čestica, kako bi evoluirala sustav od $z = 10$ do $z = 0$ (uz vremenski odmak $\sim \sqrt{a}$).

Na slici 2.4 vidimo usporedbu eksponencijalnog linearnog spektra snage iz relacije (2.40) te linearnog spektra dobivenog korištenjem CAMB koda (2.44). Oba spektra su uspoređena s rezultatom numeričkih simulacija [4]. Na slici jasno vidimo kako

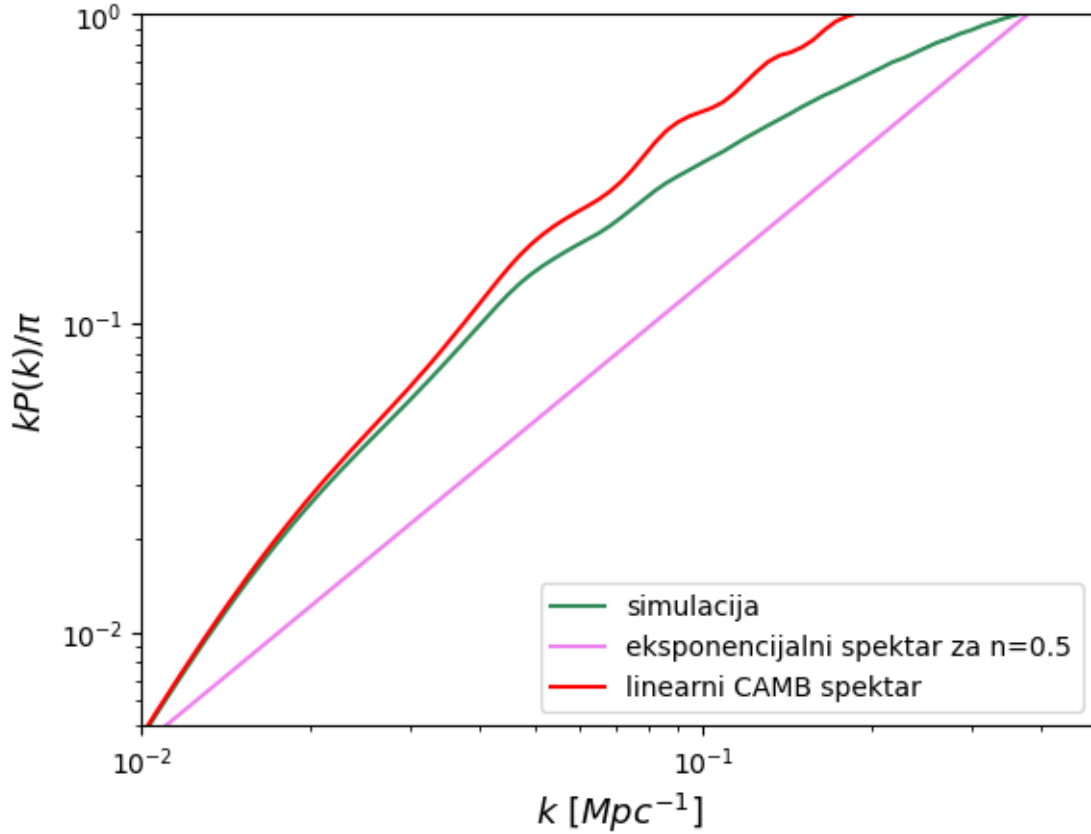
obje krivulje imaju slično ponašanje te je na velikim skalama eksponencijalni spektar dobra aproksimacija za stvarni spektar snage. No, linearni CAMB kod omogućava puno vjerniji i točniji opis spektra snage na malim skalama, kao što je i vidljivo sa slike. S obzirom da je nama cilj kvalitetno opisati ponašanje na malim, odnosno nelinearnim skalama, mi ćemo koristiti upravo CAMB kod u daljnjim izračunima linearnog spektra snage te popravki prvog reda. Također, bitno je za primjetiti kako za $k \approx 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ linearni CAMB kod odskoče od spektra dobivenog simulacijama, što nam govori da ulazimo u nelinearni režim i da linearno rješenje prestaje biti valjano. Naime, za razliku od CAMB koda koji rješava linearizirane Boltzmannove jednačbe, numeričke simulacije rješavaju ukupni Hamiltonijan interakcije. Na taj način numeričke simulacije u sebi sadržavaju i nelinearne doprinose, što omogućuje preciznije oponašanje pravog spektra [19]. Dodatna razlika između spektra snage dobivenog CAMB-ovim kodom te onog dobivenog simulacijama dolazi zbog toga što je CAMB kod usavršen za 3D spektar, dok su simulacije rađene isključivo za 1D. No ta je razlika veoma mala i ne utječe na naša mjerenja.

Kao što smo vidjeli na slici 2.4, linearni spektar loše prati pravi spektar snage nakon $k \sim 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$. Stoga su nam potrebni doprinosi viših redova kako bi preciznije modelirali ukupni nelinearni spektar. Za izračun korekcija viših redova u razvoju (2.34) spektra snage, koristimo tzv. Wickov teorem. On nam govori da je prosjek produkta parnog broja δ jednak sumi svih umnožaka prosjeka parova, gdje suma ide po svim mogućim kombinacijama različitih parova

$$\langle \delta(x_1) \dots \delta(x_{2n}) \rangle = \sum_{\text{svi različiti parovi}} \prod_{i,j \in n} \langle \delta(x_i) \delta(x_j) \rangle. \quad (2.45)$$

Ovo je posebno svojstvo gausijanskih distribucija (kojima u najjednostavnijoj aproksimaciji pripada i polje gustoće tamne materije). Također, za neparni broj polja ovaj prosjek iščezava. Stoga imamo

$$\begin{aligned} \langle \delta_L(x_1) \delta_L(x_2) \rangle &= \xi(x_1 - x_2), \\ \langle \delta_L(x_1) \delta_L(x_2) \delta_L(x_3) \rangle &= 0, \\ \langle \delta_L(x_1) \delta_L(x_2) \delta_L(x_3) \delta_L(x_4) \rangle &= \xi(x_1 - x_2) \xi(x_3 - x_4) + \xi(x_1 - x_3) \xi(x_4 - x_2) \\ &\quad + \xi(x_1 - x_4) \xi(x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (2.46)$$



Slika 2.4: Graf usporedbe različitih spektara snage. Crvenom linijom označen je linearni CAMB spektar snage iz relacije (2.44), dok smo zelenom linijom označili nelinearni spektar snage dobiven numeričkim simulacijama. Također smo za usporedbu ljubičastom linijom nacrtali i eksponencijalni spektar snage dobiven korištenjem relacije (2.40), uz $k_{NL} = 0.6 \text{Mpc}^{-1}$ te $n = 0.5$. Vidimo kako CAMB kod [6] prati spektar dobiven numeričkim simulacijama puno vjernije od eksponencijalnog spektra, što je upravo razlog zašto smo ga odlučili koristiti u našoj analizi.

U našem slučaju (2.34), računamo korelacijske funkcije za m-ti red perturbacije polja kontrasta

$$\langle \tilde{\delta}^{(m)}(k) \tilde{\delta}^{(m)}(k') \rangle = \sum_{n,l=1,2,\dots}^{n+l \text{ parni}} \langle \tilde{\delta}^{(n)}(k) \tilde{\delta}^{(l)}(k') \rangle. \quad (2.47)$$

Ova suma bi u teoriji trebala ići u beskonačnost, no s obzirom na to da su viši redovi iznimno mali, kao dobru aproksimaciju možemo se zadržati samo na prvim korekcijama

$$\langle \tilde{\delta}^{(m)}(k) \tilde{\delta}^{(m)}(k') \rangle = \langle \tilde{\delta}^{(1)}(k) \tilde{\delta}^{(1)}(k') \rangle + \langle \tilde{\delta}^{(2)}(k) \tilde{\delta}^{(2)}(k') \rangle + 2 * \langle \tilde{\delta}^{(1)}(k) \tilde{\delta}^{(3)}(k') \rangle + \dots \quad (2.48)$$

Linearni spektar je dan korištenjem korelacijske funkcije polja kontrasta prvog reda,

dok su popravke na linearni spektar povezani s korelatorima viših redova

$$P_L = P_{11} = \delta^D(k - k') \langle \tilde{\delta}^{(1)}(k) \tilde{\delta}^{(1)}(k') \rangle, \quad P_{nm} = \delta^D(k - k') \langle \tilde{\delta}^{(n)}(k) \tilde{\delta}^{(m)}(k') \rangle. \quad (2.49)$$

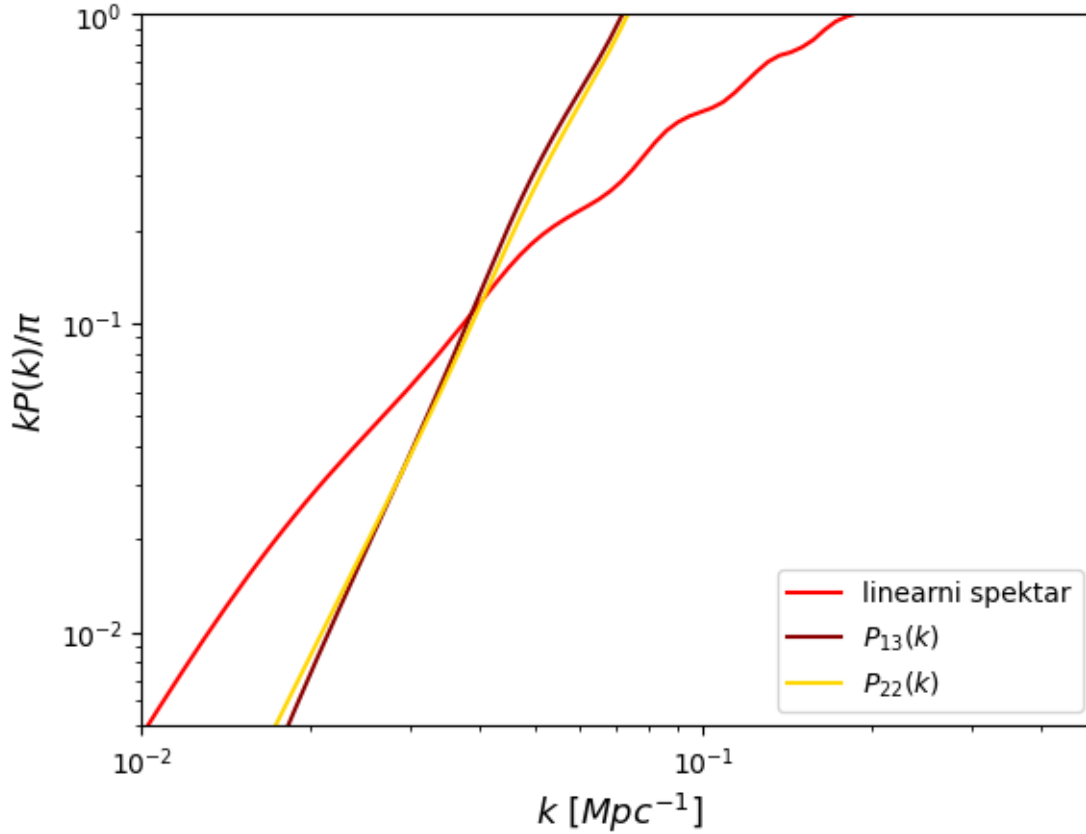
Popravke do 4 reda u $\tilde{\delta}_L$, dane u formuli (2.46), zovu se 1-loop popravke (također i NLO - eng: *Next-to-Leading Order*) [27]. Korištenjem formule (2.35) dobivamo

$$\begin{aligned} P_{SPT}^{1-loop}(k) &= P_{11} + P_{13} + P_{22}, \\ P_{22}(k) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} F_2^{sim}(k', k - k')^2 P_L(k') P_L(k - k') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \left[3 - 4 \frac{k - k'}{k'} + \left(\frac{k - k'}{k'} \right)^2 \right] P_L(k') P_L(k - k'), \\ P_{13}(k) &= 6 P_L(k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} F_3^{sim}(k, k', -k') P_L(k') \\ &= -k^2 \eta^2 P_L(k), \quad \eta^2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \frac{P_L(k')}{k'^2}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Na slici 2.5 vidimo različite doprinose prvog reda u usporedbi sa linearnim spektrom snage. Spektri $P_{13}(k)$ i $P_{22}(k)$ imaju sličan oblik, što je naznaka translatorne invarijantnosti teorije. Kada ih pridružimo linearnom spektru, na slici 2.6 možemo vidjeti usporedbu originalnog linearnog spektra snage (2.44) u odnosu na P_{1-loop} iz formule (2.50). Možemo primijetiti kako se oba spektra slažu za male modove, no razlika postaje zamjetna na većim k -ovima.

Niti jedan od izračunatih spektrova ne podudara se sa nelinearnim simulacijskim spektrom za $k > 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$. Naime, spektru 1-loop korekcija uvelike doprinose $k' \gg k$ modovi, koji su iznimno nelinearni. Dok Fourierovi modovi različitih linearnih perturbacija evoluiraju nezavisno jedni od drugih, prilikom prelaska u nelinearni režim (za $k \geq k_{NL}$), dva kratkovalna (UV) moda mogu se vezati jedan za drugog te proizvesti dugovalni (IR) mod. To znači da kratkovalni modovi mogu utjecati na evoluciju svemira na velikim skalama. Za precizno računanje takvih modova koristimo efektivne teorije opisane u sljedećem odjeljku. S druge strane, za računanje doprinosa dugovalnih ($k' \ll k$) modova u standardnoj perturbacijskoj teoriji, možemo razviti $P_L(k - k')$ po k' te dobivamo

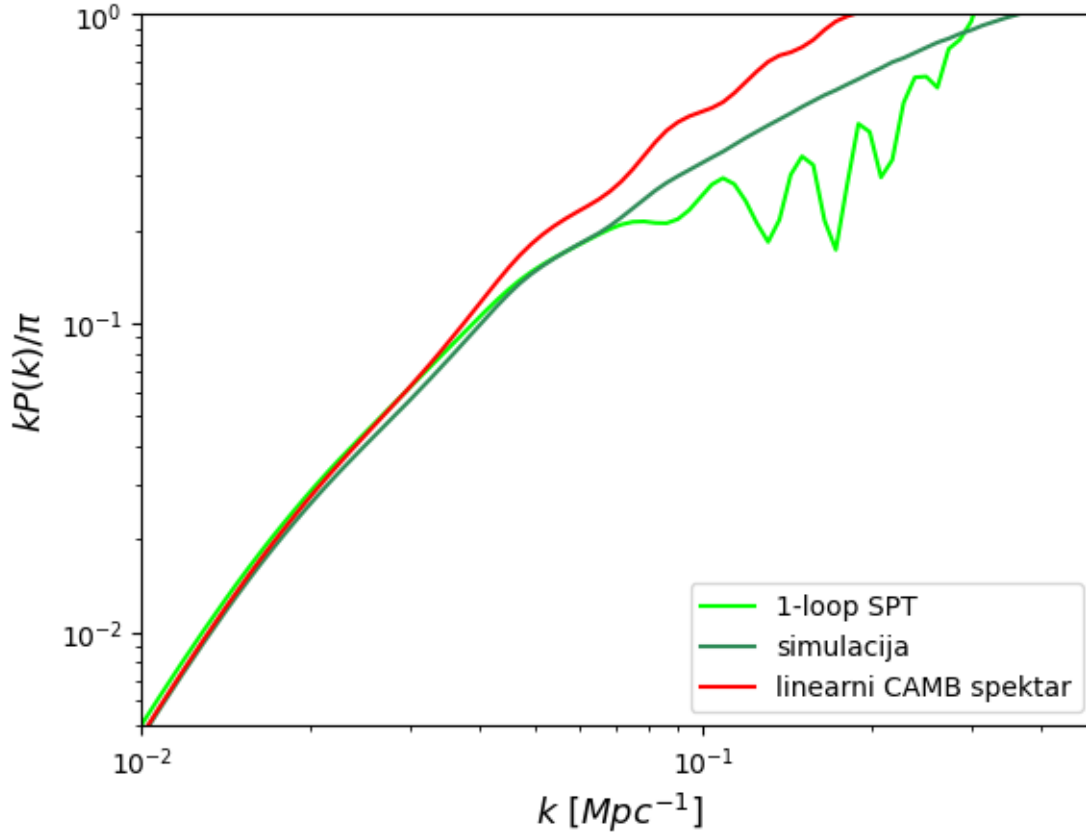
$$P_{SPT}^{1-loop}(k \gg k') = P_L(k) - 2k \nabla_k P_L(k) \int_{|k'| \ll |k|} \frac{dk'}{2\pi} P_L(k'). \quad (2.51)$$



Slika 2.5: Logaritamski graf različitih doprinosa prvog reda (2.50) ukupnom spektru snage. Vidimo da $P_{13}(k)$ i $P_{22}(k)$ imaju isto ponašanje za $k \sim 1$.

Iz formule (2.51) vidimo da se $P_{SPT}(k)$ za dugovalne modove veže pomoću gradijenta spektra za dugovalnu varijancu, što uzrokuje širenje i mrljanje spektra na velikim skalama [24]. Vidjet ćemo da efektivne i Lagrangeove formulacije imaju isto vezanje. Drugi član je sličan kao $k^2\eta^2 P_L(k)$ član iz (2.50), koji nestaje (biva egzaktno poništen) zato što smo napisali formule (2.50) na način da sve infracrvene divergencije nastaju za $k' \approx 0$, umjesto za $k' \approx k$, kao što je obično konvencija.

Konačno, na slici 2.7 vidimo relativno odstupanje između linearnog i SPT spektra u odnosu na simulacijski spektar. Kao što smo i primjetili na slici 2.6, linearni spektar prestaje biti precizan nakon $k \approx 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$. Dodavanjem jednopetljanih doprinosa proširujemo područje na kojem je perturbacijska teorija primjenjiva, odnosno spektar snage ostaje precizan i za veće k -ove, što nam je i bio cilj. U sljedećem poglavlju vidjet ćemo kako filtriranjem preko malih skala te uvođenjem efektivnih parametara dodatno poboljšavamo preciznost našeg spektra u odnosu na stvarni nelinearni spektar.

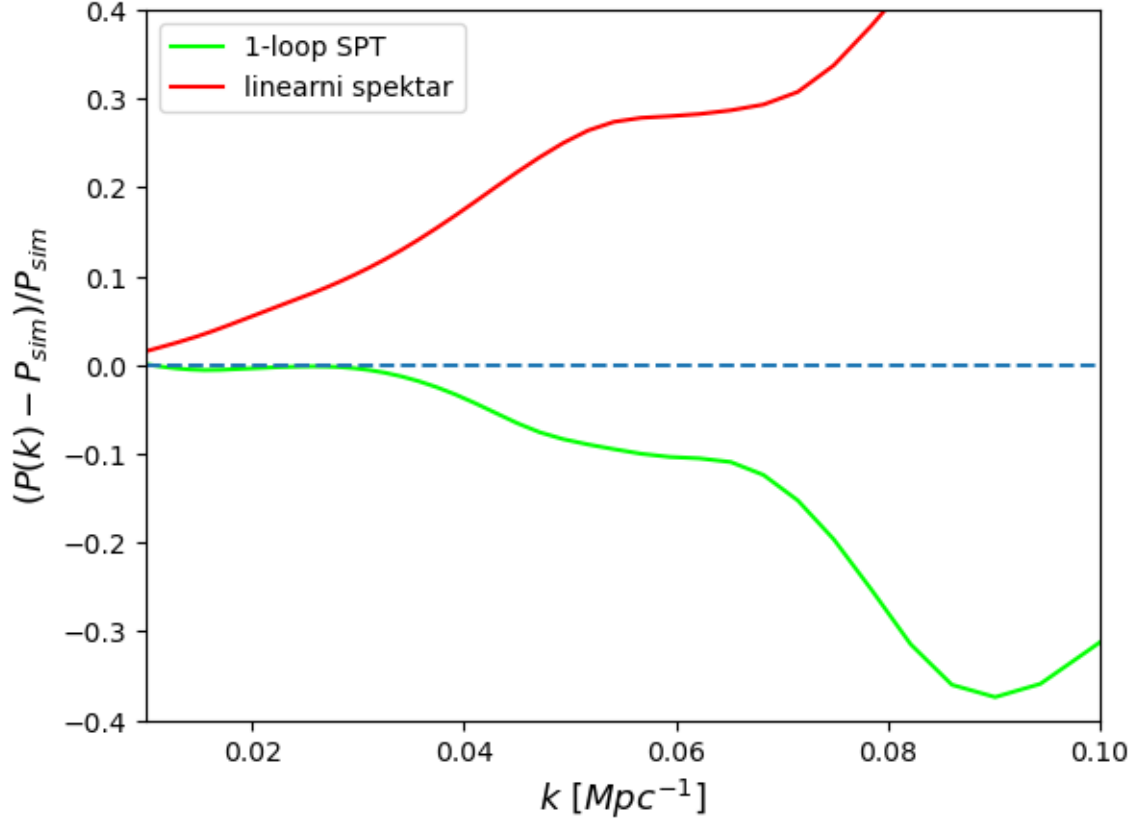


Slika 2.6: Logaritamski graf linearnog spektra snage $P_L(k)$ te ukupnog spektra prvog reda $P_{1-loop}(k)$. Vidimo dobro podudaranje na malim valnim vektorima k , dok za veće k spektar prvog reda odstupa od linearnog. Niti jedna krivulja se ne podudara sa spektrom dobivenog simulacijama, osim za male k -ove.

3 Efektivna teorija polja razvoja struktura na velikim skalama

Kao što smo do sad vidjeli, tradicionalna perturbacijska teorija opisuje kozmološku tvar pomoću jednadžbi savršenog fluida (2.26) te modelira nelinearne skale ($k \geq k_{NL}$) perturbativnim pristupom, iako je na tim skalama $|\delta| \gg 1$. Rezultat toga jest da spektar snage standardne perturbacijske teorije ne opisuje precizno rezultate simulacija, kao što smo i vidjeli na slici 2.6. Cilj efektivne teorije polja je stoga pružiti sistematskiji opis evolucije kozmološke materije na velikim skali ($k \ll k_{NL}$) filtriranjem svih nelinearnosti koje se događaju na malim skalama kako bi se perturbacijska teorija mogla preciznije primijeniti. To se postiže integracijom pomoću funkcije glađenja W_Λ

$$X_l = \int dx' W_\Lambda(x - x')X(x'), \quad (3.52)$$



Slika 2.7: Usporedba relativnog linearnog i SPT spektra u odnosu na nelinearni spektar. Vrijednosti na y osi dane su u postocima. Vidimo da uključivanjem P_{22} i P_{13} doprinosa povećavamo preciznost spektra, odnosno pomoću njega možemo modelirati manje skale nego s običnim linearnim spektrom.

tako da rezultatna veličina (u ovom slučaju generično polje X) ne ovisi o događanjima na malim skalama. Funkcija $W_\Lambda(x)$ je prozorska funkcija sa širinom Λ , izabrana tako da vrijedi $\Lambda < k_{NL}$. Najčešće definiramo Gaussovu funkciju glađenja

$$W_\Lambda(x) = \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}\Lambda^2 x^2}, \quad W_\Lambda(k) = e^{-\frac{k^2}{2\Lambda^2}}, \quad (3.53)$$

koja je normalizirana $\int dx W_\Lambda(x) = 1$. Efekti dinamike na malim skalama nisu posve izgubljeni već se modeliraju parametrima funkcije W_Λ , koje ćemo kasnije spomenuti. Kako bi vidjeli efekte usrednjavanja malih skala na cjelokupnu dinamiku, krenimo prvo od jednadžbi gibanja. Primijenimo li funkciju glađenja na jednadžbu (2.22) dobivamo

$$\frac{\partial f_l}{\partial t} + \frac{p}{m} \nabla_r f_l = m \int dr' W_\Lambda(r - r') \nabla'_r \phi(r') \nabla_p f(r', p). \quad (3.54)$$

Subskript l ispod veličina dolazi od engleske riječi *long* te nam ukazuje nam da se radi o dugovalnim funkcijama, odnosno da smo ih usrednjili po kratkovalnim modovima

($k > \Lambda$). Primijetimo da za razliku od jednadžbe (2.22), radimo u standardnom koordinatnom sustavu (r, t) umjesto sugibajućeg (x, τ) . Sada možemo izračunati prve momente distribucijske funkcije. Slično kao i u (2.24), definiramo veličine

$$\begin{aligned}\rho(r, t) &= m \int dp f(r, p, t), \\ \pi(r, t) &= \int dp p f(r, p, t), \\ \sigma_v^2(r, t) &= \frac{1}{m} \int dp p^2 f(r, p, t),\end{aligned}\tag{3.55}$$

koje predstavljaju gustoću mase promatranog fluida te njegov impuls i disperziju impulsa. Pomnožimo li jednadžbu (3.54) s $m \int dp$ dobivamo

$$\partial_t \rho + \nabla_r \pi_l = m^2 \int dr' W_\Lambda(r - r') [\nabla_{r'} \phi(r')] \int dp \nabla_p f(r', p) = 0,\tag{3.56}$$

pri čemu smo na lijevoj strani iskoristili pravilo za lančanu derivaciju (član $f \nabla p$ je jednak nuli te ostaje samo $\nabla[pf]$ dio), dok smo s desne strane jednadžbe iskoristili pravilo kako je integral derivacije nula. Stoga desna strana otpada te dobivamo jednadžbu kontinuiteta za efektivnu pertrubacijsku teoriju

$$\partial_t \rho_l + \nabla_r (\rho_l v_l^b) = 0,\tag{3.57}$$

pri čemu smo definirali $v_l^b = \frac{\pi_l}{\rho_l}$. Superskript b nam govori da se ne radi o stvarnom dugovalnom polju. Množenjem jednadžbe (3.54) s $\int dp p$ dobivamo

$$\begin{aligned}\partial_t \pi_l + \nabla_r \sigma_{v,l}^2 &= m \int dr' W_\Lambda(r - r') [\nabla_{r'} \phi(r')] \int dp p \partial_p f(r', p) \\ &= - \int dr' W_\Lambda(r - r') [\nabla_{r'} \phi(r')] \rho(r') m\end{aligned}\tag{3.58}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku opet iskoristili parcijalnu integraciju kako bi se riješili $\int dp p \partial_p [pf] = 0$ dijela. Ako u ovu jednadžbu ubacimo $v_l^b = \frac{\pi_l}{\rho_l}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\rho_l \partial_t v_l^b + v_l^b \partial_t \rho_l + \nabla_r \sigma_{v,l}^2 &= - \int dr' W_\Lambda(r - r') [\nabla_{r'} \phi(r')] \rho(r') \\ &\approx - \nabla_r \phi_l \rho_l + \tilde{\rho} \nabla_r \phi_l \delta_l - \tilde{\rho} \int dr' W_\Lambda(r - r') [\nabla_{r'} \phi(r')] \delta(r'),\end{aligned}\tag{3.59}$$

gdje smo izvrijednili homogeni dio gravitacijskog potencijala Φ u r umjesto u r' te ga razvili u red $\phi(r') = \phi(r) + \nabla_r \phi(r)(r - r') + \frac{1}{2} \nabla_r^2 \phi(r - r')^2 + \dots$ oko r . Greška ovoga pristupa je potisnuta s Λ^{-2} zbog čega je opravdano koristiti ovu aproksimaciju. Ako sada jednadžbu (3.59) podijelimo sa ρ_l možemo se pomoću jednadžbe (3.57) riješiti $\partial_t \rho_l$ člana te dobivamo

$$\partial_t v_l^b - \frac{1}{\rho_l} \nabla_r (\rho_l v_l^b) + \frac{1}{\rho_l} \nabla_r \sigma_{v,l}^2 + \nabla_r \phi_l = -\frac{\tilde{\rho}}{\rho_l} ([\nabla_r \Phi \delta]_l - \nabla_r \phi_l \delta_l). \quad (3.60)$$

Sada možemo iskoristiti Poissonovu jednadžbu $\nabla^2 \phi = -4\pi G \tilde{\rho} \delta$ kako bi eliminirali δ s desne strane te malo reorganizirati članove s lijeve strane

$$\begin{aligned} & \partial_t v_l^b - \frac{1}{\rho_l} \nabla_r (\rho_l v_l^b) + \frac{1}{\rho_l} \nabla_r \sigma_{v,l}^2 + \nabla_r \phi_l \\ &= \partial_t v_l^b + v_l^b \nabla_r v_l^b - \frac{1}{\rho_l} \nabla_r (\rho_l v_l^{b2}) + \frac{1}{\rho_l} \nabla_r \sigma_{v,l}^2 + \nabla_r \phi_l \\ &= \partial_t v_l^b + v_l^b \nabla_r v_l^b + \nabla_r \phi_l + \frac{\nabla_r (\sigma_{v,l}^2 - \rho_l v_l^{b2})}{\rho_l} \\ &= \frac{1}{4\pi G \rho_l} \nabla_r ([\nabla_r \phi \nabla_r^2 \phi]_l - \nabla_r \phi_l \nabla_r^2 \phi_l). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ova jednadžba se može ljepše zapisati kao

$$\partial_t v_l^b + v_l^b \nabla_r v_l^b + \nabla_r \phi_l = -\frac{1}{\rho_l} \nabla_r \tau_\Lambda, \quad (3.62)$$

pri čemu smo definirali dugovalni tenzor stresa i energije kao $\tau_\Lambda = \kappa_\Lambda + \Xi_\Lambda$ [7], pri čemu je

$$\kappa_\Lambda = \sigma_{v,l}^2 - \rho_l v_l^{b2}, \quad (3.63)$$

kinetički dio tenzora stresa i energije, dok je potencijalni dio zadan s

$$\Xi_\Lambda = \frac{1}{4\pi G} ([\nabla_r \phi \nabla_r^2 \phi]_l - \nabla_r \phi_l \nabla_r^2 \phi_l). \quad (3.64)$$

Relacija (3.62) je glavna jednadžba efektivne teorije polja razvoja struktura na velikim skali (eng: EFTLSS - *Effective Field Theory of Large Scale Structure*) [5]. Ona opisuje kako materija (tamna ili barionska), zapisana pomoću jednadžbi fluida, međudjeluje sama sa sobom te kako se giba u širećem svemiru. Ove jednadžbe

možemo također zapisati i pomoću brzine v_l (2.14), umjesto v_l^b :

$$\begin{aligned}
v_l^b &= \frac{\pi_l}{\rho_l} = \frac{[(1 + \delta)v]_l}{1 + \delta_l} \\
&= v_l + [v(\delta - \delta_l)]_l - ([v\delta]_l - v_l\delta_l)\delta_l + \mathcal{O}(\delta_l^2) \\
&= v_l + [v(\delta - \delta_l)]_l(1 - \delta_l) + \mathcal{O}(\delta_l^2, \Lambda^{-2}),
\end{aligned} \tag{3.65}$$

pri čemu smo izraz razvili po δ . Korištenjem ovog razvoja, jednadžba kontinuiteta (3.57) postaje

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_l + \nabla_r(\rho_l v_l) &= -\nabla_r\{\rho_l[v(\delta - \delta_l)]_l - \rho([v\delta]_l - v_l\delta_l)\delta_l\} + \mathcal{O}(\delta_l^2) \\
&= -\tilde{\rho}\nabla_r[v(\delta - \delta_l)]_l + \mathcal{O}(\delta_l^2, \Lambda^{-2}).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Ova jednadžba je linearna u odnosu na dugovalna polja te vrijedi za granicu u kojoj polja na velikim skalama ne utječu na uprosječivanje malih skala (tj. izbacili smo članove potisnute sa Λ^{-2}). Može se pokazati [5] da članovi sa desne strane ove jednadžbe služe kako bi poništili divergencije koje nastaju u $1 - loop$ spektru brzine te u višim korekcijama. Ako ubacimo razvoj (3.65) u Eulerovu jednadžbu (3.62) dobivamo

$$\begin{aligned}
\partial_t v_l + v_l \nabla_r v_l + \nabla_r \phi_l &= -\tilde{\rho}^{-1} \nabla_r \tau_\Lambda - \partial_t \{[v(\delta - \delta_l)]_l(1 - \delta_l)\} \\
&\quad + \nabla_r(v_l[v(\delta - \delta_l)]_l(1 - \delta_l)) + \mathcal{O}(\delta_l^2, \Lambda^{-2}).
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Sada se prebacujemo u sugibajuće koordinate transformacijama $\nabla_r \rightarrow \frac{1}{a} \nabla_x$ te $\partial_t \rightarrow \partial_\tau + Hx \nabla_x$, pri čemu ćemo zbog preglednosti izbaciti subskript x ($\nabla \equiv \nabla_x$). Također možemo primjetiti kako se umjesto standardne brzine $v = \frac{\partial x}{\partial t}$ u jednadžbi (3.68) sada pojavljuje svojstvena brzina $u = \frac{\partial x}{\partial \tau}$. Jednadžba (3.67) sada izgleda

$$\begin{aligned}
-a^2 \mathcal{H}^2 \partial_a^2 \delta_l - a \left(2\mathcal{H}^2 + a\mathcal{H} \frac{d\mathcal{H}}{da} \right) \partial_a \delta_l + 4\pi G \tilde{\rho} a^2 \delta_l &= (a\mathcal{H}\partial_a + \mathcal{H}) \nabla(\delta_l u_l) - \nabla(u_l \nabla u_l) \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla^2 \tau_\Lambda + \nabla a \mathcal{H} \partial_a ([u(\delta - \delta_l)]_l \delta_l) \\
&\quad - \nabla \mathcal{H} [u(\delta - \delta_l)]_l (1 - \delta_l) \\
&\quad - \nabla^2 ([u(\delta - \delta_l)]_l u_l) + \mathcal{O}(\delta_l^2, \Lambda^{-2}).
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Kako bi riješili ovu jednadžbu, moramo razviti nove kratkovalne članove u odnosu na dugovalna polja. Zbog toga članove na desnoj strani jednadžbe (koji se ne pojavljuju u standardnoj perturbacijskoj teoriji te ovise o kratkovalnim modovima) grupiramo u jedan član

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}}\nabla^2 X_\Lambda \equiv \frac{1}{\tilde{\rho}}\nabla^2 \tau_\Lambda + \nabla a \mathcal{H} \partial_a ([u(\delta - \delta_l)]_l \delta_l) - \nabla^2 ([u(\delta - \delta_l)]_l u_l) - \nabla \mathcal{H} [u(\delta - \delta_l)]_l (1 - \delta_l) + \mathcal{O}(\delta_l^2, \Lambda^{-2}) \quad (3.69)$$

Jednadžba (3.68) tada izgleda

$$-a^2 \mathcal{H}^2 \partial_a^2 \delta_l - a \left(2\mathcal{H}^2 + a \mathcal{H} \frac{d\mathcal{H}}{da} \right) \partial_a \delta_l + 4\pi G \tilde{\rho} a^2 \delta_l = (a \mathcal{H} \partial_a + \mathcal{H}) \nabla(\delta_l u_l) - \nabla(u_l \nabla u_l) - \frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla^2 X_\Lambda. \quad (3.70)$$

Zadržavajući se samo na linearnim članovima, ovu jednadžbu možemo riješiti pomoću Greenove funkcije $G(a, a')$ koja zadovoljava

$$-a^2 \mathcal{H}^2 \partial_a^2 G(a, a') - a \left(2\mathcal{H}^2 + a \mathcal{H} \frac{d\mathcal{H}}{da} \right) \partial_a G(a, a') + 4\pi G \tilde{\rho} a^2 G(a, a') = \delta^D(a - a'). \quad (3.71)$$

Retardirana Greenova funkcija, slično kao linearno rješenje (2.33), može se napisati kao linearna kombinacija rastućeg ($\sim a$) i padajućeg moda ($\sim a^{-3/2}$) te Heavisideove step funkcije θ_H

$$G(a, a') = \theta_H(a - a') \frac{2}{5} \mathcal{H}_0^{-2} \left[\left(\frac{a'}{a} \right)^{3/2} - \frac{a}{a'} \right]. \quad (3.72)$$

Step funkcija služi kako bi Greenova funkcija poštovala uvjet kauzalnosti $G(a, a') = 0$ za $a < a'$. Greenova funkcija također zadovoljava sljedeće rubne uvjete u $a = a'$

$$G(a, a') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a} G(a, a') = \frac{1}{(a' \mathcal{H}(a'))^2}. \quad (3.73)$$

Jednadžba (3.71) dat će nam linearna rješenja, ali naš je konačni cilj riješiti jednadžbu (3.70) perturbativno, slično kao što smo napravili za jednadžbu (2.34). Kako bi to učinili, proširujemo kratkovalne članove koji nisu u SPT-u (3.69) pomoću dugovalnih polja δ_l i u_l . Članove proširujemo sa svim kombinacijama parametara koji su

dopušteni simetrijama translacijske invarijantnosti i izotropije. Te članove uvrštavamo u definiciju polja (3.69):

$$X_\Lambda = p_{eff} + \tilde{\rho}c_s^2\delta_l - \tilde{\rho}\frac{c_v^2}{\mathcal{H}}\nabla u_l + J(x, t) + \dots \quad (3.74)$$

Kao što smo ranije objasnili, u ovom radu modeliramo tamnu materiju putem opisa nesudarajućeg fluida. Stoga parametri p_{eff} , c_s , c_v koriste notaciju analognu Navier-Stokesovim jednadžbama za nesavršeni fluid [7] te predstavljaju efektivni tlak, brzinu zvuka, viskoznost, itd. Član J predstavlja stohastičnu komponentu koja ne korelira direktno s dugovalnim poljima. Ovi parametri zajedno predstavljaju odaziv fizike na kratkovalnom području, koju smo izintegrirali prvotnim filtriranjem funkcijom W_Λ (3.54).

3.1 Različiti koeficijenti pri aproksimaciji nesavršenog fluida

U jednadžbi (3.74) razvili smo polje X_Λ u aproksimaciji nesavršenog fluida. Prvi član p_{eff} odnosi se na pozadinski tlak induciran nehomogenostima na malim skalama. On je nultog reda u razvoju te predstavlja tlak pozadine, tj. konstantu pri razvoju. Drugi član također je povezan s tlakom, točnije kinetičkim tlakom uzrokovanim gibanjem materije $\delta p = c_s^2\delta\rho$, pri čemu je c_s^2 kvadrat brzine zvuka (brzina propagacije fluktuacija). Ovaj član je naravno linearan u odnosu na polje gustoće δ_l . Treći član dolazi od nesavršenosti fluida - viskoznosti. Zbog relativne razlike u brzini unutar slojeva fluida, dolazi do relativnog prijenosa impulsa između različitih slojeva te ukupnog gubitka energije zbog trenja. U klasičnoj dinamici fluida [3] ovakvo ponašanje opisujemo tenzorom stresa (istim onim kao u jednadžbi (2.26)): $\sigma_{ij} = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}$, pri čemu su koeficijenti ζ i η vezani uz volumnu (eng: *bulk*) te smicajnu (eng: *shear*) viskoznost. Za 3D slučaj bi mogli napisati tenzor (za našu aproksimaciju fluida [7])

$$\sigma^{ij} = \frac{3c_{bv}^2}{4\mathcal{H}}\delta^{ij}\partial_k u^k + \frac{3c_{sv}^2}{4\mathcal{H}}\left(\partial^j u^i + \partial^i v_l^j - \frac{2}{3}\delta^{ij}\partial_k u_l^k\right) \quad (3.75)$$

pri čemu su $c_{sv}^2 = 4H\eta/(3\tilde{\rho})$ i $c_{bv}^2 = H\zeta/\tilde{\rho}$. U našem 1D slučaju vrijedi $c_v^2 = c_{sv}^2 + c_{bv}^2$, kao što vidimo u trećem članu razvoja. Ovaj član je naravno vezan uz divergenciju

brzine te ne postoji ako je $u = \text{const.}$ svugdje (jer tada nema ni viskozno ponašanja fluida).

3.2 Rješavanje EFT jednadžbi

Nakon primjene filtera zadanog relacijom (3.74), jednadžbe gibanja (Poissonova, kontinuitetna i Eulerova jednadžba) su oblika [5]

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi_l &= \frac{3}{2} H_0^2 \Omega_m \frac{a_0^3}{a} \delta_l + \dots \\ \dot{\delta}_l &= -\frac{1}{a} \nabla \cdot ((1 + \delta)_l u_l) \\ \dot{u}_l + H u_l + \frac{1}{a} u_l \nabla u_l + \frac{1}{a} \nabla \phi_l &= -\frac{1}{a} c_s^2 \nabla \delta_l + \frac{3}{4} \frac{c_{sv}^2}{H a^2} \nabla^2 u_l + \frac{4c_{bv}^2 + c_{sv}^2}{4H a^2} \nabla^2 u_l - \Delta J + \dots\end{aligned}\tag{3.76}$$

pri čemu $\Delta J = \frac{\nabla J}{a\bar{\rho}}$, dok subskript 0 označava da je varijabla izmjerena u sadašnjem vremenu, tj. kada vrijedi $a_0 = 1$. Kao i dosad, zadržavamo se na najnižim članovima te rješavamo nelinearne jednadžbe (3.76) iterativno oko linearnog rješenja. Ako koristimo a kao našu vremensku varijablu, jednadžbe postaju

$$\begin{aligned}a\mathcal{H}\partial_a \delta_l + \theta_l &= -\int \frac{dk'}{2\pi} \alpha(k', k - k') \delta_l(k' - k) \theta(k'), \\ a\mathcal{H}\partial_a \theta_l + \mathcal{H}\theta_l + \frac{3}{2} \frac{\mathcal{H}_0^2 \Omega_m}{a} \delta_l - c_s^2 k^2 \delta_l + \frac{c_v^2 k^2}{\mathcal{H}} \theta_l &= -\int \frac{dk'}{2\pi} \beta(k', k - k') \theta_l(k - k') \theta(k'),\end{aligned}\tag{3.77}$$

pri čemu su

$$\alpha(k, k') = \frac{(k + k') \cdot k}{k^2}, \quad \beta(k, k') = \frac{(k + k')^2 k \cdot k'}{2k'^2 k^2}.\tag{3.78}$$

Također, u formuli (3.77) možemo napraviti supstituciju

$$\theta_l^{(1)}(a, k) = -a\mathcal{H}\partial_a \delta_l^{(1)}(a, k) = -a\mathcal{H} \frac{\partial_t D(a)}{D(a)} \delta_l^{(1)}(a, k),\tag{3.79}$$

kako bi si olakšali s grupiranjem članova. Pri tome smo uzeli $D(a)$ kao standardni faktor rasta (kao u (2.34)). S obzirom na to da su korelacijske funkcije gustoće male na velikim udaljenostima, ove jednadžbe možemo riješiti perturbativno konvolucijom retardirane linearne Greenove funkcije (definirane u (3.72)) sa nelinearnim izvorom

izvrijednjem za niže redove. Korekcija polja gustoće u drugom redu iznosi [28]

$$\begin{aligned} \delta_l^{(2)}(k, a) = & \frac{1}{16\pi^3 D(a_0)^2} \left[\left(\int_0^a da' G(a, a') a'^2 \mathcal{H}^2(a') (\partial_t D(a'))^2 \right) \cdot \right. \\ & \left(2 \int dk' \beta(k', k - k') \delta_{s_1}(k - k') \delta_{s_2}(k') \right) + \\ & \left(\int_0^a da' G(a, a') \left(2a'^2 \mathcal{H}^2(a') (\partial_t D)^2(a') + 3\mathcal{H}_0 \Omega_m \frac{D^2(a')}{a'} \right) \right) \cdot \\ & \left. \left(\int dk' \alpha(k, k - k') \delta_{s_1}(k - k') \delta_{s_1}(k') \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

U ovom izrazu umjesto gustoće δ koristili smo klasičnu stohastičku varijablu δ_s , definiranu kao

$$\delta_l^{(1)}(k, a) = \frac{D(a)}{D(a_0)} \delta_{s_1}(k), \quad (3.81)$$

Varijanca varijable δ_s jednaka je uglađenom spektru snage $P_{11,l}$

$$\langle \delta_{s_1}(k) \delta_{s_1}(k') \rangle = 2\pi \delta(k + k') P_{11,l}(k) = 2\pi \delta(k + k') W_\Lambda^2(k) P_{11}(k). \quad (3.82)$$

Član trećeg reda zadan je tada [28]

$$\begin{aligned} \delta_l^{(3)}(k, a) = & \frac{1}{16\pi^2 D(a_0)} \cdot \\ & \left[4\mathcal{D}_1(a) \left(\int dk' \int dp \beta(p, k' - p) \delta_{s_1}(k' - p) \delta_{s_1}(p) \beta(k', k - k') \delta_{s_1}(k - k') \right) \right. \\ & \int dk' \int dp \beta(p, k - k' - p) \delta_{s_1}(k - k' - p) \delta_{s_1}(p) \beta(k', k - k') \delta_{s_1}(k') + \\ & 2\mathcal{D}_2(a) \int dk' \int dp \beta(p, k - k' - p) \delta_{s_1}(k - k' - p) \delta_{s_1}(p) \alpha(k', k - k') \delta_{s_1}(k') + \\ & \mathcal{D}_3(a) \int dk' \int dp \alpha(p, k - k' - p) \delta_{s_1}(k - k' - p) \delta_{s_1}(p) \alpha(k', k - k') \delta_{s_1}(k') + \\ & \mathcal{D}_4(a) \int dk' \int dp \alpha(p, k' - p) \delta_{s_1}(k' - p) \delta_{s_1}(p) \alpha(k', k - k') \delta_{s_1}(k - k') + \\ & 2\mathcal{D}_5(a) \left(\int dk' \int dp \alpha(p, k' - p) \delta_{s_1}(k' - p) \delta_{s_1}(p) \beta(k', k - k') \delta_{s_1}(k - k') \right) \\ & \int dk' \int dp \alpha(p, k - k' - p) \delta_{s_1}(k - k' - p) \delta_{s_1}(p) \beta(k', k - k') \delta_{s_1}(k') + \\ & \left. 2\mathcal{D}_6(a) \int dk' \int dp \beta(p, k' - p) \delta_{s_1}(k' - p) \delta_{s_1}(p) \alpha(k', k - k') \delta_{s_1}(k - k') \right]. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Jezgre \mathcal{D}_i su definirane integracijom Greenovih funkcija

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= \int_0^a da' a'^2 G(a, a') \mathcal{H}^2(a') \partial_t D(a') \int_0^{a'} d\hat{a} \hat{a}^2 \mathcal{H}^2(\hat{a}) \partial_{a'} G(a, a') (\partial_t D(\hat{a}))^2, \\
\mathcal{D}_2 &= 3\mathcal{H}_0^2 \Omega_m \int_0^a da' \frac{G(a', \hat{a})}{a'} \int_0^{a'} d\hat{a} \hat{a}^2 \mathcal{H}^2(\hat{a}) (\partial_t D(\hat{a}))^2 D(a') G(a', \hat{a}) + 2\mathcal{D}_1, \\
\mathcal{D}_3 &= \int_0^a da' \frac{G(a, a')}{a'} \int_0^{a'} d\hat{a} \frac{1}{\hat{a}} [3\mathcal{H}_0^2 \Omega_m D^2(\hat{a}) + 2\hat{a}^3 \mathcal{H}^2(\hat{a}) (\partial_t D(\hat{a}))^2] \cdot \\
&\quad [3\mathcal{H}_0^2 \Omega_m D(a') G(a', \hat{a}) + 2\hat{a}^3 \mathcal{H}^2(a') \partial_t D(a') \partial_t G(a', \hat{a})], \\
\mathcal{D}_4 &= \mathcal{D}_3 - 4 \int_0^a \hat{a} da' a'^2 G(a, a') \mathcal{H}^2(a') D(a') (\partial_t D(a'))^2, \\
\mathcal{D}_5 &= 3\mathcal{H}_0^2 \Omega_m \int_0^a \hat{a} da' a'^2 G(a, a') \mathcal{H}^2(a') \partial_t D(a') \int_0^{a'} d\hat{a} D^2(\hat{a}) \frac{\partial_t G(a', \hat{a})}{\hat{a}}, \\
&\quad - 2 \int_0^a da' a'^2 G(a, a') \mathcal{H}^2(a') D(a') (\partial_t D(a'))^2 + 2\mathcal{D}_1, \\
\mathcal{D}_6 &= \mathcal{D}_2 + 2 \int_0^a da' a'^2 G(a, a') \mathcal{H}^2(a') D(a'),
\end{aligned} \tag{3.84}$$

U linearnoj aproksimaciji Greenova funkcija $G(a)$ i faktor rasta $D(a)$ ne ovise direktno o k . To se događa jer smo u linearnoj jednadžbi (3.71) zanemarili članove koji predstavljaju tlak i viskoznost, a koji bi uveli ovisnost o k . To nam omogućava da konvolucijske integrale za računanje viših redova polja gustoće razdvojimo u zasebne integrale po vremenu i impulsu. Zanemareni članovi tlaka i viskoznosti su članovi trećeg reda te doprinos

$$\delta_{l, c_{comb}^2}^{(3)}(k, a) = -\frac{k^2}{D(a_0)} \int_0^a da' G(a, a') \tilde{c}_{comb}^2(a') D(a') \delta_{s_1}(k), \tag{3.85}$$

pri čemu je kombinirani član c_{comb}^2 koji definiran kao

$$c_{comb}^2(a) = c_s^2(a) + a \frac{\partial_t D(a)}{D(a)} c_v^2(a). \tag{3.86}$$

Ovako dobivena rješenja za više redove polja gustoće $\delta^{(n)}$ slična su kao u standardnoj perturbacijskoj teoriji. Glavna razlika jest u ugađivanju spektra snage izvora, što uzrokuje brzu konvergenciju konvolucijskog integrala, kao i jaku ovisnost o Λ . Član P_{13, c_{comb}^2} predstavlja protučlan (eng: *counterterm*) te se koristi kako bi se odstranila Λ ovisnost iz P_{13} . U teoriji bi trebao postojati takav član i za P_{22} , no on je $\sim \delta^{(5)}$ pa je zanemariv u ovom slučaju. Zajedno sa svim doprinosima do $\delta^{(4)}$ korelacijska funkcija

kontrasta gustoće poprima oblik

$$\begin{aligned}
\langle \delta_l(k, a_0) \delta_l(k', a_0) \rangle &= P_{11}(k, a_0) + P_{22}(k, a_0) + P_{13}(k, a_0) + P_{13, c_{comb}^2}(k, a_0) \\
&= 2\pi \delta^D(k + k') \left(\langle \delta^1(k, a_0) \delta^1(k', a_0) \rangle + \langle \delta_l^{(2)}(k, a_0) \delta_l^{(2)}(k', a_0) \rangle \right. \\
&\quad \left. + 2 \langle \delta_l^{(3)}(k, a_0) \delta_l^{(1)}(k', a_0) \rangle + 2 \langle \delta_{l, c_{comb}^2}^{(3)}(k, a_0) \delta_l^{(1)}(k', a_0) \rangle \right).
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Protučlan je dan

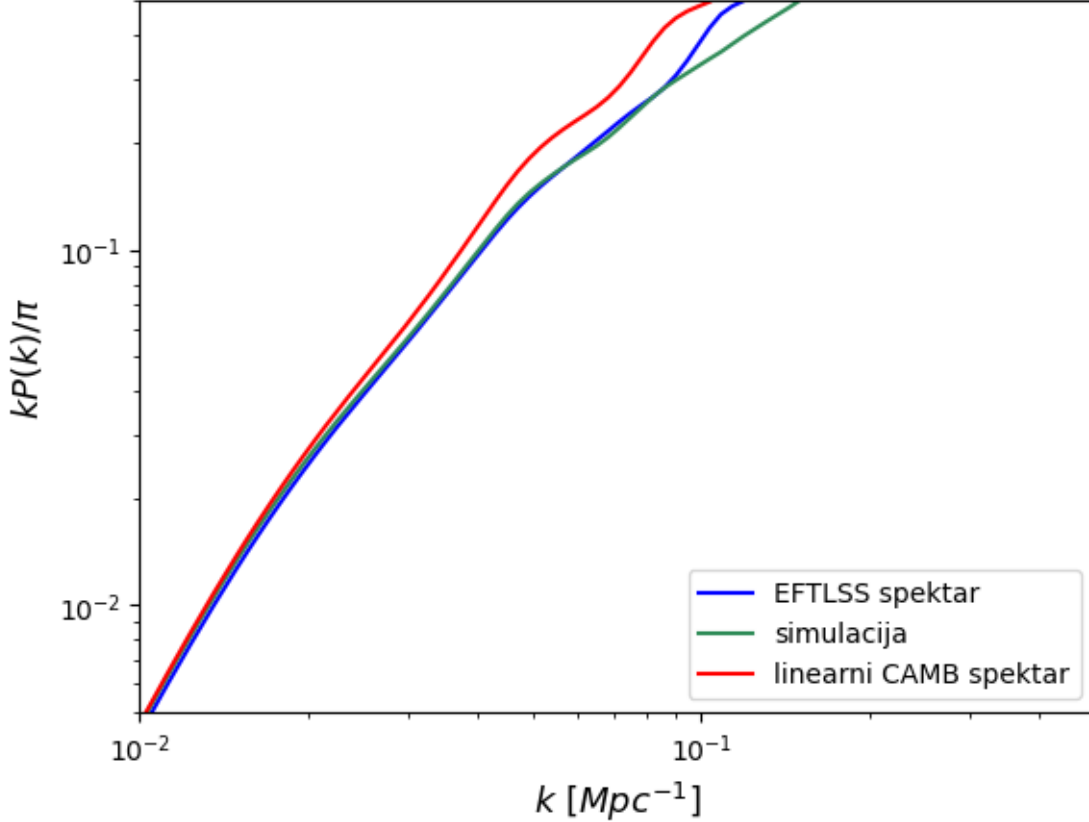
$$\begin{aligned}
\langle \delta_{l, c_{comb}^2}^{(3)}(k, a_0) \delta_l^{(1)}(k', a_0) \rangle &= -2 \frac{k^2}{D(a_0)} \int_0^{a_0} da' G(a_0, a') c_{comb}^2(a') D(a') P_{11, l}(k, \Lambda) \\
&= 2k^2 \alpha_c P_{11, l}(k, \Lambda),
\end{aligned} \tag{3.88}$$

pri čemu smo definirali konstantu $\alpha_c \approx -\frac{1}{9} \frac{c_{tot}^2(a)}{H^2(a)}$ u AdS prostoru. Kao što smo do sada objasnili, u EFTLSS formulaciji pretpostavljamo kako modovi $k > \Lambda$ ne utječu na spektar snage osim kroz parametar α_c . Sve zajedno, 1-loop spektar snage za efektivnu Eulerovu perturbacijsku teoriju je

$$P_{EFTLSS}^{1-loop}(k) = P_{L, l}(k) + P_{22, l}(k) + P_{13, l}(k) + 2k^2 \alpha_c P_{L, l} + P_{J, l}. \tag{3.89}$$

U jednadžbi (3.89) smo također ubacili i stohastični član $P_{J, l} = \int dk' P_J(k') W_\Lambda^2(k - k')$. Ovaj član predstavlja lokalno kretanje tamne materije na malim skalama te ima $\sim k^4$ ovisnost. No s obzirom na njegovo brzo trnjenje kada $k \rightarrow 0$, u većini predikcija možemo ga zanemariti. Na slici 3.8 vidimo usporedbu EFTLSS spektra snage (3.89) sa linearnim i simulacijskim spektrom snage. Pri izračunu EFTLSS spektra koristili smo $\Lambda = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$ te $2\alpha_c = 39.15 \text{ Mpc}^2$. Tu vrijednost parametra smo dobili kao najbolju prilagodbu korištenjem Hamilton Monte Carlo algoritma sa 50 000 iteracija. Taj rezultat se slaže sa parametrom iz drugih radova [4]. Na grafu se jasno vidi kako EFTLSS spektar bolje opisuje simulacijski spektar od običnog linearnog spektra. Također, važno je za primijetiti kako EFTLSS spektar ostaje precizan čak i za $k \geq 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$, dok linearni počinje odudarati od rješenja za $k = 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$. Ovaj rezultat potvrđuje korisnost efektivne teorije polja pri modeliranju spektra snage na malim skalama. Na slici 3.9 možemo vidjeti rezidualne (odnosno $(P - P_{sim})/P_{sim}$) za EFTLSS spektar (3.89) i linearni spektar (2.44). Usporedbom sa slikom 2.7 jasno je vidljivo kako je uvođenjem efektivnih parametara te filtracijom malih skala povećana

preciznost modeliranog spektra snage.

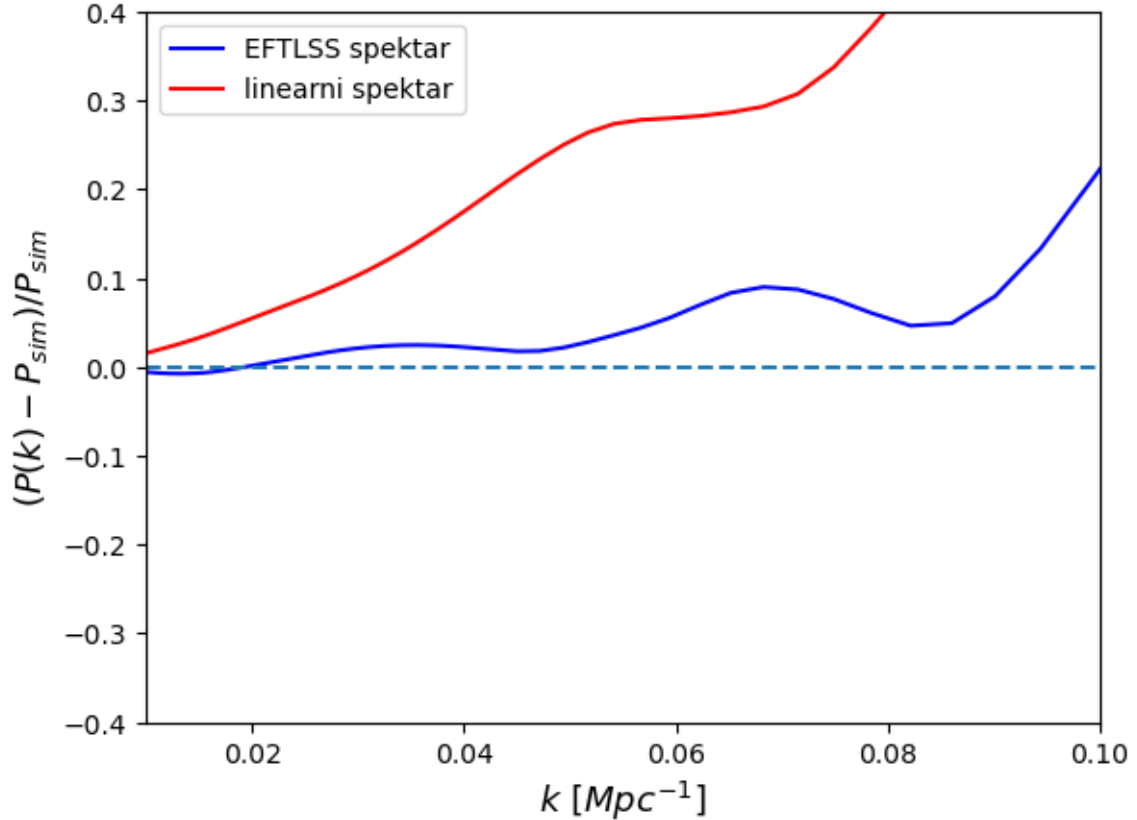


Slika 3.8: Usporedba linearnog spektra snage i spektara dobivenih EFTLSS filtriranjem sa simulacijom. Vidljivo je da EFTLSS spektar bolje prati rezultat numeričkih simulacija od standardnog linearnog spektra

S obzirom da smo se zaustavili na $1 - loop$ rješenju, modelirani spektar snage ne prati u potpunosti simulacijski spektar te bi za veću preciznost trebalo ubaciti ostale stupnjeve razvoja. Također, preciznost EFTLSS uvelike ovisi o Λ te o efektivnim parametrima. Primjerice, parametar α_c je slobodni parametar te se računa direktno iz mjerenja. Na sličan način, koeficijenti fluida iz jednadžbe (3.74) ne proizlaze direktno iz teorije već se pretpostavljaju te detaljno uštimaavaju numeričkim simulacijama kako bi bili što bliži eksperimentalnim rezultatima. Pošto je cilj svake prediktivne teorije minimizirati broj slobodnih parametara, postoji način na koji se koeficijente c_{tot}^2 određuje direktno iz teorije. Prvo se izmjere ponašanja X_Λ (3.53) na velikim skalama. Zatim se radi procjena koeficijenata iz ponašanja polja na malim skalama

$$\widehat{c}_{tot}^2 = \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\sum_k w_k |\tilde{\delta}_{L,l}(k)|^2 \right)^{-1} \sum_k w_k \tilde{X}_\Lambda(k) \tilde{\delta}_{L,l}^*(k), \quad (3.90)$$

pri čemu suma ide po $k \ll \Lambda$, dok su w_k težine koje maksimiziraju S/N .



Slika 3.9: Usporedba reziduala EFTLSS u donosu na linearni spektar. Vidimo da filtriranjem po malim skalama te preciznim računanjem efektivnih parametara povećavamo preciznost modeliranog spektra.

3.3 Ovisnost o parametru Λ

Na prvi pogled, svi koeficijenti u razvoju (3.74) moraju ovisiti o parametru Λ : $c_s^2(\Lambda)$, $c_v^2(\Lambda)$, ... No krajnji rezultat ne smije ovisiti o skali po kojoj smo usrednjivali jer bi to značilo da nam fizika sustava ovisi skali na kojoj mjerimo. Ali to je samo prividan problem jer parametre fluida sagledavamo kao samostalne članove, no oni su samo jedan od dijagrama (točnije oni predstavljaju protučlanove) u sveukupnom razvoju. Sumacijom svih doprinosa u nelinearnom razvoju trebala bi nestati bilo kakva ovisnost o Λ .

U našim računima ipak ostaje blaga k/Λ ovisnost. Spektri P_{13} i P_{22} ovise o Λ putem ugladenog linearnog spektra snage, dok P_{13, c_{comb}^2} ovisi zbog koeficijenta c_{comb}^2 . Razlog tomu je što smo se svugdje zadržali samo na linearnoj aproksimaciji te smo zanemarili više derivacije u tenzoru stresa prilikom razvoja jednadžbi fluida koji bi poništili tu ovisnost. Kako bi riješili taj problem, mjerimo protučlanove na fiksnom Λ , tako da se podudaraju s mjerenjima. Tada puštamo $\Lambda \rightarrow \infty$ kako bi poništili preostalu

ovisnost o parametru usrednjenja. Primjerice, za konstantu α_c dobivamo

$$2\alpha_{c,\infty} = 2\alpha_{c,\Lambda} + ([\eta^2]_\Lambda - [\eta^2]_\infty), \quad (3.91)$$

pri čemu konačna konstanta $\alpha_{c,\infty}$ ne ovisi o Λ .

3.4 Opis razvoja struktura na velikim skalama

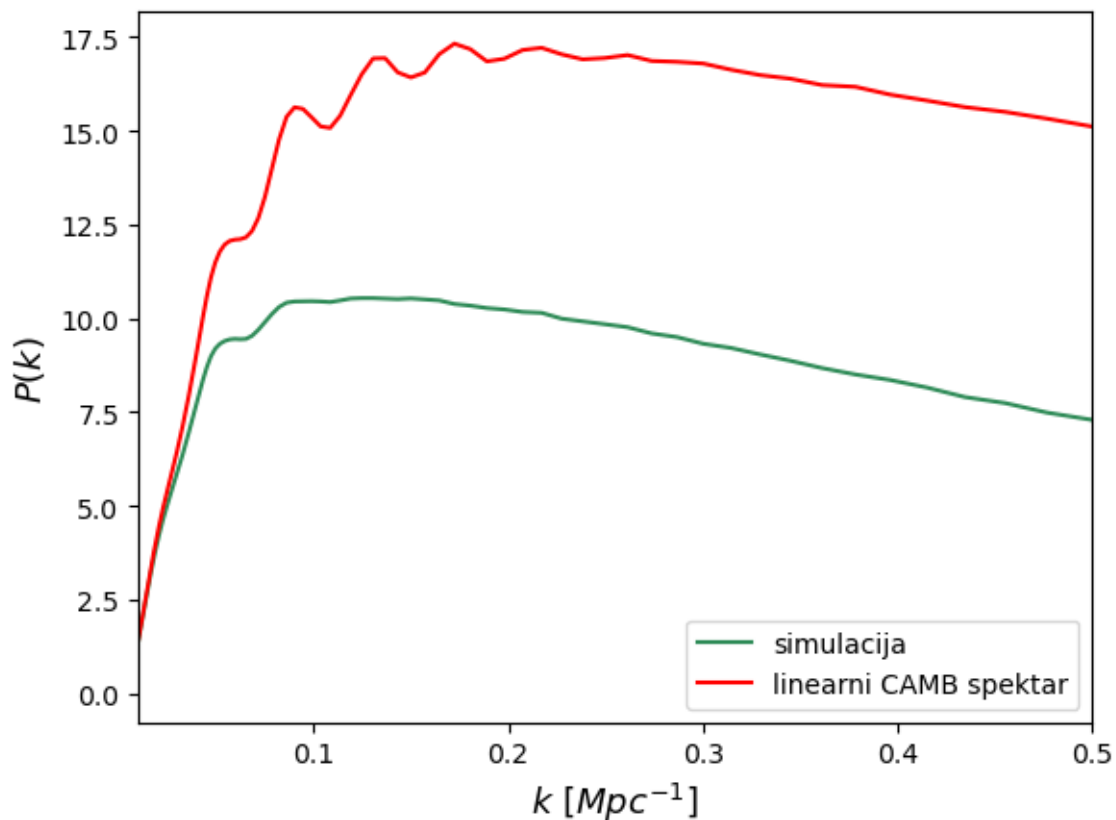
Kao što smo najavili u uvodu, precizan opis polja kontrasta gustoće $\delta(x)$ omogućava nam detaljno praćenje i razumjevanje razvoja struktura na velikim skalama. Ako isti razvoj kao i u (2.50) primjenimo na korelacijsku funkciju $\xi(x)$ (definiranu kao Fourierov transformat spektra snage (2.39), dobijamo:

$$\xi_{SPT}^{1-loop} = \xi_L(x) + 3\xi_L^2(x) + 4\frac{\partial\xi_L(x)}{\partial x} \int_x^\infty dx \xi_L(x) + \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial^2\xi_L(x)}{\partial x^2}. \quad (3.92)$$

Za 1-loop EFTLSS slučaj, u jednadžbi (3.92) bi zamijenili $\sigma^2(x)$ sa $\sigma_{eff}^2(x) = \sigma^2(x) - 2\alpha_c$ te dobili 15 postotnu korekciju [4]. Svaki od navedenih članova ima svoju ulogu u razvoju struktura na velikim skalama. Prvi član nakon linearne korelacijske funkcije određuje kako se promatrana područja šire i rastu u prostoru, u odnosu na linearnu teoriju. Treći član ($\sim 4\frac{\partial\xi_L(x)}{\partial x} \int_x^\infty dx \xi_L(x)$) govori nam o fluktuacija na velikim skalama te njihovom utjecaju na male skale (slično kao u (2.51)). Posljednji član opisuje *RMS displacement*, odnosno srednji slobodni put za koji se određeno područje pomaklo tokom vremena.

Ovi članovi pomažu nam opisati neke od opservacija prilikom izračuna spektra snage, primjerice pomicanje i mrljanje BAO (*Baryonic Acoustic Oscillations*) vrhova [34]. BAO vrhovi su jedni od najbitnijih atrofizičkih opservacija te su vidljivi na linearnom spektru snage (prikazanom na slici 3.10). BAO vrhovi nastaju zbog oscilacija mase u primordijalnom svemiru, uzrokovanih gravitacijskim privlačenjem mase s jedne strane te repulzivnog djelovanja tlaka fotonsko-barionskog fluida s druge strane. Nakon razvezivanja bariona od fotona (*decoupling*), BAO vrhovi ostaju zaleđeni u svemiru te danas predstavljaju područja povećane gustoće. S obzirom da je veličina BAO vrha povezana sa Hubble-ovim radijusom $r_{BAO} \approx r_H(t_{decoupling})/\sqrt{3}$ za vrijeme razvezivanja, BAO vrh služi kao standardno ravnalo pri izračunima kozmičkih udaljenosti [17]. Stoga je precizno mjerenje BAO vrha izrazito bitno za astrofizička

mjerenja. No na slici 3.10 vidimo kako su BAO vrhovi puno izraženiji u linearnom spektru snage nego na simulacijskom spektru. Naime, glavni razlog tome jest da se zbog evolucije svemira i postupnog stvaranja struktura, galaksije miču sa iz svojih početnih pozicija. To se očituje širenjem i pomicanjem BAO vrhova na spektru snage, pogotovo na višim modovima koji predstavljaju manje skale (koje su ujedno i najzahvaćenije nelinearnostima u evoluciji kozmičkih struktura). Te efekte možemo donekle modelirati dodatnim članovima iz jednadžbe (3.92). Naime treći član ima najveći doprinos i uzrokuje širenje BAO vrha, dok je zadnji član nešto slabijeg utjecaja te je odgovoran za pomicanje BAO vrha u stranu. Detaljan opis ovih efekata dan je u [23] i [24]. No čak i ovom jednostavnom analizom vidimo kako preciznim opisom $1 - loop$ doprinosa možemo reproducirati efekte evolucije struktura na velikim skalama.



Slika 3.10: Usporedba linearnog spektra i onog danog simulacijama. Vidimo kao su BAO vrhovi puno izraženiji na linearnom spektru u odnosu na stvarni spektar.

4 Lagrangeova perturbacijska teorija (LPT)

Za razliku od standardne perturbacijske teorije koja rješava jednadžbe gibanja razvojem polja gustoće δ i brzine v u standardnom koordinatnom sustavu, u Lagrangeovom pristupu definiramo novi koordinatni sustav koji prati gibanje čestica. Trenutna pozicija $x(\tau)$ u standardnim koordinatama je tada u Lagrangeovim koordinatama zadana s

$$x(\tau) = x(\tau = 0) + \Psi(q, \tau) = q + \Psi(q, \tau), \quad (4.93)$$

gdje pomoću polja relativnih pomaka Ψ mjerimo odmak pojedine čestice od njene početne pozicije $q \equiv x(\tau = 0)$ [8]. Ovakvo polje unutar sebe sadrži zabilješke o gibanju čestica u odnosu na neki potencijal. U našem slučaju radi se o gravitacijskom potencijalu $\Psi \sim -\nabla\Phi$. Nadalje, u novom koordinatnom sustavu vremenska derivacija postaje

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{u \cdot \nabla_x}{a}. \quad (4.94)$$

Uzmimo za početak standardnu Eulerovu jednadžbu (2.28). Zadržimo li se samo na linearnim članovima, ona poprima oblik

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \mathcal{H}\frac{dx}{d\tau} = -\nabla_x\phi. \quad (4.95)$$

Kada u ovu jednadžbu ubacimo definiciju (4.93) za polje relativnih pomaka Ψ , ona postaje

$$\ddot{\Psi}(q) + \mathcal{H}\dot{\Psi}(q) = -\nabla\phi(q + \Psi). \quad (4.96)$$

Ovu jednadžbu možemo derivirati po x , držeći se pritom konvencije $\nabla_x = \frac{1}{1+\delta(x)}\nabla_q$, gdje je $\frac{1}{1+\delta(x)}$ Jakobijan za prebacivanje argumenta derivacije [9]. Derivirana jednadžba (4.96) poprima oblik

$$\frac{1}{1+\delta(x)}\nabla_q \left[\frac{d^2x}{d\tau^2} + \mathcal{H}\frac{dx}{d\tau} \right] = -\nabla_x^2\phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\delta(\tau, q), \quad (4.97)$$

pri čemu smo u zadnjem redu iskoristili Poissonovu jednadžbu. U linearnoj aproksimaciji vrijedi $\nabla_q\Psi \sim \delta(q)$, stoga jednadžba (4.97) postaje:

$$\nabla_q \left[\frac{d^2}{dt^2}\Psi(q) + 2H\frac{d}{dt}\Psi(q) \right] = \frac{3}{2}H^2\nabla_q\Psi(q), \quad (4.98)$$

pri čemu smo se prebacili iz konformalnog vremena τ u standardno vrijeme t . Jednadžbe (4.96) i (4.98) su glavne jednadžbe Lagrangeove perturbacijske teorije (LPT) te ćemo se njima baviti u ovome poglavlju kako bi opisali evoluciju polja gustoće. Rješenja jednadžbe (4.96) sada koristimo kako bi izračunali polje kontrasta gustoće (u realnom i impulsnom prostoru). Za to koristimo integral sličan onom za distribucijsku funkciju (2.24)

$$1 + \delta_{LPT}(x) = \int dq \delta^D[x - q - \Psi(x)] = \int dq \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik[x - q - \Psi(q)]},$$

$$\tilde{\delta}_{LPT}(k) = \int dq e^{ikq} (e^{-ik\Psi(q)} - 1).$$
(4.99)

Spektar snage (2.39), zapisan pomoću Lagrangeovog kontrasta gustoće je tada :

$$P_{LPT}(k) = \langle \tilde{\delta}_{LPT}(k_1) \tilde{\delta}_{LPT}(k_2) \rangle = \frac{1}{L} \int dq_1 dq_2 e^{-ik(q_1 - q_2)} (\langle e^{-ik[\Psi(q_1) - \Psi(q_2)]} \rangle - 1)$$

$$= \int dq e^{ikq} \left(e^{\sum_{N=1}^{\infty} (i^N / N!) \langle [k\Delta]^N \rangle_c(q)} - 1 \right),$$
(4.100)

pri čemu je $\Delta = \Psi(q_1) - \Psi(q_2)$, L volumen integracije te $q = q_1 - q_2$. U zadnjem koraku smo koristili Kubov teorem $\langle e^X \rangle = e^{\sum_{N=1}^{\infty} \langle X^N \rangle_c / N!}$. Ovu sumu po $\langle [k\Delta]^N \rangle_c(q)$ možemo izračunati u 3D, no posebnost jedne dimenzije jest da konačnom rješenju pridonosi samo drugi kumulant. To možemo zaključiti promatrajući jednadžbu (4.98) koja je linearna, pa je njeno linearno rješenje egzaktno (sve do *shell - crossinga*).

Poznavanje distribucije mase u faznom prostoru (4.99) omogućuje nam dakle određivanje daljnje dinamike sustava u vremenu. U najjednostavnijoj aproksimaciji, tamna materija je na početku imala homogenu distribuciju $\rho(q) \approx \tilde{\rho}$. Takav koherentni režim karakteriziran je nestajućom disperzijom brzine i tenzorom stresa (isto kao i u (2.26)) te glatkim faznim prostorom. U početnom trenutku t_0 sve čestice koje su se nalazile na poziciji q_0 imale su istu brzinu $v(q_0)$, dok će se u nekom trenu t' nalaziti na poziciji $x(q_0, t')$ s brzinom $v(q_0, t') = \frac{\partial x}{\partial t}$. U takvom koherentnom režimu fazni prostor prekriva koordinatni prostor samo jednom što nam omogućuje praćenje evolucije čestica u svakom trenu korištenjem funkcije $x(q, t)$. No u stvarnosti, zbog kompleksnijih početnih uvjeta, čestice s različitim vrijednostima q_0 mogu se mapirati na isti x . Fazni prostor se presavije nekoliko puta što dovodi do različitih brzina na istoj lokaciji. Ovo predstavlja Lagrangeov ekvivalent *shell - crossinga* te signalizira

prelazak iz koherentnog u turbulentni tok. Zbog postojanja više rješenja za svaki x , Jakobijan nestaje $J(q, t) = 0$ što dovodi do singularnog rješenja odnosno gravitacijskog kolapsa. Linearno rješenje (4.98) tada prestaje biti egzaktno te su za izračun nelinearnog spektra potrebni viši kumulanti. Lokacije za koje Jakobijan nestane zovu se kaustici (eng: *caustics*) [35] te se smatra kako oni predstavljaju prve strukture nastale u svemiru.

4.1 Zeldovich aproksimacija

Kao što smo već prije spomenuli, u linearnoj aproksimaciji (koja se često naziva i Zeldovich aproksimacija [15]), Ψ je direktno povezan s linearnim poljem kontrasta gustoće δ_L

$$\Psi_{ZA}(q) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikq} \frac{i}{k} \tilde{\delta}_L(k). \quad (4.101)$$

Kada tu relaciju ubacimo u formulu (4.99), dobijamo da nam je polje gustoće u Fourierovom prostoru zadano s

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{ZA}(k) &= \int dq e^{-ikq} (e^{-ik\Psi_{ZA}(q)} - 1), \\ &= \int dq e^{-ikq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-ik\Psi_{ZA}(q)]^n}{n!}, \\ &= \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dk_1 \dots dk_n}{(2\pi)^{n-1}} \delta^D \left(\sum_{i=1}^n k_i - k \right) F_n^{sym}(k_1, \dots, k_n) \tilde{\delta}_L(k_1) \dots \tilde{\delta}_L(k_n), \end{aligned} \quad (4.102)$$

pri čemu su F_n^{sym} funkcije iz (2.36) koje zadovoljavaju uvjete:

$$F_n^{sym}(k_1, \dots, k_n) = G_n^{sym}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{n!} \frac{(\sum_{i=1}^n k_i)^n}{\prod_{i=1}^n k_i}. \quad (4.103)$$

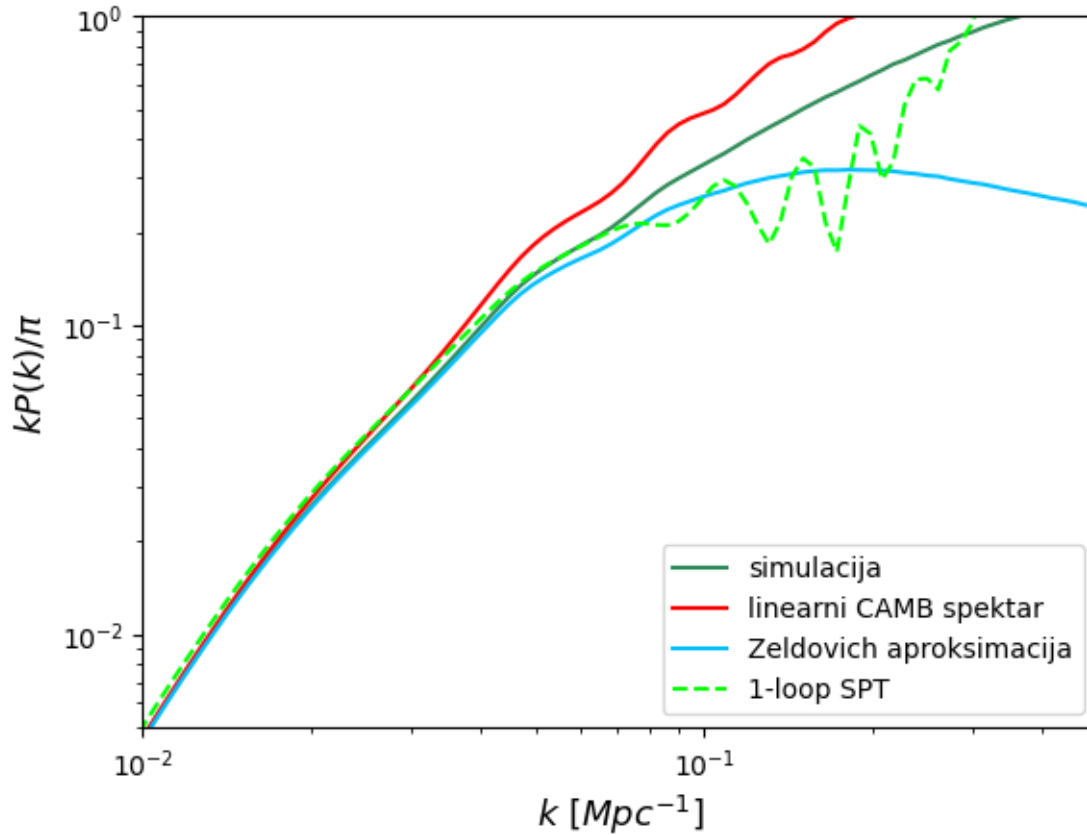
Sva glavna svojstva u Zeldovich aproksimaciji sadržana su u varijanci diferencijalnog odmaka između dvije točke udaljene q

$$\sigma^2(q) = \langle [\Psi_{ZA}(0) - \Psi_{ZA}(q)]^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{2P_L(k)}{k^2} [1 - \cos(kq)], \quad (4.104)$$

Primjerice, spektar snage (4.100) je tada

$$P_{ZA} = \int dq e^{-ikq} \left(e^{-k^2 \sigma^2(q)/2} - 1 \right) = \int dq e^{ikq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-k^2 \sigma^2(q)]^n}{2^n n!} \quad (4.105)$$

pri čemu smo iskoristili da doprinosi samo drugi kumulant $\sigma^2(q)$. Na slici 4.11 prikazan je graf LPT spektra, točnije beskonačna suma dana relacijom (4.105). Vidimo kako je ovakav spektar puno glađi u odnosu na SPT (danog zelenom iscrtkanom linijom), no to ne čudi jer je LPT formulacija upravo jednaka n-tom rješenju SPT-a kada $n \rightarrow \infty$, što ćemo pokazati u sljedećem odjeljku.



Slika 4.11: Graf Zeldovich spektra 4.105, prikazanog plavom bojom, u odnosu na simulacijski spektar (prikazan tamnozelenom bojom). Vidimo kako Zeldovich aproksimacija bolje prati simulirani spektar od običnog linearnog spektra (prikazanog crvenom bojom). Na grafu je za usporedbu također iscrtkanom linijom prikazan graf SPT spektra 2.50.

4.2 Ekvivalencija funkcija jezgri za SPT i LPT

Kao što smo i najavili, pokazat ćemo kako su rješenja SPT-a (2.35) i LPT-a (4.99) jednaka za $n \rightarrow \infty$. Uzmimo za početak funkcije F_n i G_n iz SPT, koje zadovoljavaju

relacije (2.36) i (2.37). Ako jednađbe (2.36) ubacimo jednu u drugu, dobivamo

$$\begin{aligned}
G_n &= 3X_n + n[F_n - (2n + 1)X_n] \\
&= nF_n + (3 - n(2n + 1))X_n \\
&= nF_n - (2n + 3)(n - 1)X_n \\
&= nF_n - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{k}{K_1} G_m F_{n-m},
\end{aligned} \tag{4.106}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku iskoristili definiciju X_n iz (2.37) te uveli pokrate $K_1 = k_1 + \dots + k_m$, $K_2 = k_{m+1} + \dots + k_n$ i $k = K_1 + K_2$. Relacija (4.106) očito vrijedi u SPT-u te ćemo sada pokazati kako ista relacija vrijedi i za LPT. Krenimo od definicije polja gustoće (4.99) te ju pomnožimo s poljem brzine u

$$(1 + \delta_{ZA})u_{ZA} = \int dq \dot{\Psi}(q) \delta^D[x - q - \Psi_{ZA}(q)]. \tag{4.107}$$

Ovu relaciju možemo derivirati te prebaciti u Fourierov prostor

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_{ZA} + \nabla \tilde{\delta}_{ZA} * \tilde{u}_{ZA} + \tilde{\delta}_{ZA} * \tilde{\theta}_{ZA} &= \int dq e^{-ikq} [-ik \dot{\Psi}_{ZA}(q)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-ik \Psi_{ZA}(q)]^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) H \int \frac{dk_1 \dots dk_{n+1}}{(2\pi)^n} \delta^D \left(\sum k_i - k \right) F_{n+1}.
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Iz jednađbe (2.35) znamo $\tilde{\delta} \sim F_n$ te $\tilde{\theta} \sim G_n$, pa iz jednađbe (4.108) dobivamo

$$\begin{aligned}
G_n + \sum_{m=1}^{n-1} G_m F_{n-m} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{k - K_1}{K_1} G_m F_{n-m} &= nF_n, \\
G_n + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{k}{K_1} G_m F_{n-m} &= nF_n,
\end{aligned} \tag{4.109}$$

što je ista relacija kao i (4.106). To nam pokazuje da SPT i LPT imaju iste funkcije jezgre. Sada možemo pokazati kako F^{sym} i G^{sym} iz (4.103) također zadovoljavaju

ove relacije. Koristeći uvjet $F^{sym} = G^{sym}$ te njihovu definiciju, dobivamo

$$\begin{aligned}
G_n + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{k}{K_1} G_m F_{n-m} &= nF_n, \\
\sum_{m=1}^{n-1} \frac{k}{K_1} G_m^{sym} F_{n-m}^{sym} &= (n-1)F_n, \\
\sum_{m=1}^{n-1} Sym\left[\frac{kK_1^{m-1}K_2^{n-m}}{m!(\prod_{i=1}^m k_i)(n-m)!(\prod_{i=m+1}^n k_i)}\right] &= \frac{(n-1)k^n}{n! \prod_{i=1}^n k_i}, \\
\sum_{m=1}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!} Sym[kK_1^{m-1}K_2^{n-m}] &= (n-1)k^n, \\
\sum_{m=1}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!} k Sym[Sym[K_1]^{m-1} Sym[K_2]^{n-m}] &= (n-1)k^n, \\
k^n \sum_{m=1}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{m^{m-1}(n-m)^{n-m}}{n^{n-1}} &= k^n(n-1),
\end{aligned} \tag{4.110}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku iskoristili $Sym[K_1] = \frac{m}{n}k$ i $Sym[K_2] = \frac{n-m}{n}k$. Vidimo da član s lijeve strane uz k^n odgovara razvoju Taylorovom razvoju za $(n-1)$, što se podudara s desnom stranom jednadžbe te nam dokazuje da F^{sym} zadovoljava ove relacije. Isti raspis smo mogli napraviti i za G^{sym} :

$$\begin{aligned}
(n-1)F_n^{sym} &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{k}{K_1} G_m^{sym} F_{n-m}^{sym}, \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} Sym\left[\frac{k^2}{K_1 K_2} G_m G_{n-m}\right].
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Također, za funkcije X_n i Y_n iz (2.35) vrijedi:

$$X_n^{sym} = \frac{1}{2n+3} F_n^{sym}, \quad Y_n^{sym} = \frac{2}{2n+3} F_n^{sym}. \tag{4.112}$$

4.3 Derivacija SPT iz LPT

U prošlom smo odjeljku pokazali da SPT posjeduje iste funkcije jezgre kao i LPT. Nadalje, možemo pokazati da nulti ($n=1$) član razvoja ove formule predstavlja linearni dio spektra, $n=2$ član nam daje $1 - loop$ aproksimaciju itd. Krećući od formule (4.104)

$$\sigma^2(q) = \langle [\Psi_{ZA}(0) - \Psi_{ZA}(q)]^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{2P_L(k)}{k^2} [1 - \cos(kq)], \tag{4.113}$$

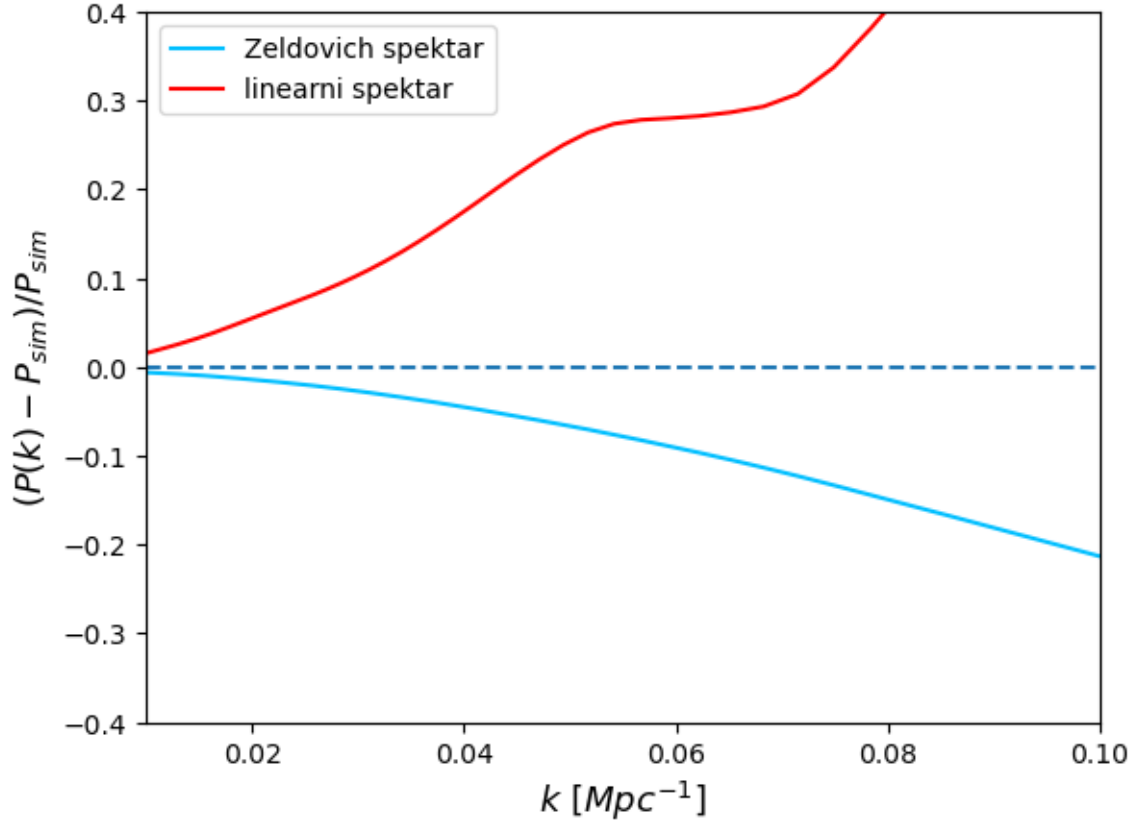
možemo raspisati sumu u formuli (4.105)

$$\begin{aligned}
P_{ZA} &= \int dq e^{-ikq} \left(e^{-k^2\sigma^2(q)/2} - 1 \right) = \int dq e^{ikq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-k^2\sigma^2(q)]^n}{2^n n!} \\
&= \int dq e^{ikq} \left(-\frac{k^2}{2}\sigma^2(q) + \frac{k^4}{8}\sigma^4(q) + \dots \right) \\
&= \int \int_0^{\infty} \frac{dk dq}{\pi} P_L(k) [\cos(kq) - 1] e^{ikq} + \int dq e^{ikq} \frac{k^4}{8} \sigma^4(q) \\
&= P_L + \frac{1}{8} \int dq e^{ikq} \nabla_q^4 \sigma^4(q) + \mathcal{O}(P_L^3) \tag{4.114} \\
&= P_L + \frac{1}{8} \int dq e^{ikq} [6([\sigma^2]''')^2 + 8([\sigma^2]'[\sigma^2]'''' + 2[\sigma^2][\sigma^2]''''')] + \mathcal{O}(P_L^3) \\
&= P_L - k^2 \eta^2 P_L + \int \frac{dk}{2\pi} \left[3 + 4 \frac{k-k'}{k'} + \frac{(k-k')^2}{k'^2} \right] P_L(k') P_L(k-k') \\
&= P_L + P_{13} + P_{22} = P_{SPT},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u četvrtom redu $k^4 e^{ikq}$ zamijenili s $\nabla_q^4 e^{ikq}$ te napravili parcijalnu integraciju $e^{ikq} \nabla_q^4 \sigma^4(q)$, zanemarujući pritom rubne članove. U predzadnjem smo redu ubacili definiciju za σ te grupiranjem članova vidimo da smo dobili iste članove kao u SPT (2.50). Na taj smo način pokazali da u razvoju (4.105) nulti član odgovara linearnom SPT spektru, $n = 1$ član odgovara popravci prvog reda i tako dalje. Sada se možemo ponovno vratiti na sliku 4.11 i zaključiti da smo nastavili razvoj SPT-a na više redove, reproducirali bi egzaktno LPT spektar. Na slici 4.12 dani su reziduali Zeldovich LPT spektra u odnosu na linearni spektar. S obzirom da je LPT rješenje egzaktno u 1D, ono bi trebalo bolje opisivati stvarni spektar od SPT rješenja, što i možemo primjetiti. No slično kao i SPT na slici 3.9, Lagrangeov formalizam također ima problema prilikom tretiranja nelinearnih skala te zahtjeva efektivno rješavanje jednadžbi gibanja.

5 Efektivna teorija polja u Lagrangeovoj formulaciji

Kao i kod standardne perturbacijske teorije, direktno rješavanje jednadžbi (4.96) i (4.98) je jako teško jer su fluktuacije na malim skalama izuzetno velike i neperturbativne. Stoga ponovno koristimo formalizam efektivne teorije polja kako bi integrirali preko malih skala. Utjecaj malih skala na evoluciju svemira nije dakako izgubljen već ga modeliramo protučlanovima i parametrima efektivne teorije [9]. Polje Ψ ras-



Slika 4.12: Usporedba reziduala LPT Zeldovich spektra te linearnog spektra. Vidimo da LPT formalizam bolje reproducira nelinearni simulirani spektrar, no slično kao i SPT, ima problema pri $k \geq 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$

tavljamo na dva doprinosa: kratkovalno polje Ψ_s koje dolazi od $k > \Lambda$ interakcija te dugovalno pole Ψ_l , definirano kao

$$\Psi(q) = \Psi_s(q, q') + \Psi_l(q); \quad \Psi_l(q) = \int dq' W_\Lambda(q, q') \Psi(q'). \quad (5.115)$$

Iz formule (5.115) vidimo kako integral po kratkovalnom polju Ψ_s nestaje, što nam govori da se stvarno radi o dugovalnom filtriranju. Također možemo definirati i dugovalni gravitacijski potencijal $\phi_l = \phi - \phi_s$ te dugovalno polje zgušnjavanja $\delta_l = \delta - \delta_s$, koji zadovoljavaju relaciju

$$\nabla^2 \phi_l = \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta_l. \quad (5.116)$$

Ako sada primijenimo ugladivanje na jednadžbu (4.96), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\ddot{\Psi}_l(q) + \mathcal{H}\dot{\Psi}_l(q) &= - \int dq' W_\Lambda(q, q') \nabla \phi(q' + \Psi(q')) \\
&= - \int dq' W_\Lambda(q, q') \nabla \phi_l(q' + \Psi(q')) - \int dq' W_\Lambda(q, q') \nabla \phi_s(q' + \Psi(q')) \\
&= - \nabla \phi_l(q + \Psi(q)) + a_S(q, \Psi_L(q)).
\end{aligned}
\tag{5.117}$$

Vidimo da se u odnosu na jednadžbu (4.96) pojavio dodatni član a_S koji opisuje akceleraciju izazvanu kratkovalnim modovima. Drugim rječima, parametar akceleracije a_S opisuje dijelove sile koji se ne mogu dobiti izračunima centara mase te nam govori kako se čestice s konačnim momentima ponašaju različito u gravitacijskom polju od onih bez momenta [10]. Parametar akceleracije ne ovisi o silama koje proizlaze iz izračuna centra mase (ali ovisi o plimnom tenzoru uzrokovanom ϕ_l) te je zbog toga bitan u slučajevima kad se Lagrangeova područja preklapaju. Ugladana jednadžba (4.96) poprima oblik

$$\ddot{\Psi}_l + \mathcal{H}\dot{\Psi}_l = -\nabla \phi_l(q + \Psi(q)) + a_S(q, \Psi_s).
\tag{5.118}$$

Ovu jednadžbu možemo riješiti perturbativno, uzimajući u obzir dodatni član a_S u koji ulaze sve kontribucije kratkovalnih modova. Dugovalno polje Ψ_l dobiva dodatne kontribucije od parametra a_S , koje moramo integrirati Greenovom funkcijom. Te dodatne doprinose modeliramo parametrima kratkovalnih modova (slično kao u (3.74)) koji su ograničeni simetrijama problema

$$\Psi_s \sim \mathcal{S} + 2\alpha_{c;\Lambda} \nabla \delta_L + \dots
\tag{5.119}$$

Prvi član $\mathcal{S} = \nabla J$ odnosi se na stohastičke kontribucije te ne zavisi o dugovalnim modovima. Prvi netrivialni član transformira se kao vektor te je proporcionalan $\nabla \delta_L$, uz konstantu proporcijonalnosti $2\alpha_{c;\Lambda}$. Svi članovi u ovom razvoju služe kako bi korigirali spektar snage te umirili doprinose na velikim k u normalnom perturbativnom pristupu [10]. Točkama smo naznačili više članove u razvoju (koje idu s potencijama δ_L i njezinom derivacijom) te smo se zadržali samo na najnižim članovima. Kao i kod EFTLSS, ako uzmemo sve članove u obzir teorija će biti Λ -nezavisna. No za to nam

treba beskonačan broj parametara i konstanti u razvoju. Zbog toga uvodimo rez za konačan broj parametara, dok će viši članovi ($k > \Lambda$) biti potisnuti sa k/Λ te neće pridonositi rješenju.

5.1 Perturbativno rješenje LEFTLSS

Slično kao i u EFTLSS, Lagrangeove jednadžbe gibanja možemo riješiti perturbativnim pristupom. Kombinacijom jednadžbi (5.115) i (5.119) možemo polje odmaka Ψ napisati kao

$$\Psi(q) = \Psi_l + \mathcal{S} + 2\alpha_{c,\Lambda} \nabla \delta_{L,l} + \dots \quad (5.120)$$

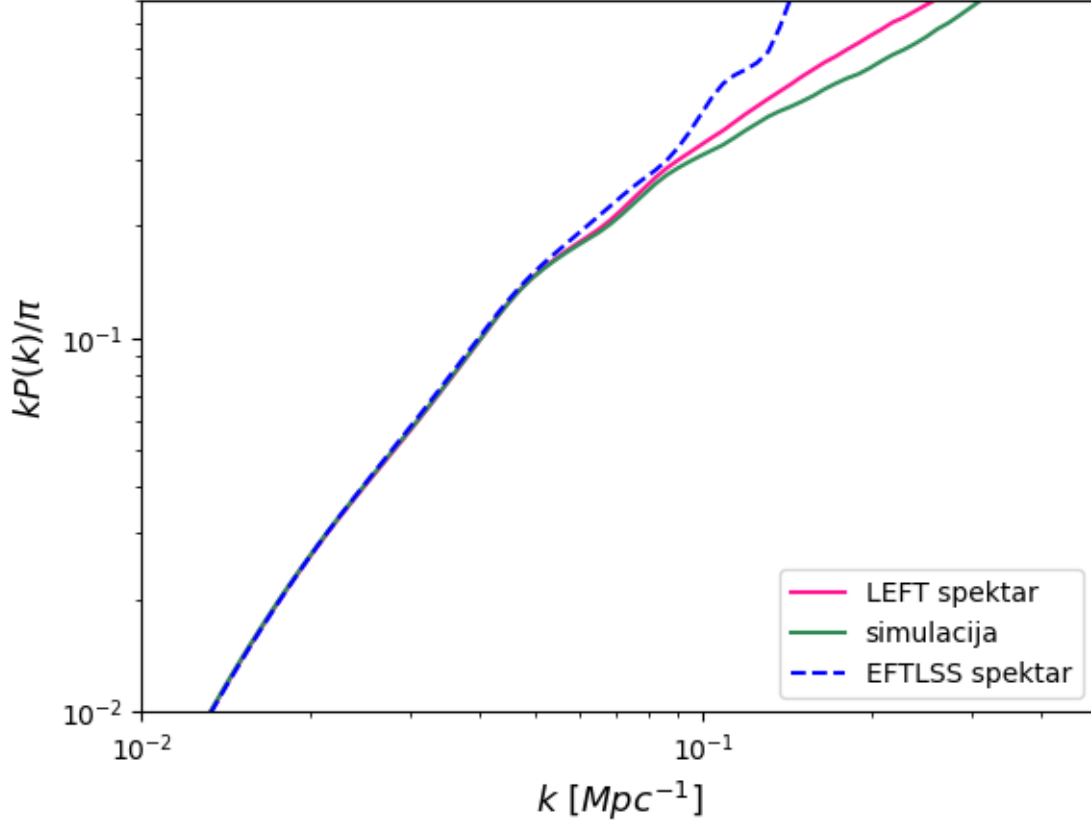
pri čemu smo inkorporirali sve dugovalne i kratkovalne kontribucije. Spektar snage (4.105) je tada

$$P(k) = \int dq e^{ikq} [e^{-k^2 \sigma_{LEFTLSS}^2(q)/2} - 1] = \int dq e^{ikq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[-k^2 \sigma_{LEFTLSS}^2(q)]^n}{2^n n!}, \quad (5.121)$$

pri čemu je $\sigma_{LEFTLSS}^2(q)$ (jedini član koji doprinosi u 1D) dana sa

$$\begin{aligned} \sigma_{LEFTLSS}^2(q) &= \langle [\Psi(q_1) - \Psi(q_2)]^2 \rangle \\ &= \langle [(\Psi_l(q_1) + \Psi_s(q_1)) - (\Psi_l(q_2) + \Psi_s(q_2))]^2 \rangle \\ &= 2\langle \Psi(0)\Psi(0) \rangle - 2\langle \Psi(q)\Psi(q) \rangle \\ &= 2[\langle \Psi_l(0)\Psi_l(0) \rangle + 2\langle \Psi_l(0)2\alpha_{c,\Lambda} \nabla \delta_{L,l}(0) \rangle + \langle \mathcal{S}(0)\mathcal{S}(0) \rangle] \\ &\quad - 2[\langle \Psi_l(q)\Psi_l(q) \rangle + 2\langle \Psi_l(q)2\alpha_{c,\Lambda} \nabla \delta_{L,l}(q) \rangle + \langle \mathcal{S}(q)\mathcal{S}(q) \rangle] \\ &= \langle [\Psi_l(0) - \Psi_l(q)]^2 \rangle + 2[2\alpha_{c,\Lambda} + 4\alpha_{c,\Lambda}^2 \nabla^2][\xi_{L,\Lambda}(0) - \xi_{L,\Lambda}(q)] \\ &\quad + 2\nabla^2[\xi_J(0) - \xi_J(q)], \end{aligned} \quad (5.122)$$

pri čemu je $q = q_1 - q_2$. U trećem smo redu prilikom raspisa zanemarili članove koji direktno vežu Lagrangeova polja sa stohastičkim doprinosima (primjerice $\langle \Psi_l \mathcal{S} \rangle$). U zadnjem redu smo grupirali članove te ih zapisali pomoću korelacijskih funkcija, gdje su $\xi_J = \langle J J \rangle$ korelacijske funkcije stohastičkog člana, dok je $\xi_{L,\Lambda}$ korelacijska funkcija linearnog polja kontrasta. Kao i kod standardne efektivne teorije polja, moramo izbaciti ovisnost o Λ . Stoga uzimamo limes $\Lambda \rightarrow \infty$ uz pokratu $\sigma_{LEFT}^2 = \langle [\Psi(q_1) - \Psi(q_2)]^2 \rangle|_{\Lambda \rightarrow \infty}$. Ovaj izraz sada sadrži sve jednopetljane članove Lagrangeove efektivne teorije polja.



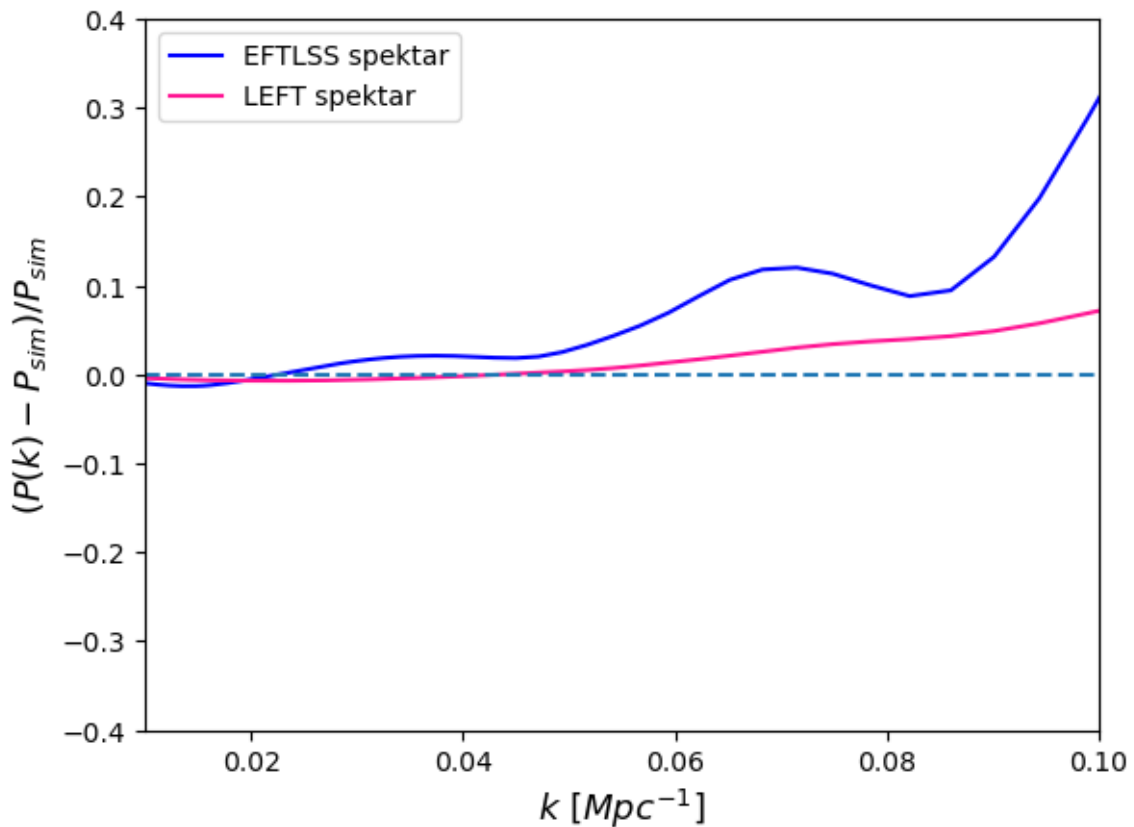
Slika 5.13: Graf Lagrangeove efektivne teorije (LEFT) iz jednadžbe (5.123) u usporedbi sa EFTLSS spektrom. Vidljivo je kako LEFT spekter puno bolje prati simulirani spekter.

Iz formula (3.72) i (5.120) znamo da efektivne teorije polja koriste različite parametre kako bi opisali ponašanje materije na velikim skalama (primjerice aproksimacijom dinamike fluida) te kontrolirali veličinu nelinearnosti. No ne pridonose svi ti parametri jednako na različitim skalama. Primjerice za $k \approx k_*$ (pri čemu je k_* proizvoljan valni vektor) korekcije spektra snage ovise o varijanci fluktuacija gustoće proizvedenih modovima s $k \leq k_*$ te odmacima proizvedenim modovima s $k \geq k_*$. Stoga najčešće ne raspisujemo teoriju u redovima veličine spektra snage, već ih reorganiziramo, definirajući pritom $\sigma_{<}^2$ te $\sigma_{>}^2$. Te varijance su definirane na način da budu uzrokovane modovima $k_{<} \in [0, k_*]$ te $k_{>} \in [k_*, \infty]$. Na isti način možemo definirati i korelacijsku funkciju $\xi_{<}(x) = \int_0^{k_*} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} P(k)$ (analogno vrijedi i za $\xi_{>}$). Sada spekter snage, koristeći formulu (5.122) za σ_{LEFT}^2 možemo rastaviti na različite doprinose

$$P_{LEFT}^{1-loop}(k) = P_{<}^{ZA}(k) + k^2 \int dq e^{-ikq} e^{-k^2 \sigma_{<}^2 / 2} \left(-\frac{\sigma_{>}^2}{2} + \frac{k^2 \sigma_{>}^4}{8} + 2\alpha_c \xi_L + \nabla^2 \xi_J - \mathcal{A} \right). \quad (5.123)$$

Pritom smo zanemarili $4\alpha_c^2 \nabla^2$ član jer je potisnut sa derivacijom, dok \mathcal{A} predstav-

lja konstantu povezanu sa $\xi_J(0)$. Član $P_{<}^{ZA}(k)$ predstavlja standardni LPT spektar (4.105), uz zamjenu k_* za ∞ u gornjoj granici integracije (4.104). Također, iz drugog člana razvoja varijance (tj. član σ^4), koji predstavlja doprinose P_{13} i P_{22} , uzeli smo $\frac{k^2\sigma^4}{8}$ te ga grupirali sa nižim redom razvoja. Ovim načinom razvoja poništili smo i sve UV divergencije. U limitu $k_* \rightarrow 0$ uz $\mathcal{A} = 0$ iz jednadžbe (3.87) dobivamo izraz za P_{EFTLSS} . Na slici 5.13 vidimo usporedbu LEFT spektra (5.123) u odnosu na EFTLSS spektar (3.89). Prilikom izračuna $\sigma_{<,>}$ koristili smo $k_* = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$. Vidljivo je kako LEFT spektar puno bolje prati simulacijski spektar, što opravdava korištenje Lagrangeove formulacije. Bitno je za napomenuti da smo za α_c uzeli vrijednosti 19 Mpc^2 , što se razlikuje od EFTLSS vrijednosti $\alpha_c^{EFTLSS} = 15 \text{ Mpc}^2$ iz drugih radova [14]. Glavna razlika jest što smo mi izračunavali parametar α_c analizom preko raspona k , dok je u radu [4] odabran precizno određen parametar iz usporedbe spektara samo za $k \in [0.1 \text{ Mpc}^{-1}, 0.7 \text{ Mpc}^{-1}]$, gdje je teorija najprimjenjivija. Pogledom na sliku 5.14 vidimo kako smo korištenjem LEFTLSS spektra poboljšali preciznost čak i od EFTLSS rješenja.



Slika 5.14: Graf reziduala EFTLSS i LEFT spektra u odnosu na nelinearne simulacije. Vidimo da LEFT spektar ostaje precizan na većem području od EFTLSS spektra - slično kao što je to bio slučaj s SPT-om i LPT-om.

6 Zaključak

U ovom radu smo proučavali ponašanja različitih perturbacijskih teorija u 1D te uspoređivali njihove uspješnosti u reproduciranju nelinearnog spektra snage dobivenog numeričkim PM simulacijama [4]. Krajnji cilj perturbacijskih teorija je sistematski opis dinamike različitih tipova materije u svemiru te opis evolucije polja materije - od homogeno raspoređenih čestica do konačnog stvaranja kozmičkih struktura. Najpoznatija od perturbacijskih teorija zove se standardna perturbacijska teorija (SPT). Ona je poznata i pod nazivom Eulerova perturbacijska teorija, zbog svog pristupa u kojem interagirajuću materiju (najčešće hladnu tamnu materiju) opisuje jednačinama savršenog fluida. U ovom radu smo raspisali jednačine kontinuiteta i Eulerovu jednačinu za takav fluid te iz njih dobili konačno rješenje polja kontrasta gustoće, koje smo reproducirali pomoću CAMB [6] koda. Također smo pokazali kako različite jednopetljane kontribucije opisuju širenje polja gustoće na velikim skalama, što se očituje pomicanjem i smanjivanjem BAO vrha. No iako su $1 - loop$ predikcije (odnosno linearno rješenje zajedno sa prvim redom popravki) valjane na velikim skalama, one veoma loše opisuju dinamiku za $r \leq 10$ Mpc. Na tim skalama, zbog velikog broja čestica koje međusobno prelaze jedna preko druge, interakcije postaju nelinearne te ih je nemoguće perturbativno opisati. Stoga smo se okrenuli efektivnim teorijama, koje pomoću filtera usrednjavaju dinamiku na manjim skalama pružajući tako precizniji opis konačnog spektra snage. Utjecaj malih skala nije naravno izgubljen, već se opisuje efektivnim parametrima. Pokazali smo kako preciznim izračunom tih parametara konačna efektivna Eulerova perturbacijska teorija (EFTLSS) postaje puno točnija pri aproksimaciji stvarnog nelinearnog spektra snage. Dodatkom $\alpha_c k^2 P_L(k)$ člana uspjeli smo reproducirati nagib nelinearnog spektra te produžiti područje na kojemu je teorija primjenjiva od $k \sim 0.05 \text{ Mpc}^{-1}$ do $k \sim 0.2 \text{ Mpc}^{-1}$. Glavni nedostatak efektivne teorije jest njena ovisnost o slobodnim parametrima koji ne izlaze direktno iz teorije nego se moraju odrediti direktno iz mjerenja. No uvjerali smo se da čak i za prvi red popravki, efektivna teorija pokazuje dobre rezultate te predstavlja vrijedan alat u našoj analizi svemira i njegova razvoja.

Uz SPT, upoznali smo se i s Lagrangeovom perturbacijskom teorijom, koja modelira evoluciju čestica u odnosu na polje pomaka Ψ . Rad u jednoj dimenziji omogućio nam je dobivanje egzaknog rješenja Lagrangeovih jednačini, koje zbog svog razvoja

varijance relativnog pomaka $\sigma^2(q)$ vjerno opisuje nelinearni spektar snage. Također smo pokazali smo ekvivalenciju ova dva pristupa, odnosno pokazali da n -ti red popravki SPT-a konvergira LPT Zeldovich rješenju. Na koncu smo uveli i efektivno Lagrangeovo rješenje (LEFTLSS). Pokazali smo da zbog miješanja različitih kontribucija, LEFTLSS spektar moramo rastaviti na kratovalne i dugovalne doprinose. To nam je omogućilo bolje opisivanje simuliranog nelinearnog spektra snage, čak i od EFTLSS.

Pregledom dviju najpoznatijih standardnih teorija za opis razvoja polja gustoće: SPT-a i LPT-a, uvjerali smo se dakle u njihove nedostatke prilikom opisivanja nelinearnog spektra snage. Uvođenje efektivnih varijanti tih teorija omogućilo nam je zato puno vjerniji opis ponašanja polja kontrasta. No za potpunu reprodukciju nelinearnog spektra potrebno je uvođenje dodatnih efektivnih parametara, što dovodi u pitanje vjerodostojnosti ovog pristupa. Analizom provedenom u ovom radu, uvjerali smo se kako postignuta preciznost opravdava efektivni pristup te zahtjeva daljnje proučavanje. Također, rad u jednoj dimenziji omogućio nam je lakoću i jednostavnost izvoda, što je velika prednost za buduća istraživanja.

Literatura

- [1] Bernardeau, F.; Colombi, S.; Gaztañaga, E.; Scoccimarro, R. Large-Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory. //, PhR. Vol. 367 (2002), str. 1-248.
- [2] Planck Collaboration; Aghanim, N.; Akrami, Y.; Ashdown, M.; Aumont, J.; Bacigalupi, C.; Ballardini, M.; et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // A&A. Vol.641 (2020), str. A6
- [3] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M. Fluid Mechanics, 2nd ed. Oxford : Pergamon Press, 1987.
- [4] McQuinn, M.; White, M. Cosmological perturbation theory in 1+1 dimensions // JCAP. Vol. 043 (2016), str. 43
- [5] Carrasco, J.J.M.; Hertzberg, M.P.; Senatore, L. The Effective Field Theory of Cosmological Large Scale Structures // JHEP. Vol 82. (2012), str. 82
- [6] CAMB (Code for Anisotropies in the Microwave Background), Antony Lewis Revision, <http://camb.info>
- [7] Baumann, D.; Nicolis, A.; Senatore, L.; Zaldarriaga, M. Cosmological nonlinearities as an effective fluid. // JCAP. Vol 051. (2012), str. 51
- [8] Catelan, P. Lagrangian Dynamics in Non-Flat Universes and Non-Linear Gravitational Evolution. // MNRAS. Vol. 276 (1995), str 115.
- [9] Porto, R.A.; Senatore, L.; Zaldarriaga, M. The Lagrangian-space Effective Field Theory of Large Scale Structures. // JCAP. Vol 2014. (2014), str. 22
- [10] Vlah, Z.; White, M.; Aviles, A. A Lagrangian effective field theory. // JCAP. Vol. 2015 (2015), str. 14
- [11] Matsubara, T. Nonlinear perturbation theory with halo bias and redshift-space distortions via the Lagrangian picture // PRD. Vol.78 (2008), str. 83519
- [12] Tsaprazi E. , Physics-informed inferences of galaxy clustering with Bayesian forward modelling, Doktorski rad, Stockholm, Department of Physics - Stockholm University, 2023.

- [13] Peebles P.J.E. Large-scale background temperature and mass fluctuations due to scale-invariant primeval perturbations. // *ApJL* Vol. 263 (1982), str. L1-L5
- [14] Kolb, E.W.; Turner, M.S. *The Early Universe*. // *Front. Phys.* Vol. 69 (1990), str 1-547
- [15] Zeldovich, Y. B. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. // *A&A*. Vol. 5 (1970), str 84–89.
- [16] Springel, V.; White, S.D.M.; Jenkins, A.; Frenk, C.S.; Yoshida, N.; Gao, L.; Navarro, J.; et al. Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars // *Nature*. Vol. 435 (2005), str. 629-636
- [17] Barbara Ryden *Introduction to Cosmology*. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press.
- [18] Bacon, R.; Mary, D.; Garel, T.; Blaizot, J.; Maseda, M.; Schaye J.; Wisotzki, L.; et al. The MUSE Extremely Deep Field: the Cosmic Web in Emission at High Redshift // *A&A*. Vol. 647 (2021), str. A107
- [19] Eisenstein, D.J.; Weinberg, D.H.; Agol, E.; Aihara, H.; Allende, Prieto, C.; Anderson, S.F.; Arns, J.A.; et al. SDSS-III: Massive Spectroscopic Surveys of the Distant Universe, the Milky Way, and Extra-Solar Planetary Systems // *AJ*. Vol. 142 (2011), str. 72
- [20] Nadler, E.O.; Gluscevic, V.; Boddy, K.K.; Wechsler, R.H. Constraints on Dark Matter Microphysics from the Milky Way Satellite Population // *ApJL*. Vol. 878 (2019), str. L32
- [21] Chisari, N.E.; Richardson, M.L.A.; Devriendt, J.; Dubois, Y.; Schneider, A.; Le Brun, A.M.C.; Beckmann, R.S.; et al. The impact of baryons on the matter power spectrum from the Horizon-AGN cosmological hydrodynamical simulation // *MNRAS*. Vol. 480 (2018), str. 3962-3977
- [22] Carrasco, J.J.M.; Foreman, S.; Green, D.; Senatore, L. The Effective Field Theory of Large Scale Structures at Two Loops// *JCAP*. Vol. 057 (2014), str. 57
- [23] Tassev, S. Lagrangian or Eulerian; Real or Fourier? Not All Approaches to Large-Scale Structure Are Created Equal // *JCAP* Vol. 008. (2014), str. 8

- [24] Sherwin, B.D.; Zaldarriaga, M. Shift of the baryon acoustic oscillation scale: A simple physical picture // *PhRvD*. Vol. 85 (2012), str. 103523
- [25] Miller, B.N.; Rouet, J.L. Cosmology in One Dimension: Fractal Geometry, Power Spectra and Correlation // *JSMTE*. Vol. 2010 (2010), str. 12028
- [26] Efstathiou, G.; Davis, M.; White, S.D.M.; Frenk, C.S. Numerical techniques for large cosmological N-body simulations. // *ApJS*. Vol. 57 (1985), str. 57
- [27] Carroll, S. M.; Leichenauer S.; Pollack J. Consistent effective theory of long-wavelength cosmological perturbations // *Physical Review*. Vol. 90 (2014), str. 023518
- [28] Takahashi, R. Third-Order Density Perturbation and One-Loop Power Spectrum in Dark-Energy-Dominated Universe. // *Progress of Theoretical Physics*. Vol. 120 (2008), str. 549–559
- [29] D’Amico, G.; Senatore, L.; Zhang, P.; Nishimichi, T. Taming redshift-space distortion effects in the EFTofLSS and its application to data // *JCAP*. Vol. 2024 (2024), str. 37
- [30] Goroff, M. H.; Grinstein, B.; Rey, S.J.; Wise, M. B. Coupling of modes of cosmological mass density fluctuations // *APJ*. Vol. 311 (1986), str 6–14
- [31] Dodelson, S.; Schmidt, F. *Modern Cosmology*. 2nd ed. London: Elsevier, 2021.
- [32] *Cosmology II: Boltzmann equations*, https://cmb.wintherscoming.no/theory_perturbations.php
- [33] Schneider, P. *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. 2nd ed. Bohn: Springer, 2015
- [34] Eisenstein, D. J.; Seo, H.J.; Sirko, E.; Spergel, D. N. Improving Cosmological Distance Measurements by Reconstruction of the Baryon Acoustic Peak // *APJ*. Vol. 664 (2007), str. 675–679
- [35] Natarajan, A.; Sikivie, P. Robustness of discrete flows and caustics in cold dark matter cosmology // *Physical Review D*, vol. 72 (2005), str. 083513