

# Optimizacija debljina bridova Cypher stenta iz trodimenzionalne elastičnosti

---

Lovrić, Mirna

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:077686>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-30**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Mirna Lovrić

**OPTIMIZACIJA DEBLJINA BRIDOVA  
CYPHER STENTA IZ  
TRODIMENZIONALNE ELASTIČNOSTI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, svibanj, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Zahvaljujem Bogu, na darovanom talentu i na prilici da rastem i usavršim svoje talente kroz ove godine studiranja i izazove koji su me čekali. Zahvaljujem svojim roditeljima i sestrama koji su uvijek bili tu za mene i bodrili me. Zahvaljujem svim kolegama koji su me inspirirali i učinili ovo studiranje bogatijim iskustvom. Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Josipu Tambači na uloženom vremenu i srpljivosti.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Stent</b>	<b>3</b>
<b>2 Teorija elastičnosti</b>	<b>11</b>
2.1 Osnovni pojmovi . . . . .	11
2.2 Mjera deformacije . . . . .	12
2.3 Jednadžbe ravnoteže u deformiranoj i referentnoj konfiguraciji . . . . .	13
2.4 Teorija linearizirane elastičnosti . . . . .	16
2.5 Slaba formulacija . . . . .	18
2.6 Problem čiste trakcije (eng. <i>pure traction</i> problem) . . . . .	19
2.7 Apstraktni rezultat egzistencije i jedinstvenosti . . . . .	20
2.8 Egzistencija i jedinstvenost rješenja <i>pure traction</i> problema . . . . .	21
<b>3 Konstrukcija 3D modela Cypher stenta</b>	<b>27</b>
3.1 Vizualizacija Cypher stenta . . . . .	27
3.2 Zadaća linearizirane elastičnosti na Cypher stentu . . . . .	30
<b>4 Analiza i kalibriranje</b>	<b>33</b>
4.1 Analiza . . . . .	33
4.2 Optimizacija parametra <i>thickness</i> . . . . .	34
4.3 Optimizacija parametra <i>thickness</i> za <i>bending</i> problem . . . . .	55
<b>Bibliografija</b>	<b>79</b>

# Uvod

Srce je srčani mišić koji pumpa krv u ostatak ljudskog tijela, no krv koju pumpa ne koristi za svoj rad. Zbog toga postoje dvije krvne žile koje zovemo koronarne arterije zadužene za opskrbljivanje srca krvlju i kisikom. One omogućuju normalan rad srca. Kroz život, u koronarnim arterijama nakupljaju se količine kolesterola i drugih masnih nakupina, koje zajedno nazivamo aterosklerotski plak ili ater. Visok krvni tlak, kolesterol, dijabetes, pretilost, slabija fizička aktivnost i pušenje neki su od čimbenika koji mogu uzrokovati povećanje količine plaka. Prevelike količine plaka mogu izazvati suženje, odnosno zadebljanje koronarne arterije (ateroskleroza). Ateroskleroza je glavni uzrok koronarne arterijske bolesti (CAD), a koronarna arterijska bolest angine i srčanog udara. Srčani udar trajno oštećuje srce, a može doći i do srčanog zastoja, koji može biti smrtonosan ako se pacijentu brzo ne pruži liječnička pomoć. Koronarna arterijska bolest najčešći je uzrok obolijevanja i smrti u SAD-u, a u svijetu je treća bolest po broju umrlih, sa 17.8 milijuna mrtvih godišnje. Ako se radi o blažem slučaju koronarne arterijske bolesti, liječnik može savjetovati promjenu stila života, prepisati lijek za snižavanje razine kolesterola ili lijek za krvni tlak. Ako se radi o ozbiljnijem slučaju, odnosno ako su koronarne arterije zadebljane u većoj mjeri, liječnici mogu učiniti operaciju premosnice (by-pass) ili angioplastiku. Za vrijeme operacije premosnice, liječnik uzima dio zdrave arterije ili vene s drugog dijela tijela i šiva jedan kraj te zdrave žile na aortu, glavnu žilu koja odvodi krv iz srca do ostatka tijela. Drugi kraj zdrave žile šiva se na zadebljanu koronarnu arteriju nakon mjesta zadebljanja. Na taj način zaobilazi se zadebljani dio koronarne arterije i krv uspješno teče do srca. Drugi način kako tretirati koronarnu arterijsku bolest, odnosno ateroskleroza, jest angioplastika, zahvat gdje se na mjesto zadebljanja u koronarnoj arteriji usađuje stent, cjevčica od metalne mrežice.

Tema ovog rada bit će upravo jedna vrsta stenta koji se ugrađuje u koronarne arterije a dizajn mu je nalik Cypher stentu. Prvo se opisuje njegova struktura, njegovo modeliranje te zatim koristeći teoriju linearizirane elastičnosti i metodu konačnih elemenata optimizacija parametara Cypher stenta kako bismo povećali radijalnu čvrstoću ovog stenta te ga učinili podatljivim na savijanje.



# Poglavlje 1

## Stent

Stent je metalna mrežasta cjevčica kojoj je svrha ukloniti suženje krvnih žila. Stent se može ugraditi na više mjesta u ljudskom tijelu, no ovaj rad fokusiran je na koronarne stentove koji se usađuju u koronarne arterije.



Slika 1.1: Izgled i veličina stenta

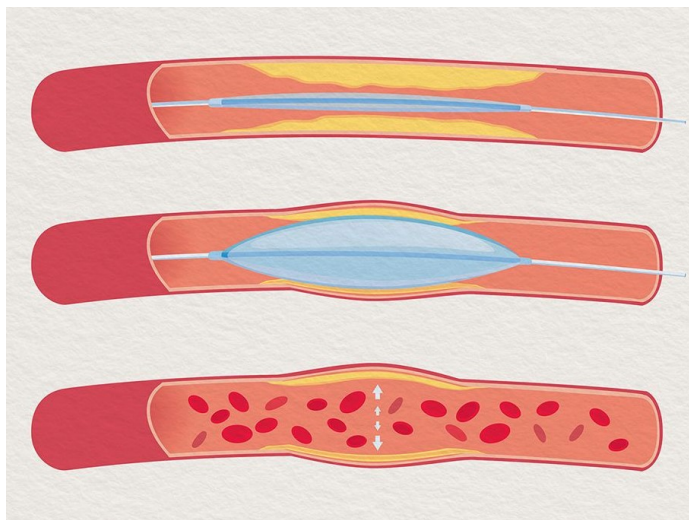
### **Perkutana koronarna intervencija**

Koronarni stent usađuje se u ljudsko tijelo postupkom perkutane koronarne intervencije (PCI). Liječnik prvo postavlja fleksibilnu cjevčicu (kateter) u arteriju u natkoljenici (preponi) ili u zapešću, kateter se provodi do srca, a zatim do sužene koronarne arterije. Nakon

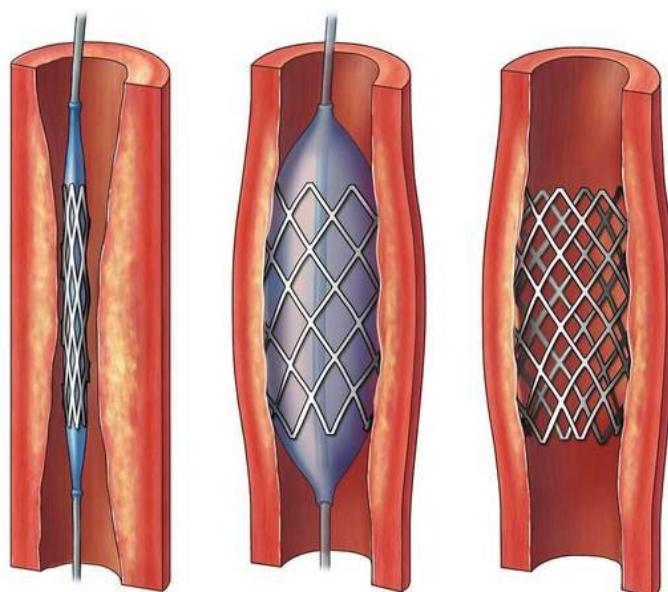


toga slijedi balon angioplastika. Na vrhu katetera nalazi se ispuhani balon, koji se napuše kada kateter dođe na mjesto suženja te tako proširuje arteriju. Balon se ispuhuje i uklanja (Slika 1.2).

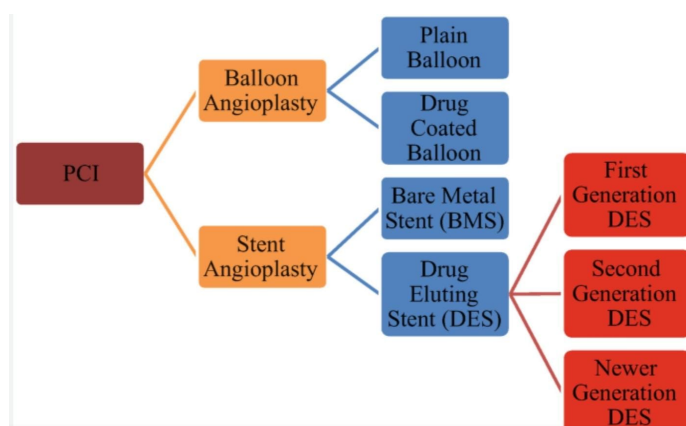
Nakon balon angioplastike slijedi ugradnja stenta, odnosno stent angioplastika. Balon s ugrađenim stentom dovodi se u područje zadebljanja, koje smo prethodnim balonom već u određenoj mjeri raširili. Sada se napuhuje ovaj drugi balon i počinje se širiti. Kako se on širi, tako se širi i stent na balonu. To širenje i pritisak stenta na stijenku arterije utiskuje stent čvrsto uz stijenku arterije gdje je bilo zadebljanje. Balon se zadrži napunjen oko 20 sekundi, potom se ispuhuje i uklanja. Stent ostaje na mjestu zadebljanja i sprečava ponovno zadebljanje koronarne arterije (Slika 1.3).



Slika 1.2: Balon angioplastika, proširenje zadebljenja balonom



Slika 1.3: Stent angioplastika, postavljanje stenta na zadebljanje



Slika 1.4: Perkutana koronarna intervencija, podjela

## Povijest stenta

Charles Dotter bio je američki znanstvenik koji je osmislio i predložio balon angioplastiku, odnosno korištenje katetera i balona kako bi se arterija proširila iznutra. No, vaskularni kirurzi u SAD-u nisu prihvatili njegovu ideju o angioplastici, već je Andreas Grüntzig, njemački angiolog i kardiolog, 1977. godine izveo prvu balon angioplastiku na živućem

pacijentu. O važnosti ovog izuma govori i činjenica da su Grüntzig i Dotter nominirani za Nobelovu nagradu za fiziologiju ili medicinu 1978. godine. Koju godinu kasnije, znanstvenici dolaze na ideju stent angioplastike. Prvi stentovi dizajnirani su krajem 80-ih godina prošlog stoljeća paralelno u SAD-u i Europi. Ulrich Sigwart osmislio je koncept endoluminalnog stentiranja, što je značilo da se stent umeće kroz mali rez ili prirodni otvor tijela, bez pravljenja velikih rezova. Prvo usađivanje koronarnog stenta u pacijenta dogodilo se 1986. godine u Toulouseu, Francuska, pod vodstvom doktora Jacquesa Puela. Grupa znanstvenika pod vodstvom Puela i Sigwarta dizajnira stent Wallstent. U isto vrijeme, u SAD-u Julio Palmaz razvija prvi stent koji se proširuje balonom u razdoblju između 1978. godine i 1985. godine te patentira svoj izum. Dvije godine kasnije, 1987. godine, zajedno s Richardom Schatzom, Palmaz usađuje njihov prvi koronarni stent pod nazivom Palmaz-Schatz u pacijenta.

### **Vrste i svojstva stentova**

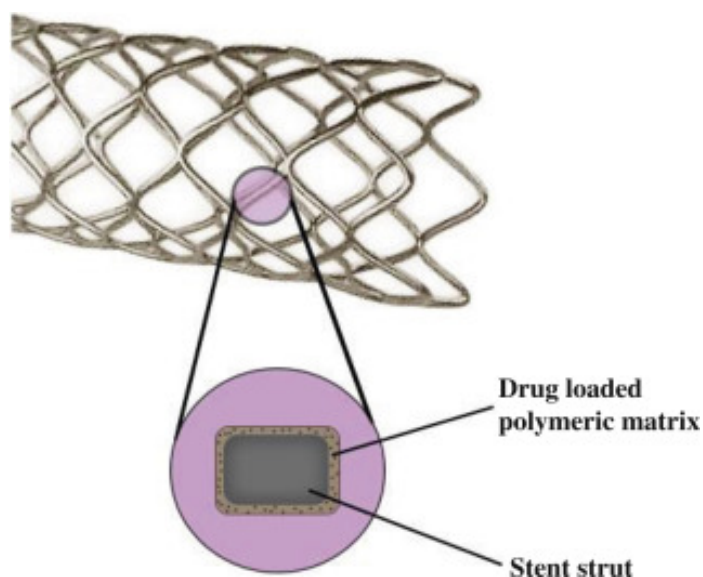
Današnje stentove možemo podijeliti u dvije velike grupe, a to su BMS (eng. bare-metal stent) i DES (eng. drug-eluting stent).

BMS, odnosno metalni stentovi, bili su prvi stentovi ikada dizajnirani. Prva generacija BMS-a uključivala je stentove napravljene od nehrđajućeg čelika 316L, dok su u drugoj generaciji BMS stentovi pravljene od legure kobalta i kroma. BMS stent smanjio je stope restenoze, odnosno ponovnog sužavanja žile, u usporedbi s običnom balon angioplastikom, no i dalje može doći do komplikacija. Jedna od češćih komplikacija je stvaranje krvnih ugrušaka u stentu, odnosno tromboza. Naime, prvih par tjedana dok je stent svježe postavljen, dolazi do direktnog kontakta krvi i metala, koji ako se ne kontrolira uzimanjem propisane terapije protiv ugrušaka može dovesti do stvaranja krvnih ugrušaka u stentu. Druga česta komplikacija je upravo restenoza, do koje dolazi ako krvna žila reagira na stent na način da krvno tkivo žile krene rasti preko stenta i tako s vremenom stent izgubi svoju ulogu. BMS stentovi se i dalje koriste, iako s različitim poboljšanim značajkama.



Slika 1.5: Primjer BMS stenta

Druga vrsta stenta je DES stent, razvijen oko 2002.godine s glavnim ciljem smanjenja stope restenoze. Radi se o metalnim stentovima koji postepeno otpuštaju lijek. Takvi stentovi, osim metalnog, imaju i polimerni dio koji sadrži lijek kojemu je uloga spriječiti pretjeran rast stanica unutarnjeg sloja krvne žile kako ne bi došlo do restenoze. Jedna od mana ovog stenta je što i dalje postoji rizik od tromboze. Naime, nakon što se premaz lijeka na površini stenta razgradi, ostaje metalna struktura u tijelu koja može izazvati upalne reakcije i dovesti do tromboze.

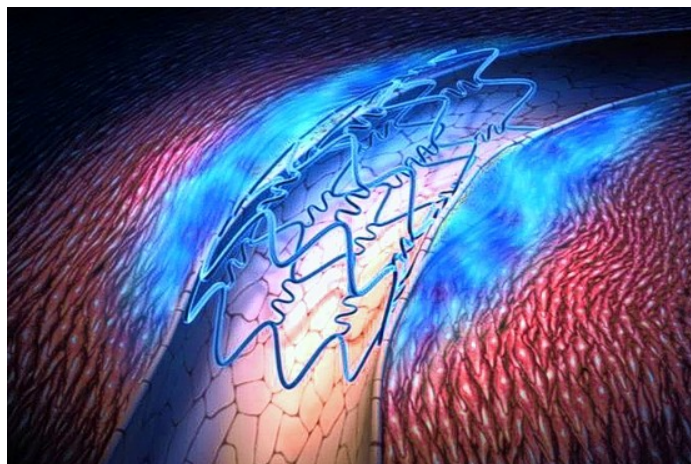


Slika 1.6: Struktura DES stenta

Osim ove dvije velike grupe stentova, treba spomenuti i biorazgradive stentove. Oni su zapravo podvrsta DES stentova, no njihova mrežica je biorazgradiva i tijelo je apsorbira nakon određenog vremena. No, ovi stentovi imaju nedostatke poput slabe mehaničke izdržljivosti i visoke elastičnosti.

### Cypher stent

Na kraju ovog poglavlja recimo još par stvari o stentu kojim se bavimo u nastavku rada. Cypher stent prvi je DES koji na američko tržište postavlja Cordis Corporation 2003. godine. Stent sadrži lijek sirolimus i njegova primarna uloga je spriječiti restenozu. Cypher se pravi od nehrđajućeg čelika 316L, a sastoji se od 8 zig-zag prstena, spojenih zavojitim šipkama. Debljina strukture stenta je  $1.4 \cdot 10^{-1} mm$ .



Slika 1.7: Cypher stent



Slika 1.8: Cypher stent



## Poglavlje 2

# Teorija elastičnosti

### 2.1 Osnovni pojmovi

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  označava ograničen, otvoren i povezan skup, a njegov zatvarač  $\bar{\Omega}$  nazivamo referentna konfiguracija. Ona reprezentira volumen prije deformacije koji nazivamo tijelo.

$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo deformacija ako je injektivna (osim možda na  $\partial\Omega$ ), dovoljno glatka i  $\det(\nabla\varphi(\mathbf{x})) > 0$ , za svaki  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

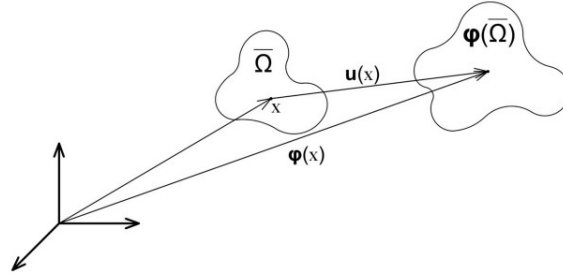
$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = (\partial_1\varphi(\mathbf{x}) \partial_2\varphi(\mathbf{x}) \partial_3\varphi(\mathbf{x}))$  je matrica deformacije. Zahtjev  $\det(\nabla\varphi(\mathbf{x})) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$  znači da vektori  $\partial_1\varphi(\mathbf{x}), \partial_2\varphi(\mathbf{x}), \partial_3\varphi(\mathbf{x})$  čine desnu bazu, odnosno da je  $\varphi$  lokalno invertibilno preslikavanje koje čuva orijentaciju. Između ostalog to znači da ne možemo komprimirati pozitivni volumen u 0.

Funkciju  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ , gdje je  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo pomak, odnosno vektor pomaka.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

označava gradijent deformacije, a  $\varphi(\bar{\Omega})$  deformiranu konfiguraciju. U nastavku rada koristit će se oznaka  $\mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x}) \in \varphi(\Omega)$ .





Slika 2.1: Referentna i deformirana konfiguracija

**Definicija 2.1.1.** Deformacija  $\varphi$  je kruta ako je  $\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega}$ .

Vrijedi naredni teorem.

**Teorem 2.1.2.**

$$\text{Deformacija je kruta} \iff \varphi = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (2.2)$$

$$\iff \nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{R} \quad (2.3)$$

$$\iff \nabla\varphi(\mathbf{x})^\top \nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{I}, \mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.4)$$

*Dokaz.* Pogledati u [2]. □

## 2.2 Mjera deformacije

Neka je dana kruta deformacija  $\varphi$ . Zbog (2.4) vrijedi  $\nabla\varphi(\mathbf{x})^\top \nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ , odnosno  $\nabla\varphi(\mathbf{x})^\top \nabla\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{I} = 0$ . Definiramo tenzor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\varphi(\mathbf{x})^\top \nabla\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}^\top + \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\top \nabla\mathbf{u}). \quad (2.5)$$

Zbog toga će nam on biti mjera krutosti deformacije.  $\mathbf{E}$  zovemo konačni tenzor deformacije, a

$$\mathbf{C} = \nabla\varphi^\top \nabla\varphi,$$

(desni) Cauchy-Greenov tenzor deformacije. Uočimo da vrijedi  $\mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$ .

Pomoću Teorema 2.1.2 lako dolazimo do sljedećih ekvivalencija:

$$\varphi \text{ je kruta deformacija} \iff \nabla\varphi(\mathbf{x}) = \text{const.} \ \& \ \mathbf{E} = 0.$$

Pojam krutosti analogno definiramo za pomak:

$$\mathbf{u} \text{ je kruti pomak} \iff \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{const.} \ \& \ \mathbf{E} = 0. \quad (2.6)$$

Kada je  $\nabla \mathbf{u}$  malen, onda je  $\|\nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}\|$  maleno u odnosu na  $\|\nabla \mathbf{u}\|$  pa možemo zanemariti član  $\nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}$  iz (2.5). Uvodimo infinitezimalni tenzor deformacije  $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ , dan sa

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u}). \quad (2.7)$$

**Definicija 2.2.1.**  $\mathbf{u}$  je infinitezimalni kruti pomak i pripadna deformacija se naziva infinitezimalna kruta deformacija ako je  $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{const.}$  &  $\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .

**Teorem 2.2.2.**  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  je infinitezimalni kruti pomak  $\iff \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top = \mathbf{0}$ .

Za proizvoljni infinitezimalni kruti pomak  $\mathbf{u}$  koristeći prethodni teorem, možemo zaključiti da je  $\nabla \mathbf{u}$  antisimetrična matrica. Konkretnije, stavimo da je  $\nabla \mathbf{u} =: A$ , gdje je  $A$  antisimetrična matrica.

Nadalje, znamo da je onda vektor pomaka oblika

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3.$$

Zbog njene antisimetričnosti, matricu  $A$  možemo zapisati u formatu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^\top$  nazivamo aksijalni vektor matrice  $A$  i za njega vrijedi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

U ovom slučaju, jer smo definirali  $A = \nabla \mathbf{u}$ , znamo da je vektor  $\mathbf{a}$  oblika:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{bmatrix}.$$

Time smo dokazali sljedeći korolar.

**Korolar 2.2.3.**  $\mathbf{u}$  je infinitezimalni kruti pomak  $\iff$  postoje  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  takvi da je  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \Omega$ .

## 2.3 Jednadžbe ravnoteže u deformiranoj i referentnoj konfiguraciji

$\mathbf{f}^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$  je (volumna) gustoća vanjske volumne sile, pa  $\int_P \mathbf{f}^\varphi d\mathbf{x}^\varphi$ , gdje je  $P \subset \Omega^\varphi$ , predstavlja vanjsku volumnu silu. Na sličan način definiramo  $\mathbf{g}^\varphi : \Gamma_1^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gdje je

$\Gamma_1^\varphi \subset \Gamma^\varphi = \partial\Omega^\varphi$  skup pozitivne mjere.  $\mathbf{g}^\varphi$  je (plošna) gustoća vanjske kontaktne sile.  $\int_A \mathbf{g}^\varphi da^\varphi$ , gdje je  $A \subset \Gamma_1^\varphi$ , predstavlja vanjsku kontaktnu silu.

**Aksiom 1** (Euler - Cauchy). *Postoji vektorsko polje  $\mathbf{t}^\varphi : \overline{\Omega^\varphi} \times \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , gdje je  $\mathbf{S}^2$  jedinična sfera u  $\mathbb{R}^3$ , tako da vrijedi:*

1.  $\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) = \mathbf{g}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi)$ ,  $\mathbf{x}^\varphi \in \Gamma_1^\varphi$ ,  $\mathbf{n}^\varphi$  je jedinična vanjska normala.

2. *Zakon ravnoteže:*

$\forall A^\varphi \subseteq \overline{\Omega^\varphi}$  otvoren i povezan skup vrijedi

$$\int_{\partial A^\varphi} \mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) da^\varphi + \int_{A^\varphi} \mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) d\mathbf{x}^\varphi = 0. \quad (2.8)$$

3. *Zakon momenta ravnoteže:*

$\forall A^\varphi \subseteq \overline{\Omega^\varphi}$  otvoren i povezan skup vrijedi

$$\int_{\partial A^\varphi} \mathbf{x}^\varphi \times \mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) da^\varphi + \int_{A^\varphi} \mathbf{x}^\varphi \times \mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) d\mathbf{x}^\varphi = 0. \quad (2.9)$$

**Napomena 2.3.1.**  $\mathbf{t}^\varphi$  iz prethodnog aksioma zove se Cauchyjev vektor naprezanja.

**Teorem 2.3.2** (Cauchy). *Neka su  $\mathbf{t}^\varphi : \overline{\Omega^\varphi} \times \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{f}^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Tada postoji  $\mathbf{T}^\varphi : \overline{\Omega^\varphi} \rightarrow \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$  koji zovemo Cauchyjev tenzor naprezanja, tako da vrijedi :*

$$\mathbf{t}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi, \mathbf{n}^\varphi) = \mathbf{T}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) \mathbf{n}^\varphi, \quad \mathbf{x}^\varphi \in \overline{\Omega^\varphi}, \mathbf{n}^\varphi \in \mathbf{S}^2. \quad (2.10)$$

*Dokaz.* Vidjeti [2] □

Koristeći prethodni teorem, zakon ravnoteže sada glasi:

$$\int_{\partial A^\varphi} \mathbf{T}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) \mathbf{n}^\varphi da^\varphi + \int_{A^\varphi} \mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) d\mathbf{x}^\varphi = 0. \quad (2.11)$$

Korištenjem teorema o divergenciji

$$\int_{\partial A} \mathbf{T} \mathbf{n} da = \int_A \operatorname{div} \mathbf{T} d\mathbf{x}, \quad (2.12)$$

te zbog proizvoljnosti domene dobivamo diferencijalni oblik zakona ravnoteže:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^\varphi + \mathbf{f}^\varphi = 0 \quad u \quad \Omega^\varphi. \quad (2.13)$$

Jednadžbu (2.13) još nazivamo i jednadžba ravnoteže u Eulerovoj formulaciji.

Koristeći zakon momenta ravnoteže i jednadžbu ravnoteže u Eulerovoj formulaciji, dolazimo do zaključka

$$(\mathbf{T}^\varphi)^\top = \mathbf{T}^\varphi \quad u \quad \Omega^\varphi. \quad (2.14)$$

U konačnici dolazimo do diferencijalne formulacije jednadžbe ravnoteže u deformiranoj konfiguraciji:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}^\varphi + \mathbf{f}^\varphi &= \mathbf{0} \quad u \quad \Omega^\varphi, \\ (\mathbf{T}^\varphi)^\top &= \mathbf{T}^\varphi \quad u \quad \Omega^\varphi, \\ \mathbf{T}^\varphi \mathbf{n}^\varphi &= \mathbf{g}^\varphi \quad na \quad \Gamma_1^\varphi. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Množenjem (2.15)<sub>1</sub> dovoljno glatkom test funkcijom  $\theta^\varphi$  za koju vrijedi  $\theta^\varphi|_{\Gamma_0^\varphi} = \mathbf{0}$ , gdje je  $\Gamma_0^\varphi = \partial\Omega^\varphi \setminus \Gamma_1^\varphi$ , dobivamo:

$$\int_{\partial\Omega^\varphi} \operatorname{div} \mathbf{T}^\varphi \cdot \theta^\varphi d\mathbf{x}^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} \mathbf{f}^\varphi \cdot \theta^\varphi d\mathbf{x}^\varphi = 0. \quad (2.16)$$

Korištenjem teorema o divergenciji (2.12) i činjenice:

$$\operatorname{div}(\mathbf{T}\theta) = (\operatorname{div} \mathbf{T}^\top) \cdot \theta + \mathbf{T}^\top : \nabla \theta, \quad (2.17)$$

gdje operator  $:$  predstavlja Frobeniusov produkt matrica, definiran kao:

$$A : B = \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}, \quad (2.18)$$

dolazimo do slabe, odnosno varijacijske formulacije jednadžbe ravnoteže u deformiranoj konfiguraciji:

$$\int_{\Omega^\varphi} \mathbf{T}^\varphi : \nabla^\varphi \theta^\varphi d\mathbf{x}^\varphi = \int_{\Gamma_1^\varphi} \mathbf{g}^\varphi \cdot \theta^\varphi da^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} \mathbf{f}^\varphi \cdot \theta^\varphi d\mathbf{x}^\varphi, \quad \theta^\varphi \quad t.d. \quad \theta^\varphi|_{\Gamma_0^\varphi} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

**Teorem 2.3.3. Rubna zadaća**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}^\varphi + \mathbf{f}^\varphi &= \mathbf{0} \quad u \quad \Omega^\varphi, \\ \mathbf{T}^\varphi \mathbf{n} &= \mathbf{g}^\varphi \quad na \quad \Gamma_1^\varphi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

formalno je ekvivalentna slaboj formulaciji (2.19)

*Dokaz.* Vidjeti [2] □

Vratimo se sada na referentnu konfiguraciju i iskažimo varijacijsku, odnosno slabu formulaciju jednadžbe gibanja:

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \theta d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \theta da + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \theta d\mathbf{x}, \quad t.d. \quad \theta \text{ dovoljno glatka i } \theta|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

gdje su:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) := (\det \nabla \varphi(\mathbf{x})) \mathbf{T}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi) \nabla \varphi(\mathbf{x})^{-\top}, \quad \mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x}) \in \Omega^\varphi, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) := (\det \nabla \varphi(\mathbf{x})) \mathbf{f}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi), \quad \mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x}) \in \Omega^\varphi, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \det \nabla \varphi(\mathbf{x}) \|\nabla \varphi(\mathbf{x})^{-\top} \mathbf{n}\| \mathbf{g}^\varphi(\mathbf{x}^\varphi), \quad \mathbf{x}^\varphi = \varphi(\mathbf{x}) \in \Gamma_1^\varphi. \quad (2.24)$$

$\mathbf{T}$  nazivamo 1. Piola-Kirchhoffov tenzor naprežanja. Za razliku od  $\mathbf{T}^\varphi$ ,  $\mathbf{T}$  nije simetričan, no vrijedi:

$$\nabla \varphi(\mathbf{x})(\mathbf{T}(\mathbf{x}))^\top = \mathbf{T}(\mathbf{x})(\nabla \varphi(\mathbf{x}))^\top, \quad (2.25)$$

odnosno ako definiramo tenzor

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (2.26)$$

za njega vrijedi da je simetričan. Tenzor  $\boldsymbol{\Sigma}$  nazivamo 2. Piola -Kirchhoffov tenzor naprežanja. Uočimo da iz (2.26) vrijedi

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \nabla \varphi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}). \quad (2.27)$$

Diferencijalna formulacija u referentnoj konfiguraciji glasi:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad u \quad \Omega, \quad (2.28)$$

$$\nabla \varphi(\mathbf{T})^\top = \mathbf{T}(\nabla \varphi)^\top \quad u \quad \Omega, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad na \quad \Gamma_1, \quad (2.30)$$

odnosno koristeći (2.27)

$$-\operatorname{div}(\nabla \varphi \boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{f} \quad u \quad \Omega,$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^\top = \boldsymbol{\Sigma} \quad u \quad \Omega,$$

$$\nabla \varphi \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad na \quad \Gamma_1.$$

Zapisano u terminima pomaka koristeći (2.1) dobivamo

$$-\operatorname{div}((\mathbf{I} + \nabla u) \boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{f} \quad u \quad \Omega,$$

$$(\mathbf{I} + \nabla u)(\mathbf{T})^\top = \mathbf{T}(\mathbf{I} + \nabla u)^\top \quad u \quad \Omega,$$

$$(\mathbf{I} + \nabla u) \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} = \mathbf{g} \quad na \quad \Gamma_1.$$

## 2.4 Teorija linearizirane elastičnosti

Pretpostavke su:

- Promatrani materijal je homogen i izotropan (ima jednaka elastična svojstva u svim smjerovima),
- Referentna konfiguracija je prirodna konfiguracija,
- $\varphi_D = id$  (funkcija koja zadaje Dirichletov rubni uvjet na  $\Gamma_0$ ),
- Sile su "dead load" (gustoće sila na referentnoj konfiguraciji ne ovise o deformaciji  $\varphi$ ).

Uz gornje pretpostavke, koristeći Teorem 3.6-2. iz [2], za 2. Piola-Kirchhoffov tenzor  $\Sigma(\mathbf{x})$  vrijedi

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \hat{\Sigma}(\mathbf{x}, \nabla\varphi(\mathbf{x})) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, \nabla\varphi(\mathbf{x})^\top \nabla\varphi(\mathbf{x})) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{C}) = \tilde{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{I} + 2\mathbf{E}). \quad (2.31)$$

$\hat{\Sigma}$  zovemo funkcijom odziva za  $\Sigma$ .

Stacionarna zadaća u terminima pomaka glasi

$$-\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\tilde{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}(\mathbf{u}))] = \mathbf{f} \quad \text{u} \quad \Omega, \quad (2.32)$$

$$(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\tilde{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{n} = \mathbf{g} \quad \text{na} \quad \Gamma_1, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{na} \quad \Gamma_0, \quad (2.34)$$

gdje je

$$\tilde{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) = \lambda(\operatorname{tr}\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|). \quad (2.35)$$

Označimo

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{v})\tilde{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}(\mathbf{v}))] \\ (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{v})\tilde{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}(\mathbf{v}))\mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

$\mathcal{A}$  zovemo operator nelinearne elastičnosti. Želimo ga aproksimirati u okolini  $\mathbf{0}$ . Znamo da je  $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  jer mu je referentna konfiguracija prirodna. Nadalje, pretpostavimo i da je diferencijabilan u Fréchetovom smislu i da vrijedi Taylorov razvoj

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) + \mathcal{A}'(\mathbf{0})\mathbf{v} + o(\|\mathbf{v}\|). \quad (2.37)$$

Želimo aproksimirati  $\mathcal{A}(\mathbf{v})$ , pa pogledajmo prvo  $\mathcal{A}(\mathbf{v}) - \mathcal{A}(\mathbf{0})$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{v}) - \mathbf{A}(\mathbf{0}) &= -\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{v})\tilde{\Sigma}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E}(\mathbf{v}))] \\ &= -\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{v})(\lambda\operatorname{tr}\mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{E}(\mathbf{v})\|))] \\ &= -\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{v})(\lambda\operatorname{tr}(e(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|))\mathbf{I} + 2\mu(e(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|)) + o(\|\mathbf{v}\|))] \\ &= -\operatorname{div}[(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{v})(\lambda\operatorname{tr}(e(\mathbf{v}))\mathbf{I} + 2\mu(e(\mathbf{v})) + o(\|\mathbf{v}\|))] \\ &= -\operatorname{div}(\lambda\operatorname{tr}(e(\mathbf{v}))\mathbf{I} + 2\mu(e(\mathbf{v}))) + o(\|\mathbf{v}\|), \\ \mathbf{B}(\mathbf{v}) - \mathbf{B}(\mathbf{0}) &= (\lambda\operatorname{tr}(e(\mathbf{v}))\mathbf{I} + 2\mu e(\mathbf{v}))\mathbf{n} + o(\|\mathbf{v}\|). \end{aligned}$$

Uz oznaku

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in \operatorname{Sym}(3), \quad (2.38)$$

dobivamo zadaću linearizirane elastičnosti u diferencijalnom obliku:

$$-\operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{f} \quad u \quad \Omega, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{g} \quad na \quad \Gamma_1, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad na \quad \Gamma_0, \quad (2.41)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad u \quad \Omega. \quad (2.42)$$

**Napomena 2.4.1.** (2.39), (2.40) dolaze od jednadžbe ravnoteže, (2.41) je Dirichletov rubni uvjet, a (2.42) je zakon ponašanja.

## 2.5 Slaba formulacija

Jednadžbu (2.39) množimo sa proizvoljnom dovoljno glatkom funkcijom  $\mathbf{v}$  koja zadovoljava (2.41) te dobivamo

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (2.43)$$

Koristeći (2.17) lijeva strana postaje:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &\stackrel{(2.12)}{=} \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, da \\ &\stackrel{(2.40)}{=} \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, da. \end{aligned}$$

Nadalje, jer je  $\mathbf{T}$  simetričan i zbog definicije  $\mathbf{e}(\mathbf{v})$ , slijedi da je

$$\mathbf{T} : \nabla\mathbf{v} = \mathbf{T} : \mathbf{e}(\mathbf{v}),$$

pa sada (2.43) postaje

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.44)$$

odnosno

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3); \mathbf{v}|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}\}. \quad (2.45)$$

Dakle, došli smo do zadatka linearizirane elastičnosti:

$$\text{Naći } \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}} \text{ t.d. } \int_{\Omega} \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da, \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}. \quad (2.46)$$

Ako lijevu stranu prethodne jednakosti označimo sa  $\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , a desnu sa  $\mathcal{L}(\mathbf{v})$ , zadatak (2.45) glasi:

$$\text{Naći } \mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}} \text{ t.d. } \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}. \quad (2.47)$$

Vidimo da  $\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  koji zadovoljava (2.39)-(2.42) ujedno zadovoljava i (2.47). Može se pokazati da vrijedi i obrat, ako pretpostavimo da je  $\mathbf{u}$  dovoljno glatko.

## 2.6 Problem čiste trakcije (eng. *pure traction problem*)

Uočimo kako u zadatku linearizirane elastičnosti (2.46) postoji neki dio granice  $\Gamma_0$  površine strogo veće od 0 na kojem smo zadavali Dirichletov rubni uvjet. To nam je u fizikalnom smislu značilo da je naše tijelo učvršćeno na tom dijelu. Problem čiste trakcije znači da je  $\Gamma_0 = \emptyset$ , odnosno  $\Gamma_1 = \partial\Omega$ . Fizikalno to znači da tijelo nije nigdje učvršćeno.

Zapišimo zadatak linearizirane elastičnosti na novom prostoru rješenja:

$$\text{Naći } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \text{ t.d. } \int_{\Omega} \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (2.48)$$

Za  $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , po Korolaru 2.2.3 slijedi da je  $\mathbf{e}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ , pa (2.48) postaje:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}) da, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \\ 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{g}) + \mathbf{g} \cdot \mathbf{b} da, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3, \\ &\Downarrow \\ 0 &= \mathbf{a} \cdot \left( \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{g} da \right), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \text{ \& } 0 = \mathbf{b} \cdot \left( \int_{\Omega} \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} da \right), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti vektora  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  dobivamo:

$$0 = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{g} da, \quad (2.49)$$

$$0 = \int_{\Omega} \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} da. \quad (2.50)$$

**Napomena 2.6.1.** (2.49) nam govori da ukupni vanjski moment mora biti 0, dok (2.50) govori da ukupna vanjska sila mora biti 0.

(2.49) i (2.50) su nužni uvjeti za egzistenciju rješenja ravnoteže.



Ako je  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  rješenje slabe formulacije, onda je i  $\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  također rješenje. Zaista,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}) &= \frac{1}{2}(\nabla(\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{u} + \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b})^\top) \\ &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}) + \nabla\mathbf{u}^\top + \nabla(\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b})^\top) \\ &= \mathbf{e}(\mathbf{u}) + \mathbf{e}(\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}) \\ &\stackrel{(2.2.3)}{=} \mathbf{e}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Dakle, imamo nejedinstvenost rješenja na  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  do na infinitezimalni kruti pomak.

**Napomena 2.6.2.** Za simulacije koje uključuju samo stent prirodno je stent modelirati zadaćom čiste trakcije jer bi bilo koji rubni uvjet Dirichletovog tipa na nekom dijelu granice pokvario simetrije koje prirodno postoje kod stenta.

## 2.7 Apstraktni rezultat egzistencije i jedinstvenosti

**Teorem 2.7.1.** Neka je  $\mathcal{V}$  Banachov prostor s normom  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidan linearan funkcional na  $\mathcal{V}$ , te  $\mathcal{B} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna, bilinearna forma koja je  $\mathcal{V}$ -eliptična, tj.

$$\exists \beta > 0 \text{ takav da } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ vrijedi } \mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \beta \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}^2.$$

Tada zadaća

$$\text{Naći } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ t.d. } \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

ima jedinstveno rješenje.

*Dokaz.* Pogledati u [1]. □

**Napomena 2.7.2.** Ako je bilinearna forma iz prethodnog teorema simetrična, onda rješenje koje nam daje prethodni teorem je ujedno i jedinstveno rješenje minimizacijske zadaće:

$$\begin{aligned} \text{Naći } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ t.d. } \mathcal{J}(\mathbf{u}) &= \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \mathcal{J}(\mathbf{v}), \text{ gdje je} \\ \mathcal{J} : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \mathcal{L}(\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{2.51}$$

**Napomena 2.7.3.** Teorem 2.7.1 uz prethodnu napomenu zove se Lax-Milgramova lema.

## 2.8 Egzistencija i jedinstvenost rješenja *pure traction* problema

Pokazali smo da na  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  imamo nejedinstvenost rješenja problema čiste trakcije do na infinitezimalni kruti pomak. Zato označimo s

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}, \quad (2.52)$$

prostor infinitezimalnih krutih pomaka i definiramo

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b} \rangle_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 0, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3\}, \quad (2.53)$$

s pripadajućom normom

$$\|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 := \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2, \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}.$$

Pokušajmo pomoću Lax-Milgramove leme, tj. Teorema 2.7.1 pokazati egzistenciju i jedinstvenost rješenja zadatke (2.48). Uzmimo proizvoljnu  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}}$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b} \rangle_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}, \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{b}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti od  $\mathbf{a}$ , uzmimo  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Tada dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{x}, \\ &= \mathbf{b} \cdot \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti od  $\mathbf{b}$  dobivamo

$$\mathbf{0} = \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (2.54)$$

Nadalje, ako uzmemo  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{u}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Opet, zbog proizvoljnosti od  $\mathbf{a}$  dolazimo do zaključka

$$\mathbf{0} = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (2.55)$$

Pokazali smo

$$\tilde{\mathcal{V}} \subseteq \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \& \ \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{u} d\mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

a druga inkluzija se lako provjeri. Dakle, vrijedi

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \& \ \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{u} d\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad (2.56)$$

Provjerimo vrijede li pretpostavke Lax-Milgramove leme:

- $\tilde{\mathcal{V}}$  Banachov prostor

$(\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3), \|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2)$  je Soboljevljev prostor pa je Banachov. Pokažimo da je  $\tilde{\mathcal{V}}$  zatvoren potprostor od  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , pa po [4] vrijedi da je i  $\tilde{\mathcal{V}}$  Banachov. Da je  $\tilde{\mathcal{V}}$  potprostor od  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  je trivijalno, pokažimo zatvorenost. Definirajmo operator  $L : \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^2$  sa

$$L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{u} d\mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Kako je  $\text{Ker}(L) = L^{-1}\{\mathbf{0}\} = \tilde{\mathcal{V}}$ , dovoljno je pokazati da je  $L$  neprekidan operator kako bi  $\tilde{\mathcal{V}}$  bio zatvoren.

$$|L(\mathbf{u})| = \left| \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{u} d\mathbf{x} \end{bmatrix} \right|,$$

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{u} d\mathbf{x} \right| \leq \|\mathbf{u}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},$$

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{u} d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\Omega} \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\| d\mathbf{x} \leq C\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Dakle,  $|L(\mathbf{u})| \leq (1 + C)\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ , čime smo pokazali neprekidnost operatora  $L$ , pa samim time i zatvorenost od  $\tilde{\mathcal{V}}$ .

## 2.8. EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST RJEŠENJA PURE TRACTION PROBLEMA

- $\mathcal{L}$

Definirali smo  $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da$ ,  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ .

Linearnost je očita. Pokažimo neprekidnost linearnog funkcionala, koristeći redom nejednakost trokuta, Cauchy-Schwarz-Bunjakovski nejednakost te teorem o tragu ([2]):

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da \right|, \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da \right|, \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}, \\ &\leq \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \\ &= (\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

- $\mathcal{B}$

Definirali smo  $\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ .

Ovdje je netrivialno pokazati da je forma neprekidna i  $\tilde{\mathcal{V}}$ -eliptična. Pokažimo prvo neprekidnost.

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \right|, \\ &\stackrel{(2.38)}{=} \left| \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \mathbf{I} : \mathbf{e}(\mathbf{v}) + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \right|, \\ &= \left| \int_{\Omega} \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u})) \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v})) + 2\mu \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \right|, \\ &\leq |\lambda| \cdot \|\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u}))\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \|\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{v}))\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\mu \|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Jer je

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u}))^2 &= (\mathbf{e}(\mathbf{u})_{11} + \mathbf{e}(\mathbf{u})_{22} + \mathbf{e}(\mathbf{u})_{33})^2, \\ &\leq 3(\mathbf{e}(\mathbf{u})_{11}^2 + \mathbf{e}(\mathbf{u})_{22}^2 + \mathbf{e}(\mathbf{u})_{33}^2), \\ &\leq 3\mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

integriranjem po  $\Omega$  i korjenovanjem dobivamo

$$\|\operatorname{tr}(\mathbf{e}(\mathbf{u}))\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \sqrt{3} \|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.57)$$

Sada imamo

$$|\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (\sqrt{3}|\lambda| + 2\mu) \cdot \|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.58)$$

Nadalje, iz

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}) &= \mathbf{e}(\mathbf{u})_{11}^2 + \mathbf{e}(\mathbf{u})_{22}^2 + \mathbf{e}(\mathbf{u})_{33}^2 + 2\mathbf{e}(\mathbf{u})_{12}^2 + 2\mathbf{e}(\mathbf{u})_{13}^2 + 2\mathbf{e}(\mathbf{u})_{23}^2, \\ &= (\partial_1 \mathbf{u}_1)^2 + (\partial_2 \mathbf{u}_2)^2 + (\partial_3 \mathbf{u}_3)^2 + \frac{1}{2}((\partial_1 \mathbf{u}_2 + \partial_2 \mathbf{u}_1)^2 + (\partial_1 \mathbf{u}_3 + \partial_3 \mathbf{u}_1)^2 + (\partial_2 \mathbf{u}_3 + \partial_3 \mathbf{u}_2)^2), \\ &\leq (\partial_1 \mathbf{u}_1)^2 + (\partial_2 \mathbf{u}_2)^2 + (\partial_3 \mathbf{u}_3)^2 + \\ &\quad \frac{1}{2}(2(\partial_1 \mathbf{u}_2)^2 + 2(\partial_2 \mathbf{u}_1)^2 + 2(\partial_1 \mathbf{u}_3)^2 + 2(\partial_3 \mathbf{u}_1)^2 + 2(\partial_2 \mathbf{u}_3)^2 + 2(\partial_3 \mathbf{u}_2)^2), \\ &= \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}, \end{aligned}$$

integriranjem i korjenovanjem dobivamo

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \quad (2.59)$$

Sada (2.58) postaje

$$|\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (\sqrt{3}|\lambda| + 2\mu) \cdot \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq (\sqrt{3}|\lambda| + 2\mu) \cdot \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \cdot \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (2.60)$$

Da bi pokazali eliptičnost, prvo koristimo sljedeću lemu.

**Lema 2.8.1.** *Tenzor  $C$ , definiran s  $C\mathbf{e} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} \in \text{Sym}(3)$ , je pozitivno definitan tenzor.*

*Dokaz.* Pogledati u [2]. □

Uočimo da je sada

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} C\mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ &\stackrel{(2.8.1)}{\geq} \int_{\Omega} \beta_C \mathbf{e}(\mathbf{v}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ &= \beta_C \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Sada vidimo da je za  $\tilde{\mathcal{V}}$ -eliptičnost dovoljno pokazati da postoji  $C > 0$  t.d.

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 \geq C \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 = C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}.$$

Kako bismo pokazali ovu nejednakost, koristimo sljedeća dva teorema.

## 2.8. EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST RJEŠENJA PURE TRACTION PROBLEMA

**Teorem 2.8.2** (Kornova nejednakost 1). *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren, povezan skup s Lipschitzovim rubom. Tada postoji konstanta  $C > 0$  takva da vrijedi*

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (2.61)$$

*Dokaz.* [2] □

Između ostaloga, u dokazu teorema pokazuje se da je preslikavanje

$$\mathbf{v} \mapsto (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

norma. Označimo ju s

$$\|\mathbf{v}\|_* = (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (2.62)$$

**Teorem 2.8.3** (Kornova nejednakost 2). *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren, povezan skup s Lipschitzovim rubom. Tada postoje konstante  $C_1, C_2 > 0$  takve da vrijedi*

$$C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C_2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}, \quad \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}},$$

*odnosno  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}$ ,  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$  je norma ekvivalentna normi  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}^2$ .*

*Dokaz.* Prvo dokažimo da je preslikavanje  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}$ ,  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$  zaista norma na  $\tilde{\mathcal{V}}$ .

Pozitivnost, pozitivna homogenost, subaditivnost (nejednakost trokuta) trivijalno vrijede. Pokažimo strogost norme, tj.  $\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Ako je  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , vrijedi da je  $\nabla \mathbf{v} = 0$ , pa samim time i  $\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 0$ . Ako je  $\|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 0$ , slijedi  $\mathbf{e}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$  gotovo svuda, dakle  $\mathbf{v}$  pripada prostoru infinitezimalnih krutih pomaka, tj. prostoru  $\mathbf{P}$ . No pretpostavka je da je  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ , tj. da je okomit na infinitezimalne krute pomake. Dakle, mora biti  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Pokažimo da vrijedi tvrdnja

$$(\exists C_1 > 0) \quad C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}, \quad \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}. \quad (2.63)$$

Za  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  tvrdnja vrijedi. U slučaju da je  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , pretpostavimo suprotno, odnosno

$$(\forall C_1 > 0)(\exists \mathbf{w}_{C_1} \in \tilde{\mathcal{V}}) \quad C_1 \|\mathbf{w}_{C_1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} > \|\mathbf{e}(\mathbf{w}_{C_1})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}. \quad (2.64)$$

Podijelimo tu nejednakost sa  $\|\mathbf{w}_{C_1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}$  pa dobivamo

$$(\forall C_1 > 0)(\exists \mathbf{v}_{C_1} \in \tilde{\mathcal{V}})(\|\mathbf{v}_{C_1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1) \quad C_1 > \|\mathbf{e}(\mathbf{v}_{C_1})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}. \quad (2.65)$$

Uzmimo niz  $C_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , za koji zbog (2.65) postoji odgovarajući niz  $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{V}}$  t.d.  $\|\mathbf{v}_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1$  i  $\frac{1}{n} > \|\mathbf{e}(\mathbf{v}_n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Koristeći Rellich–Kondrachov teorem o kompaktnosti ulaganja prostora  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  u  $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  zaključujemo da je  $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompaktan u  $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Dakle postoji podniz  $(\mathbf{v}_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$  koji je konvergentan u  $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , odnosno postoji  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$  tako da

$$\mathbf{v}_{p_n} \longrightarrow \mathbf{v}. \quad (2.66)$$

Zbog izbora niza  $(C_n)_n$ , znamo da vrijedi i

$$\mathbf{e}(\mathbf{v}_{p_n}) \longrightarrow \mathbf{0} \text{ u } \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (2.67)$$

Ove dvije konvergencije nam daju da je  $(\mathbf{v}_{p_n})_n$  Cauchyjev niz u normi  $\|\cdot\|_*$  zbog definicije norme (2.62). Nadalje, koristeći Teorem 2.8.2 zaključujemo da je  $(\mathbf{v}_{p_n})_n$  Cauchyjev i u normi  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}$ . Zbog potpunosti od  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , slijedi da je  $(\mathbf{v}_{p_n})_n$  konvergentan, tj. postoji  $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$  t.d.  $\mathbf{v}_{p_n} \longrightarrow \tilde{\mathbf{v}}$  u  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , pa posebno onda konvergira i u  $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . No, zbog (2.66) i jedinstvenosti limesa mora biti  $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}$ .

Dakle,  $\mathbf{v}_{p_n} \longrightarrow \mathbf{v}$  u  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , pa po definiciji od  $\mathbf{e}$  zaključujemo  $\mathbf{e}(\mathbf{v}_{p_n}) \longrightarrow \mathbf{e}(\mathbf{v})$  u  $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Sada zbog (2.67) i jedinstvenosti limesa zaključujemo  $\mathbf{e}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ . Dakle, dobili smo da je  $\mathbf{v}$  infinitezimalni kruti pomak, odnosno  $\mathbf{v} \in \mathbf{P}$ . S druge strane, znamo da je  $(\mathbf{v}_{p_n})_n \subseteq \tilde{\mathcal{V}}$  i da je  $\tilde{\mathcal{V}}$  zatvoren, pa mora biti  $\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ , pa opet zaključujemo  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Sada imamo  $\mathbf{v}_{p_n} \longrightarrow \mathbf{0}$  u  $\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , odnosno  $\|\mathbf{v}_{p_n} - \mathbf{0}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)} = 1 \longrightarrow \mathbf{0}$ , dakle došli smo do kontradikcije s (2.64).

Druga nejednakost koju tvrdimo u teoremu, tj.

$$(\exists C_2 > 0) \quad \|\mathbf{e}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)} \leq C_2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)}, \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}, \quad (2.68)$$

je zapravo već pokazana pri dokazivanju neprekidnosti forme  $\mathcal{B}$  (2.59).  $\square$

Dakle, pretpostavke Lax-Milgramove leme su zadovoljene. Sumiramo rezultat u narednom teoremu.

**Teorem 2.8.4** (Egzistencija i jedinstvenost rješenja *pure traction* zadaće). *Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren, povezan skup s Lipschitzovim rubom,  $\lambda, \mu > 0$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Tada postoji jedinstven  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}}$  t.d.*

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}},$$

gdje su

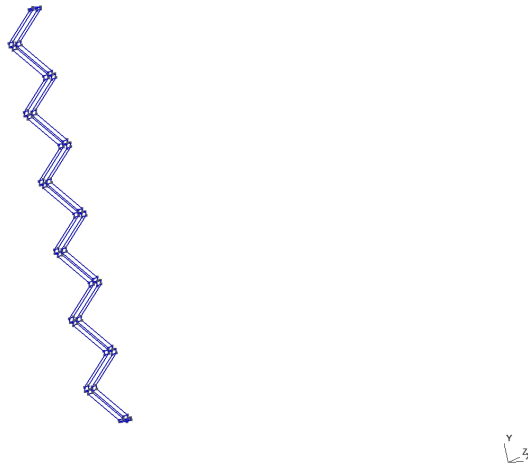
$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\ \mathcal{L}(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

## Poglavlje 3

# Konstrukcija 3D modela Cypher stenta

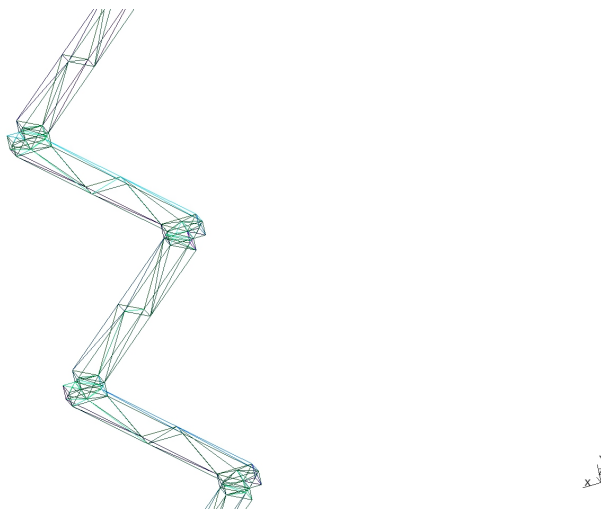
### 3.1 Vizualizacija Cypher stenta

Geometrija Cypher stenta preuzeta je iz [3]. Geometrija je implementirana u programima Gmsh i FreeFem++. Gmsh je generator mreže konačnih elemenata, a FreeFem++ je programski jezik i softver usmjeren na rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi metodom konačnih elemenata. U ovom radu, Gmsh je korišten za konstrukciju štapova koji čine zig-zag prstene od kojih se Cypher stent sastoji (Slika 3.1, Slika 3.2), kao i za konstrukciju zavojitih dijelova stenta (Slika 3.3, Slika 3.4).

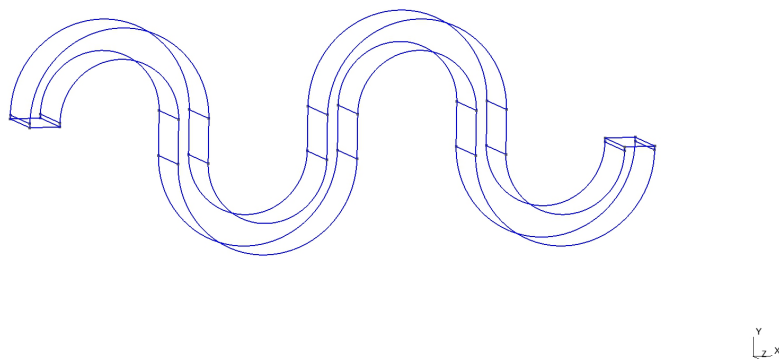


Slika 3.1: Konstrukcija štapa koji čini stent u Gmsh-u

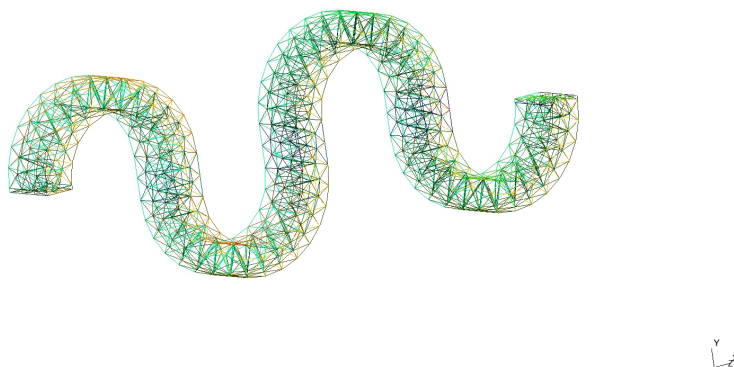




Slika 3.2: Mreža konačnih elemenata na štapu

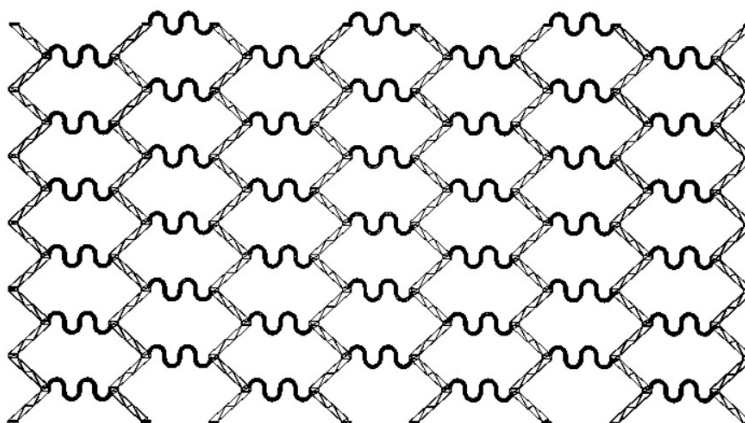


Slika 3.3: Konstrukcija jednog zavojitog dijela koji čini stent u Gmsh-u

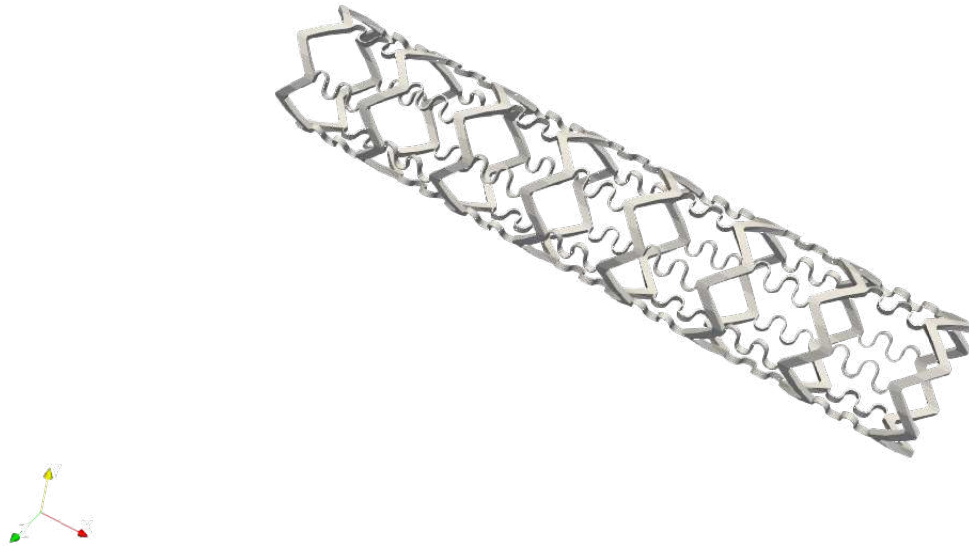


Slika 3.4: Mreža konačnih elemenata na zavojitom dijelu

Nakon što imamo osnovne dijelove koji čine Cypher stent, u FreeFem++-u ih povežemo i pravimo rešetku (Slika 3.5). Nakon toga "zamotamo" rešetku oko x osi korištenjem preslikavanja koje uvodi cilindrične koordinate, te dobivamo 3D geometriju stenta, koji zatim centriramo po x, y i z osi (Slika 3.6).



Slika 3.5: Rešetka



Slika 3.6: Konačna geometrija Cypher stenta

### 3.2 Zadaća linearizirane elastičnosti na Cypher stentu

Važno je uočiti kako se u slučaju stenta radi o problemu čiste trakcije, odnosno stent nije nigdje učvršćen, na njega djeluje samo sila tlaka. Sada možemo zapisati zadaću linearizirane elastičnosti u diferencijalnom obliku ((2.39)-(2.42)):

$$-\operatorname{div}\mathbf{T} = \mathbf{f} \quad u \quad \Omega, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{g} \quad na \quad \Gamma_1, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{e}(\mathbf{u}) \quad u \quad \Omega, \quad (3.3)$$

gdje je

$$\mathbf{C}\mathbf{e} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \in \operatorname{Sym}(3), \quad (3.4)$$

a  $\Gamma_1 = \partial\Omega$  površina na kojoj sila tlaka, odnosno sila  $\mathbf{g}$  djeluje. Konstante  $\lambda$  i  $\mu$  određuju se iz Youngovog modula elastičnosti  $E$ , koji reprezentira krutost elastičnog tijela, te iz Poissonovog omjera  $\nu$ , koji reprezentira kompresibilnost elastičnog tijela.

Pokazali smo da slaba formulacija ove zadaće glasi:

Naći  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}}$  t.d.

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}. \quad (3.5)$$

Ova formulacija, kao i potrebni koeficijenti  $\lambda$ ,  $\mu$  i sila  $\mathbf{g}$  implementirani su u [3] u FreeFem++-u. Za volumnu silu uzimamo  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ , dok je sila tlaka koja je originalno predstavljala silu kojom žila pritišće stent zamijenjena silom tlaka koja djeluje iznutra na unutarnji dio plašta stenta.

```

1 //IMPLEMENTACIJA PURE TRACTION ZADACE
2
3 solve zadaca(u1, u2, u3, v1, v2, v3) =
4
5 int3d(stent) ( lambda*divergencija(u1,u2,u3)*divergencija(v1,v2,v3)
6               +2*mi*( dx(u1)*dx(v1) + dy(u2)*dy(v2) + dz(u3)*dz(v3) )
7               +(mi/2)*( (dy(u1)+dx(u2))*(dy(v1)+dx(v2))
8                           +(dz(u1)+dx(u3))*(dz(v1)+dx(v3))
9                           +(dz(u2)+dy(u3))*(dz(v2)+dy(v3))
10                      )
11           )
12 -int2d(stent,1)( press*(N.y*v2 + N.z*v3) );

```



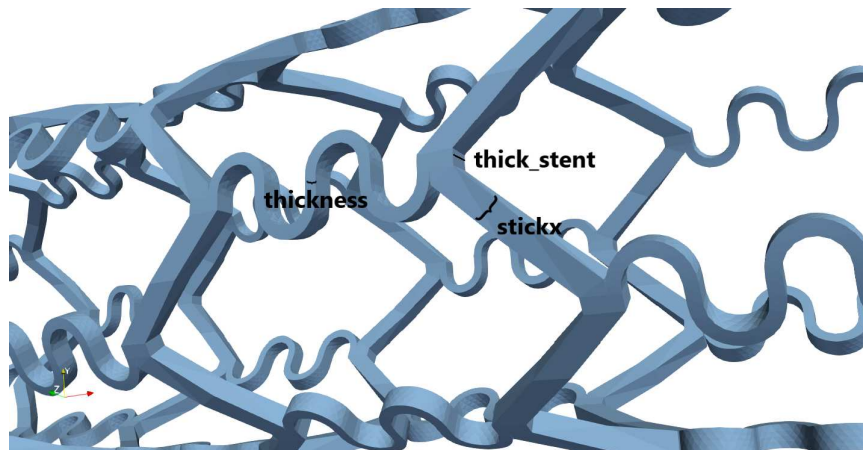
# Poglavlje 4

## Analiza i kalibriranje

### 4.1 Opis problema

Sada kada smo definirali geometriju Cypher stenta i implementirali *pure traction* zadaću, opišimo detaljnije problem.

Ideja ovog rada je minimizirati prilagodljivost, podatljivost(eng. *compliance*) stenta u ovisnosti o parametrima *thickness* i *stickx*, gdje *thickness* predstavlja debljinu zavojitih dijelova stenta, a *stickx* predstavlja debljinu jednog štapa u zig-zag dijelu stenta po x-osi.



Slika 4.1: *thickness* i *stickx* parametri

*Compliance* je svojstvo tijela da se prilagodi elastičnim promjenama ili promjeni volumena pod utjecajem vanjske sile. Ono je suprotno svojstvu krutosti, odnosno što je podatljivost manja, tijelo je kruće. Kako želimo dobiti radikalno najkrući mogući stent, minimizirat ćemo *compliance*. Minimizacija podatljivosti implicirala bi da uzmemo što deblje bridove,

pa optimizacijski problem nije dobro postavljen. Stoga postavljamo dodatni uvjet da je ukupni volumen stenta konstantan, a variramo vrijednosti parametara *thickness* i *stickx*.

Po dostupnim mjerenjima, *thickness* iznosi trećinu debljine stenta u smjeru z-osi, odnosno trećinu parametra  $thick\_stent = 1.4 \cdot 10^{-4}$ , dakle  $4.67 \cdot 10^{-5}$ , pa ćemo varirati vrijednosti *thickness* parametra od  $3 \cdot 10^{-5}$  do  $7 \cdot 10^{-5}$ . Nakon što odredimo *thickness*, vrijednost parametra *stickx* računamo koristeći činjenicu da je volumen stenta konstanta.

Ovisno o ta dva parametra promatrat ćemo podatljivost stenta u oznaci *C*, gdje je

$$C(thickness, stickx) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}(thickness, stickx) da, \quad (4.1)$$

a  $\mathbf{u}(thickness, stickx)$  je rješenje varijacijske formulacije (3.5) za određene parametre *thickness* i *stickx*.

Dakle, zadaća je rješavana na način da se iterirajući po vrijednostima parametra *thickness* odredi *stickx* kako bi se konstruirali osnovni dijelovi stenta i mreža konačnih elemenata u Gmsh-u, zatim se u FreeFem++-u svi dijelovi stenta spajaju u stent i nakon toga rješava slaba formulacija.

**Napomena 4.1.1.** *Compliance također definiramo i za krvne žile. Konkretno za arterije, compliance je definiran kao promjena volumena arterijske krvi po promjeni u arterijskom krvnom tlaku. Odnosno, što krvna žila ima veći compliance, to se više može proširiti kako bi primila krv bez povećanja otpora ili krvnog tlaka. Zanimljiva činjenica je da je compliance kod vena oko 30 puta veći nego kod arterija. Iz svega navedenog, vidimo da ima smisla promatrati compliance i za stent, no kod stenta ne želimo maksimizirati compliance, jer bi tako dobili stent koji ne može podnijeti silu žile koja na njega djeluje.*

## 4.2 Optimizacija parametra *thickness*

Riješimo *pure traction* problem za vrijednosti parametra *thickness* u intervalu od  $3 \cdot 10^{-5}$  do  $7 \cdot 10^{-5}$  s 50 točaka diskretizacije i opcijama mreže

```
1 opcije_stapovi = 'geo -3 -format mesh -clmin 9e-5 -clmax 1e-4';
2 opcije_sinus = 'geo -3 -format mesh -clmin 3e-5 -clmax 4e-5';
```

gdje vrijednosti nakon *-clmin* označavaju minimalnu veličinu elemenata mreže, a vrijednosti nakon *-clmax* označavaju maksimalnu veličinu elemenata mreže kod štapova i kod zavojitih dijelova stenta. Napomenimo kako su ovo "najfinije" opcije mreže za koje je u FreeFem++-u varijacijska zadaća rješiva, zbog ograničenja na rješavač *umfpack* linearnog sustava.

Pogledajmo kako izgleda stent nakon što sila tlaka koju smo zadali djeluje na njega.

Nedeformirani stent

Deformirani stent



Slika 4.2: Usporedba deformiranog i nedeformiranog stenta u xy-ravnini

Nedeformirani stent

Deformirani stent



Slika 4.3: Usporedba deformiranog i nedeformiranog stenta u xz-ravnini



Nedeformirani stent



Deformirani stent



Slika 4.4: Usporedba deformiranog i nedeformiranog stenta u yz-ravnini

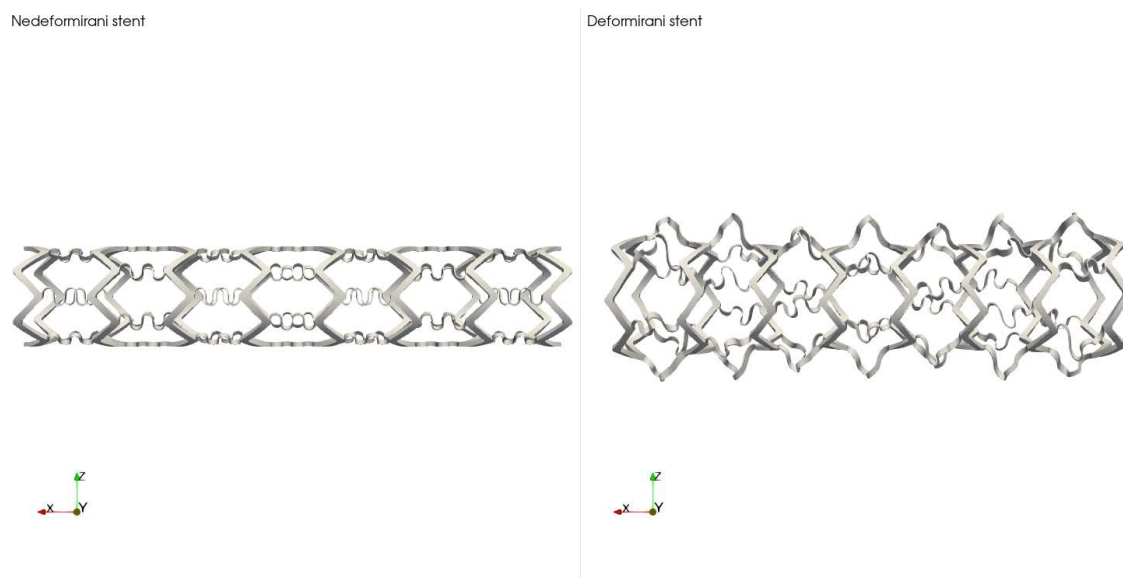
Nedeformirani stent



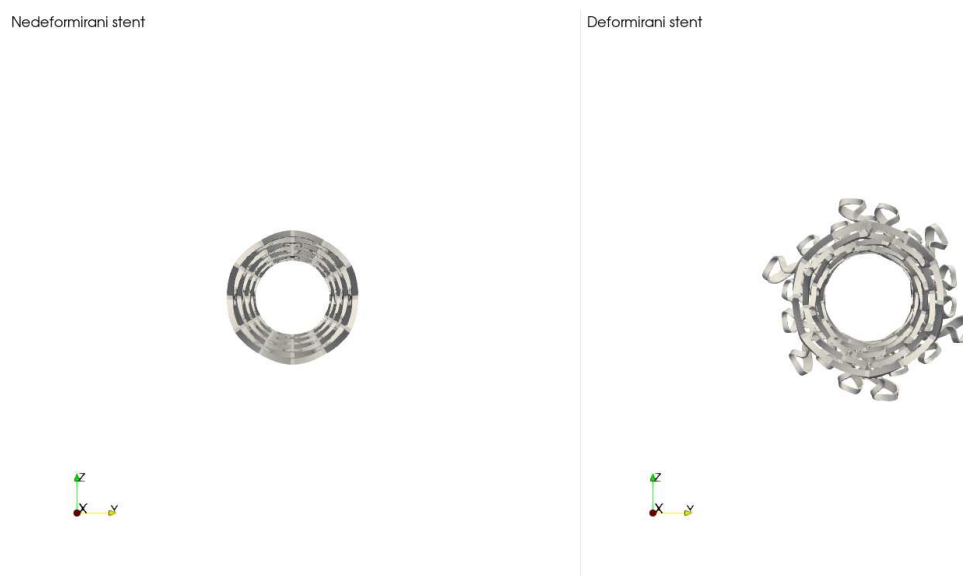
Deformirani stent



Slika 4.5: Usporedba deformiranog i nedeformiranog stenta u xy-ravnini, sila tlaka povećana 5 puta



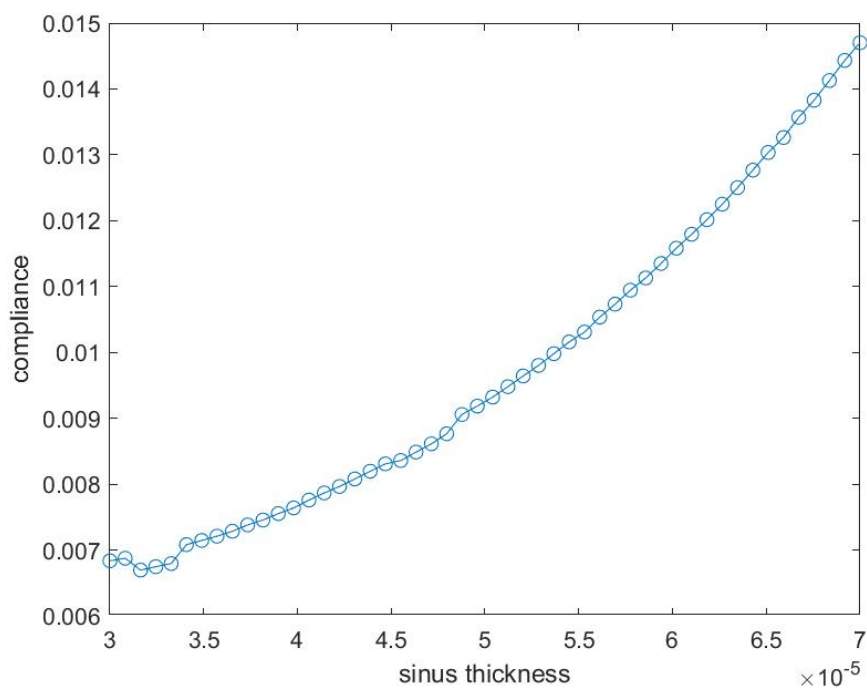
Slika 4.6: Usporedba deformiranog i nedeformiranog stenta u xz-ravnini, sila tlaka povećana 5 puta



Slika 4.7: Usporedba deformiranog i nedeformiranog stenta u yz-ravnini, sila tlaka povećana 5 puta

Promotrimo i sljedeće grafove koji prikazuju ovisnost:

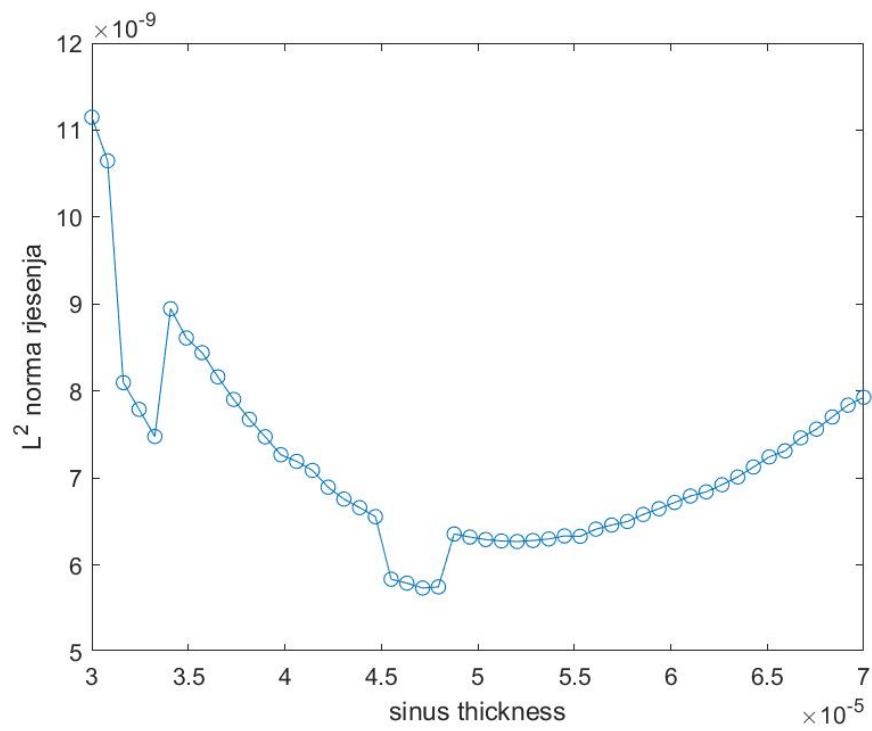
- Parametra *compliance* o parametru *thickness*



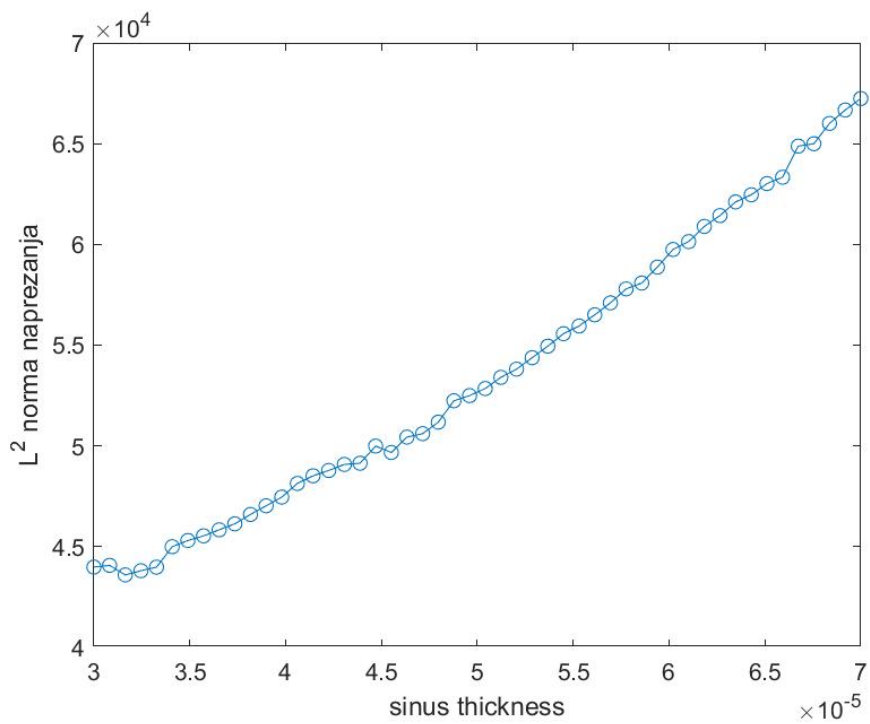
Slika 4.8: *Compliance* i *thickness*

Primjećujemo kako je ponašanje *compliance*-a proporcionalno sa vrijednostima parametra *thickness*.

- $L^2$  norme rješenja o parametru *thickness*

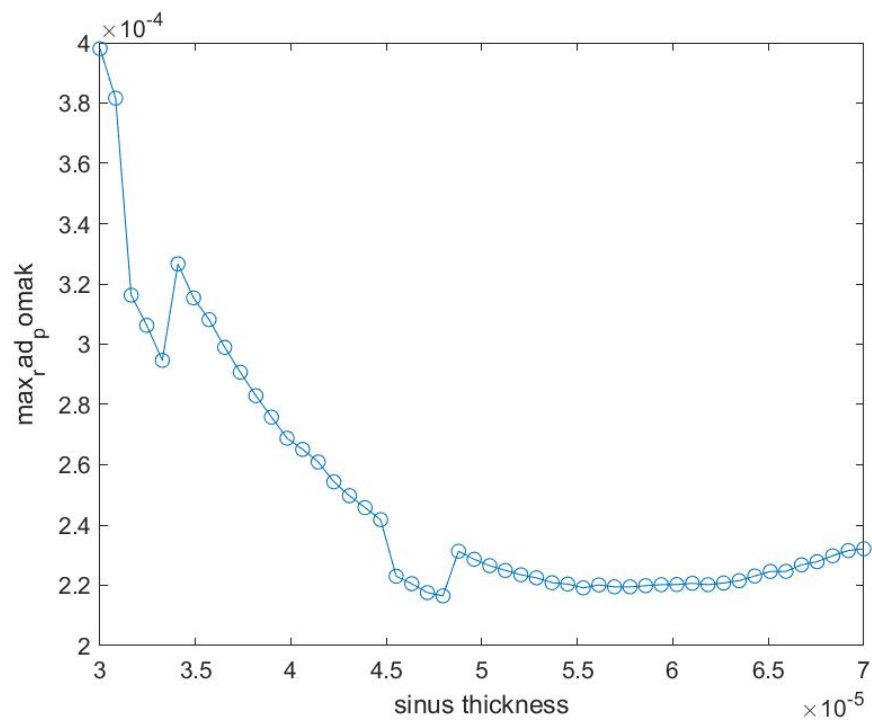
Slika 4.9:  $L^2$  norma rješenja i *thickness*

- $L^2$  norme naprezanja o parametru *thickness*

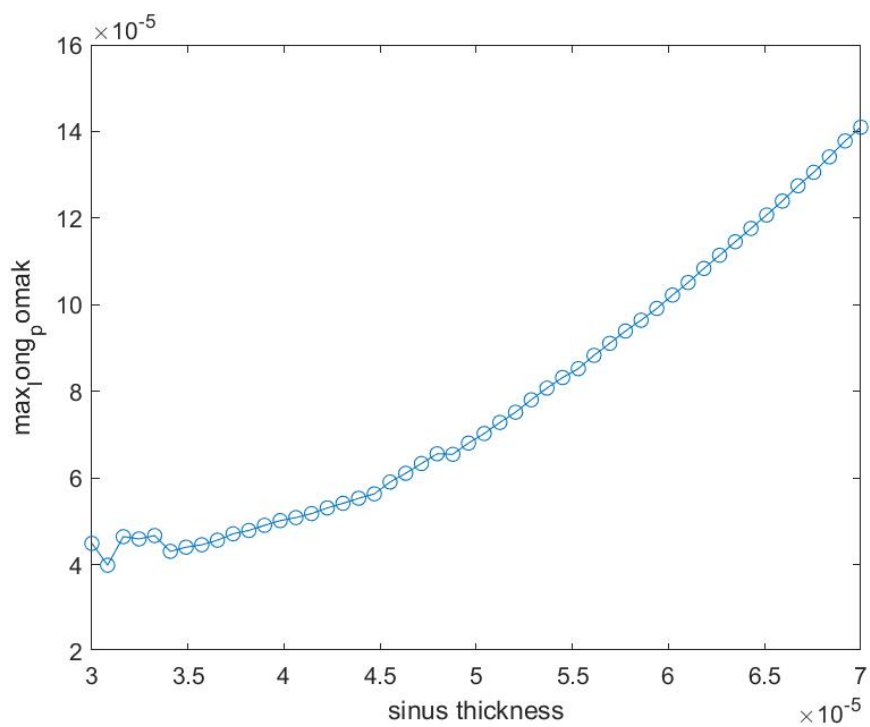


Slika 4.10:  $L^2$  norma naprezanja i *thickness*

- Maksimalnog radijalnog pomaka o parametru *thickness*

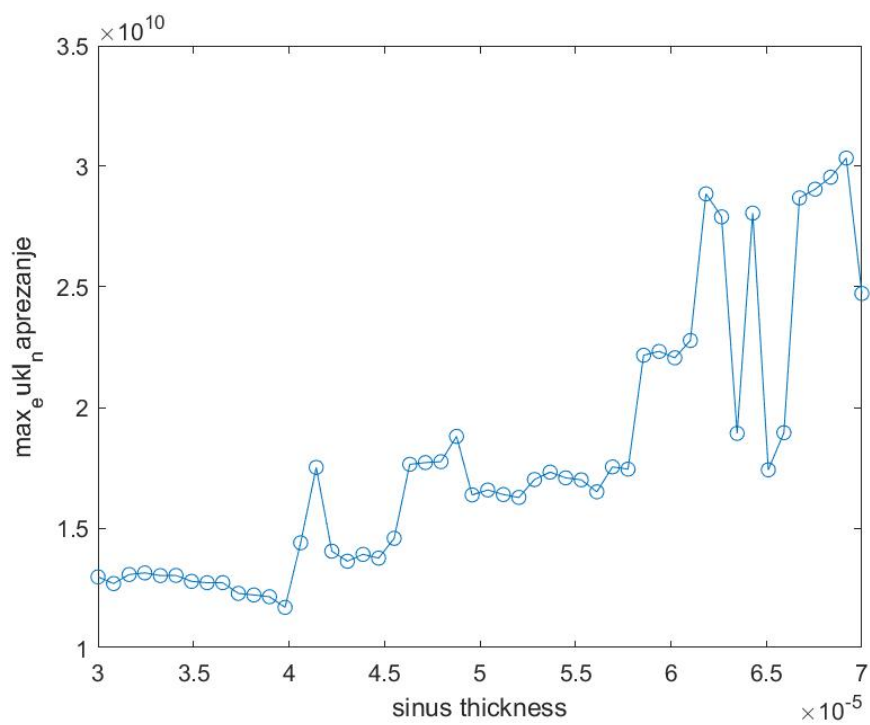
Slika 4.11: Maksimalni radialni pomak rješenja i *thickness*

- Maksimalnog longitudinalnog pomaka o parametru *thickness*



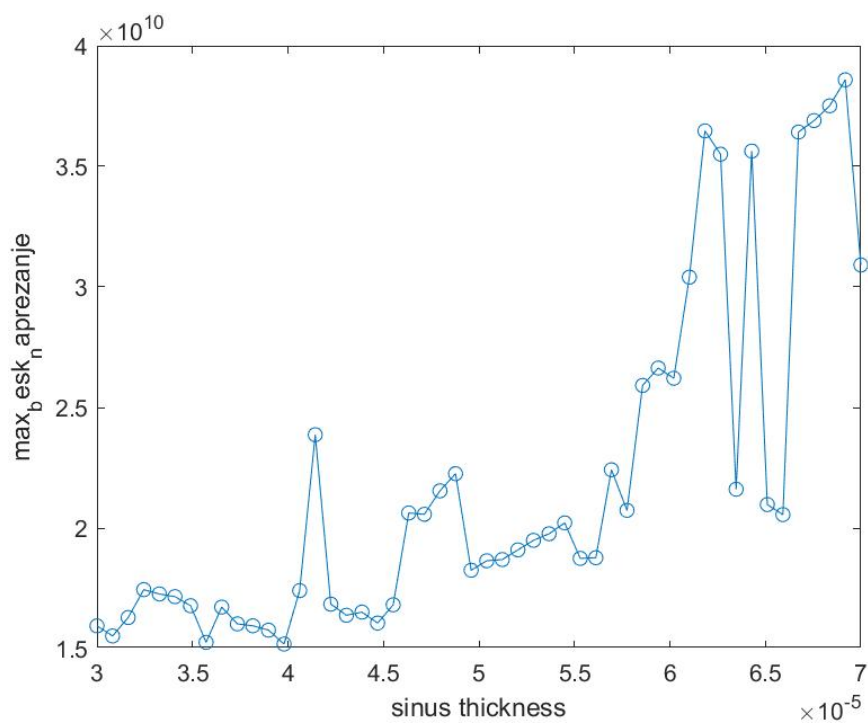
Slika 4.12: Maksimalni longitudinalni pomak rješenja i *thickness*

- Maksimalne euklidske norme naprezanja o parametru *thickness*

Slika 4.13: Maksimalna euklidska norma naprežanja i *thickness*

- Maksimalne sup-norme naprežanja o parametru *thickness*

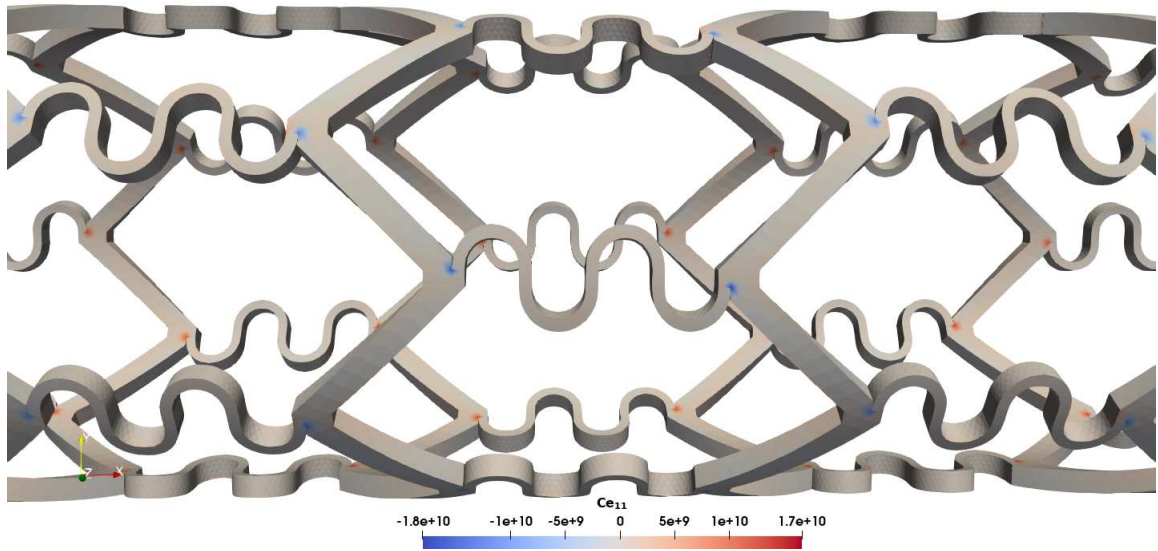




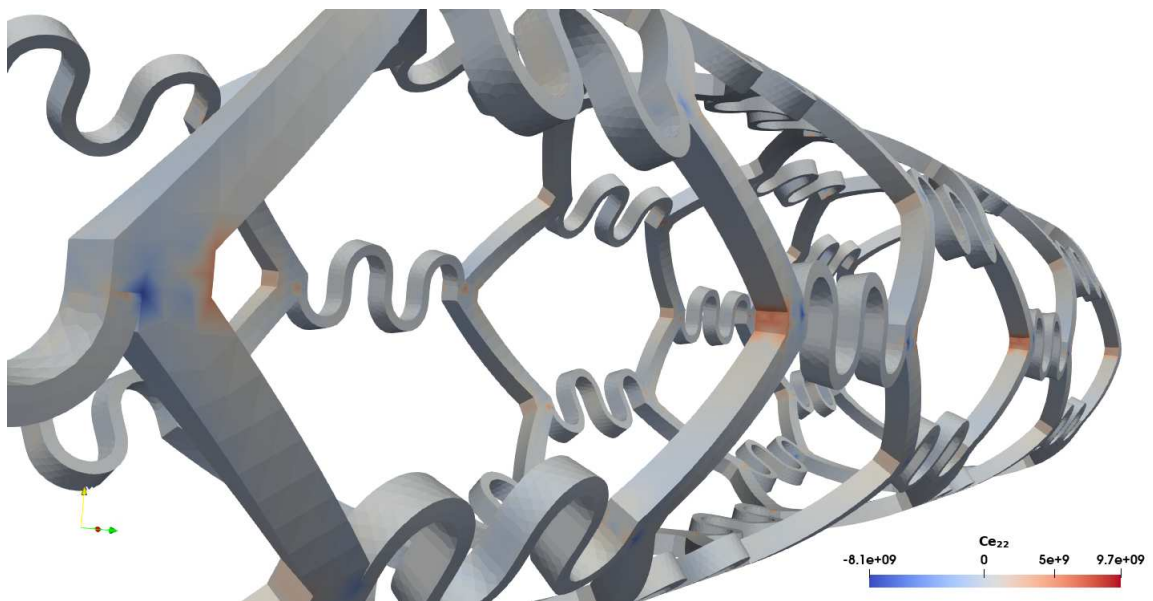
Slika 4.14: Maksimalna sup-norma naprezanja i *thickness*

### Tenzor naprezanja s velikom normom

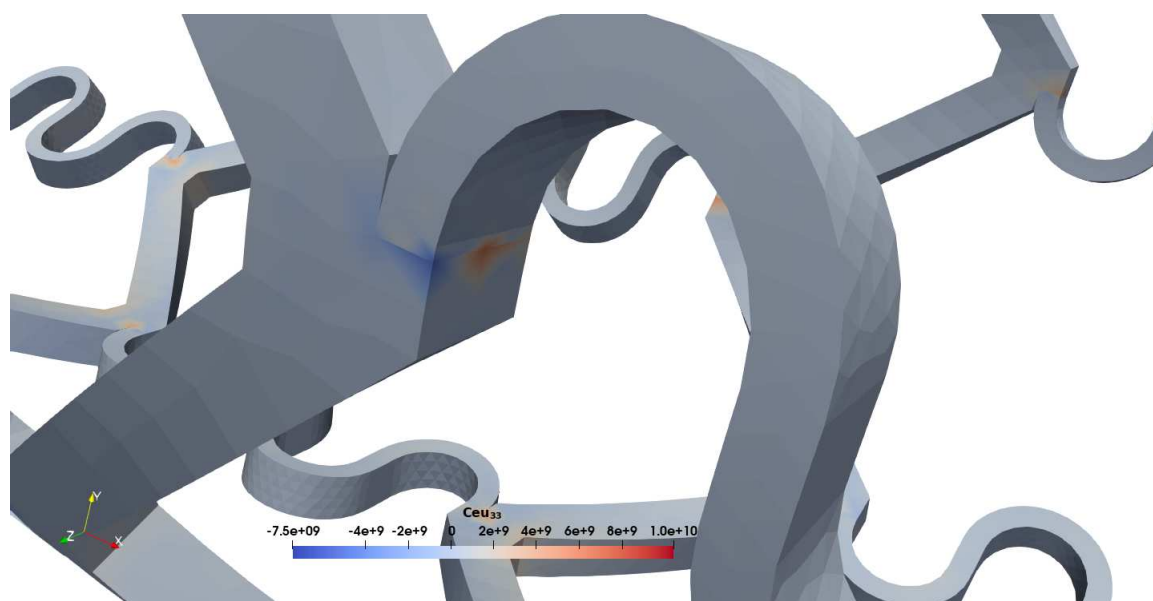
Pogledajmo primjer jednog tenzora naprezanja s velikom sup-normom naprezanja i njegove komponente  $Ce(u)_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , na primjer za  $thickness = 6.4286 \cdot 10^{-5}$ . Slike 4.15, 4.16 i 4.17 pokazuju kako te funkcije poprimaju male vrijednosti na stentu, osim na dijelovima gdje se spajaju zavojiti dio i štapovi i na dijelovima gdje se spajaju štapovi.



Slika 4.15: Vrijednosti funkcije  $Ce(u)_{11}$  za  $thickness = 6.4286 \cdot 10^{-5}$



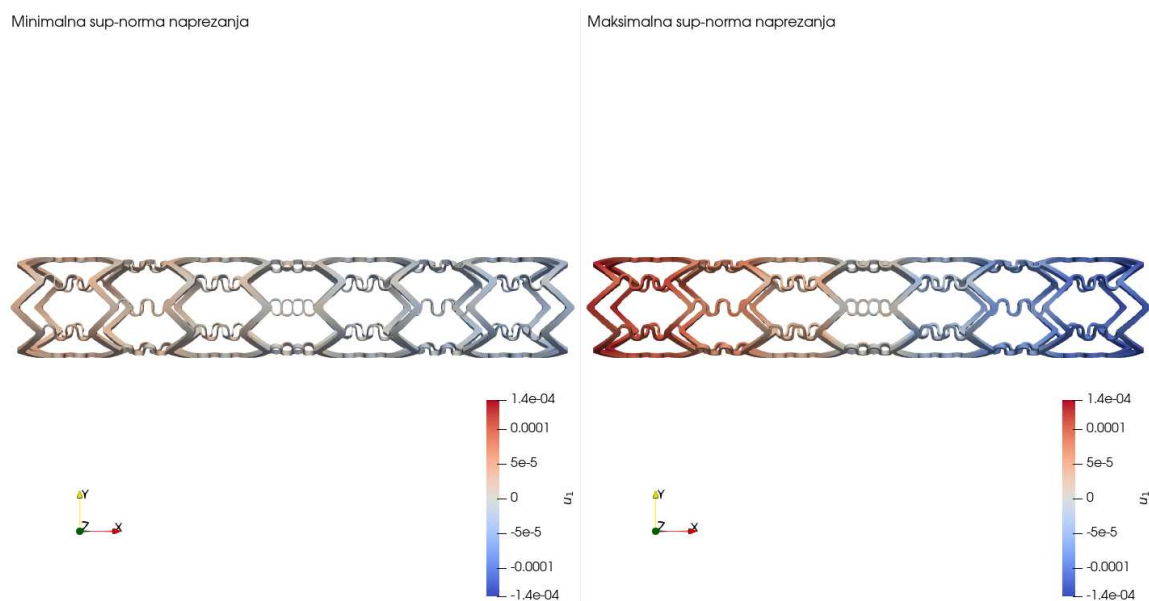
Slika 4.16: Vrijednosti funkcije  $Ce(u)_{22}$  za  $thickness = 6.4286 \cdot 10^{-5}$



Slika 4.17: Vrijednosti funkcije  $Ce(u)_{33}$  za  $thickness = 6.4286 \cdot 10^{-5}$

#### Usporedba rješenja s minimalnom i maksimalnom sup-normom napreznja

Uz trenutne (najfinije) opcije meshiranja, iz Slike 4.14 vidimo da je za  $thickness = 6.91 \cdot 10^{-5}$  sup-norma napreznja maksimalna, a za  $thickness = 3.97 \cdot 10^{-5}$  sup-norma napreznja je minimalna. Promotrimo pomake po x-osi (prve komponente rješenja).

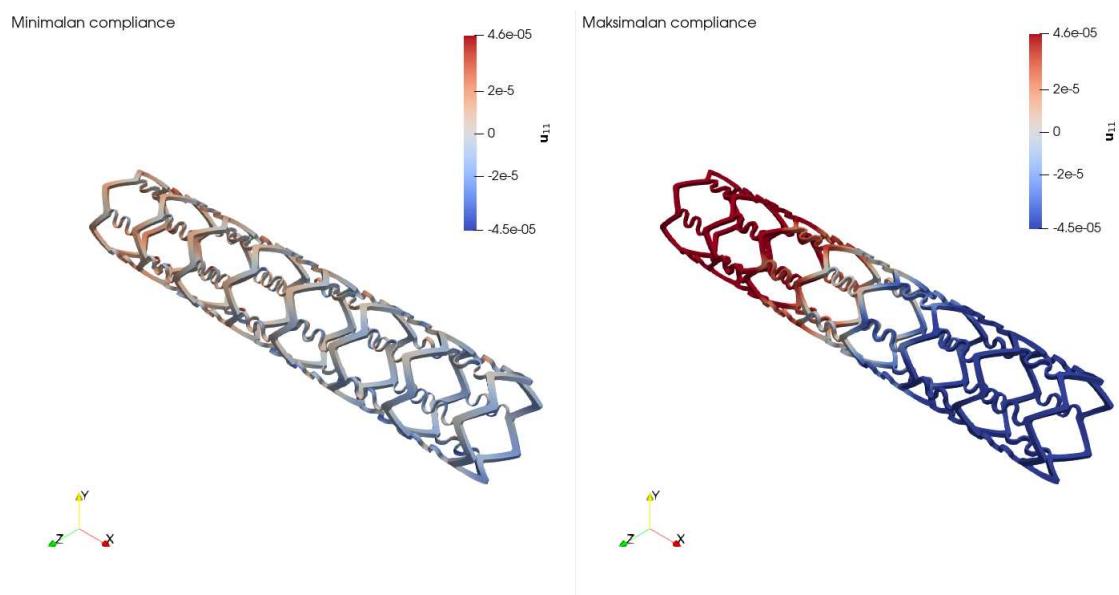
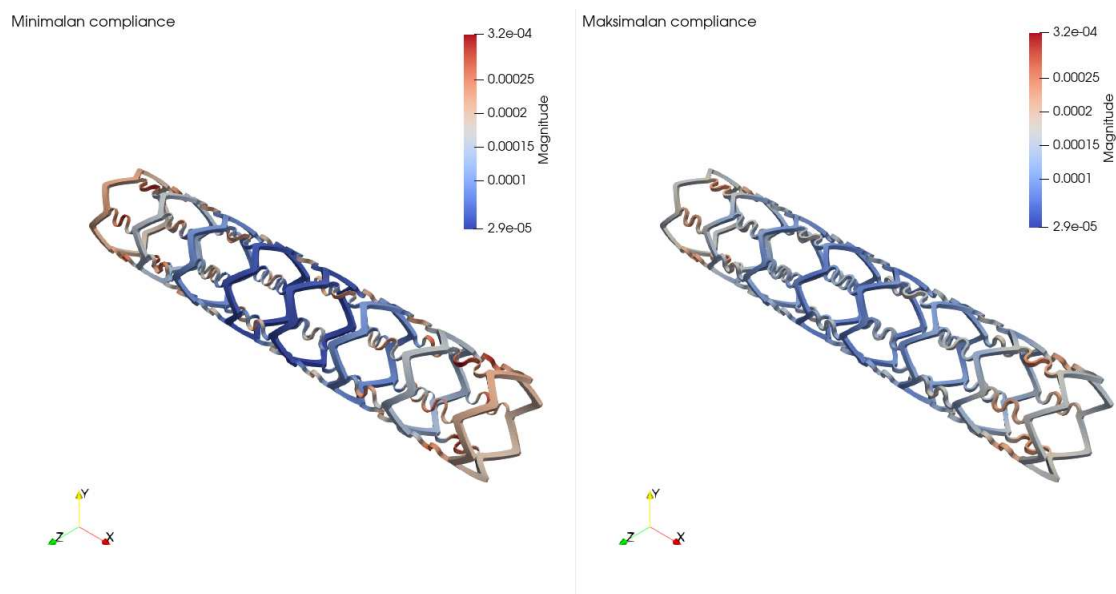
Slika 4.18: Vrijednost funkcija  $u_1$ 

Stent s maksimalnom sup-normom naprezanja se skuplja po x-osi, a za stent s minimalnom sup-normom naprezanja možemo zaključiti isto, ali u manjoj mjeri.

### Usporedba rješenja s minimalnom i maksimalnom compliance vrijednosti

Sa Slike 4.8 vidimo da za  $thickness = 3.16237 \cdot 10^{-5}$  compliance ima najmanju vrijednost, dok za  $thickness = 7 \cdot 10^{-5}$  ima najveću vrijednost. Promotrimo :

- norme pomaka s najmanjom i najvećom compliance vrijednosti



Ovdje vidimo kako rješenje s minimalnom compliance vrijednosti stenta u prvoj komponenti ima vrijednosti oko 0, dok se kod stenta s maksimalnom compliance vrijednosti događa određeno stiskanje, skraćivanje po x-osi.

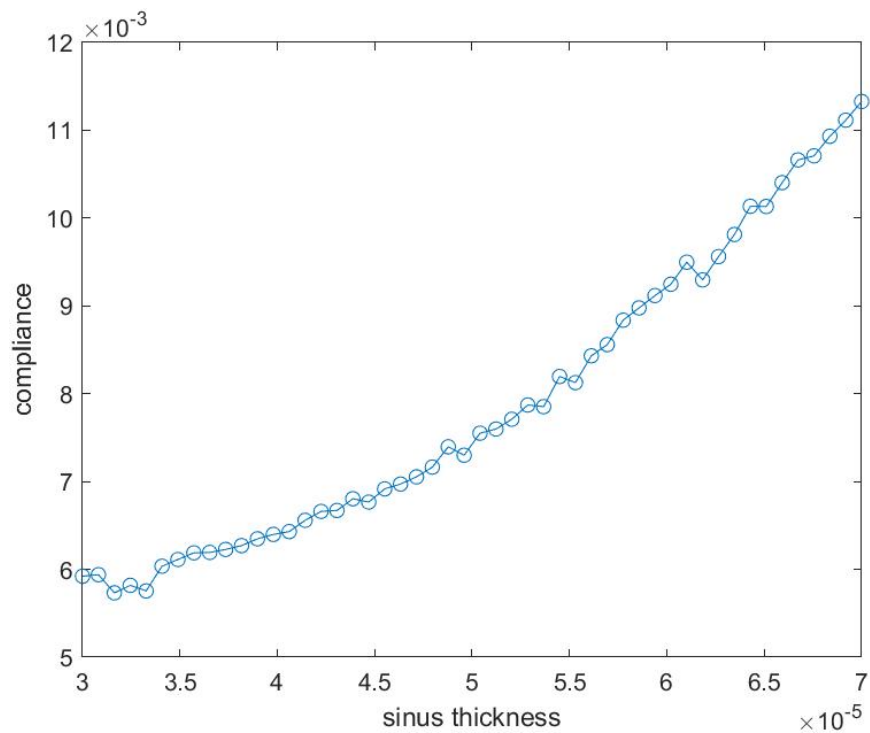
### Optimizacija parametra *thickness* s drugim opcijama meshiranja

Ako uzmemo nešto "manje fini" mesh koji je generiran opcijama :

```
1  opcije_stapovi= 'geo -3 -format mesh -clmin 1e-4 -clmax 5e-4';
2  opcije_sinus = 'geo -3 -format mesh -clmin 3e-5 -clmax 5e-5';
```

dobivamo sljedeće grafove koji prikazuju ovisnost :

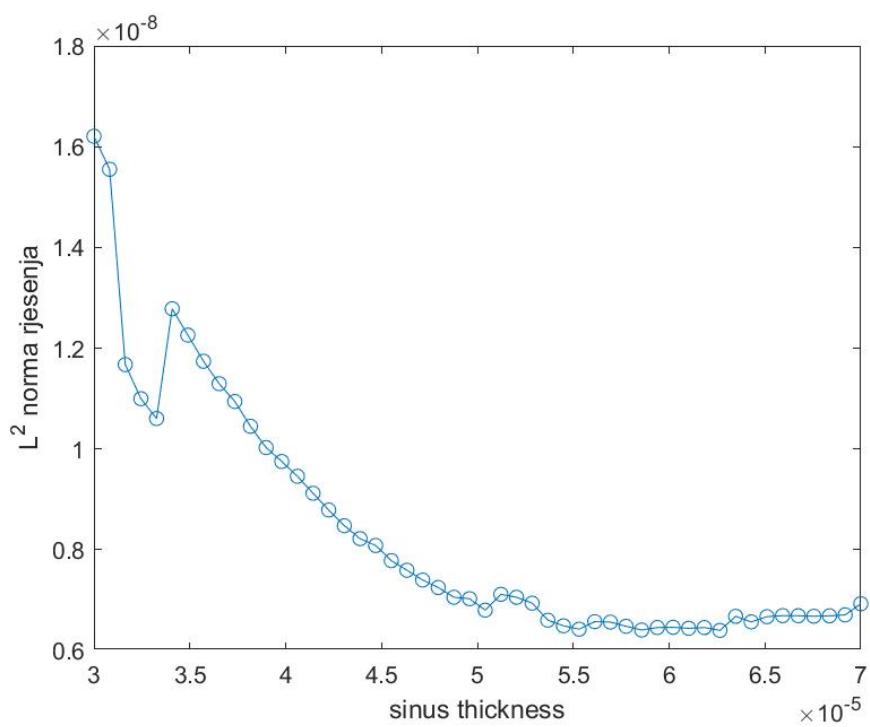
- Parametra *compliance* o parametru *thickness*



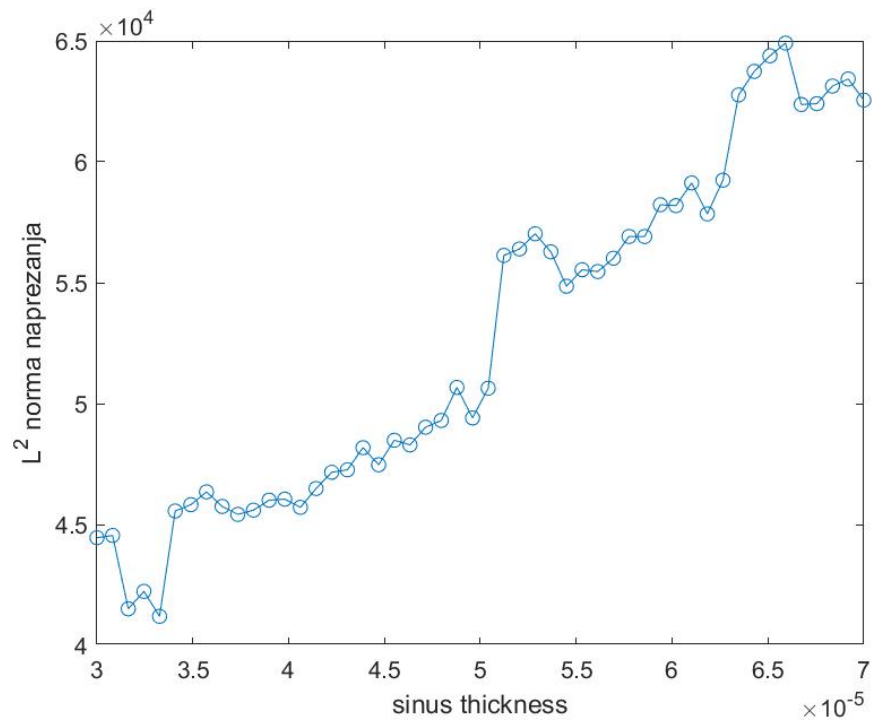
Slika 4.19: Compliance i *thickness*

Uočavamo kako se *compliance* ponaša jednako i s manje finijim opcijama meshiranja.

- $L^2$  norme rješenja o parametru *thickness*

Slika 4.20:  $L^2$  norma rješenja i *thickness*

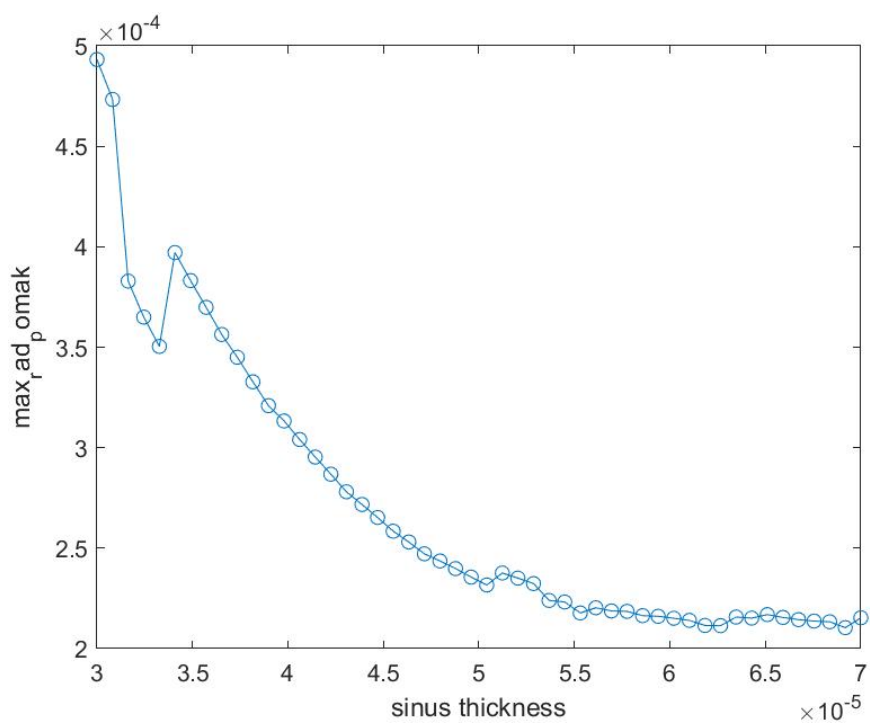
- $L^2$  norme naprezanja o parametru *thickness*

Slika 4.21:  $L^2$  norma naprezanja i *thickness*

Opet su ponašanja dosta slična, ovdje uočavamo više skokova. što je i očekivano.

- Maksimalnog radijalnog pomaka o parametru *thickness*

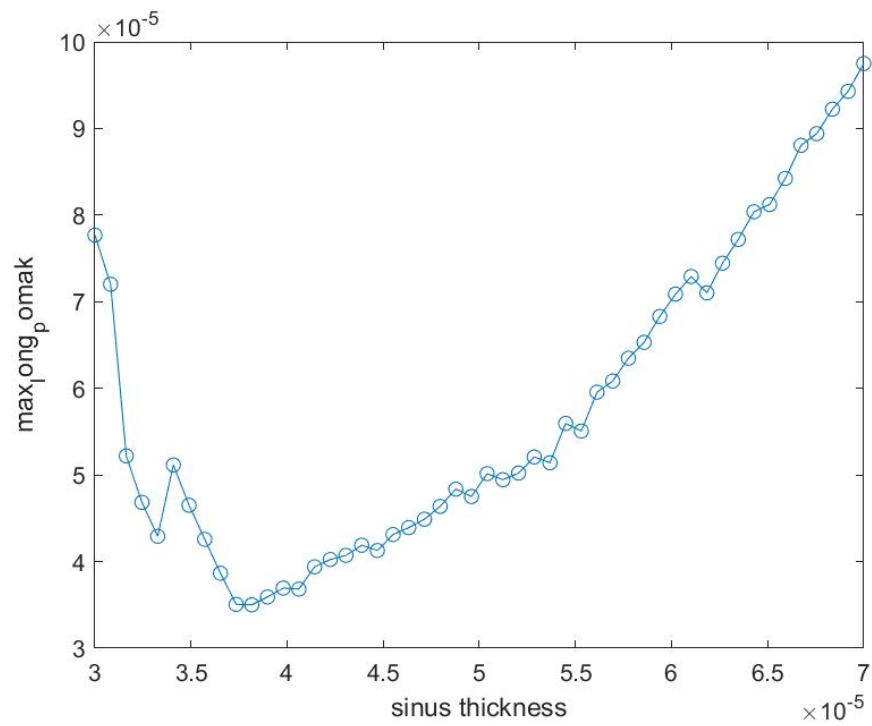




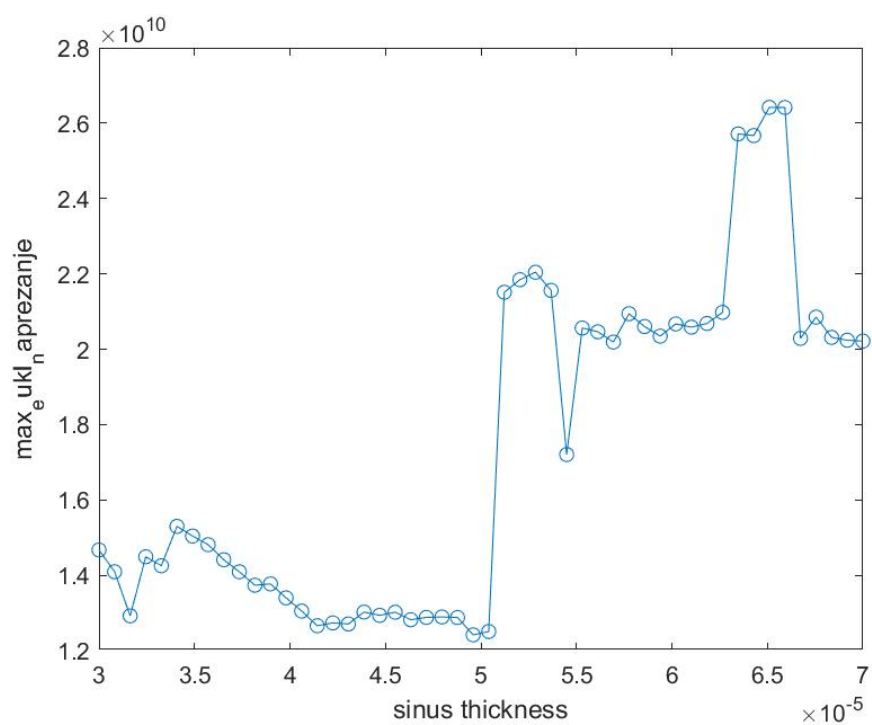
Slika 4.22: Maksimalni radijalni pomak rješenja i *thickness*

Maksimalni radijalni pomak ima slično ponašanje, donja granica je jednaka za obje opcije meshiranja, dok se gornja granica u ovom slučaju povećala.

- Maksimalnog longitudinalnog pomaka o parametru *thickness*

Slika 4.23: Maksimalni longitudinalni pomak rješenja i *thickness*

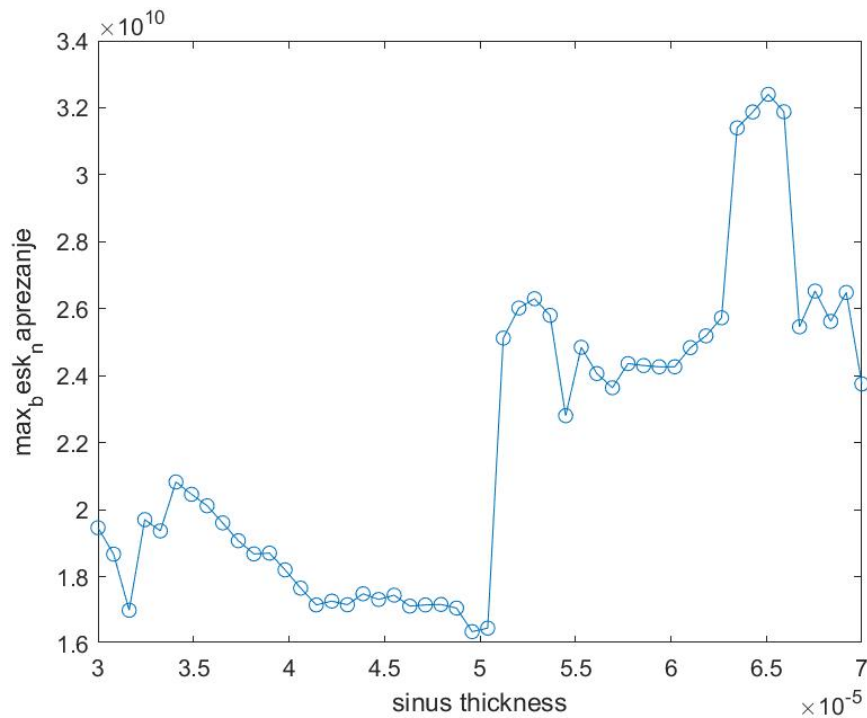
- Maksimalne euklidske norme naprezanja o parametru *thickness*



Slika 4.24: Maksimalna euklidska norma naprežanja i *thickness*

Možemo uočiti kako prikazani graf ovisnosti sadrži puno manje skokova nego što smo dobili s finijim opcijama meshiranja. Također se gornja granica smanjila.

- Maksimalne sup-norme naprežanja o parametru *thickness*

Slika 4.25: Maksimalna sup-norma naprezanja i *thickness*

Možemo zaključiti da smo zapravo za manje "fine" opcije meshiranja dobili "finije" grafove ovisnosti, no da i dalje ima određenih skokova i nepravilnosti.

### 4.3 Optimizacija parametra *thickness* za *bending* problem

Umjesto sile tlaka, promatrat ćemo slučaj kada na stent djeluje *bending* sila u smjeru *y*-osi. Odnosno, u varijacijskoj zadaći (3.5) sila  $\mathbf{g}$  sada postaje

$$\mathbf{g}(x, y, z) = (0, g(x, y, z), 0), \text{ t.d. } g(x, y, z) = k \cdot \left(x - \frac{x_{max}}{2}\right)^2, \quad (4.2)$$

gdje je  $k$  konstanta, a  $x_{max}$  iznos najveće vrijednosti  $x$  koordinate koju točke na stentu postižu.

U našem slučaju uzet ćemo da je  $k = 10^{10}$  i rješit ćemo *bending* problem za krupnije opcije meshiranja, gdje *thickness* variramo u istim granicama kao i prije.

Implementacija ove *bending* zadaće u FreeFem++-u glasi:

```

1 //BENDING PROBLEM
2 // Macro
3 real sqrt2 = sqrt(2.);
4 macro epsilon(u1, u2, u3) [
5     dx(u1),
6     dy(u2),
7     dz(u3),
8     (dz(u2) + dy(u3))/sqrt2,
9     (dz(u1) + dx(u3))/sqrt2,
10    (dy(u1) + dx(u2))/sqrt2    ]
11
12 macro div(u1, u2, u3) (dx(u1) + dy(u2) + dz(u3))
13
14 // Problem
15 varf Lamé ([u1, u2, u3], [v1, v2, v3])
16     = int3d(stent)(
17         lambda*div(u1, u2, u3)*div(v1, v2, v3)
18         + 2.*mi*( epsilon(u1, u2, u3)' *epsilon(v1, v2, v3) )
19     );
20
21 varf Nadopuna1 ([u1,u2,u3], [v1,v2,v3])
22     = int3d(stent)(1*v1);
23
24 varf Nadopuna2 ([u1,u2,u3], [v1,v2,v3])
25     = int3d(stent)(1*v2);
26
27 varf Nadopuna3 ([u1,u2,u3], [v1,v2,v3])
28     = int3d(stent)(1*v3);
29
30 varf Nadopuna4 ([u1,u2,u3], [v1,v2,v3])
31     = int3d(stent)(z*v2-y*v3);
32
33 varf Nadopuna5 ([u1,u2,u3], [v1,v2,v3])
34     = int3d(stent)(x*v3-z*v1);
35
36 varf Nadopuna6 ([u1,u2,u3], [v1,v2,v3])
37     = int3d(stent)(x*v2-y*v1);
38
39 varf desnaStrana ([u1,u2,u3], [v1,v2,v3]) =
40     int2d(stent,1)((k*(x-(xmax/2))^2)*v2 );
41
42 matrix AA = Lamé(Rh, Rh);
43 real[int] BB1 = Nadopuna1(0, Rh);
44 real[int] BB2 = Nadopuna2(0, Rh);
45 real[int] BB3 = Nadopuna3(0, Rh);
46 real[int] BB4 = Nadopuna4(0, Rh);
47 real[int] BB5 = Nadopuna5(0, Rh);

```

```

48 real[int] BB6 = Nadopuna6(0, Rh);
49 matrix AAA = [
50     [AA, BB1, BB2, BB3, BB4, BB5, BB6],
51     [BB1', 0, 0, 0, 0, 0, 0],
52     [BB2', 0, 0, 0, 0, 0, 0],
53     [BB3', 0, 0, 0, 0, 0, 0],
54     [BB4', 0, 0, 0, 0, 0, 0],
55     [BB5', 0, 0, 0, 0, 0, 0],
56     [BB6', 0, 0, 0, 0, 0, 0]
57 ];
58
59 set(AAA, solver=sparsesolver);
60 real[int] b1(1);
61 b1=0;
62 real[int] RHSvec0 = desnaStrana(0,Rh);
63 real[int] RHSvec = [RHSvec0,b1,b1,b1,b1,b1,b1];
64
65 real[int] vektorRj = AAA^-1*RHSvec;
66 u1[]=vektorRj(0:Rh.ndof);
67
68 real compliance = int2d(stent,1)((k*(x-(xmax/2))^2)*u2 );

```

Za razliku od dosadašnje implementacije *pure traction*, ova zadaća je implementirana u FreeFem++-u na način da koristi varijable tipa varf(eng. *variational form*), te na taj način možemo zadati više uvjeta za koje želimo da vrijede pri rješavanju zadaće. Varijabla Lamé tipa varf predstavlja lijevu stranu zadaće (3.5), odnosno  $\int_{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx$ . Varijable Nadopuna1-Nadopuna6 predstavljaju uvjet da testna funkcija  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  zadovoljava

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} dx = \mathbf{0} \quad \& \quad \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{v} dx = \mathbf{0},$$

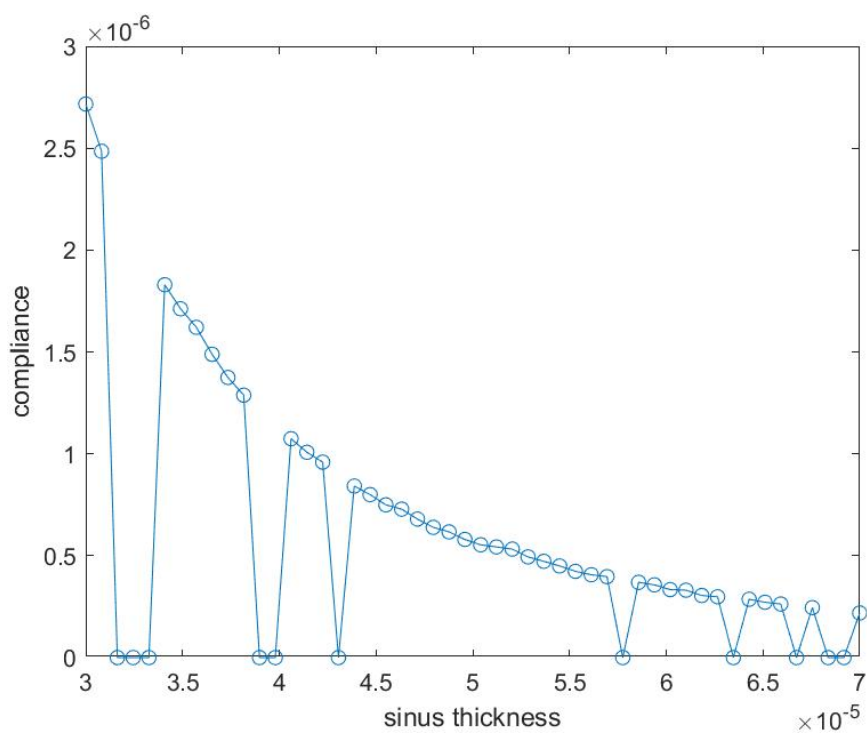
odnosno radi se o nametanju uvjeta iz prostora  $\widetilde{\mathcal{V}}$  kroz mješovitu formulaciju i Lagrange-ove multiplikatore.

U priloženom isječku koda kod računanja *compliance* vrijednosti  $u2$  je 2. komponenta rješenja *bending* zadaće. Varijabla *desnaStrana* je upravo desna strana (3.5).

Napomenimo kako želimo da je stent što krući pri djelovanju radijalne sile, dakle da ima minimalni *compliance*, te da je što savitljiviji pri djelovanju *bending* sile, odnosno sile savijanja, kako bi se prilagodio zakrivljenim žilama. Dakle, sada želimo da je *compliance* što veći.

Promotrimo ponovno grafove ovisnosti, ali kao što će biti vidljivo sa grafova koji slijede, zadaća nije uspješno riješena za sve vrijednosti parametara *thickness*, stoga će na grafovima neke vrijednosti biti jednake 0. Razlog tomu su vjerojatno problemi s automatskim meshiranjem.

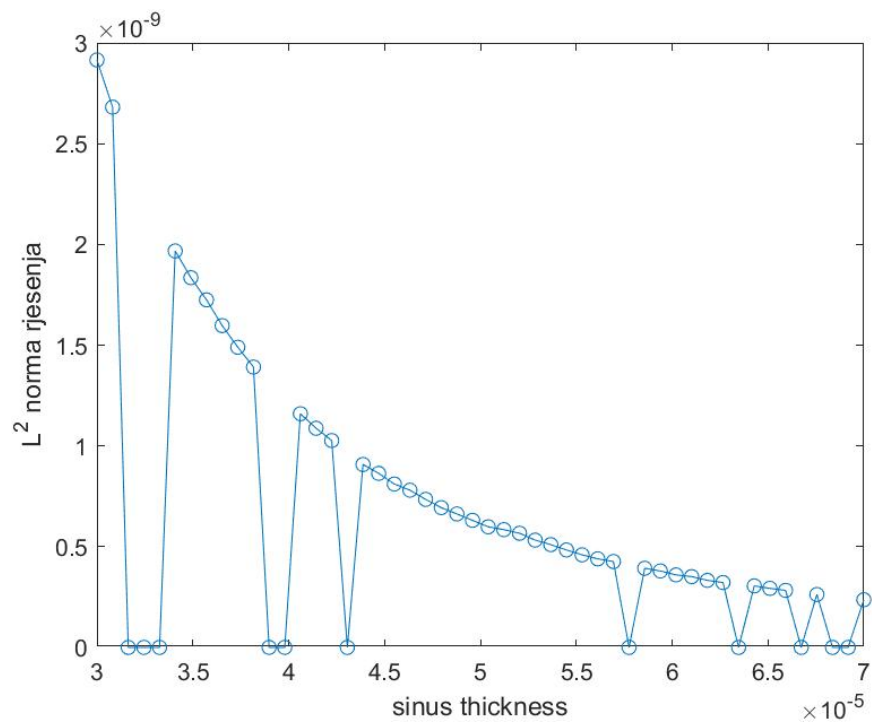
- Ovisnost parametra *compliance* o parametru *thickness*



Slika 4.26: Compliance i *thickness*

Ovdje uočavamo kako je *compliance* maksimalan za minimalnu vrijednost *thickness* parametra, dok je u slučaju gdje je sila *g* bila tlak *compliance* imao suprotno ponašanje, odnosno rastao je kako raste i *thickness*.

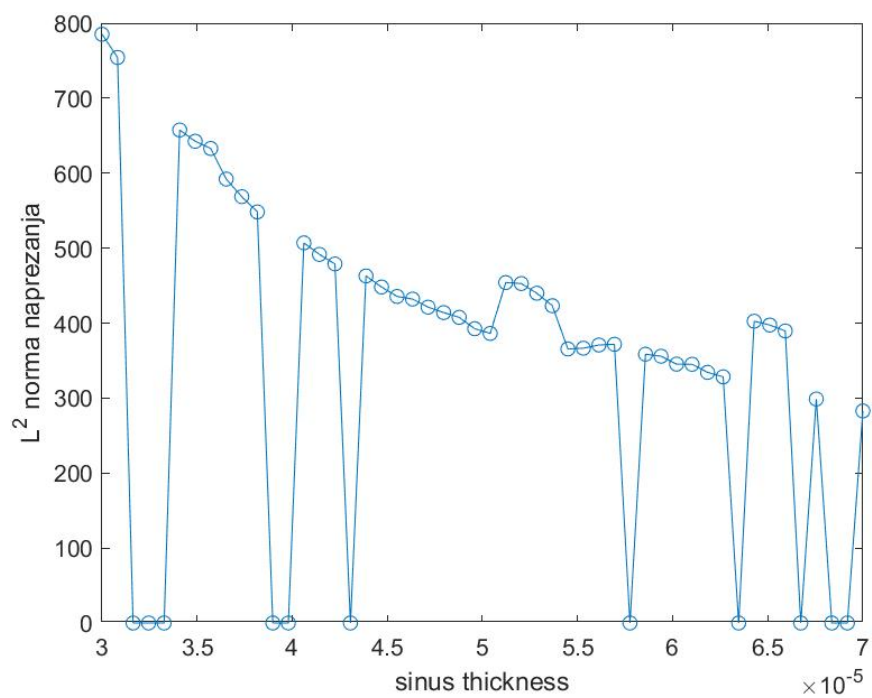
- Ovisnost  $L^2$  norme rješenja o parametru *thickness*

Slika 4.27:  $L^2$  norma rjesenja i *thickness*

$L^2$  norma rjesenja ima vrlo slično ponašanje kao *compliance*, što ima smisla s definicijom podatljivosti.

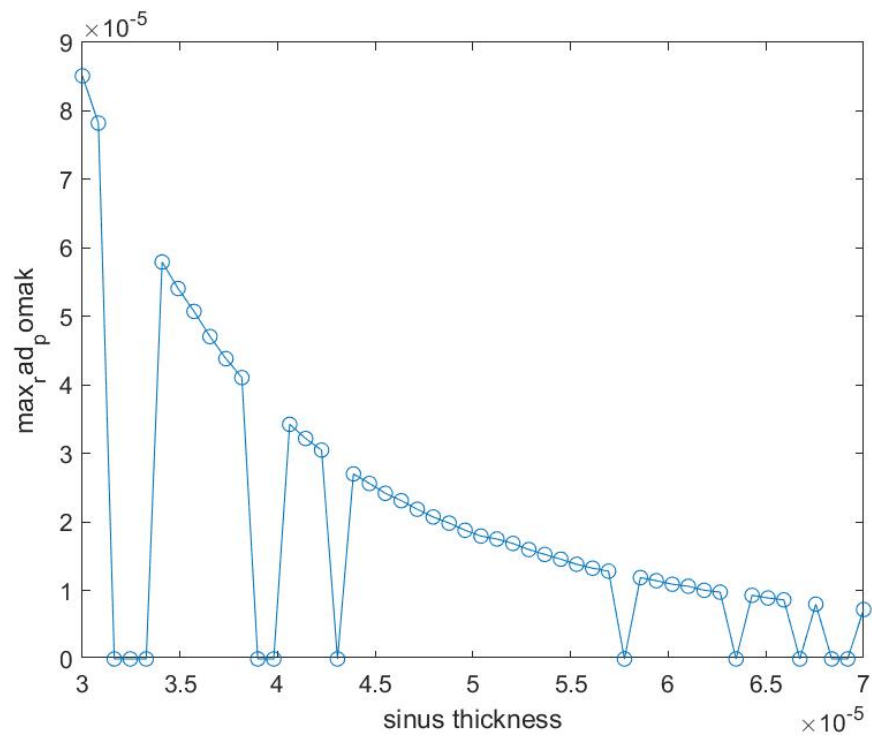
- Ovisnost  $L^2$  norme naprezanja o parametru *thickness*





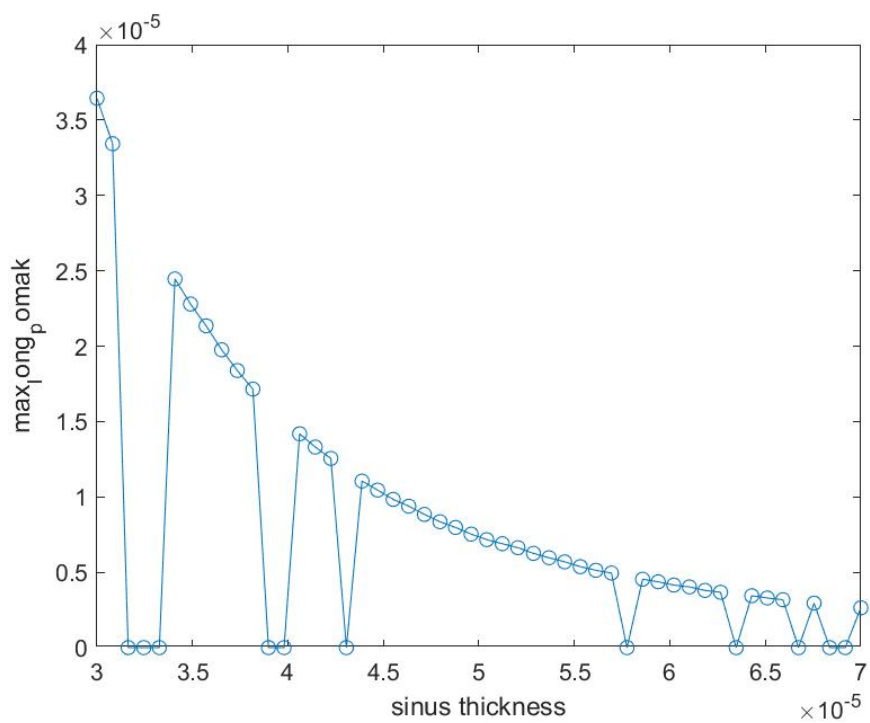
Slika 4.28:  $L^2$  norma naprezanja i *thickness*

- Ovisnost maksimalnog radijalnog pomaka o parametru *thickness*



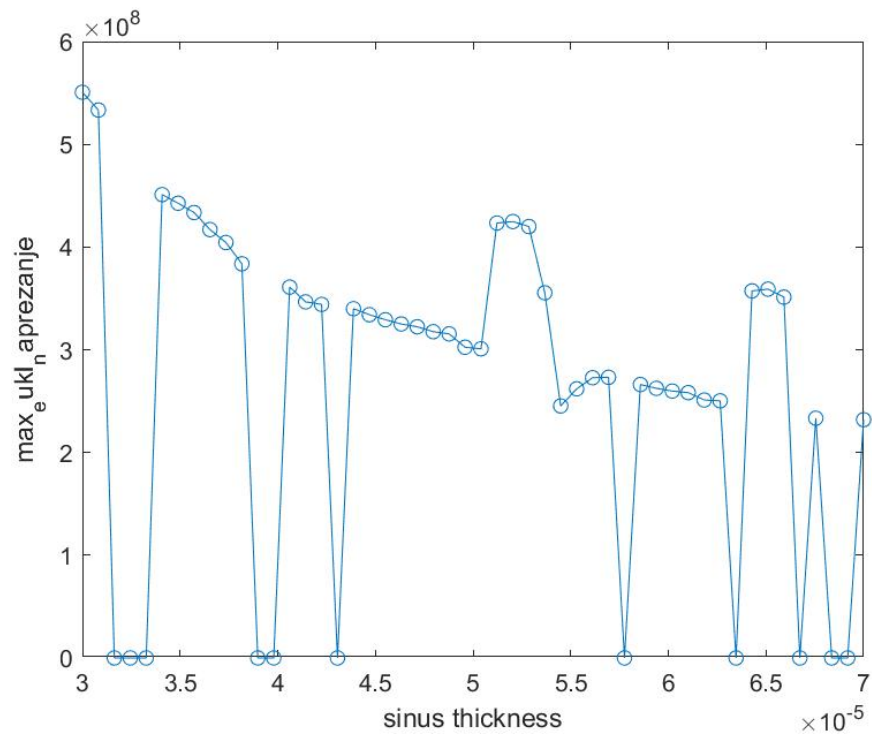
Slika 4.29: Maksimalni radijalni pomak rješenja i *thickness*

- Ovisnost maksimalnog longitudinalnog pomaka o parametru *thickness*



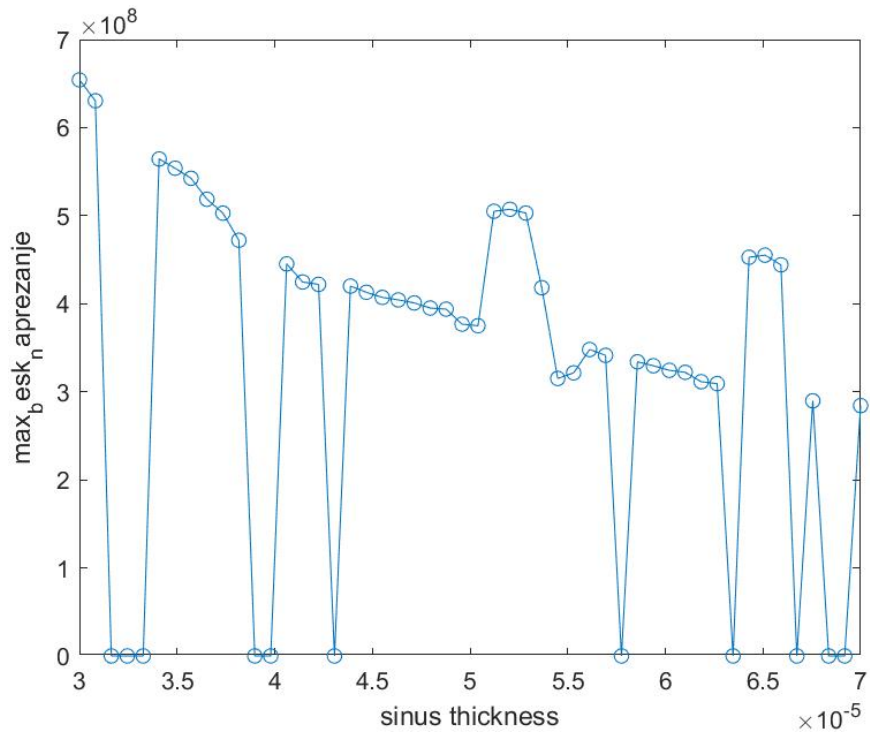
Slika 4.30: Maksimalni longitudinalni pomak rješenja i *thickness*

- Ovisnost maksimalne euklidske norme naprežanja o parametru *thickness*



Slika 4.31: Maksimalna euklidska norma naprezanja i *thickness*

- Ovisnost maksimalne sup-norme naprezanja o parametru *thickness*



Slika 4.32: Maksimalna sup-norma naprezanja i *thickness*

Pogledajmo kako *bending* sila djeluje na stent ( $k = 10^{10}$ ).

Nedeformirani stent

Deformirani stent,  $k=1e10$ Slika 4.33: Nedeformirani i deformirani stent u xy- ravnini,  $thickness = 5.53061 \cdot 10^{-5}$ 

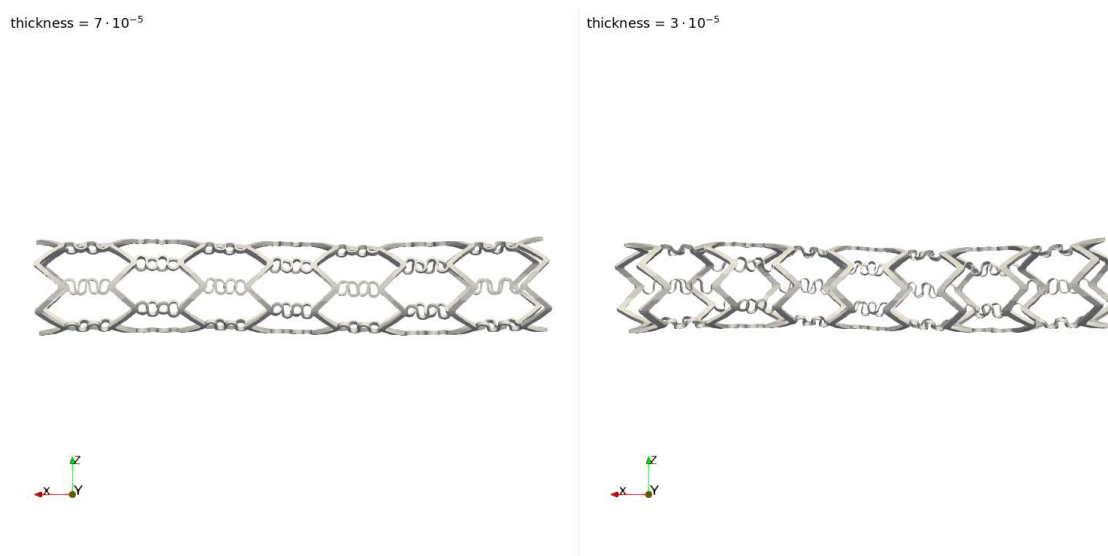
Nedeformirani stent

Deformirani stent,  $k=1e10$ Slika 4.34: Nedeformirani i deformirani stent u xz- ravnini,  $thickness = 5.53061 \cdot 10^{-5}$

Nedeformirani stent

Deformirani stent,  $k=1e10$ Slika 4.35: Nedeformirani i deformirani stent u yz- ravnini,  $thickness = 5.53061 \cdot 10^{-5}$ Nadalje, usporedimo rješenja s maksimalnom i minimalnom podatljivošću za  $k = 10^9$ .thickness =  $7 \cdot 10^{-5}$ thickness =  $3 \cdot 10^{-5}$ 

Slika 4.36: Deformirani stentovi u xy-ravnini



Slika 4.37: Deformirani stentovi u xz-ravnini

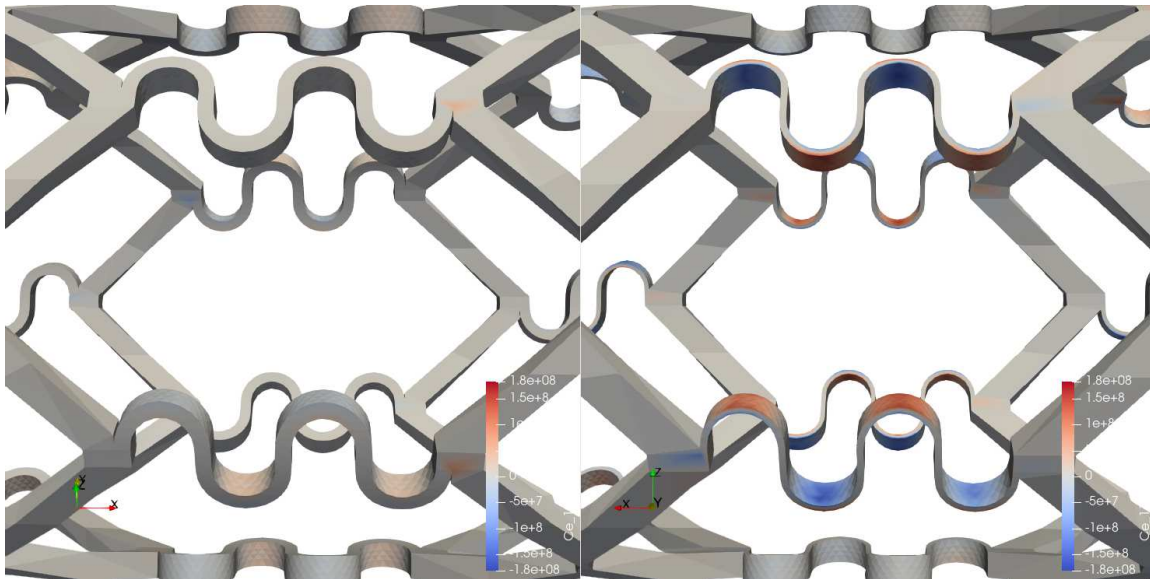


Slika 4.38: Deformirani stentovi u yz-ravnini

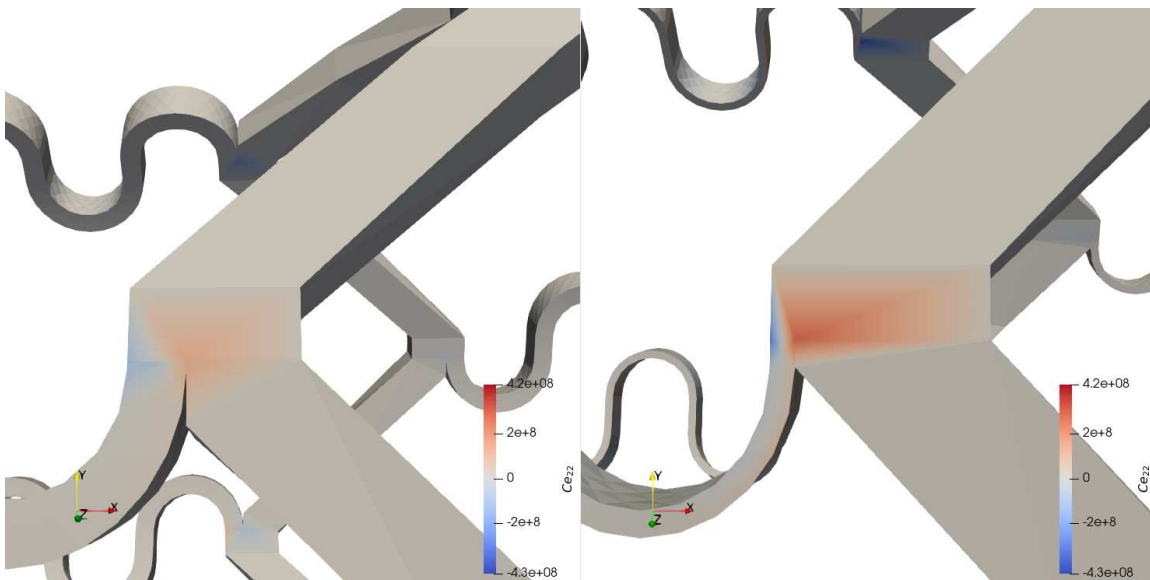
Vidimo da je stent koji ima minimalnu podatljivost (lijevi stent na slikama 4.36, 4.37, 4.38) krući, u smislu da ga je *bending* sila manje savila nego stent s minimalnom podatljivošću (desni stent na slikama).

Pogledajmo i što možemo reći o naprezanju.



Slika 4.39: iznos komponente  $Ce(u)_{11}$ 

Vidimo da se stentovi sa najvećom (desni stent) i najmanjom (lijevi stent) sup-normom napreznja razlikuju u komponenti  $Ce(u)_{11}$  na zavojitom dijelu stenta.

Slika 4.40: iznos komponente  $Ce(u)_{22}$

Također, na mjestu spajanja zavojith dijelova stenta i štapova komponente tenzora naprežanja postižu netrivialne vrijednosti, te ponovno stent s najvećom sup-normom naprežanja postiže veće vrijednosti, što je i očekivano. Isti zaključci vrijede i za ostale komponente tenzora naprežanja.

### Rješavanje *bending* zadaće s grubljom mrežom

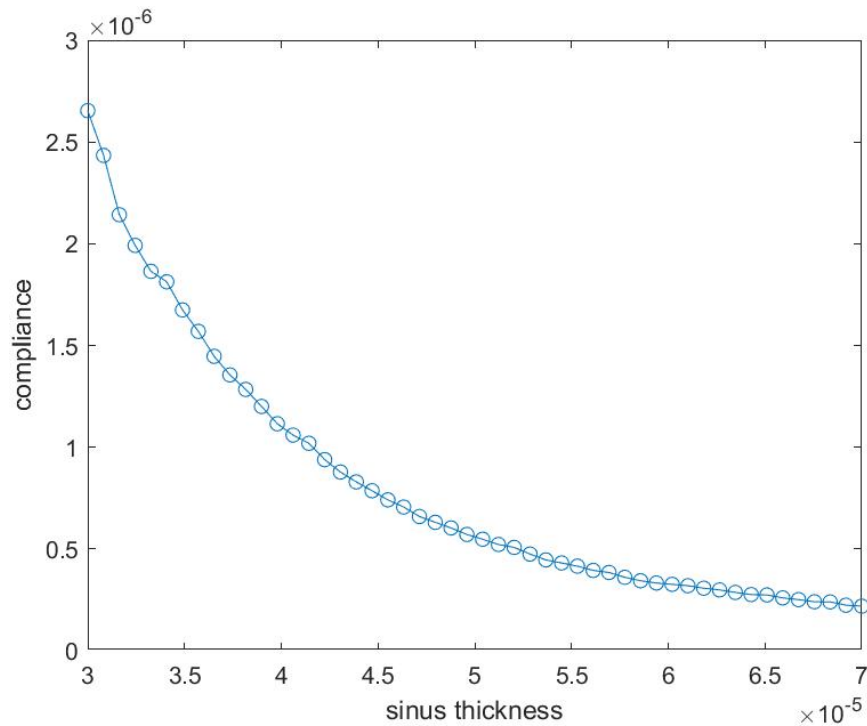
Zbog poteškoća rješavanje zadaće u FreeFem++-u izaberimo još krupnije opcije meshiranja:

```
1  opcije_stapovi = 'geo -3 -format mesh -clmin 5e-4 -clmax 6e-4';
2  opcije_sinus = 'geo -3 -format mesh -clmin 5e-5 -clmax 6e-5';
```

Kada iteriramo po diskretnim vrijednostima *thickness* parametra kao i prije, za svaku vrijednost parametra FreeFem++ uspijeva riješiti *bending* problem.

Promotrimo grafove ovisnosti.

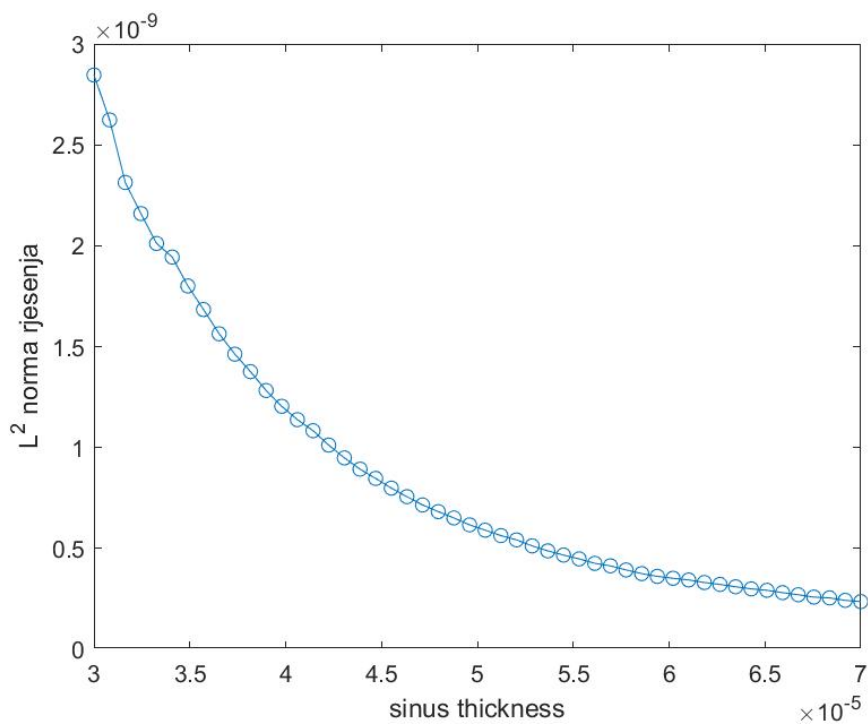
- Ovisnost parametra *compliance* o parametru *thickness*



Slika 4.41: Compliance i *thickness*

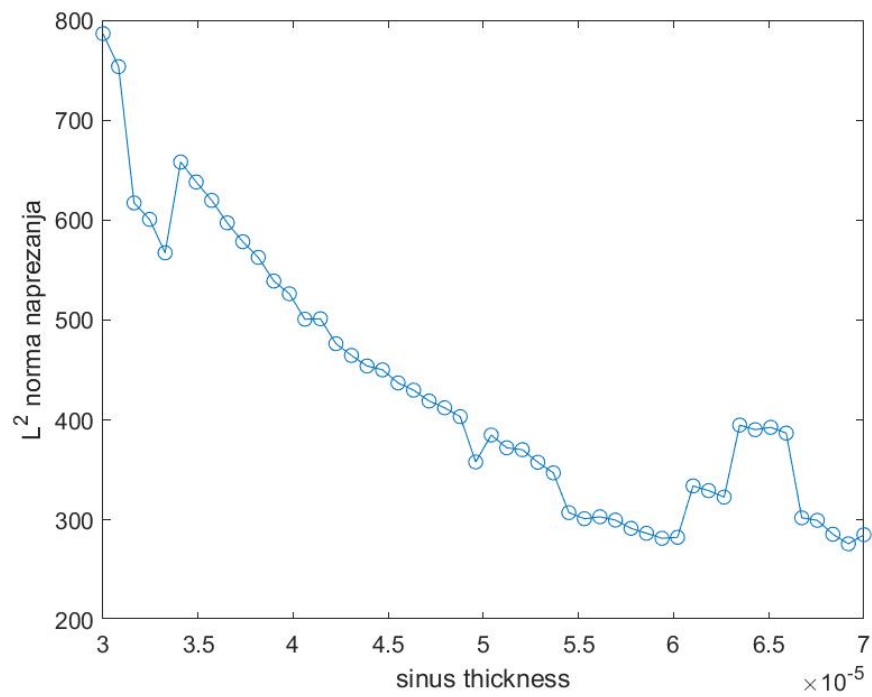
Pošto nam je od interesa promatrati stent s najvećom podatljivošću, vidimo da nam najviše odgovara  $thickness = 3 \cdot 10^{-5}$ .

- Ovisnost  $L^2$  norme rješenja o parametru  $thickness$

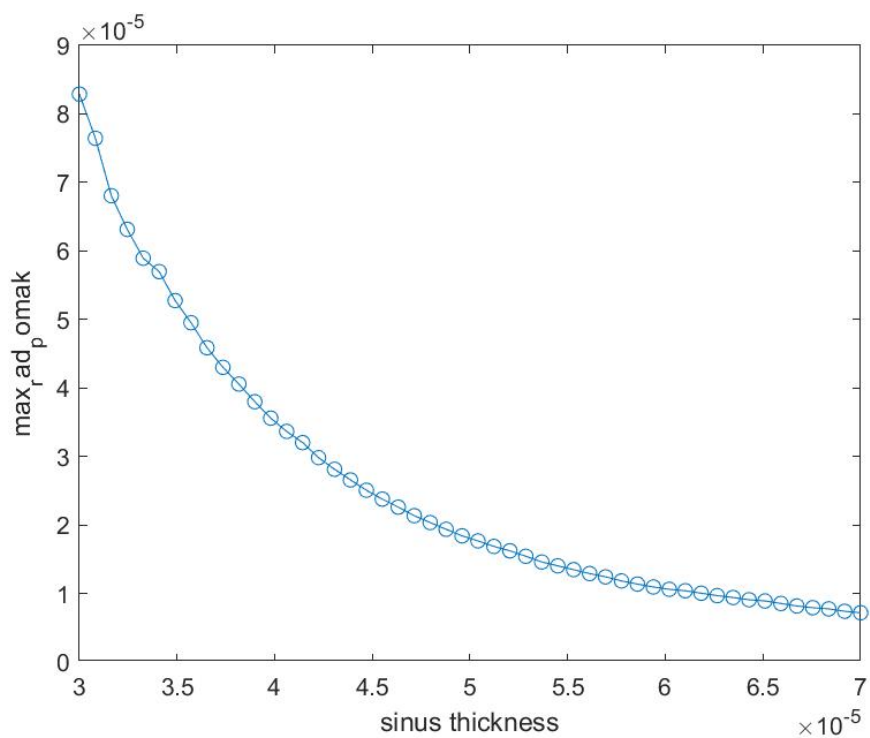


Slika 4.42:  $L^2$  norma rješenja i  $thickness$

- Ovisnost  $L^2$  norme naprezanja o parametru  $thickness$

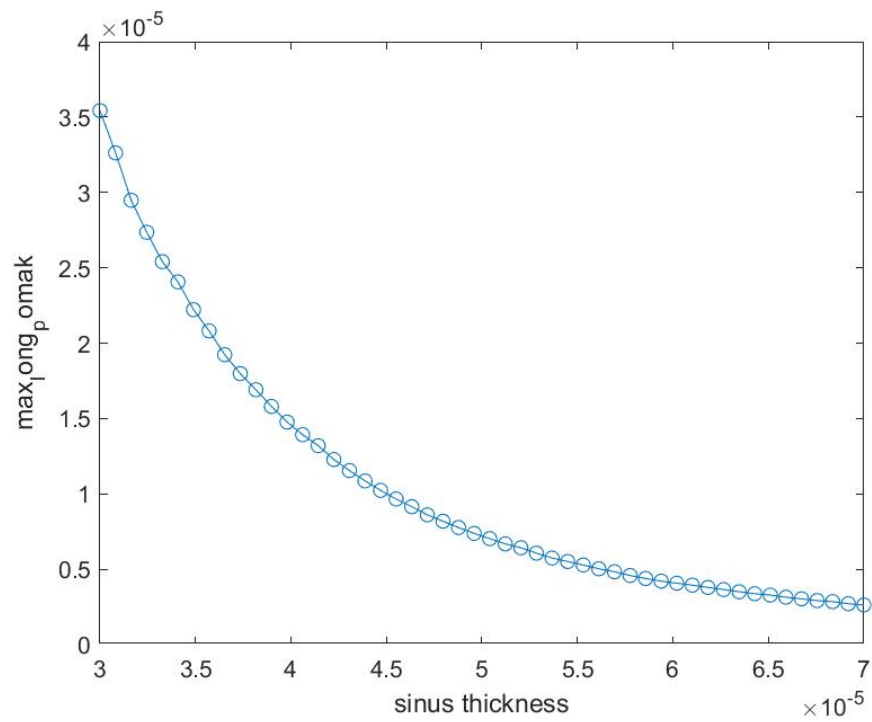
Slika 4.43:  $L^2$  norma naprezanja i *thickness*

- Ovisnost maksimalnog radijalnog pomaka o parametru *thickness*



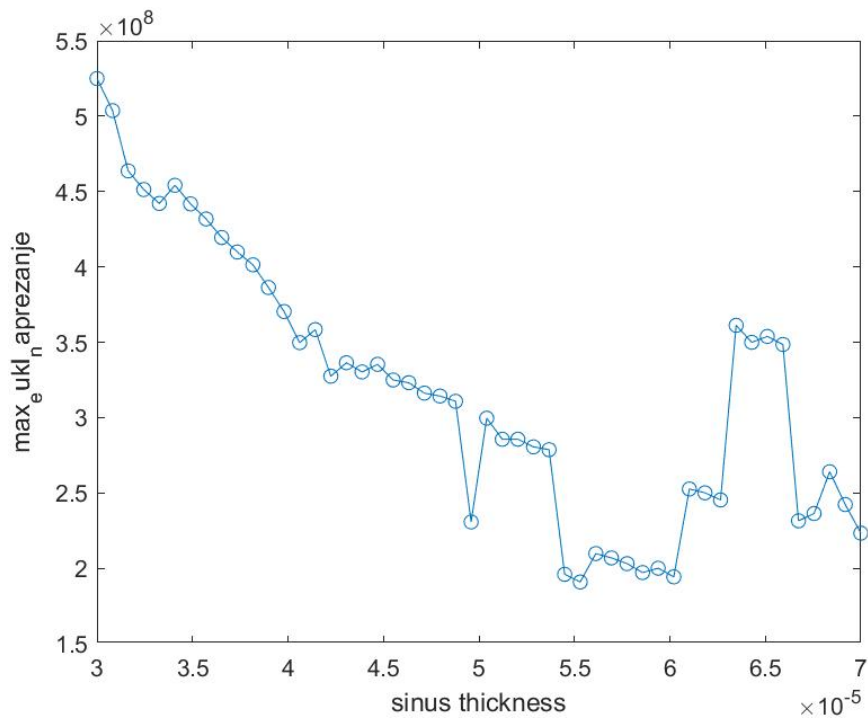
Slika 4.44: Maksimalni radijalni pomak rješenja i *thickness*

- Ovisnost maksimalnog longitudinalnog pomaka o parametru *thickness*



Slika 4.45: Maksimalni longitudinalni pomak rješenja i *thickness*

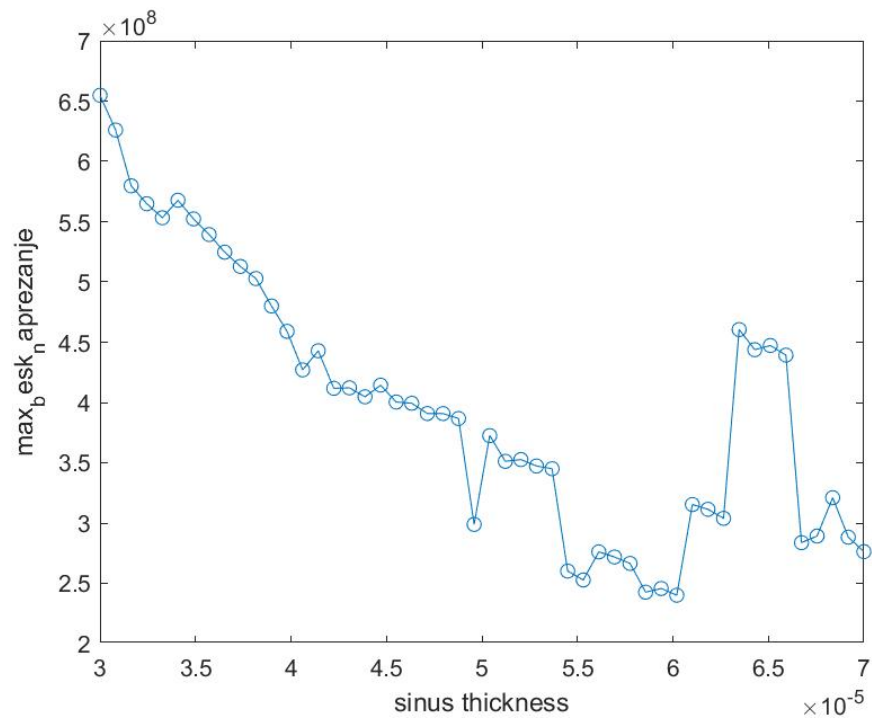
- Ovisnost maksimalne euklidske norme naprezanja o parametru *thickness*



Slika 4.46: Maksimalna euklidska norma naprezanja i *thickness*

Norma se ne ponaša monotono, a neke od točaka u kojima mijenja monotonost su upravo vrijednosti parametra *thickness* za koje FreeFem++ nije uspio riješiti zadaću s finijim opcijama meshiranja. Uočavamo određeni rast norme naprezanja za vrijednosti *thickness*-a oko  $6.5 \cdot 10^{-5}$ , dok je s prethodnim opcijama meshiranja taj rast uočljiv za vrijednosti *thickness* parametra oko  $5.3 \cdot 10^{-5}$ .

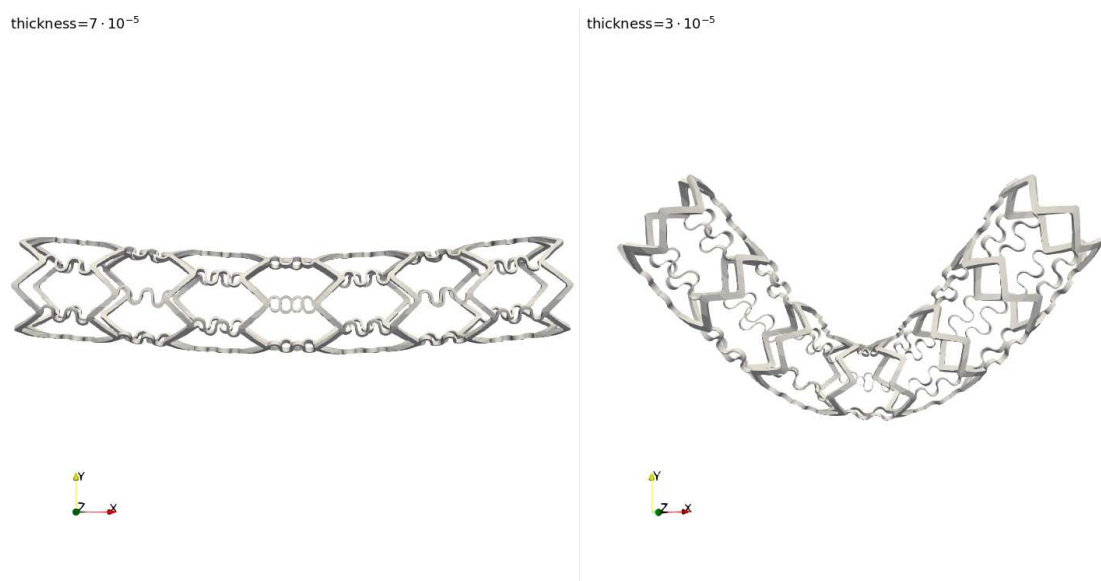
- Ovisnost maksimalne sup-norme naprezanja o parametru *thickness*

Slika 4.47: Maksimalna sup-norma naprezanja i *thickness*

Obje norme tenzora naprezanja postižu najveću vrijednost za  $thickness = 3 \cdot 10^{-5}$ , što je očekivano jer je za isti taj parametar i *compliance* najveći.

Promotrimo deformirane stentove s najvećom i najmanjom podatljivošću za nešto manji  $k$ . Stavimo  $k = 5 \cdot 10^9$ , jer za  $k = 10^{10}$  dolazi do velikih deformacija u stentu s maksimalnom podatljivošću.

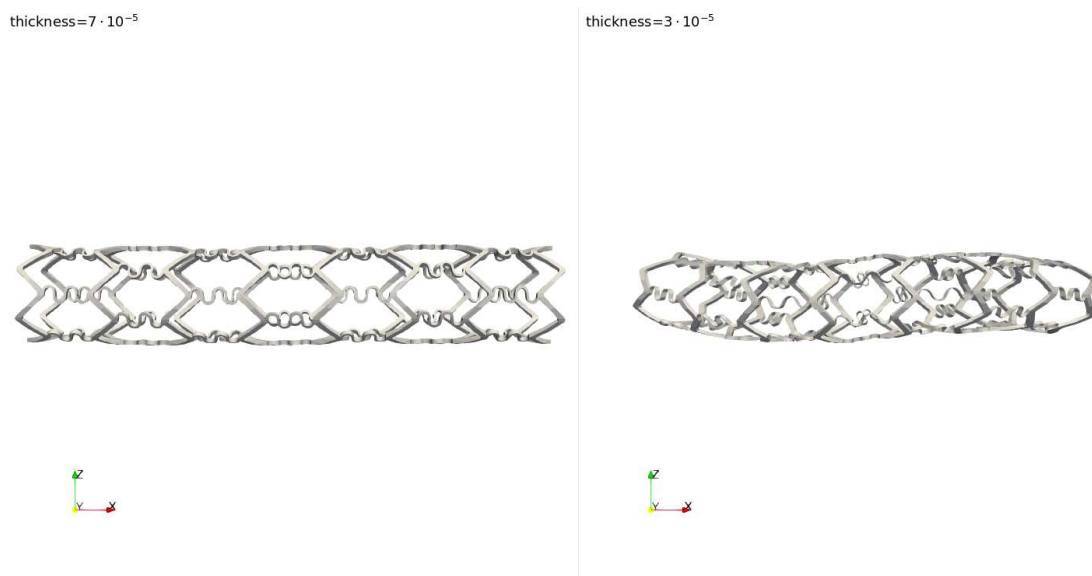




Slika 4.48: Deformirani stentovi u xy-ravnini

Slika 4.49: Uvećani dio oko polovine deformiranog stenta po x-osi za  $thickness = 3 \cdot 10^{-5}$ 

Uočimo kako se kod stenta s maksimalnom podatljivošću po polovini x-osi skoro dotiču zavojiti dijelovi stenta.

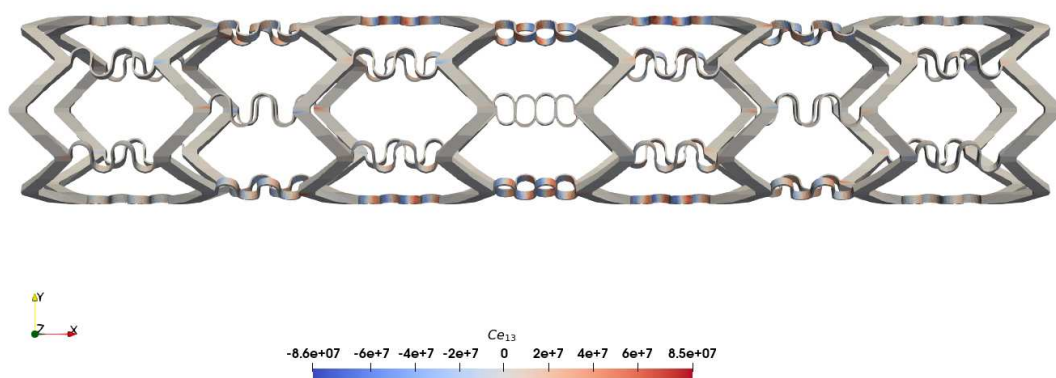


Slika 4.50: Deformirani stentovi u xz-ravnini



Slika 4.51: Deformirani stentovi u yz-ravnini

Pogledajmo što možemo reći o tenzoru napreznja za stent s maksimalnom podatljivošću.



Slika 4.52: Vrijednosti komponente  $Ce(\mathbf{u})_{13}$  za  $thickness = 3 \cdot 10^{-5}$

Tenzor naprezanja postiže najveće vrijednosti na mjestima gdje se spajaju štapovi i zavojiti dijelovi stenta i na zavojitim dijelovima stenta. Također uočimo da su vrijednosti komponente tenzora to veće kako se približavamo središtu stenta po x-osi.

# Bibliografija

- [1] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, New York, 2011.
- [2] Philippe G Ciarlet, *Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
- [3] Domagoj Lacmanović, *Trodimenzionalna numerička simulacija elastičnog stenta*, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2018.
- [4] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.



# Sažetak

U ovom radu detaljnije smo objasnili ulogu stenta u medicini. Pri tome je posebna pažnja posvećena Cypher stentu. Zatim smo s matematičke strane opisali zadaću koja opisuje deformaciju i pomak stenta pri djelovanju sila, pri čemu stent nije nigdje učvršćen (*pure traction* zadaća). Pokazali smo na kojem prostoru funkcija rješenje problema postoji i da je jedinstveno. Konačno smo implementirali geometriju Cypher stenta i *pure traction* zadaću kada na stent djeluje sila tlaka iznutra te kada na njega djeluje *bending* sila koja ga savija. Pri tim zadaćama posebno smo promatrali podatljivost (eng. *compliance*) stenta s ciljem da to svojstvo minimiziramo kada na stent djeluje sila tlaka, odnosno da ga maksimiziramo kada na stent djeluje *bending* sila.



# Summary

In this work, we have elaborated on the role of stents in medicine, with particular emphasis on the Cypher stent. Then, from a mathematical perspective, we described a task that would accurately depict the deformation and displacement of the stent under the influence of force, with the stent remaining unyielding (*pure traction* problem). We demonstrated the space of functions where a solution exist and be unique. Finally, we implemented the geometry of the Cypher stent and the *pure traction* task when the stent is subjected to internal pressure force and bending force that bends it. In these tasks, we specifically observed the compliance of the stent in order to minimize this property when pressure force acts on it and maximize it when bending force acts on it.





# Životopis

Mirna Lovrić rođena je u Požegi 25.02.2000. godine, gdje pohađa osnovnu školu i Prirodoslovno-matematičku gimnaziju. 2018. godine upisuje preddiplomski studij matematike, inženjerski smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji završava 2021. godine te nakon toga upisuje diplomski studij primijenjene matematike.