Egzotične opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu

Paškov, Nora

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nora Paškov

EGZOTIČNE OPCIJE U BLACK-SCHOLES-MERTONOVOM MODELU

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, travanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima, koji su mi pružili najveću podršku.

Sadržaj

Uvod

Na financijskim tržištima osim nerizičnom i rizičnom imovinom, moguće je trgovati i financijskim izvedenicama ili derivatima koje nazivamo opcije. Opcije su s vremenom postale sve važniji instrument trgovanja na financijskim tržištima, a tome su veliki doprinos dali Fischer Black i Myron Scholes objavom rada "The Pricing of Options and Corporate Liabilites" 1973. godine te Robert C. Merton koji je rad kasnije nadopunio. Black i Scholes prvi su dali formulu koja opisuje cijenu opcije. Uvrštavanjem vrijednosti za parametre u njihovoj formuli, postalo je moguće na vrlo brz način odrediti cijenu neke financijske izvedenice. To je omogućilo razvoj tržišta opcija i olakšalo trgovanje istima.

Prvo poglavlje rada fokusirano je na teorijski uvod i predstavljanje ključnih pojmova i rezultata koji su osnova za ostatak rada. U drugom poglavlju predstavljamo Black-Scholes-Mertonov model, njegove pretpostavke i povijesni kontekst, završavajući s izvodom poznate Black-Scholes-Mertonove formule za cijenu opcije. Nakon toga, u trećem poglavlju predstavljaju se opcije i njihova osnovna obilježja. Poseban fokus stavljamo na složeniju vrstu opcija, egzotične opcije. Egzotične opcije mogu uključivati nestandardne temeljne instrumente, a na njihovu isplatu mogu utjecati različiti okidači. Posebno promatramo opcije s barijerom, *lookback* opcije i azijske opcije, komentirajući njihove karakteristike. Za opcije s barijerom i *lookback* opcije predstavljen je izvod formule za cijenu. Četvrto poglavlje se bavi azijskim opcijama te izvođenjem parcijalne diferencijalne jednadžbe koja opisuje cijenu azijske opcije. U posljednjem poglavlju rada provodi se izračun cijene azijske opcije u programskom jeziku R pomoću Monte Carlo simulacija.

Poglavlje 1

Brownovo gibanje i Itôv račun

Ovo poglavlje prezentira važne pojmove i rezultate potrebne za razumijevanje i praćenje ostatka rada.

Jedan od najbitnijih pojmova koje navodimo u ovom poglavlju je *Brownovo gibanje* koje koristimo za modeliranje cijene dionice. Kako bismo uveli pojam Brownovog gibanja, prethodno ćemo se podsjetiti pojmova poput *filtracije*, *martingala* i *slučajne šetnje*.

Kao kratak uvod, započinjemo s pojmovima iz slučajnih procesa koji predstavljaju osnovu pomoću koje gradimo ostalu teoriju prezentiranu u kasnijim odjeljcima.

1.1 Slučajni procesi

Definicija 1.1.1. *Neka je $T = \mathbb{Z}_+$ ili $T = [0, \infty]$ skup vremena. Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor te neka je za svaki $t \in T$ X_t slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F})$. Familija $X = (X_t : t \in T)$ naziva se slučajni proces.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor elementarnih događaja.*

a) Familija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in T)$ σ-podalgebri od $\mathcal{F}$ takvih da je $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ za svaki $s < t$ zove se filtracija.

b) Slučajni proces $X = (X_t : t \in T)$ zove se adaptiran s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in T)$ ako je za svaki $t \in T$ slučajna varijabla X_t $\mathcal{F}_t$-izmjeriva.

Definicija 1.1.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in T)$ filtracija. Adaptiran slučajni proces $X = (X_t : t \in T)$ je Markovljev proces ako za sve $s, t \in T$, $s < t$,* *i za sve Borel-izmjerive funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *postoji Borel-izmjeriva funkcija* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da je*

$$\mathbb{E}\left[f(X_t)|\mathcal{F}_s\right] = g(X_s).$$

Definicija 1.1.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor,* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in T)$ *filtracija,* $X = (X_t : t \in T)$ *slučajni proces. Pretpostavimo da je* X *adaptiran s obzirom na* $\mathcal{F}$ *te da je* $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ *za sve* $t \in T$. X *se zove martingal (preciznije,* $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$*-martingal, ako vrijedi*

$$\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] = X_s$$

za sve $s \le t$.

Sljedeći korak je definiranje pojma *skalirane slučajne šetnje*, ali pritom ćemo se prvo prisjetiti jednostavnijeg pojma *simetrične slučajne šetnje*.

Definicija 1.1.5. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $(X_n : n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom* $p = \frac{1}{2}$ *koje poprimaju vrijednosti -1 ili 1. Simetrična slučajna šetnja je slučajni proces* $M = (M_n : n \in \mathbb{N}_0)$ *definiran s* $M_0 = 0$ *te za* $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Definicija 1.1.6. *Skalirana slučajna šetnja za* $n \in \mathbb{N}$ *je slučajni proces* $B^{(n)} = (B_t^{(n)} : t \ge 0)$ *definiran s* $B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$ *za* $t \in T_n := \{t \ge 0 : tn \in \mathbb{Z}\}$. *Za* $t \notin T_n$ $B_t^{(n)}$ *linearno interpoliramo između vrijednosti* $ns \in \mathbb{Z}$ *i* $nu \in \mathbb{Z}$, *pri čemu je* s *točka najbliža točki* t *slijeva u* T_n, *a* u *točka najbliža točki* t *zdesna u* T_n.

Teorem 1.1.7. *(Centralni granični teorem za skaliranu slučajnu šetnju) Za* $t > 0$ *vrijedi*

$$B_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(D)} N(0, t).$$

Skica dokaza. Navedena je skica dokaza, za više detalja čitatelja upućujemo na [21, str. 5]. Za $t \in \mathbb{Q}$ postoji $(n_k : k \in \mathbb{N})$ niz prirodnih brojeva takav da $n_k \to \infty$ i $t \in T_{n_k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Primjenom centralnog graničnog teorema na niz parcijalnih suma $(M_{n_k t} : k \in \mathbb{N})$ slijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(B_t^{(n_k)} \le x) = \mathbb{P}(N(0, t) \le x). \tag{1.1}$$

Još je potrebno pokazati za $t \in \mathbb{R}$:

$$B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} \xrightarrow{(\mathbb{P})} 0. \tag{1.2}$$

Naime, prema Definiciji 1.1.6, a zatim i Definiciji 1.1.5 imamo da je:

$$B_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]} + \frac{1}{\sqrt{n}} (M_{[nt]+1} - M_{[nt]}) \cdot (nt - [nt]). \tag{1.3}$$

Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned} B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} (M_{[nt]+1} - M_{[nt]}) \cdot (nt - [nt]) \\ &= \frac{nt - [nt]}{\sqrt{n}} X_{[nt]+1} \\ &= a_n X_{[nt]+1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Iz zadnje jednakosti možemo zaključiti da je dovoljno dokazati da $a_n X_{[nt]+1} \xrightarrow{(D)} 0$, iz čega će slijediti $B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} \xrightarrow{(D)} 0$. $X_{[nt]+1}$ i X_1 su jednako distribuirane slučajne varijable, odnosno vrijedi:

$$(D) \lim_{n\to\infty} a_n X_{[nt]+1} = (D) \lim_{n\to\infty} a_n X_1. \tag{1.5}$$

Korištenjem [17, Teorem 13.18] pokaže se da vrijedi $a_n X_1 \xrightarrow{(D)} 0$, a iz činjenice da su $a_n X_1$ i $a_n X_{[nt]+1}$ jednako distribuirane, slijedi da $a_n X_{[nt]+1} \xrightarrow{(D)} 0$, odnosno $B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} \xrightarrow{(D)} 0$. Tada po [16, Teorem 8.13] zaključujemo da $B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} \xrightarrow{(\mathbb{P})} 0$. Kao posljedicu (1.1) dobivamo:

$$B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{n \cdot \frac{[nt]}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{[nt]} \xrightarrow[n\to\infty]{(D)} N(0, t). \tag{1.6}$$

Skalirana slučajna šetnja ima nezavisne priraste, odnosno za $m \in \mathbb{N}$ i $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_m$, $t_i \in T_n$ slučajne varijable

$$B_{t_1}^{(n)} - B_{t_0}^{(n)}, B_{t_2}^{(n)} - B_{t_1}^{(n)}, \ldots, B_{t_m}^{(n)} - B_{t_{m-1}}^{(n)}$$

su nezavisne. Uočimo da nezavisnost prirasta općenito ne mora vrijediti za $t_i \notin T_n$, ali može se pokazati da vrijedi za općenita racionalna vremena $0 = t_0 < t_1 < \ldots t_m$ za dovoljno veliki n (vidi [21, str. 4]). Slučajna varijabla $B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)}$ po distribuciji konvergira prema standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli, a slučajna varijabla $B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)}$ po vjerojatnosti konvergira prema 0. Po Slutskyjevom teoremu (vidi [20, str. 174]), nezavisnosti prirasta i relaciji (1.2) zaključujemo da vrijedi:

$$B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} + B_t^{(n)} - B_{\frac{[nt]}{n}}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{(D)} N(0, t),$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

Napomena. Alternativno, teorem smo mogli dokazati i pozivajući se na jednakost funkcije izvodnice momenata standardne normalne slučajne varijable i funkcije izvodnice momenata skalirane slučajne šetnje. (dokaz na [18, str. 89]).

1.2 Brownovo gibanje

Početkom 19.stoljeća, škotski botaničar Robert Brown promatrao je čestice peludi mikroskopom. Gotovo čitavo stoljeće nakon, kretanje koje je Brown pritom uočio poslužilo je Louisu Bachelieru pri modeliranju fluktuacija na tržištu dionica koje danas nazivamo *Brownovim gibanjem.*

Iako je nazvano prema Robertu Brownu, Brownovo gibanje prvi je matematički konstruirao američki matematičar Norbert Wiener te se njemu u čast ponekad naziva i *Wienerov proces* (vidi [12]).

Prethodno smo definirali pojam skalirane slučajne šetnje i dokazali da konvergira prema standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli.

Brownovo gibanje dobivamo kao limes skaliranih slučajnih šetnji kada $n \to \infty$.

Teorem 1.2.1. *[21, Teorem 1.5] (Donskerov teorem) Za niz skaliranih slučajnih šetnji* $(B^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ *i Brownovo gibanje* B *vrijedi*

$$B^{(n)} \xrightarrow{(D)} B, \quad n \to \infty.$$

Definicija 1.2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $B = (B_t : t \geq 0)$ *je Brownovo gibanje ako vrijedi:*

(i) *Putovi* $t \to B_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$*;*

(ii) $B_0 = 0$*;*

(iii) *Za sve* $m \in \mathbb{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni;

(iv) *Za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $B_t - B_s$ *normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom* $t - s$*.*

Promatrajući proces Brownovog gibanja B, bit će nam od koristi znati koje su informacije dostupne do trenutka t. Iz tog razloga uvodimo pojam *Brownovske filtracije*.

Definicija 1.2.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na tom prostoru. Filtracija za Brownovo gibanje je familija $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ σ-algebri koja zadovoljava*

(i) Za sve $0 \leq s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$;

(ii) Za svaki $t \geq 0$, B_t je $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla;

(iii) Za sve $0 \leq s < t$, prirast $B_t - B_s$ nezavisan je od $\mathcal{F}_s$.

Potrebno je navesti i karakterizaciju još jednog slučajnog procesa kojeg ćemo nazivati *eksponencijalni martingal* i bit će nam važan za dokazivanje rezultata u daljnjim poglavljima.

Teorem 1.2.4. *[21, Teorem 1.26] (Eksponencijalni martingal) Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ te neka je $\sigma > 0$. Slučajni proces definiran kao:*

$$Z_t = e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

je martingal.

Definicija 1.2.5. *Za Brownovo gibanje $B = (B_t : t \geq 0)$ definiramo proces maksimuma Brownovog gibanja kao*

$$M_t = \max_{s \in [0,t]} B_s, \quad t \geq 0.$$

Definicija 1.2.6. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $T > 0$ i $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Brownovo gibanje s driftom B^* definiramo kao*

$$B_t^* := B_t + \mu t, \quad t \geq 0. \tag{1.7}$$

Definicija 1.2.7. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $T > 0$ i $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ i B^* Brownovo gibanje s driftom definirano kao* (1.7). *Maksimum Brownovog gibanja s driftom je slučajni proces:*

$$M_t^* = \max_{s \in [0,t]} B_s^*, \quad t \geq 0.$$

Pomoću Brownovog gibanja (posebno, geometrijskog Brownovog gibanja) modelirat ćemo cijene opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu, što će bit fokus narednih poglavlja.

Sljedeće promatramo zajedničku gustoću dvodimenzionalnog slučajnog vektora (M_t^*, B_t^*).

Definicija 1.2.8. *Slučajna varijabla* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ *zove se vrijeme zaustavljanja ako za svaki* $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ *vrijedi*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Neka je $t \geq 0$ i $x > 0$ fiksiran. Definiramo τ_x kao prvo vrijeme kada Brownovo gibanje prijeđe razinu x, odnosno:

$$\tau_x := \inf\{s \geq 0 : B_s \geq x\}. \tag{1.8}$$

Želimo prebrojati puteve Brownovog gibanja za koje vrijedi da je vrijeme zaustavljanja $\tau_x \leq t$, odnosno putove Brownovog gibanja koji dosegnu razinu x prije ili u trenutku t.

Jedni od takvih puteva mogu biti oni koji dosegnu razinu x prije trenutka t, ali u trenutku t nalaze se ispod razine x, primjerice u $b \leq x$. Takve puteve možemo reflektirati s obzirom na pravac koji je paralelan s x-osi i prolazi točkom $(0, x)$, tako da se ti reflektirani putevi u trenutku t nalaze na razini $2x - b$. Navedeno je i grafički prikazano na slici niže, pomoću programskog jezika R.

Naposljetku dolazimo do važnog *principa refleksije* kojeg možemo izreći na sljedeći način:

$$\mathbb{P}(\tau_x \leq t, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2x - b), \quad b \leq x, \quad x > 0. \tag{1.9}$$

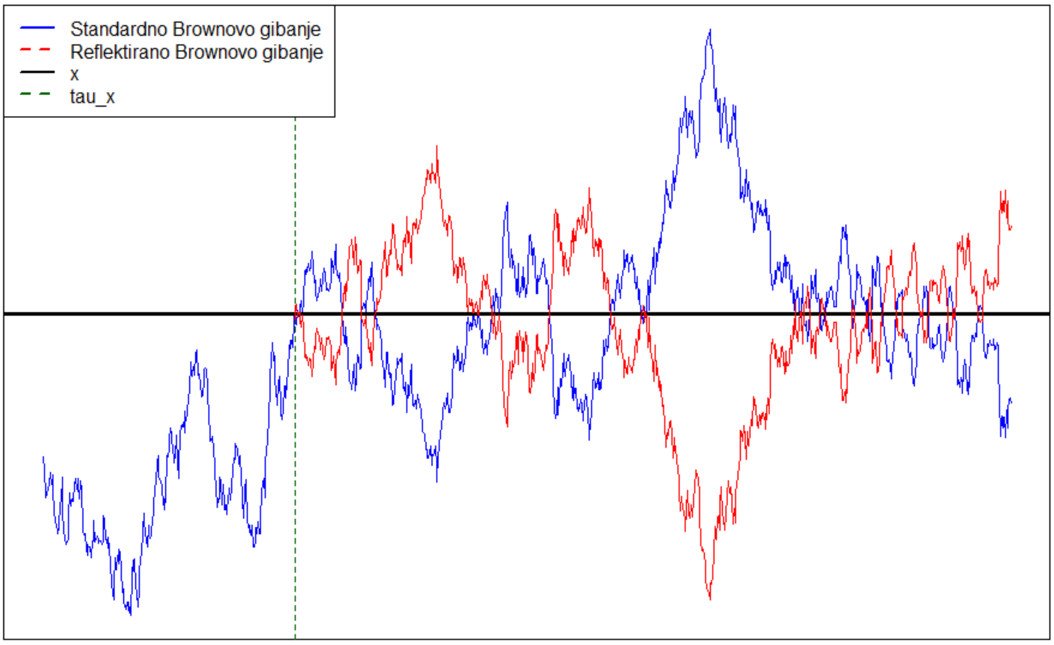
Neka je t_0 fiksno vrijeme. Definiramo slučajan proces $W = (W_t : t \geq 0)$ kao:

$$W_t = \begin{cases} B_t, & t \leq t_0 \\ 2B_{t_0} - B_t, & t > t_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Pokazati ćemo tvrdnju da je W Brownovo gibanje. Tvrdnju ćemo dokazati korištenjem Definicije 1.2.2. Za $t \leq t_0$ proces W jednak je Brownovom gibanju B pa neprekidnost trajektorija od W slijedi iz neprekidnosti trajektorija Brownovog gibanja B. Za $t > t_0$ je preslikavanje $x \mapsto 2B_{t_0}(\omega) - x$ neprekidno za svaki $\omega \in \Omega$. Također je $W_0 = B_0 = 0$. Za $t \leq t_0$ je $W_t \sim N(0, t)$, što slijedi iz $B_t \sim N(0, t)$ i $W_t = B_t$. Za $t > t_0$ je $W_t = 2B_{t_0} - B_t$ te vrijedi:

$$\mathbb{E}[W_t] = 2\mathbb{E}[B_{t_0}] - \mathbb{E}[B_t] = 0, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[W_t] &= \mathrm{Var}[2B_{t_0} - B_t] = \\ &= \mathrm{Var}[B_{t_0} - B_t + B_{t_0}] \\ &= \mathrm{Var}[B_{t_0} - B_t] + \mathrm{Var}[B_{t_0}] \\ &= t - t_0 + t_0 \\ &= t. \end{aligned} \tag{1.12}$$



Slika 1.1: Standardno Brownovo gibanje i reflektirano Brownovo gibanje obzirom na pravac $y = x$ za $n = 1000$

Budući da je W_t linearna kombinacija nezavisnih normalnih slučajnih varijabli, slijedi da je i sam normalna slučajna varijabla te iz (1.11) i (1.12) zaključujemo da je $W_t \sim N(0, t)$. Još je ostalo za provjeriti nezavisnost prirasta za svaki $m \in \mathbb{N}$ i $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$. Neka je $s \in \mathbb{N}$ i $t_s \leq t_0$. Tada nezavisnost prirasta procesa W slijedi iz nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja B. Još je ostala mogućnost da je $t_s > t_0$. Pretpostavimo da je $u \in \mathbb{N}$ takav da je $t_u \leq t_0$ i $t_{u+1} > t_0$. Za $i \leq u$ je

$$W_{t_i} - W_{t_{i-1}} = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}.$$

Za $u + 1 < i \leq m$ je:

$$W_{t_i} - W_{t_{i-1}} = 2B_{t_0} - B_{t_i} - (2B_{t_0} - B_{t_{i-1}}) = -(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Posljednje je ostalo provjeriti za $i = u + 1$, odnosno $i - 1 = u$:

$$W_{t_i} - W_{t_{i-1}} = 2B_{t_0} - B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = -(B_{t_i} - B_{t_0}) + (B_{t_0} - B_{t_{i-1}}).$$

Zbog nezavisnosti prirasta od B, slijedi nezavisnost prirasta od W. Time su dokazana sva svojstva iz Defincije 1.2.2 i zaključujemo da je slučajni proces W Brownovo gibanje.

Napomena. U (1.10) definirano je reflektirano Brownovo gibanje u fiksnom vremenu $t_0 > 0$, ali analogni rezultat vrijedi i za proces reflektiran u proizvoljnom slučajnom vremenu zaustavljanja za Brownovo gibanje B.

Relacija (1.9) govori nam da Brownovo gibanje B dosegne razinu x prije trenutka t i u trenutku t je manje ili jednako b s jednakom vjerojatnošću kao što (reflektirano) Brownovo gibanje dosegne ili prijeđe razinu $2x - b$ u trenutku t.

Teorem 1.2.9. *[18, Teorem 3.7.3] Za $t > 0$, zajednička gustoća dvodimenzionalnog slučajnog vektora (M_t, B_t) je*

$$f_{M_t,B_t}(m,b) = \frac{2(2m-b)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-b)^2}{2t}}, \quad b \le m, \quad m > 0.$$

Dokaz. Funkcija gustoće normalne slučajne varijable $X \sim N(0,t)$ u točki x glasi:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \tag{1.13}$$

Po Definiciji 1.2.2 vrijedi $B_t - B_0 \sim N(0,t)$, a budući je $B_0 = 0$, zaključujemo da je $B_t \sim N(0,t)$. Iz (1.13) dobivamo sljedeće jednakosti:

$$\mathbb{P}\{M_t \ge m, B_t \le b\} = \int_m^\infty \int_{-\infty}^b f_{M_t,B_t}(x,y)\,dydx, \tag{1.14}$$

$$\mathbb{P}\{B_t \ge 2m-b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2m-b}^\infty e^{\frac{-z^2}{2t}}\,dz. \tag{1.15}$$

Primjenjujući princip refleksije, izjednačujemo (1.14) i (1.15) te derivirajući po m i b redom, slijedi:

$$\int_m^\infty \int_{-\infty}^b f_{M_t,B_t}(x,y)\,dydx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{2m-b}^\infty e^{\frac{-z^2}{2t}}\,dz \tag{1.16}$$

$$-\int_{-\infty}^b f_{M_t,B_t}(m,y)\,dy = -\frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(2m-b)^2}{2t}} \tag{1.17}$$

$$-f_{M_t,B_t}(m,b) = -\frac{2(2m-b)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(2m-b)^2}{2t}}. \tag{1.18}$$

Iz posljednje jednakosti slijedi tvrdnja teorema. □

Dalje ćemo proučiti kvadratnu varijaciju te njena svojstva. Posebice nam je od važnosti kvadratna varijacija Brownovog gibanja jer je ona izvor volatilnosti cijene financijske imovine koja je modelirana Brownovim gibanjem.

Neka je $t > 0$ i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t\}$ particija intervala $[0, t]$. Najveću veličinu koraka:

$$\|\Pi\| := \max_{j=0,1,\ldots,n-1} (t_{j+1} - t_j)$$

nazivamo *dijametar particije*.

Definicija 1.2.10. *Neka je $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ funkcija. Definiramo kvadratnu varijaciju od f na intervalu [0,T] kao*

$$[f, f](T) := \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^2. \tag{1.19}$$

Slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ je konačne kvadratne varijacije ako postoji slučajan proces $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t : t \geq 0)$ takav da je:

$$\langle X \rangle_t = (\mathbb{P}) \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |X_{t_{j+1}} - X_{t_j}|^2. \tag{1.20}$$

Proces $\langle X \rangle$ nazivamo proces kvadratne varijacije od X.

Teorem 1.2.11. *[21, Teorem 1.14] Neka je B Brownovo gibanje. Tada je $\langle B \rangle_T = T$ za sve $T \geq 0$ gotovo sigurno.*

Prije nego što krenemo na dokaz, uvodimo pojmove *mjere*, *izmjerive funkcije* i *konvergencije po mjeri*.

Definicija 1.2.12. *Izmjeriv prostor je uređeni par $(X, \mathcal{F})$, pri čemu je $\mathcal{F}$ σ-algebra na X. Mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{F})$ je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ takva da je*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *μ je σ-aditivna, odnosno ako je $(A_n : n \in N)$ niz u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$, tada je*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Uređenu trojku $(X, \mathcal{F}, \mu)$ nazivamo prostorom mjere.

Definicija 1.2.13. *Neka su $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$ izmjerivi prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ reći ćemo da je $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-izmjeriva ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za sve $B \in \mathcal{G}$.*

Definicija 1.2.14. *Za $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $X \to \mathbb{R}$ kažemo da konvergira po mjeri prema izmjerivoj funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0. \tag{1.21}$$

U tom slučaju pišemo $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Bez dokaza navodimo i propoziciju pomoću koje se dokaže Teorem 1.2.11.

Propozicija 1.2.15. *[11, Propozicija 8.6] Neka je $p \in [1, +\infty]$, a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ i $f \subset L^p$ takvi da je $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Tada je i $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Dokaz Teorema 1.2.11. Navodimo glavnu ideju dokaza, za puni dokaz čitatelja upućujemo na [21, str. 13]. Za $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ particiju intervala $[0, T]$ označimo

$$Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)^2.$$

Dokaz se provodi tako da se dokaže da vrijedi

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0} \mathbb{E}\left[(Q_\Pi - T)^2\right] = 0.$$

Drugim riječima, dokaže se da niz Q_Π konvergira prema T u $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada primjenom Propozicije 1.2.15 slijedi da konvergencija u L^2 povlači konvergenciju po mjeri $\mathbb{P}$, odnosno da je:

$$T = (\mathbb{P}) \lim_{|\Pi \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)^2, \tag{1.22}$$

a po (1.20) je desna strana jednakosti u (1.22) jednaka je upravo $\langle X\rangle_t$, iz čega slijedi tvrdnja. □

Prethodni rezultat govori nam da Brownovo gibanje ima ne-nul kvadratnu varijaciju, što ukazuje na to da njegovi putevi nisu diferencijabilne funkcije (za dokaz vidi [12, Teorem 1.30]). Upravo taj zaključak dovest će nas do uvođenja stohastičkog diferencijalnog računa i Itôvog integrala.

Valja napomenuti da u običnom diferencijalnom računu općenito nećemo promatrati kvadratnu varijaciju. Razlog tomu je taj što većina funkcija ima neprekidne derivacije, stoga je njihova kvadratna varijacija nula.

Sljedeće ćemo definirati *geometrijsko Brownovo gibanje* i proučiti parametar *volatilnosti*.

Definicija 1.2.16. *Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante. Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajni proces $S = (S_t : t \geq 0)$ definiran s*

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t}. \tag{1.23}$$

Parametar α korišten u gornjem izrazu nazivamo *premija rizika*, a parametar σ *volatilnost*. Volatilnost je mjera fluktuacije cijene imovine i zahtjevno ju je procijeniti, budući da u praksi nije konstanta i neprestano se mijenja. Kada promatramo geometrijsko Brownovo gibanje, drift μ i volatilnost σ su najzanimljiviji parametri za promatrati, iako u kratkim vremenskim intervalima, veći utjecaj na imovinu ima volatilnost (za više o volatilnosti, vidi [24, str.65]).

Promotrit ćemo kako iz geometrijskog Brownovog gibanja S_t možemo aproksimirati parametar σ. Neka je $[T_1, T_2]$ vremenski interval takav da je $T_1 < T_2$ i odaberemo particiju tog intervala tako da je $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T_2$. Nadalje promatramo *log-povrate* te sumu kvadrata log-povrata koju nazivamo *realizirana volatilnost*:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} \right)^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)^2 + \\ 2\sigma \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(t_{j+1} - t_j). \tag{1.24}$$

Napomena. Za kvadratnu varijaciju Brownovog gibanja B_t po Teoremu 1.2.11 znamo da je ona jednaka T na intervalu $[0, T]$. Nadalje, prema [18, Napomena 3.4.5] slijedi da je kvadratna kovarijacija između Brownovog gibanja B_t i funkcije $f(t) = t$:

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(t_{j+1} - t_j) = 0. \tag{1.25}$$

Prema istoj napomeni možemo izračunati i kvadratnu varijaciju od $f(t) = t$:

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 = 0. \tag{1.26}$$

Vratimo se sada na (1.24). Kada je veličina koraka $||\Pi||$ mala, prema Teoremu 1.2.11 prvi izraz u (1.24) je približno:

$$\sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 \approx \sigma^2 \cdot (T_2 - T_1)$$

Prema prethodnoj napomeni zaključujemo da je drugi izraz u (1.24) jednak 0:

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \approx \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot 0$$

Jednako zaključujemo i za treći izraz u (1.24):

$$2\sigma\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \sum_{j=0}^{m-1} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(t_{j+1} - t_j) \approx 2\sigma\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot 0$$

Iz svega navedenog dobivamo sljedeće:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right) \approx \sigma^2 \cdot (T_2 - T_1)$$

odnosno,

$$\frac{1}{(T_2 - T_1)} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\log \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}}\right) \approx \sigma^2.$$

Iz posljednje relacije dobili smo način procjenjivanja parametra volatilnosti kod geometrijskog Brownovog gibanja. U teoriji možemo proizvoljno smanjiti veličinu koraka da bi dobili što bolju procjenu σ, ali u praksi to nije moguće budući da znamo što se događa s cijenom samo u trenutku transakcije, a između dvije transakcije nemamo informacija o cijeni.

1.3 Itôv račun

Kao što u običnom diferencijalnom računu postoje pravila poput lančanog pravila za deriviranje funkcija više varijabli ili parcijalne integracije, u ovom potpoglavlju uvodimo alat pomoću kojeg možemo računati sa stohastičkim diferencijalnim jednadžbama.

Cilj ovog potpoglavlja je definirati *Itôv integral* i razviti teoriju stohastičkog računa. Razvoj Itôvog integrala potreban nam je za daljnja poglavlja gdje ćemo provesti izvod

Black-Scholes-Mertonove formule za cijenu opcije. Pomoću tog alata objašnjavamo kako derivirati funkcije Brownovog gibanja $f(B_t)$, pri čemu pretpostavljamo da je funkcija $f \in C^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Nakon uvođenja Itôvog integrala, iskazat ćemo jedan od najbitnijih rezultata, Itôvu lemu, koja će biti od velike važnosti pri određivanju cijene opcija.

Pretpostavimo da je B_t standardno Brownovo gibanje s filtracijom $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ definirano kao u Definiciji 1.2.2.

Definicija 1.3.1. *Adaptiran slučajni proces $H = (H_t : t \in [0, T])$ zove se jednostavan proces ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$ i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva.

Definicija 1.3.2. *Za adaptirani jednostavni slučajni proces $H = (H_t : t \in [0, T])$ definiran kao u Definiciji 1.3.1 definiramo slučajan proces $I = (I_t : t \in [0, T])$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \left(B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t} \right). \tag{1.27}$$

Proces I zovemo Itôv integral jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo ga s

$$I_t = \int_0^t H_s \, dB_s = (H \cdot B)_t. \tag{1.28}$$

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, za dokaz vidi [21, str. 23].

Teorem 1.3.3. *[21, Teorem 2.5] (Itôva izometrija) Itôv integral definiran s* (1.27) *zadovoljava*

$$\mathbb{E}[I_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u^2 \, du\right] \tag{1.29}$$

Nakon uvođenja jednostavnih slučajnih procesa, okrećemo se proširivanju Itôvog integrala na prostor općih integranada. S $\mathcal{L}^2_{ad}$ označavamo familiju $\mathbb{F}$-adaptiranih slučajnih procesa $H = (H_t : t \in [0, T])$ za koje vrijedi:

$$\mathbb{E} \int_0^T H_t^2 \, dt < \infty.$$

Napomena. Prostor $\mathcal{L}^2_{ad}$ je vektorski prostor te uočavamo da je familija adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa iz Definicije 1.3.1 potprostor prostora $\mathcal{L}^2_{ad}$.

Sljedeći rezultat daje nam uvid u način na koji ćemo proširiti Itôv integral na opće integrande. Neka je $\Pi^{(n)} = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = t\}$ particija intervala $[0, t]$ i za $u \in \left[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}\right]$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$ neka je $H^{(n)}$ jednostavan proces takav da je $H_u^{(n)} = H_{t_j^{(n)}}$.

Lema 1.3.4. *[21, Lema 2.9] Za slučajan proces $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i niz $(H^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa vrijedi:*

$$\lim_{n\to\infty} \|H^{(n)} - H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T |H_t^{(n)} - H_t|^2 \, dt = 0,$$

odnosno $H^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}^2_{ad}} H$, $n \to \infty$.

Itôv integral procesa $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ u odnosu na Brownovo gibanje B definira se kao

$$\int_0^t H_u \, dB_u = (L^2) \lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)} \, dB_u. \tag{1.30}$$

Sljedećim raspisom opravdavamo postojanje limesa u (1.30). Za $n, m \in \mathbb{N}$ prema Lemi 1.3.4 vrijedi:

$$\begin{aligned}
\lim_{m,n\to\infty} \|H^{(n)} - H^{(m)}\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} &= \lim_{m,n\to\infty} \|H^{(n)} - H + H - H^{(m)}\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} \\
&\leq 2 \lim_{m,n\to\infty} \left(\|H^n - H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} + \|H^m - H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} \right) \\
&\leq 2 \left(\lim_{m,n\to\infty} \|H^n - H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} + \lim_{m,n\to\infty} \|H^m - H\|^2_{\mathcal{L}^2_{ad}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Tada zaključujemo da je niz $(H^{(n)} : n \in N)$ Cauchyjev niz u prostoru $\mathcal{L}^2_{ad}$. Primjenjujemo Teorem 1.3.3 na Itôv integral $((H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B)$. Najprije zbog linearnosti dobivamo:

$$((H^{(n)} - H^{(m)}) \cdot B) = H^{(n)} \cdot B - H^{(m)} \cdot B = I^{(n)} - I^{(m)}.$$

Nadalje imamo:

$$\mathbb{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t |H_t^{(n)} - H_t^{(m)}|^2 \, dt \right], \tag{1.31}$$

stoga iz Leme 1.3.4 slijedi:

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}[(I_t^{(n)} - I_t^{(m)})^2] = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.32}$$

Tada iz (1.32) slijedi da je $(I_t^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ u trenutku t Cauchyjev niz u $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Prostor L^2 je potpun prostor, iz čega zaključujemo da niz $(I_t^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ konvergira u L^2 i njegov limes označavamo kao:

$$I_t = \int_0^t H_u \, dB_u = (L^2) \lim_{n\to\infty} \int_0^t H_u^{(n)} \, dB_u. \tag{1.33}$$

Navodimo bez dokaza teorem koji nam daje bitna svojstva Itôvog integrala.

Teorem 1.3.5. *[21, Teorem 2.11] Neka je $T > 0$ te neka je $H = (H_t : t \in [0,T]) \in \mathcal{L}^2_{ad}$. Slučajan proces $I = (I_t : t \in [0,T])$ definiran formulom (1.30) ima sljedeća svojstva:*

(i) Funkcija $t \mapsto I_t$ je neprekidna na $[0,T]$ g.s.;

(ii) Za $H,K \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$((aH + bK) \cdot B)_t = a(H \cdot B)_t + b(K \cdot B)_t;$$

(iii) $\mathbb{E}[I_t^2] = \mathbb{E} \int_0^t H_u^2 \, du$;

(iv) Proces I je martingal obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$.

Definicija 1.3.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje s pridruženom filtracijom $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Slučajni proces $(X_t : t \geq 0)$ naziva se Itôv proces ako se može zapisati na sljedeći način:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_s \, ds + \int_0^t H_s \, dB_s,$$

pri čemu moraju biti zadovoljene pretpostavke:

- $X_0 \in \mathbb{R}$
- $(V_t : t \geq 0)$ *i* $(H_t : t \geq 0)$ *su* $\mathcal{F}_t$*-adaptirani procesi*
- $\int_0^T |V_s| \, ds < \infty$ $\mathbb{P}$*-g.s.*
- $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$.

Definicija 1.3.7. *Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dB_s$$

te neka je $K = (K_t : t \geq 0)$ adaptirani slučajni proces koji zadovoljava sljedeće uvjete:

$$\mathbb{E} \int_0^t K_s^2 H_s^2 \, ds < \infty$$

i

$$\int_0^t |K_s V_s| \, ds < \infty$$

za sve $t \geq 0$. Stohastički integral od K s obzirom na Itôv proces X definiran je formulom:

$$\int_0^t K_s \, dX_s = \int_0^t K_s H_s \, dB_s + \int_0^t K_s V_s \, ds.$$

Lema 1.3.8. *[9, Teorem 3.4.10] (Itôva lema) Neka je $(X_t : t \geq 0)$ Itôv proces*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dB_s$$

i $f \in C^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ funkcija. Tada je:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^{'}(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f^{''}(X_s) \, d\langle X, X \rangle_s$$

pri čemu je

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$$

te

$$\int_0^t f^{'}(X_s) \, dX_s = \int_0^t f^{'}(X_s) K_s \, ds + \int_0^t f^{'}(X_s) H_s \, dB_s$$

Ako je dodatno $f(t, x)$ funkcija koja ovisi i o vremenskoj komponenti t, te su derivacije $f_t(t, x), f_x(t, x), f_{xx}(t, x)$ neprekidne, tada je Itôva formula dana s:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s(s, X_s) \, ds + \int_0^t f_x(s, X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s) \, d\langle X, X \rangle_s.$$

Napomena. Itôva formula iz prethodnog teorema u diferencijalnom obliku glasi:

$$df(t, X_t) = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)dX_t \cdot dX_t, \tag{1.34}$$

pritom je u (1.34) oznaka $dX_t \cdot dX_t$ ekvivalentna oznaci $d\langle X, X \rangle_t$.

Za kraj navodimo i teorem koji nam tvrdi da je svaki martingal u odnosu na filtraciju generiranu Brownovim gibanjem Itô*v* integral obzirom na to Brownovo gibanje.

Teorem 1.3.9. *[21, Teorem 4.5] Neka je $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ filtracija generirana tim Brownovim gibanjem. Pretpostavimo da je $M = (M_t : 0 \leq t \leq T)$ martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ i vjerojatnost $\mathbb{P}$. Tada postoji adaptirani slučajni proces $\Gamma = (\Gamma_t : 0 \leq t \leq T)$ takav da je*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_s \, dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

1.4 Ekvivalentna martingalna mjera i Girsanovljev teorem

Za određivanje cijene opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu koristit ćemo *ekvivalentnu martingalnu mjeru*. Najvažniji rezultat ovog potpoglavlja je *Girsanovljev teorem*, pomoću kojeg ćemo određivati ekvivalentnu martingalnu mjeru u BSM modelu.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i Z nenegativna slučajna varijabla za koju vrijedi $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$ formulom:

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A Z(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) \tag{1.35}$$

za $A \in \mathcal{F}$.

Za mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ vrijedi sljedeća relacija:

$$\mathbb{E}^*[X] = \mathbb{E}[XZ].$$

Definicija 1.4.1. *Za realnu mjeru ν reći ćemo da je apsolutno neprekidna s obzirom na nenegativnu mjeru μ ako je $\nu(N) = 0$ za svaki $N \in \mathcal{F}$ za koji je $\mu(N) = 0$.*

Uočavamo da ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, tada je i $\mathbb{P}^*(A) = 0$ za $A \in \mathcal{F}$. Po Definiciji 1.4.1 $\mathbb{P}^*$ je apsolutno neprekidna u odnosu na $\mathbb{P}$ i pišemo $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$. Vrijedi i obrat, ako je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ i $\mathbb{P}^*(A) = 0$, slijedi da je i $\mathbb{P}(A) = 0$ zbog $Z > 0$. Tada je $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$ i kažemo da su mjere $\mathbb{P}$ i $\mathbb{P}^*$ *ekvivalentne*. Pod pretpostavkom da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$, vrijedi jednakost:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}^*\left[\frac{X}{Z}\right]. \tag{1.36}$$

Definicija 1.4.2. *Kažemo da je Z Radon-Nykodimova derivacija od $\mathbb{P}^*$ s obzirom na $\mathbb{P}$ i pišemo*

$$Z = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}.$$

Proces Radon-Nykodimove derivacije $(Z_t : t \in [0,T])$ *definira se kao*

$$Z_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t].$$

Lema 1.4.3. *[18, Lema 5.2.1] Neka su dani s i t takvi da je* $0 \leq s \leq t \leq T$ *i* Y $\mathcal{F}_t$*-izmjeriva slučajna varijabla. Tada vrijedi:*

$$\mathbb{E}^*[Y\,|\,\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s}\mathbb{E}[YZ_t\,|\,\mathcal{F}_s]. \tag{1.37}$$

Teorem 1.4.4. *[21, Teorem 4.4] (Girsanovljev teorem) Neka je* $B = (B_t : 0 \leq t \leq T)$ *Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *te neka je* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : 0 \leq t \leq T)$ *filtracija za to Brownovo gibanje. Za adaptiran slučajan proces* $\Theta = (\Theta_t : 0 \leq t \leq T)$ *takav da je*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Theta_s^2\, ds\right] < \infty$$

definiramo

$$Z_t = e^{-\{\int_0^t \Theta_u\, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_u^2\, du\}}, \quad Z = Z_T$$

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_u\, du.$$

Ako vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Theta_u^2 Z_u^2\, du\right] < \infty$$

tada je slučajni proces $B^* = (B_t^* : 0 \leq t \leq T)$ *Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost* $\mathbb{P}^*$ *definiranu kao* (1.35).

Teorem navodimo bez dokaza, za dokaz čitatelja upućujemo na [18, str. 212].

Navest ćemo teorem koji nam daje zajedničku gustoću dvodimenzionalnog slučajnog vektora (M_t^*, B_t^*), pri čemu je B_t^* Brownovo gibanje s driftom, a M_t^* proces maksimuma Brownovog gibanja s driftom. Dobiveni rezultat uvelike će nam pomoći kod promatranja opcija s barijerom i *lookback* opcija u kasnijim poglavljima.

Teorem 1.4.5. *[18, Teorem 7.2.1] Zajednička gustoća dvodimenzionalnog slučajnog vektora* (M_t^*, B_t^*) *je:*

$$\tilde{f}_{M_t^*, B_t^*}(m,b) = \frac{2(2m-b)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-b)^2}, \quad b \leq m, \quad m > 0.$$

Dokaz. Neka je $B_t^* = \alpha t + B_t$ Brownovo gibanje s driftom u odnosu na vjerojatnost $\mathbb{P}$. Definiramo eksponencijalni martingal Z_t kao u (1.2.4). Tada je:

$$Z_t^* = e^{-\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} = e^{-\alpha B_t^* + \frac{1}{2}\alpha^2 t}.$$

Prema Girsanovljevom teoremu, vrijedi da je B_t^* Brownovo gibanje s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ definiranu u (1.35).

Po Teoremu 1.2.9 vrijedi da je

$$f_{M_t^*, B_t^*}(m, b) = \frac{2(2m-b)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2m-b)^2}{2T}}, \quad b \leq m, \quad m > 0.$$

Da bi dobili zajedničku gustoću tog vektora s obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}$, koristeći jednakost (1.36) računamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_t, B_t) &= \mathbb{E}\left[1_{\{M_t \leq m, B_t \leq b\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[\frac{1}{Z_t} 1_{\{M_t \leq m, B_t \leq b\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[e^{\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 T} 1_{\{M_t \leq m, B_t \leq b\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{m} e^{\alpha y - \frac{1}{2}\alpha^2 T} f_{M_t^*, B_t^*}(x, y)\, dx dy
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je funkcija gustoće slučajnog vektora (M_t^*, B_t^*) obzirom na $\mathbb{P}^*$ jednaka

$$\begin{aligned}
f^*_{M_t^*, B_t^*}(m, b) &= e^{\alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T} \cdot f_{M_t^*, B_t^*}(m, b) \\
&= e^{\alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T} \cdot \frac{2(2m-b)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-b)^2} \\
&= \frac{2(2m-b)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-b)^2}
\end{aligned}$$

□

Mjere $\mathbb{P}^*$ i $\mathbb{P}$ iz Girsanovljevog teorema su ekvivalentne. Mjeru $\mathbb{P}^*$ nazivamo *mjera neutralna na rizik* ili *ekivalentna martingalna mjera*.

U radu ćemo promatrati oblik financijskog tržišta na kojem se trguje s dvije vrste financijske imovine, nerizična (novac) koja se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t : t \in [0, T])$ koju modeliramo kao $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces i rizična (dionica) čija je vrijednost $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces $S = (S_t : t \in [0, T])$.

Definiramo *proces diskontiranja* $D_t := e^{-\int_0^t r_s\, ds}$ te *diskontiranu vrijednost dionice* $\tilde{S} := D_t S_t$.

Definicija 1.4.6. *Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ je ekvivalentna martingalna mjera za $\mathbb{P}$ ako su $\mathbb{P}^*$ i $\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_T}$ ekvivalentne mjere i $\tilde{S} = (\tilde{S}_t : t \in [0, T])$ je $\mathbb{P}^*$-martingal.*

Poglavlje 2

Black-Scholes-Mertonov model

2.1 Razvoj i pretpostavke modela

U ovom poglavlju predstavljamo Black-Scholes-Mertonov model, jedan od najpoznatijih modela za izračun cijene opcije, uveden u radu [1]. Izračun formule za cijenu bit će predstavljen na primjeru *call* opcije, koja daje vlasniku opcije pravo da kupi imovinu do ili u trenutku dospijeća po određenoj cijeni. *Call* opcija jedna je od jednostavnijih oblika opcija, a o ostalim vrstama opcija detaljnije će biti riječ u idućem poglavlju.

Godine 1973. Fischer Black i Myron Scholes objavljuju rad s naslovom "The Pricing of Options and Corporate Liabilites" u kojem iznose formulu za određivanje cijene europske call opcije. Rad je kasnije upotpunio američki ekonomist Robert C. Merton, a za svoj su doprinos Scholes i Merton nagrađeni Nobelovom nagradom za ekonomiju 1997. godine.

Prije nego je objavljen cijenjeni rad, cijene opcija određivale su se pomoću tada poznatijih modela. Neke od njih navodimo u ovom potpoglavlju, a za detalje upućujemo na [5].

Bachelierov model predstavljen je 1900. godine. Proučavajući kretanje pariške burze, Louis Bachelier osmislio je model koji se zasniva na pretpostavci da cijena financijske imovine ima normalnu distribuciju, odnosno da vrijedi

$$dS_t = \sigma dB_t,$$

pri čemu je S_t cijena financijske imovine u trenutku t, a B_t Brownovo gibanje u trenutku t. Bachelier je među prvima analizirao matematička svojstva Brownovog gibanja kako bi modelirao stohastičke promjene u cijenama dionica.

Prema ovom modelu cijena call opcije dana je sljedećim izrazom (vidi [5, (1.26)]):

$$c = (S - K)N(d_1) + \sigma\sqrt{T}n(d_1), \tag{2.1}$$

pri čemu je $d_1 = \frac{S-K}{\sigma\sqrt{T}}$.

Uz spomenutu oznaku S za cijenu dionice, s K je označena izvršna cijena, T je oznaka za vrijeme do dospijeća (u godinama), a σ je parametar volatilnosti. $N(d_1)$ je oznaka za funkciju distribucije standardne normalne slučajne varijable u točki d_1, a $n(d_1)$ je oznaka za pripadnu funkciju gustoće:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy, \tag{2.2}$$

$$n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2}{2}}. \tag{2.3}$$

Navedene funkcije koriste se i pri izračunu veličina koje se u literaturi nazivaju ”Grci” (eng. ”Greeks”) pomoću kojih se mjeri osjetljivost cijene u odnosu na promjenu nekog od parametara funkcije. Za više informacija o ”Grcima”, vidi [7] ili [18].

Bachelier u svom modelu pretpostavlja da cijena imovine s pozitivnom vjerojatnošću poprima negativne vrijednosti. Pojava da je cijena imovine negativna sugerira da je vlasnik imovine zapravo dužnik. Situacije poput tih nisu poželjne na financijskim tržištima, stoga u praksi danas prevladava pretpostavka da je cijena imovine gotovo sigurno veća ili jednaka nuli.

Sprenkleov model pretpostavlja da cijena dionice ima log-normalnu distribuciju.

Definicija 2.1.1. *Za slučajnu varijablu $S > 0$ kažemo da ima log-normalnu distribuciju ako slučajna varijabla $Y = \log S$ ima normalnu distribuciju.*

Pretpostavka da cijena dionice ima log-normalnu distribuciju povezana je s tvrdnjom da je modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem zadanim kao u Definiciji 1.2.16. Logaritmirajući (1.23) slijedi:

$$\log S_t = \log S_0 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t. \tag{2.4}$$

Suma s desne strane jednakosti sastoji se od konstante $\log S_0$, determinističkog izraza $\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ i Brownovog gibanja B_t pomnoženog s konstantom σ. Po Definiciji 1.2.2, Brownovo gibanje ima normalnu distribuciju, stoga i cijela desna strana jednakosti ima normalnu distribuciju. Iz toga možemo zaključiti da je $\log S_t$ normalno distribuirana, a po Definiciji 2.1.1 slijedi da je cijena dionice S_t u trenutku t log-normalno distribuirana.

Slučajna varijabla koja je log-normalno distribuirana poprima samo pozitivne vrijednosti pa je time isključena mogućnost da cijena imovine poprimi negativnu vrijednost, što je bila jedna od pretpostavki u Bachelierovom modelu.

Prema [5, (1.30)], cijena call opcije u ovom modelu dana je kao:

$$c = Se^{\rho T}N(d_1) - (1-k)KN(d_2) \tag{2.5}$$

$$d_1 = \frac{ln\frac{S}{K} + (\rho + \frac{\sigma^2)}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{2.6}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \tag{2.7}$$

pri čemu je ρ prosječna stopa rasta cijene imovine, a k je oznaka za stupanj tržišne nesklonosti riziku.

U **Samuelsonovu modelu** pretpostavlja se da je cijena dionica modelirana kao Brownovo gibanje s driftom ρ kao u Definiciji 1.2.6. Prema ovom modelu cijena call opcije računa se po sljedećoj formuli (vidi [5, (1.32)]:

$$c = Se^{(\rho-\kappa)T}N(d_1) - Ke^{-\kappa T}N(d_2), \tag{2.8}$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + (\rho + \frac{\sigma^2)}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{2.9}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{2.10}$$

Samuelson promatra i što se događa kada je povrat na opciju κ veći od povrata na imovinu, odnosno drifta ρ. Jedna od situacija kada se to može dogoditi je ako tržište opciju poima riskantnijom od imovine pa investitori zahtijevaju da je $\kappa > \rho$. Međutim, u takvoj situaciji Samuelson tvrdi da se s pozitivnom vjerojatnošću može dogoditi da investitor odluči iskoristiti opciju prije dospijeća. Merton u radu ”Theory of Rational Option Pricing” to opovrgava, tvrdeći da za jednostavnu opciju na dionicu koja ne isplaćuje dividendu nikad neće biti povoljno iskoristiti opciju prije dospijeća, vidi [19, str. 19-20].

Formula koju su u radu prezentirali Black i Scholes bila je pogodna za dionice koje nisu isplaćivale dividendu. Merton prilagođava Black-Scholes formulu na način da je omogućio primjenu formule na dionice koje imaju unaprijed poznat prinos od dividendi.

Tako prilagođeni Black-Scholes-Mertonov model zasniva se na sljedećim pretpostavkama (vidi [2, str. 34]):

- Volatilnost imovine σ je konstantna kroz vrijeme.
- S imovinom se može trgovati neprekidno te njena cijena, u oznaci S, ima lognormalnu distribuciju.
- U svakom trenutku je moguća kratka prodaja temeljne imovine.
- Ne postoje transakcijski troškovi.
- Moguće je kupiti imovinu u bilo kojem udjelu.
- Novac se uvijek može posuditi po bezrizičnoj kamatnoj stopi, u oznaci r, koja je konstantna.
- Dionica isplaćuje konstantan prinos od dividendi.

Napomena.

(i) *Dividenda* je dio dobiti koje dioničko društvo isplaćuje dioničarima ukoliko ostvari profit. Dividenda se može, ali i ne mora isplaćivati, ovisno o poslovanju društva.

(ii) U prethodnim točkama spominje se pojam *kratke prodaje*. Investitori koji trguju imovinom u *kratkoj poziciji* očekuju ostvariti profit od pada vrijednosti imovine u vremenu do dospijeća. Nasuprot tome, investitori koji zauzimaju *dugu poziciju* u imovini očekuju profit od rasta vrijednosti imovine do dospijeća.

2.2 Black-Scholes-Mertonova funkcija

Neka je $T > 0$ i $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$. Promatramo neprekidni model financijskog tržišta na kojem postoje dvije vrste financijskih imovina, rizična i nerizična. Za razliku od diskretnih modela, kod neprekidnih modela financijskih tržišta vrijednosti mogu poprimiti bilo koji udio nekog realnog broja, stoga su nam zanimljiviji za proučavanje.

Nerizičnom imovinom smatramo financijsku imovinu u koju je sigurno ulagati, odnosno imovinu koja donosi siguran povrat. Nerizičnu imovinu najjednostavnije je poistovjetiti s novcem. Pretpostavljamo da se novac ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t : t \in [0, T])$ koja je modelirana kao $\mathbb{F}$-adaptirani proces. Međutim, sudionici na financijskom tržištu žele pomoću svojih ulaganja ostvariti što veći povrat. Iz tog razloga ulažu u *rizičnu imovinu*, od koje očekuju veći povrat nego ulaganjem u nerizičnu imovinu, unatoč tome što takva ulaganja dolaze uz određeni rizik od gubitka. Kao rizičnu imovinu promatrat ćemo dionice. Cijena dionice varira kroz vrijeme, stoga investitor kod ulaganja u dionice prihvaća rizik koji nosi fluktuacija cijene. Cijena dionice modelirana je kao $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces $S = (S_t : t \in [0,T])$. Pretpostavljamo da je cijena dionice modelirana kao geometrijsko Brownovo gibanje definirano u Definiciji 1.2.16, što je ujedno i rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{2.11}$$

pri čemu s α označavamo srednju stopu povrata, a sa σ volatilnost.

Jedan od osnovnih pojmova na financijskom tržištu je pojam *portfelja*.

Definicija 2.2.1. *Portfelj je $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \in [0,T])$, gdje je ϕ_t^0 količina novca u trenutku t, a ϕ_t^1 količina dionica u trenutku t.*

Pri izvodu Black-Scholes-Mertonove formule poslužit će nam diferencijalni oblik Itôve formule (1.34). Pretpostavimo da investitor drži portfelj ϕ čija je vrijednost X_t u trenutku t te da drži $\phi_t^1 = \Delta_t$ dionica, pri čemu je Δ_t slučajna varijabla adaptirana obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ za Brownovo gibanje B. Vrijednost koju drži u dionicama je onda $\Delta_t S_t$. Slijedi da je iznos koji investitor ima u novcu jednak ostatku vrijednosti portfelja diskontiranoj s kamatnom stopom r, odnosno $r(X_t - \Delta_t S_t)$. Računamo diferencijal vrijednosti portfelja X_t pomoću (2.11):

$$\begin{aligned} dX_t &= \Delta_t dS_t + r(X_t - \Delta_t S_t)dt \\ &= \Delta_t(\alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t) + r(X_t - \Delta_t S_t)dt \\ &= \Delta_t \alpha S_t dt + \Delta_t \sigma S_t dB_t + rX_t dt - r\Delta_t S_t dt \\ &= \Delta_t(\alpha - r)S_t dt + rX_t dt + \Delta_t \sigma S_t dB_t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Cijenu dionice diskontiramo s diskontnim faktorom e^{-rt} pa je diskontirana cijena dionice $e^{-rt}S_t$ te je analogno diskontirana vrijednost portfelja $e^{-rt}X_t$. Često će nam od koristi biti promatrati diskontiranu cijenu dionice i diskontiranu vrijednost portfelja čije diferencijale računamo koristeći Itôvu formulu navedenu u (1.34).

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}S_t) &= df(t, S_t) \\ &= f_t(t, S_t)dt + f_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t)dS_t dS_t \\ &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= (\alpha - r)e^{-rt}S_t dt + \sigma e^{-rt}S_t dB_t, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}X_t) &= df(t, X_t) \\
&= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dX_t dX_t \\
&= -re^{-rt}X_t dt + e^{-rt}dX_t \\
&= \Delta_t(\alpha - r)e^{-rt}S_t dt + \Delta_t\sigma e^{-rt}S_t dB_t \\
&= \Delta_t\left[e^{-rt}(\alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t) - re^{-rt}S_t dt\right] \\
&= \Delta_t(e^{-rt}dS_t - re^{-rt}S_t dt) \\
&= \Delta_t d(e^{-rt}S_t).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pritom četvrta jednakost u (2.14) slijedi uvrštavanjem (2.12), a peta jednakost uvrštavanjem (2.11).

Black-Scholes-Mertonovu funkciju izvodimo na primjeru europske call opcije. Neka je vrijeme dospijeća T i izvršna cijena K. Europska call opcija tada po dospijeću ima isplatu $C_T = (S_T - K)_+$. Neka je također $c(t, S_t)$ funkcija koja daje vrijednost call opcije u trenutku t. Računajući diferencijal funkcije $c(t, S_t)$ uz (2.11), slijedi:

$$\begin{aligned}
dc(t, S_t) &= c_t(t, S_t)dt + c_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}c_{xx}(t, S_t)dS_t dS_t \\
&= c_t(t, S_t) + c_x(t, S_t)(\alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2}c_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 dt \\
&= \left[c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\right]dt + \sigma S_t c_x(t, S_t)dB_t.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Analogno kao kod cijene dionice S_t i vrijednosti portfelja X_t određujemo diferencijal diskontirane cijene opcije $e^{-rt}c(t, S_t)$ služeći se s (1.34) i (2.15):

$$\begin{aligned}
d(e^{-rt}c(t, S_t)) &= df(t, c(t, S_t)) \\
&= f_t(t, c(t, S_t))dt + f_x(t, c(t, S_t))dc(t, S_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, c(t, S_t))dc(t, S_t)dc(t, S_t) \\
&= -re^{-rt}c(t, S_t)dt + e^{-rt}dc(t, S_t) \\
&= e^{-rt}\left[-rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\right]dt + \\
&\quad + e^{-rt}\sigma S_t c_x(t, S_t)dB_t.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Investitor ulaže u dionice i novac tako da je vrijednost portfelja X_t jednaka cijeni opcije $c(t, S_t)$:

$$e^{-rt}X_t = e^{-rt}c(t, S_t), \tag{2.17}$$

a iz toga slijedi i jednakost njihovih diskontiranih vrijednosti:

$$d(e^{-rt}X_t) = d(e^{-rt}c(t, S_t)), \tag{2.18}$$

te dodatno $X_0 = c(0, S_0)$. Integrirajući (2.18) na intervalu $[0, t]$ dobivamo:

$$e^{-rt}X_t - X_0 = e^{-rt}c(t, S_t) - e^0 c(0, S_0) = e^{-rt}c(t, S_t) - c(0, S_0). \tag{2.19}$$

Uz pretpostavljeni uvjet da je $X_0 = c(0, S_0)$ slijedi tražena jednakost (2.2). Sljedeće ćemo proučiti što nam jednakost daje tako da raspišemo (2.18) koristeći (2.14) i (2.16).

$$\begin{aligned}\Delta_t(d(e^{-rt}S_t)) = e^{-rt}&\left[-rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\right]dt+\\ &+ e^{-rt}\sigma S_t c_x(t, S_t)dB_t.\end{aligned}$$

Sređujemo prethodni izraz:

$$\begin{aligned}e^{-rt}(-r\Delta_t S_t dt + \Delta_t dS_t) = e^{-rt}&\left[-rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\right]dt+\\ &+ e^{-rt}\sigma S_t c_x(t, S_t)dB_t.\end{aligned}$$

S obe strane pojavljuje se izraz e^{-rt} koji možemo skratiti te korištenjem (2.11) slijedi:

$$\begin{aligned}&- r\Delta_t S_t dt + \Delta_t(\alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t) =\\ &= \left[-rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t)\right]dt + e^{-rt}\sigma S_t c_x(t, S_t)dB_t.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Izjednačimo izraze uz dB_t u (2.20) i dobijemo:

$$\Delta_t = c_x(t, S_t) \tag{2.21}$$

za sve $t \in [0, T]$.

Napomena. Pravilo koje smo upravo dobili u (2.21) naziva se *delta hedging* koje investitoru daje uputu kako zaštititi portfelj od malih promjena vrijednosti dionice. Budući da se vrijednost dionice mijenja kroz vrijeme, investitor mora vršiti rebalans portfelja kako bi i dalje vrijedio delta hedge, za detalje čitatelja upućujemo na [21, str. 52]

Sljedeće izjednačimo izraze uz dt u (2.20):

$$\Delta_t(\alpha - r)S_t = -rc(t, S_t) + c_t(t, S_t) + \alpha S_t c_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t, S_t). \tag{2.22}$$

Uvrštavanjem (2.21) slijedi:

$$c_x(t,S_t)(\alpha - r)S_t = -rc(t,S_t) + c_t(t,S_t) + \alpha S_t c_x(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t,S_t). \tag{2.23}$$

Kratimo izraz $\alpha S_t c_x(t,S_t)$ koji se pojavljuje na obe strane:

$$-rS_t c_x(t,S_t) = -rc(t,S_t) + c_t(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 c_{xx}(t,S_t). \tag{2.24}$$

Došli smo do *Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe* te nam je cilj pronaći neprekidnu funkciju $c(t,x)$ koja će biti rješenje jednadžbe:

$$c_t(t,x) + rxc_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 c_{xx}(t,x) = rc(t,x). \tag{2.25}$$

Dodatno, rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe (2.25) mora zadovoljavati terminalni uvjet:

$$c(T,x) = (x-K)_+. \tag{2.26}$$

Ukoliko portfelj u trenutku $t=0$ ima vrijednost $X_0 = c(0,S_0)$ te investitor koristi *delta hedging* pravilo iskazano u (2.21), tada je zadovoljena (2.20), iz koje možemo dobiti (2.18) za sve $t \in [0,T]$. Puštajući $t \to T$, slijedi da je $X_T = c(T,S_T) = (S_T - K)_+$. Dobivena jednakost govori nam da bez obzira kojim putem ide cijena dionice, po dospijeću opcije vrijednost portfelja usklađena je s isplatom opcije.

Osim terminalnog uvjeta, (2.25) je parcijalna diferencijalna jednadžba za koju moramo odrediti i granične uvjete za $x=0$ i $x=\infty$ kako bi ona imala rješenje. Kada u (2.25) uvrstimo $x=0$, dobijemo:

$$c_t(t,0) = rc(t,0),$$

iz čega rješavanjem diferencijalne jednadžbe i korištenjem činjenice da je za $t=T$ $c(T,0) = (0-K)_+ = 0$, slijedi:

$$c(t,0) = e^{rt}c(0,0) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Kada $x \to \infty$, cijena opcije raste neograničeno. Jedan način za definiranje graničnog uvjeta za $x=\infty$ je:

$$\lim_{x\to\infty}[c(t,x) - (x - e^{-r(T-t)}K)] = 0.$$

Uz tako određene granične uvjete, rješenje Black-Scholes-Mertonove jednadžbe (2.25) nazivamo *Black-Scholes-Mertonova funkcija* i ona je jednaka:

$$\mathrm{BSM}(\tau;x;K;r;\sigma) = xN(d_+(\tau,x)) - Ke^{-rt}N(d_-(\tau,x)). \tag{2.27}$$

Pri tome je

$$d_\pm(\tau,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]. \tag{2.28}$$

2.3 Alternativni izvod Black-Scholes-Mertonove funkcije

Uz prethodno navedenu, postoji još tehnika za izvod Black-Scholes-Mertonove funkcije (2.27). U ovom potpoglavlju predstavljamo jedan od njih (vidi [7, str. 329-331]). Jedno od svojstava Black-Scholes-Mertonove funkcije je to da ne uključuje varijable na koje utječu investitorova sklonost riziku. Budući da su sve varijable Black-Scholes-Mertonove funkcije neutralne na rizik, možemo zaključiti da tada sklonost riziku ne može ni utjecati na rješenje. Pretpostavka neutralnosti na rizik je alat kojim dolazimo do tražene formule, ali rješenje koje dobijemo vrijedi neovisno o neutralnosti na rizik investitora.

Neka je V slučajna varijabla koja ima log-normalnu distribuciju te neka je standardna devijacija od $\log V$ jednaka w. Pokazat ćemo da vrijedi sljedeći rezultat:

$$\mathbb{E}[\max(V-K,0)] = \mathbb{E}[V]N(d_1) - KN(d_2), \tag{2.29}$$

pri čemu je

$$d_1 = \frac{\log\left[\frac{\mathbb{E}[\mathbb{V}]}{K}\right] + \frac{w^2}{2}}{w}, \tag{2.30}$$

$$d_2 = \frac{\log\left[\frac{\mathbb{E}[\mathbb{V}]}{K}\right] - \frac{w^2}{2}}{w}. \tag{2.31}$$

Definiramo s $f(V)$ funkciju gustoće slučajne varijable V. Tada vrijedi:

$$\mathbb{E}[\max(V-K,0)] = \int_K^{\infty} (V-K) f(V)\, dV. \tag{2.32}$$

Neka je m očekivanje slučajne varijable $\log V$. Funkcija izvodnica momenata normalne slučajne varijable s očekivanjem m i varijancom w^2 jednaka je:

$$M_Y(t) = e^{mt + \frac{w^2 t^2}{2}}, \tag{2.33}$$

pri čemu je $Y = \log V$. Deriviranjem (2.33) te uzimanjem njezine vrijednosti u točki $t = 0$ dobivamo očekivanje slučajne varijable $\log V$ (za dokaz vidi [13, str. 369]). Zaista, koristeći (2.33) slijedi:

$$M_Y'(0) = m = \mathbb{E}[\log V],$$

pri čemu je m:

$$m = \log[\mathbb{E}[V]] - \frac{w^2}{2}. \tag{2.34}$$

Naime, jer je V log-normalno distribuirana slučajna varijabla, iz očekivanja slučajne varijable V izražavamo m:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V] &= e^{m+\frac{w^2}{2}}, \\
\log \mathbb{E}[V] &= m + \frac{w^2}{2}, \\
m &= \log \mathbb{E}[V] - \frac{w^2}{2}.
\end{aligned}$$

Definiramo varijablu $Z = \frac{\log V - m}{w}$. Tada varijabla Z ima standardnu normalnu distribuciju. Označimo s $g_Z(z)$ funkciju gustoće varijable Z,

$$g_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Koristeći definiciju slučajne varijable Z i (2.32) slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\max(V-K,0)] &= \int_{\frac{\log K - m}{w}}^{\infty} (e^{zw+m} - K) g_Z(z)\, dz \\
&= \int_{\frac{\log K - m}{w}}^{\infty} e^{zw+m} g_Z(z)\, dz - K \int_{\frac{\log K - m}{w}}^{\infty} g_Z(z)\, dz.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Izraz pod prvim integralom raspišemo:

$$\begin{aligned}
e^{zw+m} g_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(-z^2+2zw+2m)}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-w)^2+2m+w^2}{2}} \\
&= \frac{e^{m+\frac{w^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-w)^2}{2}} \\
&= e^{m+\frac{w^2}{2}} g_Z(z-w),
\end{aligned}$$

što uvrštavajući nazad u (2.35) daje:

$$\mathbb{E}[\max(V-K,0)] = e^{m+\frac{w^2}{2}} \int_{\frac{\log K - m}{w}}^{\infty} g_Z(z-w)\, dz - K \int_{\frac{\log K - m}{w}}^{\infty} g_Z(z)\, dz. \tag{2.36}$$

Prvi integral u (2.36) možemo zapisati na drugi način kao:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\log K - m}{w}}^{\infty} g_Z(z-w)\, dz &= 1 - N\left(\frac{\log K - m}{w} - w\right) \\
&= N\left(\frac{-\log K + m}{w} + w\right),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

pri čemu je s N označena funkcija distribucije standardne normalne razdiobe, definirane kao u (2.2). Supstituirajući m s (2.34), dobijemo:

$$N\left(\frac{-\log K + m}{w} + w\right) = N\left(\frac{\log \frac{\mathbb{E}[\mathbb{V}]}{K} + \frac{w^2}{2}}{w} + w\right) = N(d_1), \tag{2.38}$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz (2.30). Analognim računom dobije se da je

$$\int_{\frac{\log K - m}{w}}^{\infty} g_Z(z)\, dz = N(d_2).$$

Uvrštavanjem u (2.36) dobijemo:

$$\mathbb{E}[\max(V - K, 0)] = e^{m + \frac{w^2}{2}} N(d_1) - KN(d_2), \tag{2.39}$$

iz kojeg supstituirajući m s (2.34), dobijemo upravo izraz (2.29) koji smo trebali pokazati.

Prethodno pokazani rezultat bit će nam od pomoći pri daljnjem izvodu. Nadalje, promatramo call opciju na dionicu s vremenom dospijeća T, izvršnom cijenom K, volatilnosti σ te početnom cijenom dionice S_0. Cijena opcije tada je:

$$c = e^{-rT}\mathbb{E}^*[\max(S_T - K, 0)], \tag{2.40}$$

pri čemu očekivanje promatramo obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$ (za više o mjeri neutralnoj na rizik vidi Poglavlje 1.4). Pretpostavljamo ponovno da cijena dionice S ima log-normalnu distribuciju. U trenutku $t = T$ cijena dionice $\log S_T$ ima normalnu distribuciju s očekivanjem $\log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ i varijancom $\sigma^2 T$. Također vrijedi da je $\mathbb{E}^*[S_T] = S_0 e^{rT}$. Prema (2.34) i (2.39) tada je cijena opcije iz (2.40) jednaka:

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT}[S_0 e^{rT} N(d_1) - KN(d_2)] \\ &= S_0 N(d_1) - Ke^{rT} N(d_2), \end{aligned} \tag{2.41}$$

a prema (2.30) i (2.31) veličine d_1 i d_2 jednake:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log\left[\frac{\mathbb{E}^*[S_T]}{K}\right] + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\log\left[\frac{S_0}{K}\right] + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\log\left[\frac{\mathbb{E}^*[S_T]}{K}\right] - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\log\left[\frac{S_0}{K}\right] + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Uvrštavanjem (2.42) i (2.43) u (2.41) dobijemo Black-Scholes-Mertonovu funkciju kao u (2.27).

Poglavlje 3

Opcije s barijerom i lookback opcije

3.1 Općenito o opcijama

Kao i u prethodnom poglavlju, promatramo financijsko tržište na kojem postoje nerizična i rizična imovina, odnosno novac i dionice. Vremenom su se na tržištu počeli pojavljivati složeniji ugovori danas poznatiji kao *financijske izvedenice* ili *financijski derivati* koji sudionicima pružaju veću mogućnost prilagodbe poslova svojim investicijskim potrebama. Prema [23], naziv *izvedenica* dolazi od činjenice što se njihova vrijednost (cijena) izvodi iz vrijednosnog papira na koji su napisani.

Opcija je vrsta financijske izvedenice koja vlasniku opcije daje pravo, ali ne i obvezu kupiti ili prodati financijsku imovinu do ili u trenutku dospijeća po unaprijed utvrđenoj cijeni. *Call opciju* prethodno smo spominjali u potpoglavlju 2.1. *Put opcija* je vrsta opcija koja kupcu daje pravo, ali ne i obvezu da proda imovinu na koju je opcija napisana po unaprijed utvrđenoj cijeni. Prije 1973., opcijama se trgovalo samo na "over-the-counter" tržištu uz posredovanje brokera pri transakciji između prodavatelja i kupca. Danas se opcijama trguje na gotovo svim burzama diljem svijeta. Tržišta financijskih izvedenica privlače raznolike sudionike i jako su likvidna. Drugim riječima, na tržištima financijskih izvedenica vrlo je lako kupiti ili prodati imovinu. Više nisu ograničene samo na dioničke opcije, već postoje i opcije napisane na obveznice, valute, kamatne stope i ostalo.

Pri sklapanju opcije sudjeluju dvije strane: kupac opcije, koji ima pravo, ali ne i obvezu iskoristiti opciju po dospijeću i pisac opcije, koji mora isporučiti ili kupiti imovinu na koju je opcija napisana, ukoliko je potrebno. Opcije se koriste najviše iz dva razloga: špekuliranje i zaštita od rizika (eng. *hedging*). Kako bi uspješno zaštitio svoj portfelj, pisac opcije mora naći način za investiranje profita od prodaje opcije tako da završna vrijednost portfelja bude takva da investitor može podmiriti sve svoje obveze. Takav hedge je samofinancirajući. Drugim riječima, svaka je prilagodba portfelja financirana samo iz profita ostvarenog od prodaje (vidi [4, str. 1112]).

Prema tome kada možemo iskoristiti opciju, razlikujemo dvije vrste. *Američke opcije* su opcije koje mogu biti iskorištene u bilo kojem trenutku do dospijeća. *Europske opcije* su opcije koje mogu biti iskorištene samo po dospijeću.

Osim kategorizacije po vremenu kada možemo iskoristiti opciju, opcije razlikujemo i po ovisnosti isplate o cijeni imovine na koju je opcija napisana. Pojam *egzotične opcije* ili *opcije ovisne o putu* označava opcije čija vrijednost ne ovisi samo o cijeni imovine po dospijeću, već ovisi i o cijeni imovine u vremenima do dospijeća. Opcije koje nisu ovisne o putu imati će istu isplatu bez obzira na to kako se cijena imovine mijenjala do dospijeća. Stvaranje nekog instrumenta kao što je opcija ovisna o putu bilo je privlačno sudionicima na finacijskim tržištima iz više razloga. One daju mogućnost ostvarivanja profita uslijed promjene cijene imovine te u određenim situacijama dopuštaju investitorima koji imaju informacije o rasponu cijene da iskoriste svoje znanje u svrhu ostvarivanja profita (vidi [4, str. 1111]). U sljedećim potpoglavljima predstavljamo dvije vrste egzotičnih opcija, *opcije s barijerom* i *lookback opcije*.

3.2 Opcije s barijerom

Opcije s barijerom su opcije koje se aktiviraju ili prestanu vrijediti ako cijena dionice prijeđe neki unaprijed zadani prag ili *barijeru* (prema [23, Primjer 3.4.6]). U praksi ih sudionici na financijskim tržištima preferiraju, najviše iz razloga što su nerijetko povoljnije od običnih opcija. Postoje četiri vrste opcija s barijerom: *down-and-out*, *down-and-in*, *up-and-out* i *up-and-in*. Down-and-out je vrsta opcije koja prestane vrijediti ako vrijednost imovine padne ispod barijere u vremenu do dospijeća, dok je up-and-in vrsta opcije koja se aktivira ako vrijednost imovine dosegne barijeru u vremenu do dospijeća. Analogno se definiraju i ostale dvije vrste opcija s barijerom.

Haug u [5] navodi i postojanje posebne vrste, a to su opcije s dvostrukom barijerom. Takve opcije imaju donju i gornju barijeru te se mogu aktivirati ili prestati vrijediti ukoliko cijena imovine dosegne donju ili gornju barijeru u vremenu do dospijeća. Za više o takvim opcijama, vidi [3].

Opcije s barijerom su u određenom smislu nalik europskim i američkim opcijama. Slične su američkim opcijama u tome što njihova vrijednost ovisi o kretanju cijene imovine u povijesti do dospijeća. Unatoč tome, lakše su za procijeniti od američkih opcija, budući da je kritična vrijednost opcije unaprijed određena s barijerom. Kod američkih opcija, kritična vrijednost nije unaprijed određena, već ona varira ovisno o vrijednosti imovine u određenom trenutku. Zato za razliku od američkih opcija, za cijenu opcije s barijerom postoji eksplicitni izraz za cijenu opcije. Za više detalja, čitatelja upućujemo na [15].

U sljedećem odjeljku promatramo up-and-out call opciju s barijerom, koja prestaje vrijediti ako vrijednost imovine dosegne barijeru. Izračun se analogno provodi i za ostale vrste opcija s barijerom.

Izračun cijene up-and-out call opcije

Pretpostavimo da je financijska imovina modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem kao u (2.11) uz mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$ (vidi Poglavlje 1.4). Označimo s K cijenu izvršenja, s H barijeru i s T vrijeme dospijeća. Neka je $K < H$. Rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (2.11) je:

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \tag{3.1}$$

Zamjena vjerojatnosti $\mathbb{P}$ s vjerojatnosti neutralnom na rizik $\mathbb{P}^*$ mijenja srednju stopu povrata na način da $\mathbb{P}^*$ veću težinu stavlja na putove Brownovog gibanja s nižim povratima. Stoga se srednja stopa povrata smanjuje s α na r (vidi [21, str. 65]). Uvodimo supstitucije:

$$\theta = \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \tag{3.2}$$

$$B_t^* = \theta t + B_t. \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) slijedi:

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t^*}. \tag{3.4}$$

Neka je M^* proces maksimuma Brownovog gibanja B^* definiran kao u (1.2.5). Tada je:

$$\max_{t\in[0,T]} S_t = S_0 e^{\sigma M_t^*}. \tag{3.5}$$

Opcija prestaje vrijediti ako je $\max_{t\in[0,T]} S_t > H$. U protivnom je isplata jednaka $S_T - K$ ako je $S_T > K$, a inače 0. Matematički to možemo napisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} C_T &= (S_T - K)\, 1_{\{S_T > K,\, \max S_T \le H\}} \\ &= \left(S_0 e^{\sigma B_T^*} - K\right) 1_{\{S_0 e^{\sigma B_T^*} > K,\, S_0 e^{\sigma M_T^*} \le H\}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Radimo sljedeću supstituciju:

$$k = \frac{1}{\sigma} \log \frac{K}{S_0}, \tag{3.7}$$

$$x = \frac{1}{\sigma} \log \frac{H}{S_0}. \tag{3.8}$$

Iz toga slijedi da je isplata u trenutku T jednaka:

$$C_T = (S_T - K) \, 1_{\{B_T^* > k, \, M_T^* \le x\}}. \tag{3.9}$$

Cijena up-and-out call opcije s barijerom zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu jednadžbu (2.25) koju je potrebno doraditi na način da se uzme u obzir i barijera, odnosno uvjet da cijena imovine u vremenu do dospijeća ne dosegne barijeru. Iskazat ćemo teorem koji nam to potvrđuje, a za dokaz upućujemo na [18].

Teorem 3.2.1. *[18, Teorem 7.3.1] Neka je $c(t, x)$ cijena up-and-out call opcije s barijerom koja u trenutku t nije dosegnula barijeru H i u trenutku t je cijena $S(t) = x$. Tada $c(t, x)$ zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu jednadžbu*

$$c_t(t, x) + rxc_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 c_{xx}(t, x) = rc(t, x) \tag{3.10}$$

zajedno s graničnim uvjetima

$$c(t, 0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.11}$$
$$c(t, H) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.12}$$
$$c(T, x) = (x - K)_+, \quad 0 \le x \le b. \tag{3.13}$$

Napomena. Budući da pretpostavljamo da barijera H nije dosegnuta u trenutku t, up-and-out call opcija s barijerom iz iskaza Teorema 3.2.1 zapravo nije prestala vrijediti te se ponaša kao obična europska call opcija.

Cijena neutralna na rizik up-and-out call opcije s isplatom C_T kao u (3.9) u trenutku $t = 0$ dana je s:

$$C_0 = \mathbb{E}^* \left[e^{-rT} C_T \right], \tag{3.14}$$

a pritom za izračun cijene koristimo Teorem 1.4.5. Pretpostavimo da su k i x definirano redom kao u (3.7) i (3.8) te da je $S_0 \le H$, a zato i $x > 0$. Integriranjem na području $\{(m, b) : k \le b \le x, \, b_+ \le m \le x\}$ obuhvaćen je i slučaj $k \ge 0$ i $k < 0$ (vidi [18, str. 304]).

Slijedi da je cijena C_0 jednaka sljedećem:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \int_k^x \int_{b_+}^x e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma b} - K\right) f^*_{M_t^*, B_t^*}(m,b)\, dm\, db \\
&= \int_k^x \int_{b_+}^x e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma b} - K\right) \frac{2(2m-b)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-b)^2}\, dm\, db \\
&= -\int_k^x e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma b} - K\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-b)^2}\Big|_{b+}^x\, db \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x \left(S_0 e^{\sigma b} - K\right) e^{-rT + \sigma b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T} b^2}\, db - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x \left(S_0 e^{\sigma b} - K\right) e^{-rT + \sigma b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2x-b)^2}\, db \\
&= S_0 I_1 - K I_2 - S_0 I_3 + K I_4.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Pri tome definiramo I_1, I_2, I_3 i I_4 kao:

$$
I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{\sigma b - rT + \alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T} b^2}\, db, \tag{3.16}
$$

$$
I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{-rT + \alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T} b^2}\, db, \tag{3.17}
$$

$$
I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{\sigma b - rT + \alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2x-b)^2}\, db, \tag{3.18}
$$

$$
I_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{-rT + \alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2x-b)^2}\, db. \tag{3.19}
$$

Pogledajmo integral I_1.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{\sigma b - rT + \alpha b - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T} b^2}\, db \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{(\sigma+\alpha) b - (r + \frac{1}{2}\alpha^2) T - \frac{1}{2T} b^2},
\end{aligned}
$$

te uz supstitucije $\gamma := \sigma + \alpha$ i $\beta := (-r - \frac{1}{2}\alpha^2)T$ slijedi:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{\gamma b + \beta - \frac{1}{2T} b^2}\, db \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^x e^{-\frac{1}{2T}(b - \gamma T)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta}\, db.
\end{aligned}
$$

Supstitucijom $y = \frac{b-\gamma T}{\sqrt{T}}$, odnosno $b - \gamma T = y\sqrt{T}$ dobijemo:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T+\beta} \int_{\frac{k-\gamma T}{\sqrt{T}}}^{\frac{x-\gamma T}{\sqrt{T}}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy \\
&= e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T+\beta} \left[N\left(\frac{x-\gamma T}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{k-\gamma T}{\sqrt{T}}\right) \right] \qquad (3.20) \\
&= e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T+\beta} \left[N\left(\frac{-k+\gamma T}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{-x+\gamma T}{\sqrt{T}}\right) \right].
\end{aligned}
$$

Uočimo da je onda $\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta = 0$. Neka je δ funkcija definirana kao:

$$\delta_{\pm}(\tau, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left(\log s + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\tau \right). \qquad (3.21)$$

Koristeći (3.7), (3.8) i (3.21) integral I_1 postaje:

$$I_1 = N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{H}\right)\right). \qquad (3.22)$$

Sličnim izračunom dolazimo i do izraza za integrale I_2, I_3, i I_4, gdje kod definiranja integrala I_2 koristimo funkciju iz (2.28).

$$I_2 = e^{-rT} \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(d_-\left(T, \frac{S_0}{H}\right)\right) \right], \qquad (3.23)$$

$$I_3 = \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \left[N\left(\delta_+\left(T, \frac{H^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{H}{KS_0}\right)\right) \right], \qquad (3.24)$$

$$I_4 = e^{-rT} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1} \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{H^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(T, \frac{H}{KS_0}\right)\right) \right]. \qquad (3.25)$$

Uvrštavanjem (3.22), (3.23), (3.24) i (3.25) u (3.15) dobivamo eksplicitni izraz za cijenu up-and-out call opcije s barijerom:

$$
\begin{aligned}
C_0 = S_0 &\left[N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{H}\right)\right) \right] - Ke^{-rT} \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(d_-\left(T, \frac{S_0}{H}\right)\right) \right] - \\
&- S_0 \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \left[N\left(\delta_+\left(T, \frac{H^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{H}{KS_0}\right)\right) \right] + \\
&+ Ke^{-rT} \left(\frac{S_0}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1} \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{H^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(T, \frac{H}{KS_0}\right)\right) \right]. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Pod uvjetom da opcija nije prestala vrijediti prije trenutka t, prema Teoremu 3.2.1 dobivamo da se cijena up-and-out call opcije s barijerom u trenutku t može zapisati pomoću funkcije $c(t, x)$ koja zadovoljava granične uvjete (3.11), (3.12) i (3.13), a dobiva se tako da u (3.26) uvrstimo $S_0 = x$ te supstitucijom vremena dospijeća T s $\tau = T - t$:

$$
\begin{aligned}
c(t,x) = x\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{H}\right)\right)\right] - Ke^{-r\tau}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(d_-\left(\tau, \frac{x}{H}\right)\right)\right] - \\
- x\left(\frac{x}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{H^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{H}{Kx}\right)\right)\right] + \\
+ Ke^{-r\tau}\left(\frac{x}{H}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{H^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(T, \frac{H}{Kx}\right)\right)\right]. \quad (3.27)
\end{aligned}
$$

3.3 Lookback opcije

Lookback opcije su financijske izvedenice čija isplata ovisi o ekstremu kojeg cijena imovine postigne u vremenu do dospijeća. Kako je i navedeno u [25, Poglavlje 15], lookback opcije daju mogućnost investitoru da kupi imovinu po niskoj cijeni te ju zatim proda po visokoj cijeni i time ostvari profit.

Neka je K cijena izvršenja (eng. *strike*) lookback opcije. Cijenu izvršenja možemo unaprijed odrediti i fiksirati za čitavo vrijeme do dospijeća. Takve opcije nazivaju se *fixed-strike* opcije. Ukoliko cijenu izvršenja ne odredimo unaprijed, već dopustimo da se ona odredi u budućnosti i ovisi o promjenama na tržištu, tada imamo *floating-strike* opcije. Ovisno o tome imamo li fiksiranu cijenu izvršenja ili ne, razlikujemo četiri vrste lookback opcija.

Fixed-strike lookback call opcija ima po dospijeću isplatu koja je jednaka razlici maksimuma koji cijena imovine poprimi do dospijeća, S_{max} i cijene izvršenja K. Slično, *fixed-strike lookback put* opcija po dospijeću ima isplatu koja je jednaka razlici cijene izvršenja K i minimuma koji cijena imovine poprimi do dospijeća, u oznaci S_{min}. Nadalje promatramo floating-strike lookback opcije, a za više o fixed-strike lookback opcijama, upućujemo na [5].

Floating-strike lookback call opcija daje pravo vlasniku opcije da kupi imovinu pokrivenu opcijom po najnižoj cijeni imovine u vremenu do dospijeća. *Floating-strike lookback put* opcija daje pravo vlasniku da proda imovinu po najvišoj cijeni imovine u vremenu do dospijeća. Prema [5], cijene floating-strike lookback call i put opcija možemo izraziti na sljedeći način:

$$c(S_T, S_{min,} T) = \max(S_T - S_{min}, 0), \tag{3.28}$$
$$p(S_T, S_{max}, T) = \max(S_{max} - S_T, 0). \tag{3.29}$$

Ponovno pretpostavljamo da je cijena imovine modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem (vidi Definicija 1.2.16), u oznaci S, a pritom proces maksimuma cijene S na intervalu $[0, T]$ označavamo s M^S. Za $0 \leq t \leq T$ vrijedi:

$$M_t^S = \max_{0 \leq t \leq T} S_t = \max_{0 \leq t \leq T} S_0 e^{\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} = S_0 e^{\sigma M_t^B + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}, \tag{3.30}$$

pri čemu je M^B proces maksimuma za Brownovo gibanje B (vidi Definicija 1.2.5). Analogno kao i za opcije s barijerom, navodimo teorem koji nam govori da cijena lookback opcije zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu jednadžbu te granične uvjete.

Teorem 3.3.1. *[18, Teorem 7.4.1] Neka je $v(t, x, y)$ cijena floating strike lookback opcije u trenutku t. Neka je $S_t = x$ i $M_t^S = y$. Tada $v(t, x, y)$ zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu jednadžbu:*

$$v_t(t, x, y) + rxv_x(t, x, y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x, y) = rv(t, x, y) \tag{3.31}$$

na području $\{(t, x, y) : 0 \leq t < T,\ 0 \leq x \leq y\}$ i zadovoljava granične uvjete:

$$v(t, 0, y) = e^{-r(T-t)y}, \quad 0 \leq t \leq T,\ y \geq 0, \tag{3.32}$$
$$v_y(t, y, y) = 0, \quad 0 \leq t \geq T,\ y > 0, \tag{3.33}$$
$$v(T, x, y) = y - x, \quad 0 \leq x \leq y. \tag{3.34}$$

Dokaz. Računamo diferencijal izraza $e^{-rt}v(t, S_t, M_t^S)$ koristeći (1.30) i dobijemo:

$$\begin{aligned} d\left(e^{-rt}v\left(t, S_t, M_t^S\right)\right) &= e^{-rt}\Big[-rv\left(t, S_t, M_t^S\right)dt + v_t\left(t, S_t, M_t^S\right)dt + v_x\left(t, S_t, M_t^S\right)dS_t + \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}\left(t, S_t, M_t^S\right)dS_t\,dS_t + v_y\left(t, S_t, M_t^S\right)dM_t^S\Big] \\ &= e^{-rt}\Big[-rv\left(t, S_t, M_t^S\right) + v_t\left(t, S_t, M_t^S\right) + rS_t v_x\left(t, S_t, M_t^S\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}\left(t, S_t, M_t^S\right)\Big]dt + e^{-rt}\sigma S_t v_x\left(t, S_t, M_t^S\right)dB_t + \\ &\quad + e^{-rt}v_y\left(t, S_t, M_t^S\right)dM_t^S \end{aligned} \tag{3.35}$$

Da bi (3.35) bio martingal, potrebno je da je izraz uz dt jednak 0. Dodatan uvjet koji mora vrijediti je sljedeći:

$$e^{-rt}v_y\left(t, S_t, M_t^S\right)dM_t^S = 0. \tag{3.36}$$

Naime, izraz uz dM_t^S ne može se poništiti izrazima uz dt i dB_t. Proces M_t^S ima kvadratnu varijaciju jednaku nuli pa nije Brownovo gibanje (vidi Definicija 1.2.11 i [18, str. 309]). Također, ne možemo pronaći slučajni proces $\Theta = (\Theta_t : 0 \leq t \leq T)$ takav da je $dM_t^S = \Theta_t \, dt$. Drugim riječima, M_t^S ne možemo zapisati na sljedeći način:

$$M_t^S = M_0^S + \int_0^t \Theta_u \, du.$$

Zaključujemo da je dM_t^S različito i od dt i od dB_t, stoga izraz uz dM_t^S mora biti jednak 0 da bi (3.35) bio martingal.

Dakle, kada je $S_t < M_t^S$, tada je $dM_t^S = 0$ budući da maksimum M_t^S ostaje nepromijenjen. Ako je $S_t = M_t^S$, tada je dM_t^S pozitivan pa izraz $e^{-rt} v_y \left(t, S_t, M_t^S\right)$ mora biti jednak 0, odnosno $v_y \left(t, S_t, M_t^S\right) = 0$. To nam upravo daje drugi granični uvjet (3.33). U tom slučaju je (3.35) jednak:

$$d\left(e^{-rt} v\left(t, S_t, M_t^S\right)\right) = e^{-rt} \sigma S_t v_x \left(t, S_t, M_t^S\right) dB_t, \tag{3.37}$$

što je Itôv integral, a iz Teorema 1.3.5 slijedi da je onda i martingal. Ukoliko je izraz uz dt jednak 0, to nam daje:

$$-rv\left(t, S_t, M_t^S\right) + v_t\left(t, S_t, M_t^S\right) + rS_t v_x\left(t, S_t, M_t^S\right) dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}\left(t, S_t, M_t^S\right) dt = 0, \tag{3.38}$$

a preslagivanjem tog izraza dobijemo jednadžbu iz iskaza Teorema 3.3.1. Terminalni uvjet (3.34) iz iskaza teorema je upravo isplata opcije, razlika između maksimuma cijene i cijene u trenutku T. Ukoliko za bilo koji $t \in [0, T]$ vrijedi $S_t = 0$, tada je i $S_T = 0$. Tada je $M_t^S = y$ i ta vrijednost ostaje konstanta za svaki $t \in [0, T]$. Iz toga slijedi da cijenu opcije dobijemo diskontiranjem M_t^S od dospijeća T unazad do t, što nam daje (3.32). □

Izračun cijene lookback opcije

Prelazimo na izračun formule za cijenu lookback opcije $v(t, x, y)$ za $t \in [0, T]$ i za $0 < x \leq y$. Iz (3.30) slijedi da je:

$$\begin{aligned} M_T^S &= S_0 e^{\sigma M_t^B} e^{\sigma\left(M_T^B - M_t^B\right)} \\ &= M_t^S e^{\sigma\left(M_T^B - M_t^B\right)}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Uočimo da ako je $\max_{t \leq u \leq T} B_u > M_t^B$, tada je

$$M_T^B - M_t^B = \max_{t \leq u \leq T} B_u - M_t^B.$$

Ukoliko je ipak $\max_{t\leq u\leq T} B_u \leq M_t^B$, tada je

$$M_T^B - M_t^B = 0.$$

Koristeći prethodne zaključke, eksponent u izrazu (3.39) možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\sigma\left(M_T^B - M_t^B\right) &= \sigma\left[\max_{t\leq u\leq T} B_u - M_t^B\right]_+ \\ &= \sigma\left[\max_{t\leq u\leq T} \sigma(B_u - B_t) - \sigma\left(M_t^B - B_t\right)\right]_+ \\ &= \sigma\left[\max_{t\leq u\leq T} \sigma(B_u - B_t) - \log\frac{M_t^B}{S_t}\right]_+,\end{aligned} \tag{3.40}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz (3.30) i svojstva logaritamske funkcije. Prema [18], cijena lookback opcije u trenutku t dana je izrazom:

$$V_T = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}\left(M_T^S - S_T\right)\Big|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.41}$$

Iduće navodimo bez dokaza lemu koju koristimo pri izvodu formule za cijenu lookback opcije.

Lema 3.3.2. *[18, Lema 2.3.4] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Neka su $X_1, \dots, X_k$ $\mathcal{G}$-izmjerive slučajne varijable i $Y_1, \dots, Y_l$ slučajne varijable nezavisne od $\mathcal{G}$. Neka je $f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ funkcija i definiramo*

$$g(x_1, \dots, x_k) = \mathbb{E}\left[f(x_1, \dots, x_k, Y_1, \dots, Y_l)\right].$$

Tada je:

$$\mathbb{E}\left[f(X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_l) \mid \mathcal{G}\right] = g(X_1, \dots, X_k).$$

Koristeći (3.39) i (3.40), za $\tau = T - t$ isplata opcije u trenutku t definirana kao u (3.41) jednaka je:

$$\begin{aligned}V_t &= e^{-r\tau}\,\mathbb{E}^*\left[\left(M_T^S - S_T\right)\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^*\left[M_t^S e^{[\sigma(M_T^B - M_t^B)]_+}\Big|\mathcal{F}_t\right] - e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}^*\left[S_T\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r\tau}\,\mathbb{E}^*\left[M_t^S e^{[\sigma(M_T^B - M_t^B)]_+}\Big|\mathcal{F}_t\right] - e^{rt}\,\mathbb{E}^*\left[e^{-rT} S_T\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r\tau}\,\mathbb{E}^*\left[M_t^S e^{\sigma\left[\max_{t\leq u\leq T}(B_u - B_t) - \log\frac{M_t^S}{S_t}\right]_+}\Big|\mathcal{F}_t\right] - e^{rt}\,\mathbb{E}^*\left[e^{-rT} S_T\Big|\mathcal{F}_t\right]\end{aligned} \tag{3.42}$$

Isplatu u (3.42) računamo u odnosu na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$. Prema Definiciji 1.4.6, diskontirana cijena dionice $e^{-rt}S_t$ u trenutku t je martingal obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Tada za $0 \leq t \leq T$ vrijedi:

$$e^{rt}\,\mathbb{E}^*\left[e^{-rT}S_T \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = e^{rt}e^{-rt}S_t = S_t \tag{3.43}$$

Da bi pokazali kako možemo pojednostaviti izraz u (3.42), poslužit ćemo se sljedećim rezultatom:

Propozicija 3.3.3. *[22, Propozicija 1.22] Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabilna slučajna varijabla te neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Ako je Y omeđena $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, tada je:*

$$\mathbb{E}\left[YX \mid \mathcal{G}\right] = Y\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \quad g.s. \tag{3.44}$$

Koristeći Propoziciju 3.3.3, prvi izraz u (3.42) možemo zapisati kao:

$$e^{-r\tau}\,\mathbb{E}^*\left[M_t^S e^{\sigma\left[\max_{t\leq u\leq T}(B_u-B_t)-\log\frac{M_t^S}{S_t}\right]_+}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = e^{-r\tau}M_t^S\,\mathbb{E}^*\left[e^{\sigma\left[\max_{t\leq u\leq T}(B_u-B_t)-\log\frac{M_t^S}{S_t}\right]_+}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.45}$$

Služeći se Lemom 3.3.2, možemo definirati uvjetno očekivanje u (3.45) pomoću funkcije $g\left(S_t, M_t^S\right)$ koju ćemo definirati kao:

$$g(x,y) = \mathbb{E}^*\left[e^{\sigma\left[\max_{t\leq u\leq T}(B_u-B_t)-\log\frac{y}{x}\right]_+}\right], \tag{3.46}$$

iz čega slijedi da je (3.42) uz (3.45) i (3.46):

$$V_t = e^{-r\tau}M_t^S g\left(S_t, M_t^S\right) - S_t, \tag{3.47}$$

ili ekvivalentno

$$v(t,x,y) = e^{-r\tau}yg(x,y) - x. \tag{3.48}$$

Postojanje funkcije $v(t,x,y)$ koja je jednaka V_t opravdavamo time što su slučajni procesi S_t i M_t^S Markovljevi procesi (vidi [21, Definicija 1.20] i [18, str. 334]). Sljedeći korak u izračunu cijene je određivanje izraza za funkciju $g(x,y)$. Budući da je uz $\tau = T - t$:

$$\mathbb{E}^*\left[\max_{t\leq u\leq T}(B_u - B_t)\right] = \mathbb{E}^*\left[\max_{0\leq u\leq \tau}(B_u - B_0)\right], \tag{3.49}$$

funkciju $g(x,y)$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \mathbb{E}^*\left[e^{\sigma\left[\max_{t\leq u\leq T}(B_u-B_t)-\log\frac{y}{x}\right]_+}\right] \\ &= \mathbb{E}^*\left[e^{\sigma\left[\max_{0\leq u\leq \tau}(B_u-B_0)-\log\frac{y}{x}\right]_+}\right] \\ &= \mathbb{E}^*\left[e^{\left[\sigma M_\tau^B-\log\frac{y}{x}\right]_+}\right] \end{aligned} \tag{3.50}$$

Razdvojit ćemo izraz u (3.50) u dva slučaja, kada je $M_\tau^B \leq \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}$ i $M_\tau^B > \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}$:

$$g(x,y) = \mathbb{P}^*\left(M_\tau^B \leq \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y}\mathbb{E}^*\left[e^{\sigma M_\tau^B}1_{\{M_\tau^B \geq \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\}}\right]. \tag{3.51}$$

Drugi izraz u (3.51) dolazi od toga da je:

$$e^{\sigma M_\tau^B - \log\frac{y}{x}} = e^{\sigma M_\tau^B}\cdot e^{-\log\frac{y}{x}} = \frac{x}{y}e^{\sigma M_\tau^B}. \tag{3.52}$$

Korolar 3.3.4. *[18, Korolar 7.2.2] Vrijedi sljedeći rezultat:*

$$\mathbb{P}^*(M_T^B \leq m) = N\left(\frac{m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\alpha m}N\left(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right), \quad m \geq 0, \tag{3.53}$$

uz funkciju gustoće slučajne varijable M_t^B obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$:

$$f^*_{M_T^B}(m) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{1}{2T}(m-\alpha T)^2} - 2\alpha e^{2\alpha m}N\left(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right), \quad m \geq 0, \tag{3.54}$$

te je jednaka 0 *za* $m < 0$.

Prvi izraz u (3.51) može se zapisati na sljedeći način koristeći Korolar 3.3.4, supstituciju (3.2) te definicije funkcija (3.21):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*\left(M_\tau^B \leq \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\right) &= N\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x} - \frac{1}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\tau}}\right) - \\
&\quad - e^{2\frac{1}{\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\log\frac{y}{x}}\cdot N\left(\frac{-\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x} - \frac{1}{\sigma}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&= N\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\log\frac{y}{x} - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)\right) - \\
&\quad - e^{\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\log\frac{y}{x}}\cdot N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\log\frac{y}{x} - \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right)\right) \\
&= N\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^{\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)}\cdot N\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{y}{x}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Drugi izraz u (3.51) možemo pojednostaviti koristeći izraz za funkciju gustoće M_τ^B obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$ definiranu kao u (1.35):

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}\mathbb{E}^*\left[e^{\sigma M_\tau^B}1_{\{M_\tau^B \geq \frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}\}}\right] &= \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} e^{\sigma m} f_{M_\tau^B}^*(m)\,dm \\ &= \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{\sigma m - \frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2}\,dm - \\ &- \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} 2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m} N\left(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}}\right) dm. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Integrale u (3.56) redom ćemo srediti. Sređujemo eksponent u prvom integralu:

$$\begin{aligned} \sigma m - \frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2 &= \sigma m - \frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2 + r\tau - r\tau + \frac{1}{2}\sigma^2\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau \\ &= r\tau + \sigma m - \frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2 - \sigma\alpha\tau - \frac{1}{2}\sigma^2\tau \\ &= r\tau - \frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau-\sigma\tau)^2, \end{aligned} \tag{3.57}$$

pri čemu druga jednakost slijedi koristeći supstituciju (3.2). Radimo sljedeću zamjenu varijabli:

$$\epsilon = \frac{\alpha\tau + \sigma\tau - m}{\sqrt{\tau}}, \tag{3.58}$$

iz čega dobivamo da je prvi izraz u (3.56) jednak:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{r\tau - \frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau-\sigma\tau)^2}\,dm &= \frac{2xe^{r\tau}}{y\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right)} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\,d\epsilon \\ &= \frac{2xe^{r\tau}}{y}N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Sličnim postupkom sređuje se i drugi izraz u (3.56):

$$\begin{aligned} &-\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\log\frac{y}{x}}^{\infty} 2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m} N\left(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}}\right) dm = \\ &= -\frac{\alpha\sigma x}{ry}e^{r\tau}N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right) + \frac{\alpha\sigma}{r}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} N\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{y}{x}\right)\right), \end{aligned} \tag{3.60}$$

a za detaljan račun, čitatelja upućujemo na [18, str. 317]. Sada imamo sve potrebno za određivanje funkcije $v(t,x,y)$ definirane kao u (3.48). Uvrštavanjem (3.55), (3.59) i (3.60) u (3.48) te daljnjim pojednostavljivanjem izraza slijedi:

$$
\begin{aligned}
v(t,x,y) = {} & \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) xN\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right) + e^{-r\tau} yN\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right) - \\
& -\frac{\sigma^2}{2r} e^{-r\tau}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} xN\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{y}{x}\right)\right) - x, \quad 0 \le t \le T,\ 0 < x \le y.
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Napomena. Cijena lookback opcije $v(t,x,y)$ zadovoljava sljedeće svojstvo:

$$
v(t,\mu x,\mu y) = \mu v(t,x,y), \quad \mu > 0. \tag{3.62}
$$

Iz toga slijedi da funkciju $v(t,x,y)$ možemo zapisati i kao funkciju dvije varijable na sljedeći način:

$$
v(t,x,y) = y\,u\left(t,\frac{x}{y},1\right) = y\,u\left(t,\frac{x}{y}\right), \quad 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le y,\ y > 0. \tag{3.63}
$$

Primjenom navedenog svojstva na formulu (3.61), slijedi:

$$
\begin{aligned}
u\left(t,\frac{x}{y}\right) = {} & \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)\frac{x}{y}N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right) + e^{-r\tau}N\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{x}{y}\right)\right) - \\
& -\frac{\sigma^2}{2r} e^{-r\tau}\left(\frac{x}{y}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-\delta_-\left(\tau,\frac{y}{x}\right)\right) - \frac{x}{y}, \quad 0 \le t \le T,\ 0 < \frac{x}{y} \le 1.
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

Za više detalja, vidi [18, str. 312].

Poglavlje 4

Azijske opcije

4.1 Uvod

U ovom poglavlju riječ je o posebnoj vrsti egzotičnih opcija, *azijskim opcijama*, čija izvršna cijena ne ovisi o jednoj promatranoj vrijednosti cijene temeljne imovine, već ovisi o prosjeku promatranih vrijednosti u vremenu do dospijeća.

Azijska opcija je vrsta financijske izvedenice čija se isplata po dospijeću T temelji na prosječnoj cijeni imovine $S = (S_t : t \geq 0)$. Budući da isplata ovisi o prosjeku cijena temeljne imovine do vremena dospijeća, smanjuju se nesigurnosti koje postoje vezane za fluktuacije cijene imovine. Isto tako, atraktivan su proizvod na financijskom tržištu sudionicima koji kupuju imovinu u točno određenom trenutku, a prodaju je tijekom određenog budućeg perioda. Jedan od primjera je trgovina na deviznom tržištu gdje se neprekidno trguje u jednoj valuti, a u točno određenom trenutku kupuje se u nekoj drugoj valuti. U tom slučaju temeljna imovina je tečaj.

Vremenski intervali u kojima će se bilježiti cijene imovine pomoću kojih će se po dospijeću računati prosjek mogu se proizvoljno odabrati. Najčešće se gledaju cijene na razini tjedna, mjeseca, kvartala ili godine. Opcije s unaprijed određenim trenutcima promatranja cijene imovine u literaturi se nazivaju *"asian out"* opcije (vidi [2, str. 43]). Međutim, ponekad se ne promatraju cijene u čitavom periodu od stvaranja opcije do dospijeća, već samo u kratkom periodu do dospijeća, primjerice u zadnjoj godini. Takve opcije nazivaju se *"asian in"* i nose veći rizik, budući da promatrane kasnije cijene imaju veći utjecaj na vrijednost opcije od ostalih cijena.

Za prosjek cijena imovine uzima se aritmetička ili geometrijska sredina. Kod azijskih opcija gdje se prosjek računa kao geometrijska sredina promatranih cijena imovine postoji eksplicitni izraz za cijenu azijske opcije, što nije slučaj kod aritmetičkih azijskih opcija. Detaljnije će o tome biti riječ kasnije u poglavlju. Također, uzimanje uzoraka cijene imovine pomoću kojih se računa prosječna cijena imovine može biti *neprekidno* ili *diskretno*. Ukoliko nije naglašeno drugačije, u narednim potpoglavljima računamo koristeći neprekidno uzorkovanje cijene imovine.

4.2 Fixed-strike i floating-strike azijske opcije

Slično kao i kod lookback opcija, možemo razlikovati i *floating-strike* i *fixed-strike* azijske opcije. Problem izračuna cijene *floating-strike* azijske opcije vrlo je kompleksan te se novija istraživanja uglavnom fokusiraju na cijene *fixed-strike* azijskih opcija. Unatoč tome, izvedene su određene relacije koje nam govore o jednakosti *floating-strike* i *fixed-strike* azijskih opcija.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{P}^*$ vjerojatnost neutralna na rizik. Neka je $T > 0$ vrijeme dospijeća opcije i A aritmetička sredina cijena imovine u vremenu do dospijeća. Aritmetičku sredinu cijena imovine zapisujemo na sljedeći način:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T S_u \, du. \tag{4.1}$$

Neka je K cijena izvršenja. Tada je isplata *fixed-strike* azijske call opcije po dospijeću:

$$V_T = (A - K)_+, \tag{4.2}$$

a isplata *floating-strike* azijske call opcije može se izraziti kao:

$$V_T = (S_T - A)_+. \tag{4.3}$$

Dakle, prema izrazu za cijenu opcije kao u (3.14), cijenu *fixed-strike* azijske call opcije možemo izraziti kao:

$$c_x(K, S_0, r, \sigma, 0, T) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(A - K)_+]. \tag{4.4}$$

Napomena. Funkcija c_x koja označava cijenu azijske opcije s fiksnom cijenom izvršenja ovisi o više parametara. Parametri koji su prethodno spomenuti u tekstu su: cijena izvršenja K, početna cijena imovine S_0, bezrizična kamatna stopa r, volatilnost σ te vrijeme dospijeća T. Parametar koji se do sad nije spominjao je $b = 0$ kojeg nazivamo *cost of carry*. To je trošak držanja imovine tijekom vremena, a uključuje između ostalog osiguranje i kamatne stope na imovinu. Za više detalja o ovom parametru, upućujemo na [7].

Analogno definiramo i cijenu opcije za *floating-strike* azijsku call opciju:

$$c_f(1, S_0, r, \sigma, 0, T) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(S_T - A)_+]. \tag{4.5}$$

Napomena. Budući da cijena izvršenja nije fiksirana, umjesto parametra K u izrazu za funkciju cijene *floating-strike* azijske opcije pojavljuje se parametar $\lambda = 1$. Parametar λ je multiplikativni faktor kojim se množi prosjek cijene A. Množenje A s λ daje nam cijenu izvršenja koju možemo prilagoditi uvjetima na tržištu.

Slično se definiraju i *fixed-strike* i *floating-strike* azijske put opcije:

$$p_x(K, S_0, r, \sigma, 0, T) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(K - A)_+], \tag{4.6}$$

$$p_f(1, S_0, r, \sigma, 0, T) = \mathbb{E}^*[e^{-rT}(A - S_T)_+]. \tag{4.7}$$

Pokaže se da vrijede sljedeće relacije simetrije između *fixed-strike* i *floating-strike* azijskih opcija:

$$c_f(1, S_0, r, \sigma, 0, T) = p_x(S_0, S_0, r, \sigma, 0, T), \tag{4.8}$$

$$c_x(K, S_0, r, \sigma, 0, T) = p_f\left(S_0, \frac{K}{S_0}, r, \sigma, 0, T\right). \tag{4.9}$$

Tvrdnju navodimo bez dokaza, za dokaz čitatelja upućujemo na [6].

4.3 Geometrijska azijska opcija

Kao što je prethodno spomenuto, prosječna cijena imovine može se računati pomoću geometrijske i aritmetičke sredine. U ovom potpoglavlju ukratko ćemo prezentirati geometrijske azijske opcije i dati formule za izračun cijene, ali u ostatku poglavlja dati ćemo prioritet aritmetičkim azijskim opcijama. Kod *geometrijskih azijskih opcija*, postoji eksplicitna formulu za cijenu azijske opcije. Formulu za cijenu geometrijske azijske opcije moguće je izvesti jer geometrijska sredina nezavisnih slučajnih varijabli koje imaju log-normalnu distribuciju također slijedi log-normalnu distribuciju (za dokaz ove tvrdnje vidi [8, str. 127-128]).

Neka je $S = (S_t : t \geq 0)$ cijena imovine koja ima log-normalnu distribuciju (vidi Definicija 2.1.1). Ukoliko imamo neprekidno uzorkovanje cijene imovine, tada je geometrijska sredina cijene imovine jednaka:

$$G_n = e^{\frac{1}{T}\int_0^T \log S_t \, dt}, \tag{4.10}$$

a ukoliko imamo diskretno uzorkovanje geometrijska sredina jednaka je:

$$G_d = \left(\prod_{t=0}^{T} S_t \right)^{\frac{1}{T}}. \tag{4.11}$$

Prvo ćemo iskazati formulu za cijenu geometrijske azijske call opcije za diskretni, a zatim i za neprekidni slučaj. Neka je T vrijeme dospijeća opcije te $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ vremena u kojima uzimamo uzorak cijene imovine takva da vrijedi $t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n}$ za $i = 0, 1, \ldots, n-1$ i $n \in N$.

Napomena. U [10, Teorem 4] navodi se formula za cijenu *diskretne azijske power call* opcije. Za potrebe teksta, u navedenoj formuli uzimamo da je parametar α kojim se potencira cijena imovine jednak 1 kako bi dobili cijenu obične diskretne geometrijske azijske call opcije. Dokaz formule za azijsku *power call* opciju može se pronaći u [10].

Teorem 4.3.1. *Cijena diskretne geometrijske azijske call opcije dana je izrazom:*

$$C_T = S_0 \, e^{-\frac{1}{2}rT - \frac{\sigma^2 T}{2}\left(1 - \frac{2n+1}{6(n+1)}\right)} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \tag{4.12}$$

pri čemu je

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} \sqrt{6(n+1)}}{\sigma \sqrt{(2n+1)T}} + \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sqrt{6(n+1)T}}{2\sigma \sqrt{(2n+1)}} + \frac{\sigma \sqrt{(2n+1)T}}{\sqrt{6(n+1)}}, \tag{4.13}$$

$$d_2 = d_1 - \frac{\sigma \sqrt{(2n+1)T}}{\sqrt{6(n+1)}}. \tag{4.14}$$

Sličan rezultat navodi se u [8] za cijenu neprekidne geometrijske azijske opcije:

$$V_T = e^{\frac{1}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{6}\right)T} S_0 N(d_3) - KN\left(d_3 - \sigma \sqrt{\frac{1}{3}T}\right), \tag{4.15}$$

gdje je

$$d_3 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + \frac{1}{2}\left(r + \frac{\sigma^2}{6}\right)T}{\sigma \sqrt{\frac{1}{3}T}}. \tag{4.16}$$

4.4 Aritmetička azijska opcija

Neka je $S = (S_t : t \geq 0)$ cijena financijske imovine modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem kao u (3.1), odnosno pretpostavimo da vrijedi sljedeća stohastička diferencijalna jednadžba:

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t, \tag{4.17}$$

pri čemu je B Brownovo gibanje obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$. Koristeći (4.2), cijenu fixed-strike azijske call opcije u trenutku t obzirom na mjeru $\mathbb{P}^*$ možemo zapisati izrazom:

$$C_t = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}C_T \,|\, \mathcal{F}_t], \quad 0 \le t \le T, \tag{4.18}$$

a preslagivanjem izraza dobijemo:

$$e^{-rt}C_t = \mathbb{E}^*[e^{-rT}C_T \,|\, \mathcal{F}_t], \quad 0 \le t \le T. \tag{4.19}$$

Uvedimo proces $Y = (Y_t : 0 \le t \le T)$ definiran na sljedeći način:

$$Y_t = \int_0^t S_u\,du. \tag{4.20}$$

Iz (4.20) slijedi da je isplata definirana kao u (4.2) po dospijeću jednaka:

$$C_T = \left(\frac{1}{T}Y_T - K\right)_+. \tag{4.21}$$

Uvrstimo prethodno dobivenu jednakost u (4.18) te dobijemo:

$$C_t = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{T}Y_T - K\right)_+ \middle|\, \mathcal{F}_t\right], \quad 0 \le t \le T. \tag{4.22}$$

Prosječna cijena imovine, o kojoj ovisi isplata azijske opcije, ne mora se kontinuirano pratiti od početka do dospijeća opcije, već se može početi pratiti u bilo kojem trenutku nakon stvaranja opcije. Neka je sada c konstanta takva da je $0 \le c \le t$. Pretpostavimo da prosječnu cijenu imovine računamo pomoću vrijednosti u vremenskom periodu $[T-c, T]$. U tom slučaju imamo azijsku opciju čija je isplata jednaka:

$$C_T = \left(\frac{1}{c}\int_{T-c}^T S_t\,dt - K\right)_+. \tag{4.23}$$

Označimo s $\gamma = (\gamma_t : 0 \le t \le T)$ $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces koji predstavlja broj dionica, odnosno rizične imovine koje investitor drži. Definiramo proces γ kao:

$$\gamma_t = \begin{cases} \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc}), & 0 \le t \le T - c, \\ \frac{1}{rc}(1 - e^{-r(T-t)}), & T - c \le t \le T. \end{cases} \tag{4.24}$$

Neka je također $X = (X_t : 0 \le t \le T)$ vrijednost portfelja kojeg investitor drži. Tada je iznos koji drži u nerizičnoj imovini u trenutku t jednak $r(X_t - \gamma_t S_t)$, a iznos koji drži u rizičnoj imovini u trenutku t jednak je $\gamma_t S_t$, pri čemu je S_t cijena dionice u trenutku t. Tada je diferencijal vrijednosti portfelja u trenutku t:

$$\begin{aligned} dX_t &= \gamma_t \, dS_t + r(X_t - \gamma_t S_t) \, dt \\ &= r X_t \, dt + \gamma_t (dS_t - rS_t \, dt). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Također možemo promatrati i diferencijale vrijednosti portfelja te vrijednosti koju investitor drži u rizičnoj imovini, diskontirane od trenutka t do dospijeća:

$$\begin{aligned} d(e^{r(T-t)} X_t) &= e^{r(T-t)} \, dX_t - re^{r(T-t)} X_t \, dt \\ &= e^{r(T-t)} \, [\gamma_t \, dS_t + r(X_t - \gamma_t S_t) \, dt] - re^{r(T-t)} X_t \, dt \\ &= e^{r(T-t)} \, [rX_t \, dt + \gamma_t (dS_t - rS_t \, dt)] - re^{r(T-t)} X_t \, dt \\ &= e^{r(T-t)} \, \gamma_t \, (dS_t - rS_t \, dt), \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} d(e^{r(T-t)} \gamma_t S_t) &= e^{r(T-t)} \, d(\gamma_t S_t) - re^{r(T-t)} \gamma_t S_t \, dt \\ &= e^{r(T-t)} \, (\gamma_t \, dS_t + S_t \, d\gamma_t) - re^{r(T-t)} \gamma_t S_t \, dt \\ &= e^{r(T-t)} \gamma_t \, dS_t + e^{r(T-t)} S_t \, d\gamma_t - re^{r(T-t)} \gamma_t S_t \, dt. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Preslagivanjem posljednje jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned} d(e^{r(T-t)} \gamma_t S_t) - e^{r(T-t)} S_t \, d\gamma_t &= e^{r(T-t)} \gamma_t \, dS_t - re^{r(T-t)} \gamma_t S_t \, dt \\ &= e^{r(T-t)} \gamma_t \, (dS_t - rS_t \, dt). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Uvrstimo jednakost (4.28) u (4.26):

$$d(e^{r(T-t)} X_t) = d(e^{r(T-t)} \gamma_t S_t) - e^{r(T-t)} S_t \, d\gamma_t. \tag{4.29}$$

Pretpostavimo da u trenutku $t = 0$ investitor potroši na rizičnu imovinu $\frac{1}{rc}(1 - e^{-rc}) S_0$ te da pritom mora posuditi $e^{-rT} K$ s tržišta. Tada je vrijednost portfelja u trenutku $t \in [0, T - c]$:

$$X_t = \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc}) S_t - e^{-r(T-t)} K. \tag{4.30}$$

Za $t \in [T - c, T]$ iz (4.29) slijedi:

$$\begin{aligned} e^{r(T-t)} X_t &= e^{rc} X_{T-c} + \int_{T-c}^{t} d(e^{r(T-u)} \gamma_u S_u) - \int_{T-c}^{t} e^{r(T-u)} S_u \, d\gamma_u \\ &= \frac{1}{rc} e^{rc} (1 - e^{-rc}) S_{T-c} - K + e^{r(T-t)} \gamma_t S_t \\ &\quad - \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc}) S_{T-c} + \frac{1}{c} \int_{T-c}^{t} S_u \, du \\ &= -K + e^{r(T-t)} \gamma_t S_t + \frac{1}{c} \int_{T-c}^{t} S_u \, du. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Iz (4.31) zatim slijedi:

$$\begin{aligned} X_t &= -e^{-r(T-t)}K + \gamma_t S_t + \frac{1}{c} e^{-r(T-t)} \int_{T-c}^{t} S_u \, du \\ &= -e^{-r(T-t)}K + \frac{1}{rc}(1 - e^{-r(T-t)}) S_t + \frac{1}{c} e^{-r(T-t)} \int_{T-c}^{t} S_u \, du, \end{aligned} \tag{4.32}$$

pri čemu druga jednakost slijedi uvrštavanjem (4.24) za $T - c \leq t \leq T$. Slijedeći dobivenu jednakost, vrijednost portfelja u trenutku dospijeća je:

$$X_T = \frac{1}{c} \int_{T-c}^{T} S_u \, du - K. \tag{4.33}$$

Iz prethodnog možemo zaključiti da je isplata azijske call opcije iz (4.23) jednaka:

$$C_T = X_{T+} = \max(X_T, 0). \tag{4.34}$$

Tada je cijena azijske call opcije u trenutku t prije dospijeća jednaka:

$$C_t = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} C_T \,|\, \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t)} X_{T+} \,|\, \mathcal{F}_t \right]. \tag{4.35}$$

U svrhu dobivanja izraza za (4.35), izrazit ćemo vrijednost portfelja u trenutku t pomoću jedinica rizične imovine. Definiramo slučajni proces Y_t kao:

$$Y_t = \frac{e^{-rt} X_t}{e^{-rt} S_t}. \tag{4.36}$$

Kako bi dobili diferencijal procesa Y_t, pogledajmo redom diferencijale izraza $e^{-rt}X_t$ i $e^{-rt}S_t$.

$$d(e^{-rt}X_t) = -re^{-rt}X_t \, dt + e^{-rt} \, dX_t = e^{-rt}(-rX_t \, dt + dX_t). \tag{4.37}$$

Iz jednakosti (4.25) zatim slijedi:

$$d(e^{-rt}X_t) = e^{-rt} \gamma_t (dS_t - rS_t \, dt). \tag{4.38}$$

Pomoću pravila produkta i (2.11) dobivamo sljedeće:

$$d(e^{-rt}S_t) = -r^{-rt}S_t \, dt + e^{-rt} dS_t = e^{-rt} \sigma S_t \, dB_t. \tag{4.39}$$

Uvrstimo (4.39) u (4.38):

$$d(e^{-rt}X_t) = e^{-rt} \sigma \gamma_t S_t \, dB_t. \tag{4.40}$$

Sada koristeći diferencijalni oblik Itôve leme iz (1.30) za $f(S_t) = e^{-rt}S_t$ i (4.39) slijedi:

$$\begin{aligned} d((e^{-rt}S_t)^{-1}) &= -(e^{-rt}S_t)^{-2} \, d(e^{-rt}S_t) + (e^{-rt}S_t)^{-3} \, d(e^{-rt}S_t) d(e^{-rt}S_t) \\ &= -(e^{-rt}S_t)^{-2} \sigma (e^{-rt}S_t) \, dB_t + (e^{-rt}S_t)^{-3} (e^{-rt}S_t)^2 \sigma^2 \, dt \\ &= -\sigma (e^{-rt}S_t)^{-1} \, dB_t + \sigma^2 (e^{-rt}S_t)^{-1} \, dt. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Nakon što smo dobili (4.40) i (4.41), možemo izračunati dY_t koristeći se pravilom produkta:

$$\begin{aligned} dY_t &= d\Big((e^{-rt}X_t)(e^{-rt}S_t)^{-1}\Big) \\ &= e^{-rt}X_t d\Big((e^{-rt}S_t)^{-1}\Big) + (e^{-rt}S_t)^{-1} d(e^{-rt}X_t) + d(e^{-rt}X_t) d\Big((e^{-rt}S_t)^{-1}\Big) \\ &= -\sigma Y_t\, dB_t + \sigma^2 Y_t\, dt + \sigma\gamma_t\, dB_t - \sigma^2\gamma_t\, dt \\ &= \sigma\,(\gamma_t - Y_t)\,(dB_t - \sigma\, dt)\,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Supstitucijom $\tilde{B}_t = B_t - \sigma t$ možemo pojednostaviti izraz za dY_t tako da je:

$$dY_t = \sigma\,(\gamma_t - Y_t)\; d\tilde{B}_t. \tag{4.43}$$

Neka je $Z = (Z_t : 0 \leq t \leq T)$ proces Radon-Nykodimove derivacije iz Teorema 1.4.4. Tada je za $\theta = -\sigma$ i $\mathbb{P} = \mathbb{P}^*$:

$$Z_t = e^{\int_0^t \sigma\, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\, dt} = e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}. \tag{4.44}$$

Definiramo vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ kao:

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T\, d\mathbb{P}^*, \quad A \in \mathcal{F}. \tag{4.45}$$

U klasičnom Black-Scholes-Mertonovom modelu vrijedi prepostavka da je volatilnost σ konstantna tijekom života opcije (vidi str. 24). Stoga σ trivijalno zadovoljava pretpostavke Girsanovljevog teorema (Teorem 1.4.4) te možemo zaključiti da je $\tilde{B}_t$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost $\tilde{\mathbb{P}}$. Iz (4.43) proizlazi da je Y_t Itôv integral, a zatim da je i martingal (vidi Teorem 1.3.5).

Izraz (4.43) je stohastička diferencijalna jednadžba. Prema [18, Korolar 6.3.2], rješenje takve stohastičke diferencijalne jednadžbe Y_t je Markovljev proces (vidi [21, Definicija 1.20]). Tada postoji funkcija $g(t, Y_t)$ takva da je:

$$g(t, Y_t) = \tilde{\mathbb{E}}[Y_{T+} \,|\, \mathcal{F}_t]. \tag{4.46}$$

Pogledajmo sada ponovno isplatu opcije iz (4.35).

$$\begin{aligned} C_t &= e^{rt}\, \mathbb{E}^*[e^{-rT} X_{T+} \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= \frac{S_t}{e^{-rt}S_t}\, \mathbb{E}^*\left[e^{-rT} S_T \left(\frac{e^{-rT}X_T}{e^{-rT}S_T} \right)_+ \middle|\, \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{S_t}{Z_t}\, \mathbb{E}^*[Z_T Y_{T+} \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= S_t\, \tilde{\mathbb{E}}[Y_{T+} \,|\, \mathcal{F}_t] \\ &= S_t\, g\left(t, \frac{X_t}{S_t}\right), \end{aligned} \tag{4.47}$$

pri čemu smo u četvrtoj jednakosti koristili rezultat Leme 1.4.3.

Sljedeće proučavamo funkciju $g(t, Y_t)$, odnosno diferencijal te funkcije, koristeći (4.43).

$$
\begin{aligned}
dg(t, Y_t) &= g_t(t, Y_t)\, dt + g_y(t, Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2} g_{yy}(t, Y_t)\, dY_t dY_t \\
&= g_t(t, Y_t)\, dt + g_y(t, Y_t)\, \sigma\, (\gamma_t - Y_t)\, d\tilde{B}_t + \frac{1}{2} g_{yy}(t, Y_t)\, \sigma^2\, (\gamma_t - Y_t)^2\, dt \\
&= \left[g_t(t, Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\, g_{yy}(t, Y_t)\, (\gamma_t - Y_t)^2 \right] dt + \sigma\, g_y(t, Y_t)\, (\gamma_t - Y_t)\, d\tilde{B}_t.
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Iz prethodno pokazanog da je proces Y martingal obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\tilde{\mathbb{P}}$ te Teorema 1.3.9 zaključujemo da na desnoj strani izraza (4.48) izraz uz dt trebao biti jednak 0. Dakle, funkcija $g(t, Y_t)$ zadovoljava sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$
g_t(t, y) + \frac{1}{2}\sigma^2 (\gamma_t - y)^2 g_{yy}(t, y) = 0, \quad 0 \leq t < T,\ y \in \mathbb{R}. \tag{4.49}
$$

Dobiveni rezultati dovode nas do najvažnijeg teorema ovog potpoglavlja koji nam daje parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za cijenu neprekidne aritmetičke azijske call opcije.

Teorem 4.4.1. *[18, Teorem 7.5.3] Za $0 \leq t \leq T$, cijena neprekidne aritmetičke azijske call opcije C_t s dospijećem u trenutku T dana je izrazom:*

$$
C_t = S_t\, g\left(t, \frac{X_t}{S_t}\right), \tag{4.50}
$$

pri čemu $g(t, y)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (4.49) *i X_t je dan izrazima:*

$$
X_t = \begin{cases} \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc})\, S_t - e^{-r(T-t)}\, K, & 0 \leq t \leq T - c \\ -e^{-r(T-t)} K + \frac{1}{rc}(1 - e^{-r(T-t)})\, S_t + \frac{1}{c} e^{-r(T-t)} \int_{T-c}^{t} S_u\, du, & T - c \leq t \leq T. \end{cases} \tag{4.51}
$$

Granični uvjeti za $g(t, y)$ su:

$$
g(T, y) = y_+, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{4.52}
$$

$$
\lim_{y \to -\infty} g(t, y) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4.53}
$$

$$
\lim_{y \to \infty} [g(t, y) - y] = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{4.54}
$$

Istim postupkom dobije se i da diskretna aritmetička azijska opcija zadovoljava analogon Teorem 4.4.1. Neka su dana vremena $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ za $m \in \mathbb{N}$ te je isplata takve azijske opcije dana izrazom:

$$C_T = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} S_{t_j} - K \right)^{+}. \tag{4.55}$$

Jedine promjene koje radimo su kod definiranja procesa γ_t i X_t. Proces γ_t koji predstavlja broj dionica sada je jednak:

$$\gamma_{t_j} = \frac{1}{m} \sum_{i=j}^{m} e^{-r(T-t_i)}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \tag{4.56}$$

a vrijednost portfelja X u trenutku t dana je izrazom:

$$X_t = \gamma_{t_{k+1}} S_t + e^{-r(T-t)} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} S_{t_i} - e^{-r(T-t)} K, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}. \tag{4.57}$$

Za detaljan izvod, čitatelja upućujemo na [18, str.329].

Poglavlje 5

Izračun cijene opcije u programskom jeziku R

U prethodnim poglavljima objašnjeni su pojmovi i rezultati potrebni za razumijevanje opcija te izvod formula za cijenu, za one opcije za koje formula postoji. U ovom poglavlju ćemo na primjeru aritmetičke azijske opcije demonstrirati kako u programskom jeziku R možemo izračunati cijenu jedne aritmetičke azijske opcije, iako ne postoji eksplicitna formula za cijenu. Zbog jednostavnosti, u ostatku teksta promatramo europske opcije (vidi 3.1).

5.1 Standardna Monte Carlo metoda

Cijenu aritmetičke azijske call opcije možemo zapisati izrazom (vidi (4.18)):

$$C_t = \mathbb{E}^*[e^{-r(T-t)}C_T \,|\, \mathcal{F}_t], \quad 0 \le t \le T, \tag{5.1}$$

gdje je $C_T = (A_T - K)_+$. Očekivanje s desne strane jednakosti (5.1) procijenit ćemo korištenjem Monte Carlo simulacija u programskom jeziku R. Ova metoda često se primjenjuje u praksi za probleme koje nije moguće analitički riješiti ili za koje nije jednostavno naći direktno rješenje. Neka je $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funkcija, a nepoznata vrijednost koju računamo $\mathbb{E}[h(X)]$ za d-dimenzionalni slučajni vektor X, tada možemo efikasno procijeniti traženu veličinu pomoću *Monte Carlo procjenitelja*:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i),$$

pri čemu je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je X_i jednako distribuiran kao i X, odnosno $X_i \overset{\mathrm{d}}{=} X$.

Napomena. Procjena $\mathbb{E}[h(X)]$ Monte Carlo procijeniteljem $\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$ opravdana je pomoću jakog zakona velikih brojeva (vidi [16, Teorem 8.10.]).

U našem primjeru za Monte Carlo procijenitelja uzimamo:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-rT}(A_T - K)_+, \tag{5.2}$$

pri čemu s A_T označavamo aritmetičku sredinu cijena dionice:

$$A_T = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S_i. \tag{5.3}$$

Za vrijeme dospijeća uzimamo $T = 1$ godina. Neka su t_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ vremenski trenutci takvi da je $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} = T$ i $t_{i+1} - t_i = \frac{i \cdot T}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Prilikom provođenja Monte Carlo simulacija pretpostavit ćemo da je broj koraka $n = 1000$. Sljedećom naredbom u R-u definiramo niz t:

```r
t <- seq(0,T,length=n)
```

Neka je cijena dionice $S = (S_t : t \in [0, T])$ modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem, zadana kao u (3.1). Definiramo slučajni vektor $N = (N_{t_i} : t_i \in [0, T],\ i = 1, 2, \ldots, n)$ kao:

$$N_{t_i} = \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}. \tag{5.4}$$

Iz (1.23) zatim slijedi:

$$\begin{aligned} \log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} &= \log \frac{S_0 e^{\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t}}{S_0 e^{\sigma B_{t-1} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot (t-1)}} \\ &= \log e^{\sigma(B_t - B_{t-1}) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(t-(t-1))} \\ &= \sigma\, \Delta B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \end{aligned} \tag{5.5}$$

Slučajna varijabla N_{t_i} ima normalnu distribuciju s očekivanjem $(r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot \frac{T}{n}$ i varijancom $\sigma^2 \cdot \frac{T}{n}$. U R-u zapisujemo očekivanje i standardnu devijaciju slučajne varijable N_{t_i} naredbama:

```r
mu <- (r-0.5*sigma^2)*(T/n)
sd_kv <- sigma*sqrt(T/n)
```

Slučajni vektor N u R-u generiramo na način da prvo inicijaliziramo vektor te u njega pohranimo $n-1$ realizacija normalne slučajne varijable s očekivanjem $(r-\frac{\sigma^2}{2})\cdot\frac{T}{n}$ i varijancom $\sigma^2\cdot\frac{T}{n}$:

```
N_t <- numeric(n-1)
N_t <- rnorm(n-1,mean=mu, sd=sd_kv)
```

Uočimo da je:

$$e^{N_{t_i}} = \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}. \tag{5.6}$$

Vrijednost cijene imovine u proizvoljnom trenutku t_i možemo dobiti kao:

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} \cdot \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}.$$

Dakle, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
S_{t_1} &= S_{t_0} \cdot \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}}, \\
S_{t_2} &= S_{t_1} \cdot \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} = S_{t_0} \cdot \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} \cdot \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}, \\
S_{t_3} &= S_{t_2} \cdot \frac{S_{t_3}}{S_{t_2}} = S_{t_0} \cdot \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} \cdot \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} \cdot \frac{S_{t_3}}{S_{t_2}}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da vrijednost cijene imovine u svakom trenutku t_i do dospijeća možemo dobiti kao:

$$\begin{aligned}
(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{n-1}}) &= \left(S_{t_0}, S_{t_0} e^{N_{t_1}}, \ldots, S_{t_0} e^{\sum_{i=1}^{n-1} N_{t_i}}\right) \\
&= \left(S_{t_0}, S_{t_0} \cdot \frac{S_{t_1}}{S_{t_0}}, \ldots, S_{t_0} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right).
\end{aligned}$$

Transformaciju formule (5.4) u (5.6) u R-u radimo pomoću funkcije `exp()`:

```
s <- exp(N_t).
```

Kako bi dobili slučajni vektor koji sadrži vrijednosti cijene imovine u pojedinom trenutku potrebno je na početak dodati početnu cijenu S_0 te uzeti kumulativni produkt elemenata dobivenog vektora:

```
S_t <- cumprod(c(S_0,s)).
```

Aritmetičku sredinu cijena imovine dobijemo pomoću funkcije `mean()`:

```
A_t <- mean(S_t).
```

Iz toga odmah možemo i računati cijenu aritmetičke azijske opcije u trenutku $t_i \in [0, T]$ prema formuli (5.1):

```
C_t <- exp(-r*(T-t[i]))*pmax(A_t-K,0).
```

Funkcija `pmax` u R-u daje nam vrijednost $A_T - K$ ako je ta razlika veća od 0, a inače vraća 0. Ovaj postupak ponavljamo za $M = 10^3$ Monte Carlo simulacija. Vrijednosti cijene imovine u svakoj simulaciji spremamo u matricu koja će imati M redaka i n stupaca:

```
S_t_MC <- matrix(data=NA, nrow=M, ncol=n).
```

Početne vrijednosti definiramo prema [7, Primjer 24.2]. Za vrijeme dospijeća uzimamo $T = 1$ godina, za početnu cijenu imovine $S_0 = 50$, za izvršnu cijenu $K = 50$, za bezrizičnu kamatnu stopu $r = 10\%$ te parametar volatilnosti $\sigma = 40\%$. Računanjem cijene imovine M puta dobivamo sljedeću matricu:

$$\begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \dots & S_{1,M} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & \dots & S_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{M,1} & S_{M,2} & S_{M,3} & \dots & S_{M,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 49.69887 & 49.91850 & \dots & 57.44082 \\ 50 & 49.98113 & 49.42423 & \dots & 85.73517 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 50 & 51.03094 & 51.68688 & \dots & 43.21944 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Svaki redak matrice predstavlja jedno kretanje cijene imovine od trenutka 0 do dospijeća. Prosječnu cijenu imovine za svaku realizaciju dobivamo računanjem aritmetičke sredine svakog retka matrice pomoću funkcije `mean`. Dobivene vrijednosti spremamo u zaseban vektor:

$$\begin{aligned} (A_1, A_2, A_3, \dots, A_M) &= \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} S_{1,i}, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} S_{2,i}, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} S_{3,i}, \dots, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} S_{M,i} \right) \\ &= (53.91143, 50.85635, 42.23235, \dots, 46.99297). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Tada imamo sve što je potrebno za računanje cijene aritmetičke azijske opcije prema formuli (5.1) za svaku vrijednost vektora iz (5.8). Rezultat je vektor s $M = 1000$ komponenti:

$$(C_1, C_2, C_3, \dots, C_M) = (3.53921, 0.77494, 0, \dots, 0), \tag{5.9}$$

a zatim traženi Monte Carlo procjenitelj θ dobivamo uzimanjem prosjeka komponenti tog vektora:

$$\theta = 5.90722. \tag{5.10}$$

Standardnom Monte Carlo metodom dobivamo 95%-tni pouzdani interval za θ:

$$\left(\theta - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \theta + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right) = (5.88243, 5.93202). \tag{5.11}$$

5.2 Metoda kontrolnih varijata

Osim standardnom Monte Carlo metodom, u praksi se koriste i druge metode kojima se poboljšava procjena izračuna cijene, primjerice *metode smanjenja varijance*. Jedna od najkorištenijih metoda smanjenja varijance je *metoda kontrolnih varijata*. Na smanjivanje varijance procjenitelja možemo promatrati kao na način korištenja poznatih informacija u svrhu postizanja veće preciznosti procjenitelja. Traženi procjenitelj, θ, prilagođavamo pomoću kontrolne varijate čiju cijenu znamo odrediti. U ovom primjeru za kontrolnu varijatu uzimamo geometrijsku azijsku opciju.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $h : \Omega \to \Omega$ funkcija. Neka su X i Y slučajne varijable takve da je $Y = h(X)$. Ako postoji slučajna varijabla Z čije očekivanje možemo odrediti te je korelirana s Y, tada za Monte Carlo procjenitelja uzimamo:

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Y_i + c(Z_i - \mathbb{E}[Z])], \tag{5.12}$$

pri čemu su $(Y_i,\, Z_i)$, $i = 1, \ldots, n$ nizovi nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli koji imaju istu distribuciju kao i $(Y,\, Z)$. Neka je

$$R_i = Y_i + c(Z_i - \mathbb{E}[Z]), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.13}$$

Računajući varijancu od R_i za proizvoljan i slijedi:

$$\mathrm{Var}(R_i) = \mathrm{Var}(Y_i) + c^2\,\mathrm{Var}(Z_i) + 2c\,\mathrm{Cov}(Y_i, Z_i), \tag{5.14}$$

a deriviranjem čitavog izraza obzirom na konstantu c dobivamo:

$$0 = 2c\mathrm{Var}(Z_i) + 2\mathrm{Cov}(Y_i, Z_i). \tag{5.15}$$

Minimizacijom izraza (5.15) tražimo vrijednost konstante c za koju je vrijednost $\mathrm{Var}(R_i)$ najmanja. Dobiveni optimalni c, u oznaci c^*, dan je izrazom:

$$c^* = -\frac{\mathrm{Cov}(Y_i, Z_i)}{\mathrm{Var}(Z_i)}. \tag{5.16}$$

Napomena. U primjeru je predstavljena metoda kontrolnih varijata u jednodimenzionalnom slučaju. Metodu je moguće primijeniti i kada je traženi procjenitelj višedimenzionalan, a za detalje o tome čitatelja upućujemo na [14].

Izraz (5.12) moguće je izračunati za svaki $c \in \mathbb{R}$, ali kako bi imali što veću preciznost koristimo optimalnu vrijednost c^*. Optimalni c računamo pomoću pilot uzoraka

(Y_i, Z_i), $i = 1, \ldots, m$. Nakon što izračunamo c^*, pomoću n simulacija određujemo vrijednosti komponenti slučajnog vektora $R = (R_1, \ldots, R_n)$:

$$R_i = Y_i + c^*(Z_i - \mathbb{E}[Z]),\ i = 1, \ldots, n. \tag{5.17}$$

Pomoću funkcije `mean()` u R-u možemo vrlo lako dobiti prosječnu vrijednost komponenti slučajnog vektora R, a dobiveni rezultat je upravo procjenitelj θ koji tražimo.

Procjenjujemo cijenu aritmetičke azijske opcije s $n = 900$ simulacija i $m = 100$ pilot simulacija. Neka je $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ takav da je $0 = t_1 < \ldots < t_m = T$ i $t_i - t_{i-1} = \frac{i \cdot T}{m}$ za $i = 1, \ldots, m$. Analognim postupkom kao i u standardnoj Monte Carlo metodi računa se kretanje cijene imovine od trenutka 0 do dospijeća T te se dobije vektor s m komponenti

$$(S_1, S_2, \ldots, S_m) = (50,\ 49.98012, \ldots, 56.64383). \tag{5.18}$$

Tada je cijena aritmetičke azijske opcije u svakom trenutku do dospijeća:

$$(C_{1,m}, C_{2,m}, C_{3,m}, \ldots, C_{m,m}) = (0,\ 0.44768,\ 0.64269, \ldots, 6.64383). \tag{5.19}$$

Za kontrolnu varijatu uzimamo geometrijsku azijsku opciju, koja ima eksplicitnu formulu za cijenu. U R-u možemo napisati funkciju koja će za dane parametre računati cijenu geometrijske azijske opcije prema Black-Scholes-Mertonovoj formuli danoj u (2.27):

```
geometrijska_opcija <- function(S0, K, r, sigma, T,i) {
  d1 <- (log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma^2) * T) / (sigma * sqrt(T))
  d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)

  C <- exp(-r * (T-i)) * (S0 * exp((r - 0.5 * sigma^2) * T)
    * pnorm(d1) - K * pnorm(d2))

  return(C)
}
```

Pomoću funkcije `pnorm()` u R-u dobivamo vrijednost funkcije distribucije normalne slučajne varijable u točki d_1, odnosno d_2 definiranima kao u (2.28). Sada uz cijenu aritmetičke azijske opcije, računamo i cijenu geometrijske azijske opcije za svaku vrijednost t_i, $i = 1, \ldots, m$:

$$(G_{1,m}, G_{2,m}, \ldots, G_{m,m}) = (7.56962,\ 7.57727, \ldots, 8.36573). \tag{5.20}$$

Formulom (5.16) računamo optimalnu vrijednost konstante c:

```
c_opt <- -cov(C_m,G_m)/var(G_m),
```

a rezultat koji time dobijemo je $c^* = -1.98661$. Postupak ponovimo za $n = 900$ simulacija te dobijemo da je cijena aritmetičke azijske opcije:

$$(C_{1,n}, C_{2,n}, C_{3,n}, \dots, C_{n,n}) = (4.70102, 0.21898, 7.65277, \dots, 0), \tag{5.21}$$

a cijena geometrijske azijske opcije:

$$(G_{1,n}, G_{2,n}, \dots, G_{n,n}) = (7.56962, 7.57046, \dots, 8.36573). \tag{5.22}$$

Pomoću (5.17) određujemo komponente vektora R. Pripadajući kod kojim računamo R je:

```
R <- mean(C_n)+c_opt*(G_n-mean(G_n)).
```

Uzimanjem prosjeka komponenti slučajnog vektora R koristeći funkciju `mean()` dobivamo da je traženi procjenitelj:

$$\theta = 5.5217. \tag{5.23}$$

Metodom kontrolnih varijata dobivamo da je 95%-tni pouzdani interval

$$\left(\theta - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \theta + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right) = (5.49557, 5.54784). \tag{5.24}$$

Uočimo da smo korištenjem standardne Monte Carlo metode dobili 10^3 simulacija cijene aritmetičke azijske opcije $C_M = (C_{1,M}, C_{2,M}, \dots, C_{M,M})$, čija je varijanca jednaka:

$$\mathrm{Var}(C_M) = 83.48177, \tag{5.25}$$

a preko metode kontrolnih varijata dobili smo varijancu od $C_n = (C_{1,n}, C_{2,n}, \dots, C_{n,n})$:

$$\mathrm{Var}(C_n) = 68.85728. \tag{5.26}$$

Bibliografija

[1] F. Black i M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3, 637-654 (1973).

[2] Osseiran A. Bouzoubaa, M., *Exotic Options and Hybrids: A Guide to Structuring, Pricing and Trading*, Wiley Finance, 2010.

[3] H. Geman i M. Yor, *Pricing and Hedging Double-Barrier Options: A Probabilistic Approach*, Mathematical Finance, Vol. 6, No. 4, 341-408 (1996).

[4] M.B. Goldman, H.B. Sosin i M.A. Gatto, *Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High*, Journal of Finance, Vol. 34, 1111-1127 (1979.).

[5] E. Haug, *The Complete Guide to Option Pricing Formulas*, McGraw - Hill, 2007.

[6] V. Henderson i R. Wojakowski, *On The Equivalence of Floating-strike and Fixed-strike Asian Options*, Journal of Applied Probability, Vol. 39, 391-394 (2002.).

[7] J.C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2012.

[8] A.G.Z. Kemna i A.C.F. Vorst, *A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values*, Journal of Banking and Finance, Vol.14, 113-129 (1990.).

[9] D. Lamberton i B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 2008.

[10] D. Madan, M.C. Fu i T. Wang, *Pricing Asian Options: A Comparison of Analytical and Monte Carlo Methods*, (1997.).

[11] R. Mrazović, *Mjera i integral*, skripta, `https://www.dropbox.com/s/fgpz096bvduutn7/MII-skripta.pdf?dl=0&utm_source=Mjera+i+integral+-+predavanja`, pristupljeno 26.1.2024.

[12] P. Mörters i Y. Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, 2010.

[13] S. Ross, *A First Course in Probability*, Prentice Hall, 2010.

[14] R.Y. Rubenstein i R. Marcus, *Efficiency of Multivariate Control Variates in Monte Carlo Simulation*, Operations Research, Vol.33, 661-677 (1985.).

[15] M. Rubinstein i E. Reiner, *Breaking Down The Barriers*, Risk, Vol. 4, 28-35 (1991).

[16] N. Sandrić i Z. Vondraček, *Vjeorjatnost*, skripta, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_predavanja.pdf`, pristupljeno 1.3.2024.

[17] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 2002.

[18] S.E. Shreve, *Stochastic Caluclus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.

[19] C.W. Smith, *Option pricing: A review*, Journal of Financial Economics (1976).

[20] J.M. Tebbs, *Stat 712: Mathematical Statistics I*, `https://people.stat.sc.edu/Tebbs/stat712/f17notes.pdf`, Department of Statistics, University of South Carolina, pristupljeno 19.12.2023.

[21] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje 2*, skripta, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm2_p.pdf`, pristupljeno 4.2.2024.

[22] ———, *Slučajni procesi*, skripta, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp22-predavanja.html`, pristupljeno 21.1.2024.

[23] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 1*, skripta, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm1_p.pdf`, pristupljeno 17.1.2024.

[24] P. Wilmott, *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2006.

[25] P Wilmott, S. Howison i J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.

Sažetak

Egzotična opcija vrsta je opcije čije su karakteristike složenije od običnih (*vanilla*) opcija. Posebnima ih čini to što na njihovu isplatu mogu utjecati različiti okidači, primjerice prosječna cijena imovine u vremenu do dospijeća te mogu uključivati nestandardne temeljne imovine. Njihova isplata ne mora ovisiti o cijelom putu cijene temeljne financijske imovine, može ovisiti i samo o cijeni imovine po dospijeću. Cilj rada je dati kratki pregled egzotičnih opcija, posebice opcija s barijerom, *lookback* opcija i azijskih opcija. Naglasak je stavljen na izračun cijena tih opcija u okviru Black-Scholes-Mertonovog modela. Opcija s barijerom vrsta je financijske izvedenice čija isplata ovisi o tome je li cijena temeljne financijske imovine premašila ili pala ispod unaprijed određene barijere. Kod *lookback* opcija, isplata se temelji na maksimalnoj vrijednosti cijene temeljne financijske imovine. Isplata za azijsku opciju ovisi o prosječnoj cijeni temeljne financijske imovine te za takve opcije općenito ne postoji eksplicitna formula za cijenu. Cijenu azijske opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu određujemo preko pripadne parcijalne diferencijalne jednadžbe. Primjer izračuna cijene azijske opcije prezentiran je pomoću Monte Carlo simulacija u programskom jeziku R.

Summary

Exotic options are options whose characteristics are more complex that those of regular (*vanilla*) options. What makes them special is the fact that different triggers may influence their payoffs, for example the average asset price over the time to expiry. They also may be based on some non-standard assets. The payoff of an exotic option does not necessarily depend on the entire path of the asset price, it can depend only on the asset price at expiry. The purpose of this paper is to provide a brief introduction to exotic options, with a focus on barrier options, lookback options and Asian options. Our focus is on calculating option prices in the Black-Scholes-Merton model. A barrier option is a type of financial derivative whose payoff depends on the asset price crossing over or falling below the pre-determined barrier. The payoff of a lookback option is based on the maximum value of the asset price. The payoff of an Asian option depends on the average asset price over the time to expiry and for such options, in general, there is no explicit formula for the option price. The price of an Asian option in the Black-Scholes-Merton model is determined through a partial differential equation. An example of pricing of an Asian option is demonstrated through Monte Carlo simulations in the R programming language.

Životopis

Rođena sam u Zadru 6. lipnja 1999. godine, gdje sam završila osnovnu školu Bartula Kašića te kasnije opći smjer Gimnazije Franje Petrića. U akademskoj godini 2018./2019. upisujem prvu godinu sveučilišnog preddiplomskog studija Matematika, nastavnički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2021. godine završavam preddiplomski studij i stječem titulu sveučilišnog prvostupnika edukacije matematike (univ. bacc. edu. math). U rujnu iste godine upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike koji završavam obranom ovog rada.