Blok-matrice

Tomić, Domagoj

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Domagoj Tomić

BLOK-MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, travanj, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mentorici prof. dr. sc. Ljiljani Arambašić na strpljenju, trudu i podršci tijekom pisanja ovog rada.
Hvala mojoj obitelji i prijateljima na podršci tijekom cijelog studija.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu proučavat ćemo blok-matrice. Blok-matrice pojavljuju se u većini modernih primjena linearne algebre jer notacija naglašava bitne strukture matrica. Intuitivno, matrica interpretirana kao blok-matrica može se vizualizirati kao izvorna matrica sa skupom vodoravnih i okomitih linija, koje je dijele na manje matrice. Posebno kada su dimenzije matrice velike, može biti korisno zapisati matricu u ovom obliku.

U prvom poglavlju dajemo pregled linearne algebre. Prisjetit ćemo se definicije matrice, operacije s matricama i nekih vrsta matrica. Između ostalog, prisjetit ćemo se elementarnih transformacija nad matricama i kako se svaka elementarna transformacija nad matricama može prikazati kao množenje matrice odgovarajućom elementarnom matricom, pojma inverza, determinante i ranga matrice te načina za njihovo određivanje. Pojam ranga pojavljuje se u mnogim zadaćama, kao primjer spomenimo rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Također, ponovit ćemo osnovne pojmove o svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektora linearnog operatora, odnosno matrice.

U drugom poglavlju definirat ćemo blok-matricu, te proučavati kako se standardne matrične operacije zapisuju i provode po blokovima. Nadalje, proučavat ćemo elementarne transformacije nad blok-matricama te računati inverz i determinantu određenih blok-matrica. Potom ćemo određivati rang blok-matrica i primjenjivati za dobivanje rezultata o rangu zbroja i produkta matrice. Zatim ćemo definirati generalizirani inverz pomoću kojeg zapisujemo rješenje konzistentnog sustava linearnih jednadžbi. Na kraju proučavamo vezu između spektra matrice AB i matrice BA.

Poglavlje 1

Matrice

Jedan od ključnih pojmova ovog diplomskog rada su matrice. U ovom dijelu navodimo osnovne pojmove i rezultate linearne algebre koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

1.1 Vektorski prostor matrica

U ovom odjeljku najprije navodimo osnovne pojmove o vektorskim prostorima, nakon čega se fokusiramo na matrične prostore.

Definicija 1.1.1. *Neka je V neprazan skup i $\mathbb{F}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva* ($\mathbb{R}$ *ili* $\mathbb{C}$). *Kažemo da je V* ***vektorski prostor nad poljem*** $\mathbb{F}$ *ako vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $u + v \in V$ *za sve* $u, v \in V$,

(2) $\lambda v \in V$ *za sve* $v \in V, \lambda \in \mathbb{F}$,

(3) $u + v = v + u$ *za sve* $u, v \in V$ *(komutativnost zbrajanja),*

(4) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *za sve* $u, v, w \in V$ *(asocijativnost zbrajanja),*

(5) postoji element $0_V \in V$ *takav da je* $v + 0_V = v$ *za sve* $v \in V$ *(neutralni element za zbrajanje),*

(6) za svaki $v \in V$ *postoji element* $-v \in V$ *takav da je* $v + (-v) = 0_V$ *za sve* $v \in V$ *(suprotni element za zbrajanje),*

(7) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *za sve* $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F}$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju vektora),*

(8) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ *za sve* $u \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju skalara),*

(9) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ *za sve* $u \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *(kvaziasocijativnost),*

(10) $1 \cdot v = v$ *za sve* $v \in V$ *(netrivijalnost množenja).*

Elemente vektorskog prostora nazivamo ***vektorima****, a elemente polja* ***skalarima****. Element* 0_v *nazivamo* ***nul-vektor****.*

Primjer 1.1.1. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$*. Skup* $\mathbb{R}^n$ *svih uređenih n-torki realnih brojeva je vektorski prostor nad* $\mathbb{R}$ *s obzirom na zbrajanje vektora*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

i množenja vektora skalarom

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definicija 1.1.2. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *te* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *i* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$*. Vektor oblika*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

nazivamo ***linearnom kombinacijom vektora*** $v_1, \ldots, v_n \in V$ *sa skalarima* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$*.*

Definicija 1.1.3. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$*,* $n \in \mathbb{N}$ *i* $S \subseteq V$*.* ***Linearna ljuska****, u oznaci* $[S]$*, je skup svih linearnih kombinacija elemenata iz* S*, to jest*

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i : v_1, \ldots, v_n \in S, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F} \right\}.$$

Definicija 1.1.4. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i* $G \subseteq V$*. Ako je* $V = [G]$*, odnosno ako se svaki vektor iz* V *može prikazati kao linearna kombinacija vektora iz* G*, onda kažemo da je* G ***sustav izvodnica*** *za* V*. Još kažemo da* G ***razapinje*** *vektorski prostor* V*.*

Definicija 1.1.5. *Vektorski prostor* V *je* ***konačnogeneriran*** *ako postoji barem jedan konačan sustav izvodnica za* V*.*

Definicija 1.1.6. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i* $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *skup u* V*. Skup* S *je* ***linearno nezavisan*** *ako iz jednakosti*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$$

slijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$*. Kažemo da je skup* S ***linearno zavisan*** *ako nije linearno nezavisan, odnosno, ako postoje skalari* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ *od kojih je barem jedan različit od 0 takvi da je* $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$*.*

Definicija 1.1.7. ***Baza*** *vektorskog prostora V je linearno nezavisan skup koji razapinje V. **Dimenzija prostora** V, u oznaci* $\dim V$, *je broj elemenata baze. Ukoliko je* $\dim V = n$, *tada je V n-dimenzionalan vektorski prostor. Definiramo* $\dim\{0_V\} = 0$. *Vektorski prostor V je **konačnodimenzionalan** ako postoji konačna baza za V. U suprotnom, prostor je **beskonačnodimenzionalan**.*

Napomena 1.1.1. *Osim ako nije drugačije rečeno, u radu pretpostavljamo da su vektorski prostori konačnodimenzionalni, iako neki rezultati vrijede za beskonačnodimenzionalne prostore.*

Primjer 1.1.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ je baza za $\mathbb{F}^n$, pri čemu su vektori zadani kao*

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Ova baza se naziva kanonska ili standardna baza. Slijedi da je $\dim \mathbb{F}^n = n$.

Napomena 1.1.2. *Ako je skup $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza za vektorski prostor V dimenzije n, tada svaki vektor v se može na jedinstven način zapisati kao linearna kombinacija vektora baze, dakle postoje jedinstveni skalari $\lambda_1, \dots \lambda_n$ takvi da vrijedi*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Teorem 1.1.1. *Neka je konačnogeneriran vektorski prostor V. Ako je $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sustav izvodnica za V, onda on sadrži podskup koji je baza prostora V.*

Korolar 1.1.1. *Svaki vektorski prostor koji je konačnogeneriran ima konačnu bazu.*

Definicija 1.1.8. *Podskup W vektorskog prostora V koji je i sam vektorski prostor s obzirom na iste operacije zbrajanja i množenja skalarima nazivamo **potprostor** od V. Zapisujemo $W \leq V$.*

Definicija 1.1.9. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. **Matrica tipa** (m, n) s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ je preslikavanje*

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{F}.$$

Matricu A zapisujemo kao pravokutnu tablicu od m redaka i n stupaca,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matricu A s elementima a_{ij} skraćeno zapisujemo kao $[a_{ij}]$ ili (a_{ij}).

Iako matrice definiramo kao preslikavanja, s njima radimo kao s tablicama.

Skalari $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, nazivaju se **elementi** ili **koeficijenti** matrice A. Za $i \in \{1, \ldots, m\}$ uređena n-torka $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ čini i-ti **redak** matrice A te za $j \in \{1, \ldots, n\}$ uređena m-torka $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ čini j-ti **stupac** matrice A. Ako matrica A ima jednaki broj redaka i stupaca $m = n$, onda kažemo da je A **kvadratna matrica reda** n.

Skup svih matrica tipa (m, n) označavamo $M_{mn}(\mathbb{F})$, a skup svih kvadratnih matrica n-tog reda $M_n(\mathbb{F})$. Ponekad ove oznake kratimo u M_{mn} i M_n, u slučaju kada ne moramo naglašavati o kojem polju se radi.

Kažemo da su dvije matrice $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ jednake ako su istog tipa i ako su im svi odgovarajući elementi jednaki $a_{ij} = b_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Ako su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F}), A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ tada zbrajanje matrica i množenje skalarima definiramo po elementima na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

i

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zbroj matrica A i B označavamo $A + B$. Umnožak matrice A i skalara λ označavamo λA. S obzirom na navedene operacije, $M_{mn}(\mathbb{F})$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ dimenzije $m \cdot n$.

Stupce matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

promatramo kao matrice tipa $(m, 1)$:

$$S_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, S_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

a retke kao matrice tipa $(1, n)$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix},$$
$$\dots$$
$$R_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Sada matricu A kraće zapisujemo kao

$$A = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix},$$

što nazivamo **stupčana**, odnosno **retčana reprezentacija** matrice A.

Kažemo da su matrice $A \in M_{mr}(\mathbb{F})$ i $B \in M_{sn}(\mathbb{F})$ **ulančane** ako je broj stupaca od A jednak broju redaka od B, dakle $r = s$.

Za dvije ulančane matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B \in M_{np}(\mathbb{F})$ možemo definirati produkt AB.

Definicija 1.1.10. *Neka su $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B = [b_{ij}] \in M_{np}(\mathbb{F})$. **Produkt** ili **umnožak matrica** A i B je matrica $C = [c_{ij}] \in M_{mp}(\mathbb{F})$ koju označavamo s $C = AB$ takva da je*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

za sve $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$.

Primjer 1.1.3. *Neka su dane matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 6 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da BA nije definirano.

Napomena 1.1.3. *Množenje matrica općenito nije komutativno, to jest, postoje matrice A, B takve da je $AB \neq BA$. Vrijedi asocijativnost i distributivnost množenja prema zbrajanju matrica: $A(BC) = (AB)C$ za sve $A \in M_{mn}(\mathbb{F}), B \in M_{np}(\mathbb{F})$ i $C \in M_{pr}(\mathbb{F})$ te $A(B + C) = AB + AC$, za sve $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B, C \in M_{np}(\mathbb{F})$ i $(A + B)C = AC + BC$ za sve $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $C \in M_{np}(\mathbb{F})$.*

Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica koju dobijemo od matrice A zamjenom redaka i stupaca naziva se **transponirana** matrica i označava s $A^T = [a_{ji}] \in M_{nm}(\mathbb{F})$,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Propozicija 1.1.1. *Ako je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $B \in M_{np}(\mathbb{F})$ tada vrijedi: $(AB)^T = B^T A^T$.*

Matrica koju dobijemo od matrice A konjugiranjem elemenata naziva se **konjugirana** matrica i označava s $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$, dakle

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}.$$

Propozicija 1.1.2. *Vrijedi: $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.*

Adjungirana matrica A^* matrice $A \in M_{mn}$ definira se kao $A^* = \overline{A}^T$, dakle

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}.$$

Propozicija 1.1.3. *Vrijedi: $(AB)^* = B^* A^*$.*

Nadalje promatramo kvadratne matrice reda n. Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$, odnosno,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kažemo da su $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ njeni **dijagonalni** elementi te da oni čine dijagonalu matrice. Zbroj svih dijagonalnih elemenata matrice A nazivamo **trag** matrice i označavamo $\operatorname{tr} A$. Dakle, vrijedi

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Napomena 1.1.4. *Vrijedi sljedeće:* $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$, $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$ *i* $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.

Sada navodimo neke posebne vrste matrica. Kažemo da je matrica $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$:

(1) **dijagonalna**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$,

(2) **gornjetrokutasta**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i > j, 1 \leq i, j \leq n$,

(3) **donjetrokutasta**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i < j, 1 \leq i, j \leq n$,

(4) **simetrična**, ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve $1 \leq i, j \leq n$,

(5) **antisimetrična**, ako je $a_{ij} = -a_{ji}$ za sve $1 \leq i, j \leq n$.

Nulmatrica, u oznaci O, je matrica čiji su svi elementi jednaki 0, dakle

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Jedinična matrica $I \in M_n(\mathbb{F})$ je dijagonalna matrica kojoj su dijagonalni elementi jednaki 1, dakle

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponekad jediničnu matricu reda n označavamo s I_n.

Napomena 1.1.5. *Za svaku matricu* $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *i nulmatricu* O *vrijedi:* $A \cdot O = O$ *i* $O \cdot A = O$ *te za svaku matricu* $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *i jediničnu matricu* I *vrijedi:* $A \cdot I_n = A$ *i* $I_m \cdot A = A$.

1.2 Elementarne transformacije nad matricama

Elementarne transformacije nad retcima i stupcima matrice su:

(1) Zamjena dvaju redaka (odnosno stupaca) matrice;

(2) Množenje jednog retka (odnosno stupca) matrice skalarom različitim od 0;

(3) Dodavanje nekom retku (odnosno stupcu) nekog drugog retka (odnosno stupca) prethodno pomnoženog nekim skalarom.

Prisjetimo se definicije elementarnih matrica.

Definicija 1.2.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$.* ***Elementarne matrice reda*** *n su matrice koje su nastale primjenom točno jedne elementarne transformacije na jediničnu matricu I reda n.*

Uvedimo oznake za elementarne matrice reda n, ovisno o tipu elementarne transformacije koju smo izveli nad I.

- Za $i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$, matrice $E_{i,j}$, označavaju matrice nastale iz I primjenom elementarne transformacije 1. tipa, točnije, zamjenom i-tog i j-tog retka (ili zamjenom i-tog i j-tog stupca):

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Za $i = 1, \ldots, n$ i $\lambda \neq 0$ matrica E_i^λ nastala je iz I primjenom elementarne transformacije 2. tipa, to jest, množenjem i-tog retka (ili i-tog stupca) s $\lambda \neq 0$:

$$E_i^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Za $i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$ i λ matrica $E_{i,j}^\lambda$ označava matricu nastalu iz I primjenom elementarne transformacije 3. tipa, točnije, dodavanjem i-tog retka od I pomnoženog s λ j-tom retku od I (ili dodavanjem j-tog stupca od I pomnoženog s λ i-tom stupcu od I):

$$E_{i,j}^{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Kada uvedemo elementarne matrice, onda se prethodno spomenute elementarne operacije s matricama mogu formalno zapisati kao množenje matrice odgovarajućom elementarnom matricom.

Navodimo teorem koji precizira kako se elementarna transformacija prikazuje kao množenje elementarnom matricom.

Teorem 1.2.1. *Ako matricu $A \in M_{mn}$ pomnožimo elementarnom matricom s lijeve (desne) strane dobije se matrica nastala primjenom odgovarajuće elementarne transformacije nad retcima (stupcima) od A. Preciznije,*

(1) $E_{i,j}A$ je matrica koja nastaje zamjenom i-tog i j-tog retka u A,

(2) $E_i^{\lambda}A$ je matrica koju dobivamo tako da i-ti redak u A množimo s λ,

(3) $E_{i,j}^{\lambda}A$ je matrica koja se dobije tako što se j-tom retku matrice A pribroji njezin i-ti redak pomnožen s λ,

(4) $AE_{i,j}$ je matrica koja nastaje zamjenom i-tog i j-tog stupca u A,

(5) AE_i^{λ} je matrica koju dobivamo tako da i-ti stupac u A množimo s λ,

(6) $AE_{i,j}^{\lambda}$ je matrica koja se dobije tako što se j-tom stupcu matrice A pribroji njezin i-ti stupac pomnožen s λ.

Elementarne transformacije koristimo pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi, određivanju ranga matrice te računanju determinante matrice.

1.3 Inverz i determinanta matrice

Prisjetimo se definicije inverza matrice.

Definicija 1.3.1. *Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ kažemo da je* ***regularna*** *ili* ***invertibilna*** *ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je*

$$AB = BA = I.$$

Matricu B zovemo ***inverz*** *matrice A i označavamo A^{-1}.*

Napomena 1.3.1. *Ako takva matrica postoji, ona je nužno jedinstvena. Zaista, pretpostavimo da su B i C inverzne matrice od A. Tada je $AB = BA = I$ i $AC = CA = I$, odakle je*

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Teorem 1.3.1. *Svaka regularna matrica A može se svesti na jediničnu matricu provodeći konačno mnogo elementarnih transformacija nad retcima. Ako te iste elementarne transformacije provedemo istim redoslijedom nad retcima matrice I, dobit ćemo matricu A^{-1}.*

Primjer 1.3.1. *Neka je dana matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$. Odredimo joj inverz Gauss-Jordanovim postupkom:*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} A & \mid & I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & \mid & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & \mid & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & \mid & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & \mid & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & \mid & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mid & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -5 & \mid & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \mid & \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mid & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mid & \frac{-1}{3} & \frac{-7}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \mid & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I & \mid & A^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Propozicija 1.3.1. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Ako su A i B regularne matrice, tada je i matrica AB regularna i vrijedi*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Regularnost matrice može se karakterizirati pomoću njezine determinante i pomoću ranga. Naime, kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$, odnosno ako i samo ako je $r(A) = n$, to jest A je matrica punog ranga. Također, može se pokazati da je dovoljno provjeriti jednu od jednadžbi $AB = I$ i $BA = I$ iz definicije 1.1.2., a druga će automatski biti zadovoljena.

Prisjetimo se definicije permutacije i predznaka permutacije koje koristimo u definiciji determinante.

Definicija 1.3.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$.* ***Permutacija skupa*** $\{1, 2 \ldots, n\}$ *je svaka bijekcija*

$$p : \{1, 2 \ldots, n\} \to \{1, 2 \ldots, n\}.$$

Permutacije skupa $\{1, 2 \ldots, n\}$ *zapisujemo u obliku tablice*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.

Definicija 1.3.3. *Neka je*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Inverzija *u permutaciji je svaki par (i, j) takav da je $i < j$ i $p(i) > p(j)$. Ukupan broj inverzija permutacije p označavamo s $I(p)$. Predznak permutacije* $\mathrm{sign}(p)$ *definira se kao* $\mathrm{sign}(p) = (-1)^{I(p)}$.

Definicija 1.3.4. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$.* ***Determinanta matrice*** *A, u oznaci* $\det A$, *je broj definiran kao*

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sign}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sign}(p) \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)}.$$

Determinantu zapisujemo i u obliku tablice

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta je preslikavanje $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koje matrici A pridružuje broj $\det A$.

Raspisujemo formulu za slučajeve $n = 1, 2, 3$.

(1) Za $n = 1$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, $\det A = \det a_{11}$.

(2) Za $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

(3) Za $n = 3$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Determinantu matrice može se također računati pomoću Laplaceovog razvoja determinante. Prvo ćemo definirati algebarski komplement.

Definicija 1.3.5. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F}), n \geq 2$ i neka je Δ_{ij} determinanta matrice $(n-1)$-og reda koja nastaje uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca iz matrice A, gdje su $1 \leq i, j \leq n$. Determinanta Δ_{ij} naziva se **subdeterminanta** ili **minora** matrice A određena elementom a_{ij}. Broj*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

*naziva se **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa a_{ij} matrice A.*

Teorem 1.3.2 (Laplaceov razvoj determinante). *Neka je $n \geq 2$ i $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \quad \forall k = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

i

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad \forall k = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Jednakost (1.1) se naziva Laplaceov razvoj po k-tom retku, a jednakost (1.2) Laplaceov razvoj po k-tom stupcu.

Primjer 1.3.2. *Izračunajmo determinantu matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Laplaceovim razvojem po trećem retku imamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zatim ponovno primjenjujemo Laplaceov razvoj po trećem retku na obje determinante te imamo

$$\det A = 1 \cdot (-8) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-4) - 10 \cdot (-4) = 72.$$

Definicija 1.3.6. *Neka je $A \in M_n$.* ***Adjunkta matrice*** *A je matrica*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

pri čemu je A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij} matrice A.

Teorem 1.3.3. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi*

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det A \cdot I_n.$$

Napomena 1.3.2. *Primijetimo da teorem 1.4.3 povlači sljedeće: ako je $A \in M_n$ regularna matrica, tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

Tako za $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdje je $\det(A) = ad - bc \neq 0$, imamo

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Za određene klase matrica je lako izračunati determinantu.

Propozicija 1.3.2. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ dijagonalna ili gornjetrokutasta ili donjetrokutasta matrica. Tada je*

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Napomena 1.3.3. *Vrijedi:* $\det I_n = 1, \det(-I_n) = (-1)^n, \det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \det(-A) = (-1)^n \det A$.

Propozicija 1.3.3. *Za svaku matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi* $\det A = \det A^T$.

Jedan od najvažnijih teorema o determinantama je Binet-Cauchyjev teorem kojeg ćemo često koristiti u radu:

Teorem 1.3.4 (Binet-Cauchyjev teorem). *Neka su* $A, B \in M_n$. *Tada vrijedi*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Napomena 1.3.4. *Općenito* $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. *Na primjer, uzmimo* $A = B = I \in M_2$.

Determinanta matrice ima sljedeća svojstva.

Propozicija 1.3.4. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ *i* $\lambda \in \mathbb{F}$ *te* $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ *matrica dobivena iz* A *tako što smo jedan njezin redak (ili stupac) pomnožili s* λ. *Tada je*

$$\det B = \lambda \det A.$$

Propozicija 1.3.5. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ *te neka je* $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ *matrica dobivena iz* A *tako što smo zamijenili neka njena dva retka (ili dva stupca). Tada je*

$$\det B = -\det A.$$

Propozicija 1.3.6. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ *te neka je* $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ *matrica dobivena iz* A *tako što smo nekom retku (ili stupcu) pribrojili neki drugi redak (stupac) pomnožen s* λ. *Tada je*

$$\det B = \det A.$$

1.4 Rang matrice

Navodimo definiciju i osnovna svojstva ranga matrice te način kako rang matrice određujemo koristeći elementarne transformacije.

Definicija 1.4.1. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$, *te neka su* $S_1, \dots, S_n \in M_{m1}$ *stupci matrice* A. ***Rang matrice*** A, *u oznaci* $r(A)$, *je dimenzija vektorskog prostora razapetog skupom* $\{S_1, \dots, S_n\}$, *dakle,*

$$r(A) = \dim[\{S_1, S_2, \dots, S_n\}].$$

Teorem 1.4.1. *Neka je* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ *i* $r = r(A)$. *Tada je maksimalan broj linearno nezavisnih redaka u* A *jednak* r. *Posebno,* $r(A) = r(A^T)$.

Napomena 1.4.1. *Vrijedi:* $r(A) = r(A^T) = r(\overline{A}) = r(A^*)$.

Propozicija 1.4.1. *Neka su* $A \in M_{mn}$ *i* $B \in M_{np}$. *Tada je*

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}.$$

Definicija 1.4.2. *Kažemo da je matrica $B \in M_{mn}$* ***ekvivalentna*** *matrici $A \in M_{mn}$ i pišemo $A \sim B$ ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka ili stupaca.*

Teorem 1.4.2. *Neka su $A, B \in M_{mn}$. Tada vrijedi $A \sim B$ ako i samo ako $r(A) = r(B)$.*

Očito je $A \sim B$ ako i samo ako je $B \sim A$.

Primjer 1.4.1. *Odredimo rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prvo ćemo drugom retku dodati prvi redak pomnožen s -4, a zatim trećem retku prvi redak pomnožen s -2. Dobivamo matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Sada trećem retku dodamo drugi redak pomnožen s -1 i dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posljednja matrica ima rang 2, a kako je ona nastala iz A primjenom elementarnih transformacija, zaključujemo da je $r(A) = 2$.

Teorem 1.4.3. *Matrice $A, B \in M_{mn}$ su ekvivalentne ako i samo ako postoje regularne matrice $P \in M_m$ i $Q \in M_n$ takve da je $B = PAQ$.*

Teorem 1.4.4. *Neka je $A \in M_{mn}$ ranga r. Tada postoje regularne matrice $P \in M_m$ i $Q \in M_n$ koje su obje produkti elementarnih matrica takve da vrijedi*

$$A = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \tag{1.3}$$

pri čemu je matrica s desne strane blok-matrica: I_r je jedinična matrica reda r, a O su nulmatrice odgovarajućih tipova.

Ovu blok-matricu ponekad zapisujemo kao $I_r \oplus 0$.

1.5 Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, \ldots, x_n$ zapisujemo u obliku

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

pri čemu su $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ za $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$. Koeficijente a_{ij}, slobodne koeficijente b_i i nepoznanice x_i smjestit ćemo u matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in M_{m1}(\mathbb{F}), \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{F})$$

tako da sustav zapisujemo u obliku matrične jednadžbe

$$AX = B.$$

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ koja je rješenje svake jednadžbe unutar sustava. Ako je $B = 0$, onda je sustav **homogen**. Uređena n-torka $(0, \ldots, 0)$ je uvijek rješenje homogenog sustava te takvo rješenje nazivamo **trivijalno rješenje** homogenog sustava. Ako postoji rješenje sustava, onda je taj sustav **konzistentan**. Ako ne postoji rješenje sustava, sustav je **nekonzistentan**. Uz navedene matrice treba napomenuti i **proširenu matricu sustava** zapisanu kao

$$A_p = \begin{bmatrix} A & | & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix} \in M_{m,n+1}(\mathbb{F}).$$

Sljedeći teorem nam kazuje kada je sustav rješiv, kada ima jedinstveno rješenje i kada ima beskonačno mnogo rješenja.

Teorem 1.5.1. *Neka je zadan sustav $AX = B$, pri čemu je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$.*

(1) Sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo ako vrijedi $r(A) = r(A_p)$.

(2) Sustav $AX = B$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $r(A) = r(A_p) = n$.

(3) Sustav $AX = B$ ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $r(A) = r(A_p) < n$.

Definicija 1.5.1. ***Cramerov sustav*** *je sustav n linearnih jednadžbi s n nepoznanica čija je matrica A regularna. Njegovo rješenje je jedinstveno i vrijedi $X = A^{-1}B$.*

Teorem 1.5.2. *Neka je $A \in M_{mn}$ matrica ranga r. Skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$ je vektorski prostor dimenzije $n - r$.*

1.6 Linearni operatori i svojstvene vrijednosti

Linearni operator A se prikazuje kao matrica.

Definicija 1.6.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ je* ***linearni operator*** *ako vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $A(u + v) = Au + Av$, $\forall u, v \in V$ (aditivnost),

(2) $A(\lambda u) = \lambda A(u)$, $\forall u \in V, \lambda \in \mathbb{F}$ (homogenost).

Skup svih linearnih operatora sa V u W, u oznaci $L(V, W)$, jest vektorski prostor.

Svojstva aditivnosti i homogenosti linearnog operatora $A : V \to W$ ekvivalentna su svojstvu linearnosti

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A(u) + \mu A(v), \forall u, v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{F}.$$

Svaka matrica definira linearni operator na sljedeći način: ako je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, definiramo $\mathcal{A} : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ kao

$$\mathcal{A}(x) = Ax, \quad x \in M_{n1}(\mathbb{F}).$$

Provjerimo da je ovo preslikavanje definirano kao

$$\mathcal{A} : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F}), \quad \mathcal{A}(x) = Ax \tag{1.4}$$

linearni operator. Uzmimo proizvoljno $x, y \in M_{n1}, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) &= A(\lambda x + \mu y)\\ &= \lambda Ax + \mu Ay\\ &= \lambda\mathcal{A}(x) + \mu\mathcal{A}(y).\end{aligned}$$

Prisjetimo se definicija sličnih matrica, svojstvenih vrijednosti te svojstvenog polinoma matrice A.

Definicija 1.6.2. *Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$* ***slična*** *matrici $B \in M_n(\mathbb{F})$, ako postoji regularna matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $P^{-1}AP = B$.*

Definicija 1.6.3. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je* ***svojstvena vrijednost*** *matrice A ako postoji $X \in M_{n1}(\mathbb{F}), X \neq 0$ takav da je*

$$AX = \lambda X.$$

Taj vektor X nazivamo ***svojstveni vektor matrice*** *A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se* ***spektar*** *i označava sa $\sigma(A)$.*

Definicija 1.6.4. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom p_A definiran kao*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

naziva se ***svojstveni*** *ili* ***karakteristični polinom matrice*** *A.*

Teorem 1.6.1. *Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako je λ_0 rješenje jednadžbe*

$$p_A(\lambda_0) = 0.$$

Nadalje, slične matrice imaju iste karakteristične polinome.

Dokaz. Imamo sljedeći niz ekvivalencija:

$\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost matrice $A \Leftrightarrow$ postoji $X_0 \neq 0$ takav da $AX_0 = \lambda_0 X_0$

$\Leftrightarrow$ postoji $X_0 \neq 0$ takav da $(\lambda_0 I - A)X_0 = 0$

$\Leftrightarrow$ sustav $(\lambda_0 I - A)X_0 = 0$ ima i netrivijalno rješenje

$\Leftrightarrow r(\lambda_0 I - A) < n$

$\Leftrightarrow \det(\lambda_0 I - A) = 0 \Leftrightarrow p_A(\lambda_0) = 0.$ □

Primjer 1.6.1. *Neka je dana matrica $A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{F})$. Odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore za matricu A. Tražimo rješenja jednadžbe* $\det(\lambda I - A) = 0$, *odnosno*

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & 10 & 5 \\ -2 & \lambda - 14 & -2 \\ 4 & 8 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Laplaceovim razvojem determinante dobivamo jednadžbu $(\lambda - 5)(\lambda^2 - 20\lambda + 100) = 0$. Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10$. Uočimo, $\lambda_2 = 10$ je svojstvena vrijednost kratnosti dva. Sada kada smo pronašli svojstvene vrijednosti za A, možemo izračunati svojstvene vektore.

Prvo ćemo pronaći svojstvene vektore za $\lambda_1 = 5$. Želimo pronaći sve vektore X različite od 0 *tako da je $AX = 5X$. To ćemo pronaći ako riješimo jednadžbu $(5I - A)X = 0$, odnosno*

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -2 & -9 & -2 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Gaussovom metodom eliminacija dobivamo niz ekvivalentnih matrica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -2 & -9 & -2 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & -10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, x_1 - \frac{5}{4}x_3 = 0,$$

odnosno

$$x_1 = \frac{5}{4}s, x_2 = -\frac{1}{2}s, x_3 = s.$$

za neki skalar s. Dakle,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}s \\ -\frac{1}{2}s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ako pomnožimo ovaj vektor s 4*, dobivamo jednostavniji zapis rješenja ovog sustava:*

$$X = t \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da je vektor $X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ *jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 5$.*

Nadalje, za $\lambda_2 = 10$ imamo

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

pa Gaussovom metodom eliminacija dobivamo niz ekvivalentnih matrica:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,$$

odnosno

$$x_1 = -2t - s, x_2 = t, x_3 = s.$$

za neke skalare t, s. *Dakle,*

$$X = \begin{bmatrix} -2t - s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kao i maloprije, zaključujemo da su vektori $X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *i* $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *pridruženi svojstvenoj vrijednosti* $\lambda_2 = 10$.

Poglavlje 2

Blok-matrice

2.1 Definicija blok-matrice

U ovom odjeljku uvest ćemo pojam blok-matrice. Blok-matrica predstavlja particioniranje zadane matrice na manje matrice. Svaku matricu možemo zapisati kao blok-matricu. Statistički podaci često se dobivaju kao mjerenja iz nekog ponovljenog eksperimenta. Na primjer, često imamo neovisne, identično raspoređene vektore promatranja na nekoliko eksperimentalnih jedinica ili možemo imati različite vrste informacija dostupne o našim podacima. U oba slučaja iznijet ćemo informacije u obliku matrica koje imaju određenu strukturu uzorka ili se sastoje od određenih blokova. Štoviše, određene korisne statističke veličine vode nas do matrica specifičnih struktura. U 1. poglavlju naveli smo nekoliko posebnih vrsta matrica kao što su dijagonalne, gornjetrokutaste, donjetrokutaste, simetrične i antisimetrične. U ovom poglavlju dajemo opći pregled tehnika za baratanje strukturama unutar matrice.

Definicija 2.1.1. *Matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ se naziva **blok-matrica** tipa (u, v) ako se sastoji od uv **podmatrica** ili **blokova** $A_{ij} \in M_{m_i,n_j}$ tako da vrijedi*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1v} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2v} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{u1} & A_{u2} & \cdots & A_{uv} \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{u} m_i = m, \sum_{j=1}^{v} n_j = n.$$

Blok-matrica se označava kao $A = [A_{ij}]$, $i = 1, \ldots, u$, $j = 1, \ldots, v$. Za $i \in \{1, \ldots, u\}$ uređena u-torka $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{iu})$ čini i-ti redak blok-matrice A te za $j \in \{1, \ldots, v\}$ uređena v-torka $(A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{vj})$ čini j-ti stupac blok-matrice A. Ako je potrebno, crte se koriste za odvajanje blokova u blok-matrici. Blok-matrice tipa $(2, 2)$ u praksi se najčešće pojavljuju i u ovom radu ćemo se najviše njima baviti.

Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica A može se podijeliti na četiri matrice A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} kao

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

gdje je $A_{11} \in M_{r_1,s_1}, A_{12} \in M_{r_1,s_2}, A_{21} \in M_{r_2,s_1}$ i $A_{22} \in M_{r_2,s_2}$. Ovaj zapis omogućuje da se neki dokazi provedu na jednostavniji i elegantniji način, te da se računanje s matricama velikog formata pojednostavi.

Na primjer, za $n = 4$ jedna podjela matrice na 2 puta 2 bloka bit će

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdje su

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Dijagonalni blokovi u podjeli kvadratne matrice obično su, iako ne nužno, kvadratni i pritom ne moraju biti istih redova. Matrica A može se podijeliti i na sljedeći način

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdje je $A_{11} = [a_{11}]$ skalar, $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}$ stupčani vektor, $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$ retčani vektor te $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ matrica reda 3.

Primjer 2.1.1. *Zapišimo matricu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *kao blok-matricu. Dakle,*

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & O \\ A_{21} & I \end{bmatrix},$$

gdje su podmatrice $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *te* $A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Manipulacija blok-matricama je osnovna tehnika u teoriji matrica. Sada pokazujemo kako se standardne matrične operacije zapisuju i provode po blokovima.

Teorem 2.1.1. *Za blok-matrice* $A = [A_{ij}], B = [B_{ij}]$ *i skalar* $\lambda \in \mathbb{F}$ *vrijedi sljedeće:*

(1) Ako su A i B blok-matrice čiji su svi blokovi istih dimenzija, onda je

$$A + B = [A_{ij} + B_{ij}], \quad i = 1, \ldots, u, j = 1, \ldots, v,$$

(2) $\lambda A = [\lambda A_{ij}], i = 1, \ldots, u, j = 1, \ldots, v,$

(3) Ako je $A = [A_{ij}]$ *blok-matrica tipa* (u, v) *s blokovima*

$$A_{ij} \in M_{m_i, n_j}, \quad \left(\sum_{i=1}^{u} m_i = m; \sum_{j=1}^{v} n_j = n \right)$$

i $B = [B_{jl}]$ *blok-matrica tipa* (v, z) *s blokovima*

$$B_{jl} \in M_{n_j, z_l}, \quad \left(\sum_{i=1}^{u} z_l = z \right),$$

tada je matrica $AB = [C_{il}]$ *blok-matrica* (u, z) *s blokovima*

$$C_{il} = \sum_{j=1}^{v} A_{ij} B_{jl} \in M_{m_i, z_l}, \quad i = 1, \ldots, u, l = 1, \ldots, w.$$

Dokaz. Slijedi direktno iz definicije zbrajanja, množenja matrice skalarom i množenja matrica. □

Primjer 2.1.2. *Neka su zadane blok-matrice*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ \hline 4 & -4 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ \hline -3 \\ 4 \\ \hline 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \end{bmatrix}.$$

Tada je njihov umnožak blok-matrica

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} + A_{23}B_{13} \\ A_{31}B_{11} + A_{32}B_{12} + A_{33}B_{13} \end{bmatrix},$$

gdje su

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad A_{12}B_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -20 \end{bmatrix}, \quad A_{13}B_{13} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \end{bmatrix}, \quad A_{22}B_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}, \quad A_{23}B_{13} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{31}B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}, \quad A_{32}B_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \end{bmatrix}, \quad A_{33}B_{13} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 \\ -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -24 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} + A_{23}B_{13} = \begin{bmatrix} -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix},$$

$$A_{31}B_{11} + A_{32}B_{12} + A_{33}B_{13} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$AB = \begin{bmatrix} 21 \\ -24 \\ -3 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

Primjer 2.1.3. *Pokažimo da blok-matrice* $M = \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}$ *i* $N = \begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix}$ *komutiraju, odnosno da vrijedi* $MN = NM$. *Imamo*

$$MN = \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cdot I + A \cdot O & I \cdot B + A \cdot I \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot B + I \cdot I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B + A \\ O & I \end{bmatrix},$$

$$NM = \begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \cdot I + B \cdot O & I \cdot A + B \cdot I \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot A + I \cdot I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A + B \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Znamo da za matrice A *i* B *vrijedi komutativnost zbrajanja, dakle vrijedi* $MN = NM$.

Primjer 2.1.4. *Neka je zadana matrica* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Izračunajmo* A^2.

Prvo zapišimo matricu A kao blok-matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & A_{12} \\ O & I \end{bmatrix},$$

gdje je podmatrica $A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Sada je*

$$A^2 = \begin{bmatrix} I & A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A_{12} \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2A_{12} \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Elementarne transformacije nad blok-matricama

Elementarne transformacije nad retcima i stupcima matrice se mogu generalizirati na blok-matrice. Neka je $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. Elementarne blok-transformacije nad blok-matricama su:

(1) Zamjena dvaju blok-stupaca (odnosno blok-redaka): matrica A se mijenja u

$$\begin{bmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}.$$

(2) Množenje jednog blok-stupca (odnosno blok-retka) regularnom matricom B slijeva (zdesna) odgovarajućih dimenzija: matrica A se mijenja u jednu od sljedeće 4 matrice

$$\begin{bmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ BA_{21} & BA_{22} \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12} \\ A_{21}B & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}B \\ A_{21} & A_{22}B \end{bmatrix}.$$

(3) Dodavanje nekom blok-stupcu (odnosno blok-retku) nekog drugog blok-stupca (odnosno blok-retka) prethodno pomnoženog slijeva (zdesna) nekom regularnom matricom odgovarajućih dimenzija: matrica A se mijenja u

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}+BA_{11} & A_{22}+BA_{12} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} A_{11}+BA_{21} & A_{12}+BA_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}+A_{11}B \\ A_{21} & A_{22}+A_{21}B \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} A_{11}+A_{12}B & A_{12} \\ A_{21}+A_{22}B & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Također možemo generalizirati i elementarne matrice.

Definicija 2.2.1. ***Generalizirana elementarna matrica*** *G je blok-matrica nastala primjenom točno jedne elementarne blok-transformacije nad jediničnom blok-matricom* $I = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$.

Na primjer, blok-matrice $\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I & O \\ B & I \end{bmatrix}$ su generalizirane elementarne matrice koje se odnose na elementarne blok-transformacije tipa (1) i (3).

Teorem 2.2.1. *Neka je G generalizirana elementarna matrica. Ako blok-matricu A pomnožimo s lijeve (desne) strane generaliziranom elementarnom matricom G dobije se matrica nastala primjenom točno one elementarne blok-transformacije nad stupcima (retcima) od A koja definira matricu G.*

Dokaz. Neka je $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, pri čemu je $A_{11} \in M_m$ i $A_{22} \in M_n$. Pretpostavimo da smo primijenili elementarnu transformaciju tipa (3) to jest dodali smo prvi blok-redak pomnožen slijeva matricom $B \in M_{mn}$ drugom blok-retku matrice A. Na taj način smo dobili matricu $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}+BA_{11} & A_{22}+BA_{22} \end{bmatrix}$. Istu matricu dobijemo i kao produkt $\begin{bmatrix} I & O \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. □

Metoda manipuliranja blok-matricama elementarnim transformacijama i njihov prikaz kao produkta s odgovarajućom generaliziranom elementarnom matricom se više puta koristi u ovom radu.

Propozicija 2.2.1. *Svaka matrica oblika $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{11}^{-1} \end{bmatrix}$, pri čemu je A_{11} regularna matrica, se može zapisati kao produkt gornjetrokutastih i donjetrokutastih blok-matrica oblika $\begin{bmatrix} I & B \\ O & I \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I & O \\ C & I \end{bmatrix}$.*

Dokaz. Kako bismo to dokazali, primijenjivat ćemo elementarnu transformaciju tipa (3) konačno mnogo puta nad blok-matricom $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{11}^{-1} \end{bmatrix}$. Prvo dodamo prvi redak pomnožen slijeva s A_{11}^{-1} drugom retku da dobijemo

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

Nadalje, drugi redak pomnožen slijeva s $I - A_{11}$ dodamo prvom retku da dobijemo

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12} - I \\ I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

Sada oduzmemo prvi redak od drugog i dobivamo

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12} - I \\ O & I \end{bmatrix},$$

što smo i željeli dobiti. Zapišimo ove korake i u obliku jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I - A_{11} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12} - I \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & I - A_{11} \\ O & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12} - I \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Iz

$$\begin{bmatrix} I & O \\ A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} I & O \\ A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

i posebno

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -I & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix}$$

te iz

$$\begin{bmatrix} I & I - A_{11} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A_{11} - I \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

slijedi

$$\begin{bmatrix} I & I - A_{11} \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & A_{11} - I \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ -A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11} - I \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12} - I \\ O & I \end{bmatrix}.$$

□

Definicija 2.2.2. *Blok-matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ naziva se* ***dijagonalna blok-matrica*** *ako je oblika*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ O & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

što zapisujemo i kao $A_{11} \oplus A_{22} \oplus \ldots \oplus A_{nn}$.

Pogledajmo sada sljedeće.

Propozicija 2.2.2. *Pretpostavimo da je podmatrica A_{11} regularna. Primjenom konačno mnogo elementarnih blok transformacija nad $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, blok-matricu A možemo transformirati do dijagonalne blok-matrice.*

Dokaz. To možemo napraviti na način da od drugog retka oduzmemo prvi redak pomnožen s $A_{21}A_{11}^{-1}$ te da od drugog stupca oduzmemo prvi stupac pomnožen s $A_{11}^{-1}A_{12}$. Zapisano matrično,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

i u obliku jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Propozicija 2.2.3. *Pretpostavimo da je podmatrica* A_{22} *regularna. Primjenom konačno mnogo elementarnih blok transformacija nad* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, *blok-matricu* A *možemo transformirati do dijagonalne blok-matrice.*

Dokaz. To možemo napraviti na način da od prvog retka oduzmemo drugi redak pomnožen s $A_{12}A_{22}^{-1}$ te da od prvog stupca oduzmemo drugi stupac pomnožen s $A_{22}^{-1}A_{21}$. Zapisano matrično,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

i u obliku jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

2.3 Inverz i determinanta blok-matrice

Teorem 2.3.1 (Inverzni binomni teorem). *Neka su* $A \in M_m, B \in M_n, C \in M_{m,n}$ *i* $D \in M_{n,m}$, *pri čemu su* A *i* B *regularne matrice. Tada je matrica* $A + CBD$ *regularna i vrijedi*

$$(A + CBD)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} &(A + CBD)(A^{-1} + A^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1}) \\ &= I_m - C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1} + CBDA^{-1} - CBDA^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1} \\ &= I_m - C((B^{-1} + DA^{-1}C) - B + BDA^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1})DA^{-1} \\ &= I_m - C((I_n + BDA^{-1}C)(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1} - B)DA^{-1} \\ &= I_m - C(B(B^{-1} + DA^{-1}C)(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1} - B)DA^{-1} \\ &= I_m - C(B - B)DA^{-1} \\ &= I_m. \end{aligned}$$

Odavde slijedi tvrdnja. □

Inverz blok-matrice

Računanje inverza blok-matrice A dano je sljedećim teoremima.

Teorem 2.3.2. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *blok-matrica, gdje je matrica* $A_{11} \in M_n$ *regularna. Neka je* $B = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. *Tada je* B *regularna matrica. Nadalje,* A *je regularna i njen inverz je zadan kao* $A^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix}$ *pri čemu je*

$$\begin{aligned} A^{11} &= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ A^{12} &= -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ A^{21} &= -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ A^{22} &= B^{-1}. \end{aligned}$$

Dokaz. Prema prethodnom teoremu matrica B je regularna. Inverznu blok-matricu A^{-1} možemo dobiti izvođenjem elementarnih transformacija nad blok-retcima blok-matrica A i I istovremeno. Sada primjenjujemo elementarne transformacije nad blok-retcima sljedeće blok-matrice

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & I & O \\ A_{21} & A_{22} & O & I \end{array}\right].$$

Pomnožimo prvi blok-redak slijeva s A_{11}^{-1} kako bismo dobili I na mjestu $(1,1)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & O \\ A_{21} & A_{22} & O & I \end{array}\right].$$

Zatim oduzmimo prvi blok-redak pomnožen s A_{21} od drugog blok-retka kako bismo dobili O na mjestu $(2,1)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} I & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & O \\ O & B & -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{array}\right].$$

Nadalje, pomnožimo drugi blok-redak s B^{-1} da bismo dobili I na mjestu $(2,2)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & A_{11}^{-1}A_{12} & A_{11}^{-1} & O \\ O & I & -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{array}\right].$$

Oduzimanjem drugog blok-retka pomnoženog s $A_{11}^{-1}A_{12}$ od prvog blok-retka dobivamo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & O & A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ O & I & -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{array}\right].$$

To je jednako

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & O & A^{11} & A^{12} \\ O & I & A^{21} & A^{22} \end{array}\right].$$

Također, inverznu blok-matricu A^{-1} možemo dobiti primjenom propozicije 2.2.2.

$$\begin{aligned} A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}\right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} \\ -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Teorem 2.3.3. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *blok-matrica, gdje je matrica* $A_{22} \in M_n$ *regularna. Neka je* $C = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. *Tada je* C *regularna matrica. Nadalje,* A *je regularna i njen inverz je zadan kao* $A^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix}$ *pri čemu je*

$$\begin{aligned} A^{11} &= C^{-1} \\ A^{12} &= -C^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ A^{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1} \\ A^{22} &= A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}. \end{aligned}$$

Dokaz. Prema teoremu 2.3.1 matrica C je regularna. Inverznu blok-matricu A^{-1} možemo dobiti izvođenjem elementarnih transformacija nad blok-retcima blok-matrica A i I istovremeno. Sada primjenjujemo elementarne transformacije nad blok-retcima sljedeće blok-matrice

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & I & O \\ A_{21} & A_{22} & O & I \end{array}\right].$$

Pomnožimo drugi blok-redak slijeva s A_{22}^{-1} kako bismo dobili I na mjestu $(2, 2)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & I & O \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I & O & A_{22}^{-1} \end{array}\right].$$

Zatim oduzmimo drugi blok-redak pomnožen s A_{12} od prvog blok-retka kako bismo dobili O na mjestu $(1, 2)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O & I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I & O & A_{22}^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} C & O & I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I & O & A_{22}^{-1} \end{array}\right].$$

Nadalje, pomnožimo prvi blok-redak s C^{-1} da bismo dobili I na mjestu $(1, 1)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & O & C^{-1} & -C^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I & O & A_{22}^{-1} \end{array}\right].$$

Oduzimanjem prvog blok-retka pomnoženog s $A_{22}^{-1}A_{21}$ od drugog blok-retka dobivamo

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & O & C^{-1} & -C^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I & -A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} \end{array}\right].$$

To je jednako

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & O & A^{11} & A^{12} \\ O & I & A^{21} & A^{22} \end{array}\right].$$

Također, inverznu blok-matricu A^{-1} možemo dobiti primjenom propozicije 2.2.3.

$$\begin{aligned} A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} &= \left(\begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C^{-1} & -C^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}C^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

U sljedećem primjeru ćemo odrediti inverz blok-matrice A primjenom teorema 2.3.2.

Primjer 2.3.1. *Neka je zadana blok-matrica*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ \hline 4 & -4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdje su

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

te

$$B = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 17 & 19 \\ -20 & -25 & -37 \\ -22 & -18 & -29 \end{bmatrix}.$$

Nadalje,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{59}{722} & \frac{151}{722} & \frac{-77}{361} \\ \frac{117}{361} & \frac{122}{361} & \frac{-79}{361} \\ \frac{-5}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^{11} &= A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{59}{722} & \frac{151}{722} & \frac{-77}{361} \\ \frac{117}{361} & \frac{122}{361} & \frac{-79}{361} \\ \frac{-5}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{131}{722} & \frac{49}{722} \\ \frac{177}{722} & \frac{-33}{722} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A^{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{59}{722} & \frac{151}{722} & \frac{-77}{361} \\ \frac{117}{361} & \frac{122}{361} & \frac{-79}{361} \\ \frac{-5}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{159}{722} & \frac{101}{722} & \frac{25}{361} \\ \frac{55}{722} & \frac{153}{722} & \frac{20}{361} \end{bmatrix},$$

$$A^{21} = -B^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{59}{722} & \frac{151}{722} & \frac{-77}{361} \\ \frac{117}{361} & \frac{122}{361} & \frac{-79}{361} \\ \frac{-5}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{203}{722} & \frac{109}{722} \\ \frac{219}{361} & \frac{2}{361} \\ \frac{-4}{19} & \frac{-3}{19} \end{bmatrix},$$

$$A^{22} = B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{59}{722} & \frac{151}{722} & \frac{-77}{361} \\ \frac{117}{361} & \frac{122}{361} & \frac{-79}{361} \\ \frac{-5}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix}.$$

Odnosno,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{131}{722} & \frac{49}{722} & \frac{159}{722} & \frac{101}{722} & \frac{25}{361} \\ \frac{177}{722} & \frac{-33}{722} & \frac{55}{722} & \frac{153}{722} & \frac{20}{361} \\ \frac{203}{722} & \frac{109}{722} & \frac{59}{722} & \frac{151}{722} & \frac{-77}{361} \\ \frac{219}{361} & \frac{2}{361} & \frac{117}{361} & \frac{122}{361} & \frac{-79}{361} \\ \frac{-4}{19} & \frac{-3}{19} & \frac{-5}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{5}{19} \end{bmatrix} = \frac{1}{722}\begin{bmatrix} 131 & 49 & 159 & 101 & 50 \\ 177 & -33 & 55 & 153 & 40 \\ 203 & 109 & 59 & 151 & -154 \\ 538 & 4 & 334 & 244 & -158 \\ -152 & -114 & -190 & -266 & 190 \end{bmatrix}.$$

Sljedeći korolar je direktna posljedica teorema 2.3.2. i teorema 2.3.3.

Korolar 2.3.1. *Neka su* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *blok-matrice takve da su* $A_{11} \in M_m$ *i* $A_{22} \in M_n$ *regularne matrice. Tada su* A *i* B *regularne matrice i vrijedi*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Posebno

$$\begin{bmatrix} I & A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{12} \\ O & I \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I & O \\ A_{21} & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & O \\ -A_{21} & I \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Neka je blok-matrica $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ inverz matrice A, odnosno vrijedi $A^{-1} = C$. Tada je

$$AC = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} A_{11}C_{11} + A_{12}C_{21} & A_{11}C_{12} + A_{12}C_{22} \\ A_{22}C_{21} & A_{22}C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Odatle je

$$A_{11}C_{11} + A_{12}C_{21} = I \tag{2.1}$$
$$A_{11}C_{12} + A_{12}C_{22} = O \tag{2.2}$$
$$A_{22}C_{21} = O \tag{2.3}$$
$$A_{22}C_{22} = I. \tag{2.4}$$

Kako je matrica A_{22} regularna, tada vrijedi $C_{22} = A_{22}^{-1}$. Sada iz (2.3) imamo $C_{21} = A_{22}^{-1}O = O$. Nadalje, iz (2.1) dobijemo

$$\begin{aligned} A_{11}C_{11} + O &= I \\ A_{11}C_{11} &= I \\ C_{11} &= A_{11}^{-1}. \end{aligned}$$

Konačno, iz (2.2), imamo $A_{11}C_{12} = -A_{12}C_{22} = -A_{12}A_{22}^{-1}$ te onda $C_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$. Dakle,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Odredimo sada inverz blok-matrice B.

Neka je blok-matrica $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$ inverz matrice B, odnosno vrijedi $B^{-1} = D$. Tada je

$$BD = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} A_{11}D_{11} & A_{11}D_{12} \\ A_{21}D_{11} + A_{22}D_{21} & A_{21}D_{12} + A_{22}D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Odatle je

$$A_{11}D_{11} = I \tag{2.5}$$

$$A_{11}D_{12} = O \tag{2.6}$$

$$A_{21}D_{11} + A_{22}D_{21} = O \tag{2.7}$$

$$A_{21}D_{12} + A_{22}D_{22} = I. \tag{2.8}$$

Kako je matrica A_{11} regularna, tada vrijedi $D_{11} = A_{11}^{-1}$. Sada iz (2.6) imamo $D_{12} = A_{11}^{-1}O = O$. Nadalje, iz (2.8) dobijemo

$$\begin{aligned} O + A_{22}D_{22} &= I \\ A_{22}D_{22} &= I \\ D_{22} &= A_{22}^{-1}. \end{aligned}$$

Konačno, iz (2.7), imamo $A_{22}D_{21} = -A_{21}D_{11} = -A_{21}A_{11}^{-1}$ te onda $D_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$. Dakle,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Zadnja tvrdnja slijedi uvrštanjem u prvu tvrdnju $A_{11} = I$ te $A_{22} = I$. □

Primjer 2.3.2. *Izračunajmo inverz matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. *Prvo podijelimo matricu A na blokove:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 7 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdje su podmatrice $A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. *Tada je*

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

te

$$-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 32 \\ -97 & -61 \end{bmatrix}.$$

Prema korolaru 2.3.1. inverz matrice A je matrica

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 50 & 32 \\ -1 & 2 & -97 & -61 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 2.3.1. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}$ *blok-matrica takva da su* $A_{12} \in M_m, A_{21} \in M_n$ *regularne matrice. Tada je A regularna blok-matrica i vrijedi*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} O & A_{21}^{-1} \\ A_{12}^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Direktnim množenjem matrica vidimo da vrijedi

$$\begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A_{21}^{-1} \\ A_{12}^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} O & A_{21}^{-1} \\ A_{12}^{-1} & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}.$$

□

Propozicija 2.3.2. *Neka su $A \in M_m$ i $B \in M_n$. Tada je* $\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det B$.

Dokaz. Imamo
$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$
Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema na prethodnu jednakost dobivamo
$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} I & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$
Višestrukom primjenom Laplaceovog razvoja dobijemo da je $\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I \end{bmatrix} = \det A$ i $\det \begin{bmatrix} I & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det B$. Odatle slijedi tvrdnja. □

Determinanta blok-matrice

Računanje determinante blok-matrice A kojoj je barem jedan dijagonalni blok regularna matrica dano je sljedećim teoremom.

Teorem 2.3.4. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, *gdje su $A_{11} \in M_m$ i $A_{22} \in M_n$.*
(a) Ako je A_{11} regularna, tada je
$$\det A = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$
(b) Ako je A_{22} regularna, tada je
$$\det A = \det A_{22} \cdot \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}).$$
Nadalje, ako je $A_{11}A_{12} = A_{12}A_{11}$, tada vrijedi
$$\det A = \det(A_{22}A_{11} - A_{21}A_{12}).$$
Ako je $A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11}$, tada vrijedi
$$\det A = \det(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}).$$
Posebno,
$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{11} \det A_{22},$$
$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det A_{11} \det A_{22}.$$

Dokaz. (a) Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema i propozicije 2.2.2., dobivamo

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\
&= \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).
\end{aligned}$$

Uočimo $\det\begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} = 1$ jer se radi o donjetrokutastoj matrici. Analogno, $\det\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix} = 1$ jer je radi o gornjetrokutastoj matrici. Time smo pokazali da vrijedi

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

(b) Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema i propozicije 2.2.3., dobivamo

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} I & O \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \cdot \det A_{22}.
\end{aligned}$$

Uočimo $\det\begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} = 1$ jer se radi o gornjetrokutastoj matrici. Analogno, $\det\begin{bmatrix} I & O \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} = 1$ jer je radi o donjetrokutastoj matrici. Time smo pokazali da vrijedi

$$\det A = \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \cdot \det A_{22}.$$

Nadalje, ako A_{11} i A_{12} komutiraju, tada su A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} istih redova. Tada imamo, također koristeći Binet-Cauchyjev teorem:

$$\begin{aligned}
\det A &= \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \\
&= \det(A_{22}A_{11} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}A_{11}) \\
&= \det(A_{22}A_{11} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}A_{12}) \\
&= \det(A_{22}A_{11} - A_{21}A_{12}).
\end{aligned}$$

Ako A_{11} i A_{21} komutiraju, tada su A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} istih redova. Tada imamo, također koristeći Binet-Cauchyjev teorem:

$$\begin{aligned}
\det A &= \det A_{11} \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \\
&= \det(A_{11}A_{22} - A_{11}A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \\
&= \det(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{11}A_{11}^{-1}A_{12}) \\
&= \det(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}).
\end{aligned}$$

Zadnja tvrdnja slijedi uvrštavanjem u prvu tvrdnju $A_{21} = O$ odnosno $A_{12} = O$. □

U sljedećem primjeru ćemo odrediti determinantu blok-matrice A iz primjera 2.3.1. primjenom teorema 2.3.4.

Primjer 2.3.3. *Neka je zadana blok-matrica*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} -2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ \hline 4 & -4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdje su

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$\det A_{11} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -1$$

te

$$\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = \det \begin{bmatrix} 6 & 17 & 19 \\ -20 & -25 & -37 \\ -22 & -18 & -29 \end{bmatrix} = 722.$$

Odnosno,

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = -1 \cdot 722 = -722.$$

Primjer 2.3.4. *Izračunajmo determinantu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. *Prvo podijelimo matricu A na blokove:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 5 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

gdje su podmatrice $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $A_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. *Tada je prema teoremu 2.3.4.*

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22} = (1 \cdot 4 - 0 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 2 - 2 \cdot 7) = 4 \cdot (-4) = -16.$$

Korolar 2.3.2. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} I & A \\ B & C \end{bmatrix}$, *gdje su* A, B *i* $C \in M_n$. *Tada je:*

$$\det \begin{bmatrix} I & A \\ B & C \end{bmatrix} = \det(C - BA).$$

Dokaz. Koristimo $\det \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix} = \det I \cdot \det I = 1$. Dobijemo

$$\det \begin{bmatrix} I & A \\ B & C \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & A \\ B & C \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & O \\ B & C - BA \end{bmatrix} = \det I \cdot \det(C - BA) = \det(C - BA).$$

□

Korolar 2.3.3. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & I \end{bmatrix}$, *gdje su* A, B *i* $C \in M_n$. *Tada je:*

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & I \end{bmatrix} = \det(A - BC).$$

Dokaz. Koristimo $\det \begin{bmatrix} I & -B \\ O & I \end{bmatrix} = 1$. Dobijemo

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} I & -B \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A - BC & O \\ C & I \end{bmatrix} = \det(A - BC) \cdot \det I = \det(A - BC).$$

□

Korolar 2.3.4. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix}$ *gdje su* $A_{11} \in M_m(\mathbb{F})$ *i* $A_{12} \in M_n(\mathbb{F})$ *takve da je* A_{11} *regularna, te da vrijedi* $A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11}$. *Tada je:*

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} = \det(A_{11} + A_{12}) \cdot \det(A_{11} - A_{12}).$$

Dokaz. Prema teoremu 2.3.4. slijedi da je

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} = \det(A_{11}^2 - A_{12}^2).$$

Nadalje, s obzirom da je $A_{11}A_{21} = A_{21}A_{11}$, vrijedi $(A_{11}^2 - A_{12}^2) = (A_{11} + A_{12})(A_{11} - A_{12})$. Sada iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$\det(A_{11}^2 - A_{12}^2) = \det(A_{11} + A_{12}) \cdot \det(A_{11} - A_{12}).$$

□

Svojstva determinante matrice možemo također generalizirati na blok-matrice.

Teorem 2.3.5. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, A_{11} \in M_m, A_{22} \in M_n$. *Tada za svaku matricu* $B \in M_m$ *vrijedi*

$$\det \begin{bmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \det B \det A$$

i za neku matricu $C \in M_{nm}$ *vrijedi*

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + CA_{11} & A_{22} + CA_{12} \end{bmatrix} = \det A.$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi primjenom Binet-Cauchyjevog teorema na jednakost

$$\begin{bmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

a druga na jednakost

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + CA_{11} & A_{22} + CA_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Također smo koristili teorem 2.3.4 kod računanja determinanti blok-matrica $\begin{bmatrix} B & O \\ O & I \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I & O \\ C & I \end{bmatrix}$. □

2.4 Rang blok-matrice

Neka je matrica $A \in M_{mn}$ ranga r čiji su prvih r redaka linearno nezavisni te prvih r stupaca linearno nezavisni. Tada matricu A možemo zapisati kao blok-matricu $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, pri čemu su $A_{11} \in M_{r,r}, A_{12} \in M_{r,m-r}, A_{21} \in M_{n-r,r}$ te $A_{22} \in M_{n-r,m-r}$.

Dakle, $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$ ima puni rang r, a retci od $\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ se mogu zapisati kao linearna kombinacija redaka blok-matrice $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$. Također, $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}$ ima puni rang r, a stupci od $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$ se mogu zapisati kao linearna kombinacija stupaca blok-matrice $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}$.

Zato postoji matrica $T \in M_{n-r,r}$ takva da vrijedi $\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$. Slično, postoji matrica $S \in M_{r,n-r}$ takva da vrijedi $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} S$.

Dakle, imamo $A_{21} = TA_{11}, A_{22} = TA_{12}, A_{12} = A_{11}S, A_{22} = A_{21}S$, tako da je $A_{22} = TA_{12} = TA_{11}S$. Budući da je A_{11} punog ranga, postoji A_{11}^{-1} tako da je $T = A_{21}A_{11}^{-1}$, $S = A_{11}^{-1}A_{12}$ i $A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Zbog toga se matrica A može napisati pomoću matrica A_{11}, A_{12} i A_{21} na način

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Ukoliko je $A \in M_{mn}$ bilo koja matrica ranga r, tada se ona odgovarajućim zamjenama redaka odnosno stupaca može transformirati do matrice kojoj su prvih r redaka i prvih r stupaca linearno nezavisni.

Određivanje ranga blok-matrice dano je sljedećim teoremom.

Teorem 2.4.1. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *blok-matrica pri čemu su* $A_{11} \in M_m$ *i* $A_{22} \in M_n$.
(a) Ako je A_{11} *regularna matrica, tada vrijedi*

$$r(A) = r(A_{11}) + r(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

(b) Ako je A_{22} *regularna matrica, tada vrijedi*

$$r(A) = r(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + r(A_{22}).$$

Dokaz. (a) Ako je A_{11} regularna, onda prema propoziciji 2.2.2. vrijedi

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}.$$

Znamo da vrijedi sljedeće: ako su $S, T \in M_n$ regularne matrice, tada je $r(SXT) = r(X)$ za svaku matricu X. Kako su $\begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & I \end{bmatrix}$ regularne matrice zaključujemo da je

$$r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}\right).$$

Očito je $r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}\right) = r(A_{11}) + r(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$. Odavde slijedi

$$r(A) = r(A_{11}) + r(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

(b) Ako je A_{22} regularna, onda prema propoziciji 2.2.3. vrijedi

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}.$$

Kako su $\begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I & O \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}$ regularne matrice zaključujemo da je

$$r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\right).$$

Očito je $r\left(\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\right) = r(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + r(A_{22})$. Odavde slijedi

$$r(A) = r(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + r(A_{22}).$$

□

Teorem 2.4.2. *Neka je dana blok-matrica* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. *Tada vrijedi:*

(1) $r(A_{ij}) \leq r(A)$ *za* $i, j \in \{1, 2\}$,

(2) $r(A) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}\right) + r\left(\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right)$,

(3) $r(A) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}\right) + r\left(\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}\right)$.

Dokaz. (1) Budući da je skup redaka od $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$ podskup od skupa redaka od A, tada vrijedi da je $r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}\right) \leq r(A)$. Slično, budući da je skup stupaca od $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix}$ podskup od skupa stupaca od A, tada vrijedi da je $r\left(\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix}\right) \leq r(A)$. Također, vrijedi $r\left(\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) \leq r(A)$ te $r\left(\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}\right) \leq r(A)$. Nadalje, skup stupaca matrice A_{11} je podskup skupa stupaca od $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$ i onda vrijedi

$$r(A_{11}) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}\right) \leq r(A).$$

Slično i za druge vrijedi

$$r(A_{12}) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}\right) \leq r(A),$$

$$r(A_{21}) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) \leq r(A)$$

te

$$r(A_{22}) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) \leq r(A).$$

(2) Neka je R skup redaka od A, R_1 skup redaka od $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}$ te R_2 skup redaka od $\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. Tada je $R = R_1 \cup R_2$ pa vrijedi

$$r(A) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}\right) + r\left(\begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right).$$

(3) Neka je S skup stupaca od A, S_1 skup stupaca od $\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}$ te S_2 skup redaka od $\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$. Tada je $S = S_1 \cup S_2$ pa vrijedi

$$r(A) \leq r\left(\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}\right) + r\left(\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}\right).$$

□

Teorem 2.4.3. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ *gdje su* A_{11} *i* $A_{22} \in M_n$. *Tada za svaku matricu* $A_{12} \in M_n$ *vrijedi:*

$$r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\right) \geqslant r(A_{11}) + r(A_{22}).$$

Dokaz. Neka je $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} S_1 & S_2 & \dots & S_n & S_1^{'} & S_2^{'} & \dots & S_m^{'} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & S_1^{''} & S_2^{''} & \dots & S_m^{''} \end{array}\right]$.
Pretpostavimo da je $r(A_{11}) = k$, odnosno da je skup $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ linearno nezavisan te pretpostavimo da je $r(A_{22}) = l$, odnosno da je skup $\{S_1^{''}, S_2^{''}, \dots, S_l^{''}\}$ linearno nezavisan. Tvrdimo da su

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} S_k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_1^{'} \\ S_1^{''} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} S_l^{'} \\ S_l^{''} \end{bmatrix}$$

linearno nezavisni, odnosno da vrijedi

$$r(A) \geq k + l = r(A_{11}) + r(A_{22}).$$

Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ takvi da je

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_k \begin{bmatrix} S_k \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} S_1^{'} \\ S_1^{''} \end{bmatrix} + \dots + \beta_l \begin{bmatrix} S_l^{'} \\ S_l^{''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_k S_k + \beta_1 S_1^{'} + \dots + \beta_l S_l^{'} = 0 \tag{2.10}$$

te

$$\beta_1 S_1^{''} + \dots + \beta_l S_l^{''} = 0$$

Kako je skup $\{S_1'', S_2'', \dots, S_l''\}$ linearno nezavisan to povlači da je

$$\beta_1 = \cdots = \beta_l = 0. \tag{2.11}$$

Ako uvrstimo (2.6) u (2.5) dobivamo

$$\alpha_1 S_1 + \cdots + \alpha_k S_k = 0.$$

Također i skup $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ je linearno nezavisan pa to povlači

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0. \tag{2.12}$$

Dakle, iz (2.6) i (2.7) dobijemo da su $\begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} S_k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} S_1' \\ S_1'' \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} S_l' \\ S_l'' \end{bmatrix}$ linearno nezavisni pa vrijedi

$$r\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}\right) \geqslant r(A_{11}) + r(A_{22}).$$

□

Iz teorema 2.4.3. sada možemo dobiti tvrdnje o rangu produkta i zbroja matrica.

Teorem 2.4.4. *Neka su $A, B \in M_n$. Tada vrijedi $r(AB) + n \geqslant r(A) + r(B)$.*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{bmatrix} -AB & O \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}.$$

Kako su $\begin{bmatrix} I & -A \\ O & I \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I & O \\ -B & I \end{bmatrix}$ regularne matrice zaključujemo da je

$$r\left(\begin{bmatrix} -AB & O \\ O & I \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B & I \end{bmatrix}\right).$$

Očito je $r\left(\begin{bmatrix} -AB & O \\ O & I \end{bmatrix}\right) = r(-AB) + r(I) = r(AB) + n$, dok je prema teoremu 2.4.3. $r\left(\begin{bmatrix} O & A \\ B & I \end{bmatrix}\right) \geqslant r(A) + r(B)$. Odavde slijedi

$$r(AB) + n \geqslant r(A) + r(B).$$

□

Teorem 2.4.5. *Neka su $A, B \in M_n$. Tada vrijedi $r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)$.*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix}.$$

Kao maloprije, jer su $\begin{bmatrix} I & I \\ O & I \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix}$ regularne matrice zaključujemo da matrice $\begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ imaju isti rang. Sada imamo

$$r(A+B) \leqslant r\left(\begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B).$$

□

2.5 Generalizirani inverz

Ako je A regularna matrica, postoji jedinstveno rješenje sustava linearnih jednadžbi $AX = B$ koje glasi $X = A^{-1}B$. U ovom odjeljku ćemo vidjeti kako glasi rješenje tog sustava kada matrica A nije regularna.

Definicija 2.5.1. *Neka je $A \in M_{mn}$. Matrica $G \in M_{nm}$ takva da vrijedi $AGA = A$ je* ***generalizirani inverz*** *od A, u oznaci $G = A^-$.*

Ako je A regularna, tada je $A^- = A^{-1}$.

Teorem 2.5.1. *Neka je $A \in M_{mn}$. Tada vrijedi:*

(1) Ako je A^- generalizirani inverz od A tada je $(A^-)^T$ generalizirani inverz od A^T,

(2) $r(A^-A) = r(A)$,

(3) $(I - A^-A)(A^-A) = O$ te $(I - A^-A)(I - A^-A) = (I - A^-A)$,

(4) $r(I - A^-A) = n - r(A)$.

Dokaz.

(1) Kako je $A = AA^-A$, onda prema propoziciji 1.2.1. vrijedi $A^T = (AA^-A)^T = A^T(A^-)^TA^T$ pa je $(A^-)^T$ generalizirani inverz od A^T.

(2) Prema propoziciji 1.5.1. vrijedi $r(A^-A) \leq \min\{r(A^-), r(A)\} \leq r(A)$. Kako je $A = AA^-A$ tada opet prema propoziciji 1.5.1. vrijedi $r(A) \leq \min\{r(A), r(A^-A)\} \leq r(A^-A)$. Dakle, vrijedi $r(A^-A) = r(A)$.

(3) Imamo $(I - A^-A)(A^-A) = IA^-A - A^-AA^-A = A^-A - A^-A = O$ te $(I - A^-A)(I - A^-A) = (I - A^-A) = I - A^-A - (I - A^-A)A^-A = I - A^-A - O = I - A^-A$.

(4) Primijetimo da je $A^-A \in M_n$ i da iz (4) vrijedi $(I - A^-A)(A^-A) = O$ pa prema teoremu 2.4.4. vrijedi

$$\begin{aligned} 0 = r(O) = r(I - A^-A)(A^-A) &\geq r(I - A^-A) + r(A^-A) - n \\ &= r(I - A^-A) + r(A) - n, \end{aligned}$$

odakle slijedi $r(I - A^-A) \leq n - r(A)$.

Dalje, uz $I = I - A^-A + A^-A$ i teorem 2.4.5. vrijedi

$$\begin{aligned} n = r(I) = r(I - A^-A + A^-A) &\leq r(I - A^-A) + r(A^-A) \\ &= r(I - A^-A) + r(A), \end{aligned}$$

odakle dobijemo da je $r(I - A^-A) \geq n - r(A)$.

Dakle, vrijedi $r(I - A^-A) = n - r(A)$. □

Teorem 2.5.2. *Neka je $AX = B$ konzistentan sustav linearnih jednadžbi i neka je A^- generalizirani inverz od A. Tada je:*

(1) $X = A^-B$ je jedno rješenje sustava.

(2) Za svaki $V \in M_{n1}(\mathbb{R})$ je, $A^-B + (I - A^-A)V$ rješenje sustava $AX = B$.

Dokaz.

(1) Imamo $(AA^-A)X = AX$ te sustav linearnih jednadžbi $AX = B$. Dakle, možemo zapisati $AA^-(AX) = AX$ odnosno $A(A^-B) = B$. Iz ovoga vidimo da je A^-B rješenje sustava $AX = B$.

(2) Za proizvoljan $V \in M_{n1}$ vrijedi

$$A(A^-B + (I - A^-A)V) = AA^-B + (A - AA^-A)V = B + (A - A)V = B + O = B.$$

□

Za blok-matricu $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ gdje je $r(A_{11}) = r(A)$, generalizirani inverz od A je blok-matrica $A^- = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}$ jer prema (2.9) vrijedi

$$\begin{aligned} AA^-A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ A_{21}A_{11}^{-1} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

Teorem 2.5.3. *Neka je $A \in M_{mn}$. Tada postoji generalizirani inverz od A.*

Dokaz. Ako je $r(A) = 0$ to jest $A = O$, tada je svaka matrica generalizirani inverz od A. Ako je $r(A) > 0$ tada po teoremu 1.5.4. postoje regularne matrice $P \in M_m$ i $Q \in M_n$ takve da vrijedi

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q.$$

Promotrimo matricu

$$Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix} P^{-1},$$

gdje su $U \in M_{r,m-r}$, $V \in M_{n-r,r}$, $W \in M_{n-r,m-r}$ proizvoljne matrice. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} A\left(Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix} P^{-1}\right)A &= P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} QQ^{-1}\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix} P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \\ &= P\begin{bmatrix} I_r & U \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q \\ &= P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} Q = A. \end{aligned}$$

Dakle, $A^{-} = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & U \\ V & W \end{bmatrix} P^{-1}$ je generalizirani inverz od A. □

2.6 Svojstvene vrijednosti od AB i BA

Ovaj odjeljak bavi se proučavanjem svojstvenih vrijednosti produkta matrica AB i BA u odnosu na svojstvene vrijednosti matrica A i B. U dokazu tvrdnji ćemo koristiti blok-matrice.

Teorem 2.6.1. *Neka su $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{nm}$ te $\lambda \neq 0$. Tada je λ svojstvena vrijednost matrice $AB \in M_m$ ako i samo ako je λ svojstvena vrijednost matrice $BA \in M_n$.*

Dokaz. Iz $\begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & O \\ \lambda B & \lambda I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$ te Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$\det\begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & O \\ \lambda B & \lambda I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \lambda^n \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

dok iz $\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ O & \lambda I_n - BA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & O \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$ i Binet-Cauchyjevog teorema slijedi

$$\det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ O & \lambda I_n - BA \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_m & O \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \lambda^n \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je

$$\det\begin{bmatrix}\lambda I_m - AB & O\\ \lambda B & \lambda I_n\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\lambda I_m & A\\ O & \lambda I_n - BA\end{bmatrix},$$

odnosno prema teoremu 2.3.4.

$$\det(\lambda I_m - AB)\cdot\lambda^n = \lambda^m\cdot\det(\lambda I_n - BA).$$

Kako je $\lambda \neq 0$, vrijedi

$$\det(\lambda I_m - AB) = \det(\lambda I_n - BA),$$

odakle dobivamo ekvivalenciju

$$\det(\lambda I_m - AB) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - BA) = 0.$$

Drugim riječima, $\lambda \neq 0$ je svojstvena vrijednost matrice AB ako i samo ako je svojstvena vrijednost matrice BA. □

Može se dogoditi da je 0 svojstvena vrijednost od AB, ali ne i od BA.

Primjer 2.6.1. *Neka su dane matrice* $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \in M_{32}$ *i matrice* $B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \in M_{23}$. *Tada je*

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \det(AB) = 0,$$

pa je 0 *svojstvena vrijednost od AB. S druge strane,*

$$BA = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \det(BA) = 1,$$

pa 0 *nije svojstvena vrijednost od BA.*

Kao posljedicu prethodnog teorema dobivamo sljedeći rezultat.

Korolar 2.6.1 (Weinstein-Aronszajn identitet). *Za* $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ *i* $B \in M_{nm}(\mathbb{F})$ *vrijedi*

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

Posebno, $I_m + AB$ *je regularna ako i samo ako je* $I_n + BA$ *regularna.*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m + AB & O \\ -B & I_n \end{bmatrix}.$$

pa je prema Binet-Cauchyjevom teoremu

$$\det\begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_m + AB & O \\ -B & I_n \end{bmatrix},$$

Prema teoremu 2.3.4. je $\det\begin{bmatrix} I_m & -A \\ O & I_n \end{bmatrix} = 1$, $\det\begin{bmatrix} I_m + AB & O \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_m + AB)$ i $\det\begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \det(I_n + BA)$. Stoga vrijedi $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$. Odavde slijedi da je $I_m + AB$ regularna ako i samo ako je $I_n + BA$ regularna. □

Primjer 2.6.2. *Izračunajmo determinantu primjenom prethodnog korolara*

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix} &= \det\left(I + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(I + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(I + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.\end{aligned}$$

U sljedećem teoremu pretpostavimo da su matrice kvadratne. U tom slučaju ćemo pokazati da ne samo da su nultočke svojstvenog polinoma p_{AB} i p_{BA} jednake nego da su polinomi p_{AB} i p_{BA} jednaki.

Teorem 2.6.2. *Neka su $A, B \in M_n$. Matrice AB i BA imaju iste karakteristične polinome. Nadalje, AB i BA ne moraju biti slične matrice.*

Dokaz. Direktno provjerimo da vrijedi

$$\begin{bmatrix} AB & O \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & O \\ B & BA \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je $\det \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} = 1$, pa je to regularna matrica pa gornju jednakost možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} AB & O \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & O \\ B & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}^{-1}.$$

To znači da su matrice $\begin{bmatrix} AB & O \\ B & O \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} O & O \\ B & BA \end{bmatrix}$ slične i zato imaju iste karakteristične polinome. Prema tome, za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$\det \begin{bmatrix} AB - \lambda I & O \\ B & -\lambda I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -\lambda I & O \\ B & BA - \lambda I \end{bmatrix}.$$

Odavde dobijemo da za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi $(-\lambda)^n \det(\lambda I - AB) = (-\lambda)^n(\lambda I - BA)$, to jest,

$$(-\lambda)^n p_{AB}(\lambda) = (-\lambda)^n p_{BA}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{F}.$$

Odavde slijedi $p_{AB}(\lambda) = p_{BA}(\lambda)$ za svaki $\lambda \neq 0$. Još ostaje provjeriti da je $p_{AB} = p_{BA} = 0$. To slijedi iz Binet-Cauchyjevog teorema, jer je $p_{AB}(0) = \det AB = \det BA = p_{BA}(0)$. Prema tome, $p_{AB} = p_{BA}$. Matrice AB i BA ne moraju biti slične. Na primjer, uzmimo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3$ elemente kanonske baze za M_3. Tada je $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dok je $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. S obzirom da je $r(AB) = 1$ i $r(BA) = 0$, AB i BA nisu slične matrice. $\square$

Bibliografija

[1] Lj. Arambašić, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2022.

[2] J. Hefferon, *Linear Algebra*, https://hefferon.net/linearalgebra/index.html.

[3] C. D. Meyer, *Matrix Analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[4] F. Zhang, *Matrix theory: basic results and techniques*, New York, 2011.

Sažetak

U ovom diplomskom radu istražujemo koncept blok-matrice. Svaku matricu možemo podijeliti na manje matrice, koje nazivamo blokovima ili podmatricama, pomoću vodoravnih i okomitih linija. Na taj način možemo pojednostaviti neke račune s matricama velikih formata, te dokaze za određene tvrdnje s matricama provesti na jednostavniji i pregledniji način.

Prvo poglavlje obrađuje osnove matrica, elementarne transformacije nad njima te postupke za određivanje inverza, determinante i ranga. Drugo poglavlje fokusira se na blok-matrice, istražujući iste koncepte i primjenjujući ih na blok-matrice. Nakon toga, primjenjujemo naučene tehnike za određivanje ranga produkta i zbroja matrice te istražujemo veze između spektara matrica AB i BA.

Summary

In this thesis, we explore the concept of block-matrix. We can divide each matrix into smaller matrices, which we call blocks or submatrices, using horizontal and vertical lines. In this way, we can simplify some calculations with large-format matrices, and carry out proofs for certain assertions with matrices in a simpler and more transparent way.

The first chapter deals with the basics of matrices, elementary transformations over them and procedures for determining the inverse, determinant and rank. The second chapter focuses on block matrices, exploring the same concepts and applying them to block matrices. After that, we apply the learned techniques to determine the rank of the matrix product and sum, and investigate the connections between the spectra of the matrices AB and BA.

Životopis

Rođen sam 12. prosinca 1999. godine u Splitu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 2006. godine u Osnovnoj školi Strožanac u Podstrani. Po završetku osnovne škole, 2014. godine upisujem III. gimnaziju u Splitu, program prirodoslovno-matematičke gimnazije. 2018. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2021. godine upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički na istom fakultetu. Tijekom studija radim kao demonstrator iz kolegija Analitička geometrija i Tjelesna i zdravstvena kultura. Od rujna 2023. godine zaposlen sam u Osnovnoj školi Voltino u Zagrebu kao učitelj matematike.