Dvofaktorski Vasičekov model kamatnih stopa

Brezak, Klaudija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Klaudija Brezak

DVOFAKTORSKI VASIČEKOV MODEL KAMATNIH STOPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, srpanj, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem obitelji i prijateljima koji su bili uz mene tijekom cijelog mog obrazovanja. Mama, tata i braco, najviše Vam hvala za svaku toplu riječ i podršku! Zahvaljujem se i mentorici doc. dr. sc. Vanji Wagner za pomoć u pisanju diplomskog rada i uloženom trudu.

Sadržaj

Uvod

U financijskom svijetu, u posljednjih nekoliko desetljeća, dogodile su se razne promjene. Pojava novih oblika financijske imovine te razni načini vrednovanja tih imovina doprinjele su razvoju financija u svijetu matematike. Uz novac, kao svima poznatu financijsku imovinu, postoje i drugi financijski instrumenti poput dionica, obveznica te drugih vlasničkih i vrijednosnih papira. Također, moramo biti svjesni da će biti potrebno izložiti se nekom riziku prilikom vrednovanja ovih (ili pak nekih drugih) financijskih instrumenata te ćemo prema tome moći odrediti prinos koji nam ta imovina može donijeti. Važno je spomenuti da je kamatna stopa jedan od neizostavnih dijelova financijskog tržišta. Ona nam određuje mnogo toga na njemu, ali također, promjene na samom financijskom tržištu utječu na kamatnu stopu.
Posljednjih nekoliko godina, modeli kretanja kamatnih stopa postali su jedni od najznačajnijih područja moderne financijske teorije. Razlikujemo jednofaktorske i višefaktorske modele kretanja kamatnih stopa, a u nastavku ćemo ukratko spomenuti zašto je i kada bolje koristiti dvofaktorske modele u odnosu na jednofaktorske, budući da ćemo se kroz ovaj diplomski rad bazirati na dvofaktorskom modelu kamatnih stopa.
Jednofaktorski modeli zasnovani su na ideji da je vremenska struktura kamatnih stopa funkcija jedinstvenog faktora, generalno kratkoročne kamatne stope, što znači da je dovoljan samo jedan faktor da se objasni čitava dinamika kretanja kamatnih stopa. Višefaktorski modeli rade pod pretpostavkom da postoji više varijabli koje nam utječu na vremensku strukturu kamatnih stopa, pa ćemo tako kod dvofaktorskog modela imati dvije varijable koje će utjecati na strukturu kamatne stope.
Jednofaktorski modeli mogu se pokazati korisnima kod proizvoda čija cijena ne ovisi o korelacijama različitih stopa, već ovisi u svakom trenutku o jednoj stopi cijele krivulje kamatnih stopa (primjerice šestomjesečna stopa). Inače, aproksimacija još uvijek može biti prihvatljiva, posebno za svrhe slične upravljanju rizikom, kada su stope koje zajednički utječu na isplatu u svakom trenutku bliske. Doista, stvarna korelacija između takvih bliskih stopa vjerojatno će ionako biti poprilično visoka, tako da savršena korelacija inducirana jednofaktorskim modelom neće biti neprihvatljiva u načelu. Ali općenito, kad god korelacija igra relevantniju ulogu ili kada je potrebna veća preciznost, potrebno je prijeći na model koji omogućuje realističniju korelaciju. To se može postići višefaktorskim mode-

lima, a posebno dvofaktorskim. Primarni nedostatak jednofaktorskih modela je taj što ne mogu obuhvatiti komplicirano ponašanje krivulje prinosa. Naime, kod paralelnog pomaka krivulje prinosa ne mijenja se nagib i zakrivljenost.
Općenito, pri analizi modela kamatnih stopa s praktičnog stajališta, treba uvijek pokušati odgovoriti na pitanja poput sljedećih;

- Je li dvofaktorski model dovoljno fleksibilan da se kalibrira na veliki skup *swaptiona*[1] ili čak istovremeno i *capsa*[2]?
- Koliko se *swaptiona* može kalibrirati na dovoljno zadovoljavajući način?
- Kakva je evolucija terminske strukture volatilnosti koja implicira kalibrirani model?
- Je li ovo realno?

Ovaj rad će se bazirati na analizi Vasičekovog dvofaktorskog modela kamatnih stopa.

[1] opcija na *swap*, odnosno zamjenu kamatnih stopa
[2] košara europskih call opcija na LIBOR terminski tečaj

Poglavlje 1

Modeli kamatnih stopa

Na početku poglavlja spomenut ćemo definicije i teoreme koje ćemo koristiti u nastavku.

Definicija 1.0.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Slučajni proces* $B = (B_t : t \geq 0)$ *je* ***Brownovo gibanje*** *ako vrijedi:*

(i) *Putovi* $t \mapsto B_t(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$*, za svaki* $\omega \in \Omega$*.*

(ii) $B_0 = 0$*.*

(iii) *Za sve* $m \in \mathbb{N}$ *i* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ *su prirasti*

$$B_{t_1} = B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni.

(iv) *Za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $B_t - B_s$ *normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom* $t - s$*.*

Definicija 1.0.2. *Adaptiran slučajni proces* $H = (H_t : t \in [0, T])$ *zove se* ***jednostavan proces*** *ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j 1_{[t_j, t_{j+1}\rangle}(t), \tag{1.1}$$

za neku particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$ i omeđene slučajne varijable ϕ_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, takve da je ϕ_j $\mathcal{F}_{t_j}$-izmjeriva. S $\mathcal{E}_T$ označimo familiju svih adaptiranih jednostavnih slučajnih procesa na $[0, T]$.

Definicija 1.0.3. *Za slučajni proces $H \in \mathcal{E}_T$ definiran s* (1.1) *definiramo slučajni proces $I = (I_t : t \in [0, T])$ s*

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t})^1.$$

*Proces I zovemo **Itôv integral** jednostavnog procesa H u odnosu na Brownovo gibanje B i označavamo ga s*

$$I_t = \int_0^t H_s dB_s = (H \cdot B)_t.$$

Definicija 1.0.4. *Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ pridružena filtracija. **Itôv proces** je slučajni proces $X = (X_t : t \geq 0)$ oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds, \tag{1.2}$$

gdje je $X_0 \in \mathbb{R}$, a $H = (H_t : t \geq 0)$ i $V = (V_t : t \geq 0)$ su adaptirani procesi t.d. $H \in \mathcal{L}^2_{ad}$ i $\int_0^t |V_s| ds < \infty$ g.s. za sve $t \geq 0$.

Familija $\mathcal{L}_{ad}$ iz prethodne definicije je familija $\mathbb{F}$ -adaptiranih slučajnih proces $(H = H_t : t \geq 0)$ koji zadovoljavaju uvjet $\mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt < \infty$.

Teorem 1.0.1. *(Itôva formula za Itôv proces). Neka je $X = (X_t : t \geq 0)$ Itôv proces dan formulom* (1.2) *i neka je $f(t, x)$ funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama $f_t(t, x)$, $f_x(t, x)$ i $f_{xx}(t, x)$. Tada za svaki $T \geq 0$ vrijedi,*

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) d\langle X \rangle_t \\ &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t) dt + \int_0^T f_x(t, X_t) H_t dB_t \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, X_t) V_t dt + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t) H_t^2 dt. \end{aligned}$$

Najjednostavniji modeli za tržišta s fiksnim prihodom dani su stohastičkom diferencijalnom jednadžbom za kamatnu stopu,

$$dR_t = \beta(t, R_t) dt + \gamma(t, R_t) d\widetilde{W}_t, \tag{1.3}$$

[1] $a \wedge b = \min\{a, b\}$

uz određene uvjete na funkcije β i γ uz koje je stohastička diferencijalna jednadžba (1.3) dobro definirana[2], gdje je $\widetilde{W}_t$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost $\widetilde{P}$ neutralnu na rizik. Modeli za kamatnu stopu dani stohastičkom diferencijalnom jednadžbom (1.3) ponekad se nazivaju i modeli kratkoročne kamatne stope jer su prigodni za modeliranje kamatne stope za kratkoročno posuđivanje $R = (R_t : t \geq 0)$. Kada je kamatna stopa određena samo jednom stohastičkom diferencijalnom jednadžbom kao što je slučaj ovdje, kažemo da model ima jedan faktor, tj. da je model jednofaktorski.
Vrijednost u trenutku t jedne jedinice valute uložene na tržište novca uz kratkoročnu kamatnu stopu R_s je

$$\frac{1}{D_t} = e^{\int_0^t R_s ds},$$

iz čega slijedi da je diferencijal diskontnog faktora jednak

$$dD_t = -R_t D_t dt.$$

Obveznica bez kupona je ugovor kojim se obećava plaćanje određenog nominalnog iznosa, za koji uzimamo da je 1, na fiksni datum dospijeća T. Formula za određivanje cijene neutralne na rizik kaže da bi diskontirana cijena ove obveznice trebala biti martingal s obzirom na mjeru neutralnu na rizik. Drugim riječima, za $0 \leq t \leq T$, cijena obveznice $B(t, T)$ treba zadovoljavati jednadžbu

$$D_t B(t, T) = \widetilde{\mathbb{E}}\,[D_t \mid \mathcal{F}_t],$$

pri čemu je $B(T, T) = 1$. Iz toga slijedi formula za određivanje cijene obveznice bez kupona

$$B(t, T) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{\int_t^T R_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{1.4}$$

koju uzimamo kao definiciju. Nakon što su izračunate cijene obveznica bez kupona, možemo definirati prinos između vremena t i T kao

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log B(t, T).$$

Budući da je R dan stohastičkom diferencijalnom jednadžbom (1.3), to je Markovljev proces te mora vrijediti

$$B(t, T) = f(t, R_t)$$

[2]Funkcije β i γ su neprekidne te zadovoljavaju Lipschitzov uvjet.

za neku funkciju $f : [0,\infty\rangle \times [0,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$. Da bismo pronašli parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za nepoznatu funkciju $f(t,r)$, najprije ćemo uzeti martingal $D_tB(t,T) = D_tf(t,R_t)$, pronaći njegov diferencijal te izjednačiti član uz dt s nulom. Koristeći Itôvu formulu za produkte, diferencijal martingala $D_tB(t,T) = D_tf(t,R_t)$ jednak je

$$\begin{aligned} d(D_tf(t,R_t)) &= f(t,R_t)dD_t + D_tdf(t,R_t) + dD_tdf(t,R_t) \\ &= D_t\left[-Rfdt + f_tdt + f_rdR + \frac{1}{2}f_{rr}dRdR\right] \\ &= D_t\left[-Rf + f_t +_r + \frac{1}{2}\gamma^2 f_{rr}\right]dt + D_t\gamma f_r d\widetilde{W}, \end{aligned}$$

gdje smo u prvom retku koristili da je član $dD_tdf(t,R_t)$ jednak 0. Kad izjednačimo član uz dt s nulom, dobivamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$f_t(t,r) + \beta f_r(t,r) + \frac{1}{2}\gamma^2(t,r)f_{rr}(t,r) = rf(t,r) \tag{1.5}$$

uz terminalni uvjet

$$f(T,r) = 1, \text{ za sve } r > 0,$$

jer je vrijednost obveznice pri dospijeću jednaka njenoj nominalnoj vrijednosti, odnosno 1.

1.1 Hull-Whiteov model kamatne stope

U Hull-Whiteovom modelu evolucija kamatne stope dana je sa stohastičkom diferencijalnom jednadžbom

$$dR_t = (a_t - b_tR_t)dt + \sigma_t d\widetilde{W}_t,$$

gdje su a_t, b_t i σ_t neslučajne pozitivne funkcije vremena koje zadovoljavaju određene uvjete uz koje je stohastička diferencijalna jednadžba dobro definirana.
Prisjetimo se, parcijalna diferencijalna jednadžba (1.5) za cijenu obveznice bez kupona je

$$f_t(t,r) + (a_t - b_tr)f_r(t,r) + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 f_{rr}(t,r) = rf(t,r).$$

U početku pogađamo, a zatim provjeravamo da rješenje jednadžbe (1.5) ima oblik

$$f(t,r) = e^{-rC(t,T)-A(t,T)}$$

za neke neslučajne funkcije $C(t,T)$ i $A(t,T)$. U ovom slučaju, prinos je jednak

$$Y(t,T) = -\tfrac{1}{T-t}\log f(t,R_t) = \tfrac{1}{T-t}\left(R_tC(t,T) + A(t,T)\right),$$

odnosno afina funkcija od R_t.

1.2 Modeli afinog prinosa

Jednofaktorski modeli Hull[3]-White[4] i Cox[5]-Ignersoll[6]-Ross[7] (CIR) nazivaju se modelima afinog prinosa jer je u tim modelima prinos na cijene obveznica bez kupona afina funkcija kamatne stope. Postoje tri verzije ovih modela s dva faktora i konstantnim koeficijentom, a nama je najzanimljivija verzija Hull-Whiteovog modela s konstantim koeficijentom jer je to upravo Vasičekov model kojim ćemo se baviti u idućem poglavlju. U prvom modelu oba se faktora pojavljuju kao konstante u pripadnim difuzijskim članovima te su faktori nenegativni s pozitivnom vjerojatnošću. Idući je model u kojem se oba faktora pojavljuju pod korijenom u pripadnim difuzijskim članovima i zato oba faktora moraju biti nenegativna u svakom trenutku. U posljednjem modelu se jedan faktor pojavljuje ispod korijena u pripadnim difuzijskim članovima i samo je taj faktor nenegativan u svakom trenutku, dok drugi faktor može postati negativan. Te modele redom zovemo dvofaktorski Vasičekov model, dvofaktorski CIR model i dvofaktorski model mješovite ročne strukture, a zajedno ih još zovemo i kanonskim modelima.

Dvofaktorski afini modeli prinosa koji se čine kompliciranijima od kanonskih modela navedenih gore, uvijek se mogu dobiti iz jednog od ta tri modela promjenom varijabli. Prilikom kalibracije modela poželjno je prvo promijeniti varijable kako bi se model sveo na najmanji broj parametara, jer u protivnom kalibracija može biti zbunjujuća zbog činjenice da ćemo uzimajući različite izbore parametara dobiti istu distribuciju modela. Navedeni kanonski modeli imaju minimalan broj parametara.

[3]John C. Hull (1946.-), istraživač u akademskom području kvantitativnih financija

[4]Alan White (1923.-2020.), profesor financija na Sveučilištu u Torontu

[5]John Carrington Cox (1943.-), profesor financija na MIT Sloan School of Management, jedan od vodećih svjetskih stručnjaka za teoriju opcija

[6]Jonathan Edwards "Jon" Ignersoll, Jr. (1949.-), američki ekonomist, profesor međunarodne trgovine i financija na Yale School of Management

[7]Stephen Alan "Steve" Ross (1944.-2017.), profesor financijske ekonomije na MIT Sloan School of Management

Poglavlje 2

Motivacija za uvođenje višefaktorskih modela kamatnih stopa

Kamatne stope temelj su financijskih tržišta. Utječu na određivanje cijene obveznica i dionica, na štednju, kredite, ekonomski rast, upravljanje rizicima te na mnoštvo drugih financijskih i ekonomskih segmenata. Jednofaktorski modeli ograničeni su svojom jednostavnošću. Pružaju pojednostavljen pogled na kretanje kamatnih stopa pretpostavljajući da se kretanje kamatne stope može adekvatno opisati jednim izvorom rizika, zanemarujući druge utjecajne faktore. Također, struktura jednofaktorskih modela ograničava njihovu prilagodljivost različitim ekonomskim uvjetima te tržišnim okruženjima.

Potreba za sveobuhvatnijim modelima postaje očita kada se uzmu u obzir ograničenja jednofaktorskih modela. Oni često ne uspijevaju obuhvatiti bogatu terminsku strukturu kamatnih stopa, složenu međusobnu povezanost kratkoročnih i dugoročnih stopa te različite volatilnosti koje se promatraju na različitim dospijećima. Ova neadekvatnost može dovesti do značajnog pogrešnog određivanja cijena financijskih instrumenata te nepotpunog razumijevanja tržišnih rizika.

Kao odgovor na nedostatke jednofaktorskih modela, razvijeni su višefaktorski modeli kako bi pružili fleksibilniji okvir za analizu kamatnih stopa. Uključivanjem više izvora rizika i njihovih odgovarajućih utjecaja na terminsku strukturu, ovi modeli nude detaljniji i točniji prikaz kretanja kamatnih stopa. Oni mogu obuhvatiti širi spektar tržišnih ponašanja i pružiti bolju usklađenost s promatranim podacima, poput oblika krivulje prinosa i njihovih dinamičkih promjena tijekom vremena.

Na primjer, dok bi model s jednim faktorom mogao uzeti u obzir samo kratkoročnu kamatnu stopu, višefaktorski model može uključivati čimbenike kao što su makroekonomske varijable, očekivanja inflacije i rizici likvidnosti. To omogućuje detaljniju analizu kako različiti ekonomski uvjeti utječu na kamatne stope.

Prijelaz na višefaktorske modele odražava kontinuiranu evoluciju financijske industrije prema većoj preciznosti u modeliranju. Kako tržišta postaju složenija, alati koji se koriste za navigaciju njima moraju se razvijati u skladu s tim. Višefaktorski modeli, sa svojom sposobnošću da se bave višestrukim aspektima dinamike kamatnih stopa, predstavljaju značajan napredak u potrazi za pouzdanijim i sveobuhvatnijim financijskim modelima.

Poglavlje 3

Dvofaktorski Vasičekov model kamatnih stopa

Na početku poglavlja iskazat ćemo teorem koji ćemo koristiti u dokazu tvrdnji u nastavku poglavlja, a skicu njegovog dokaza možemo pronaći u [3].

Teorem 3.0.1. *(Lévyjeva karakterizacija Brownovog gibanja). Neka je $M = (M_t : t \geq 0)$ martingal u odnosu na filtraciju $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$. Pretpostavimo da je $M_0 = 0$, M_t ima neprekidne putove te $\langle M \rangle_t = t$, za sve $t \geq 0$. Tada je M Brownovo gibanje.*

U dvofaktorskom Vasičekovom modelu faktore X_{1t} i X_{2t} zadajemo sustavom stohastičkih diferencijalnih jednadžbi

$$dX_{1t} = (a_1 - b_{11}X_{1t} - b_{12}X_{2t})dt + \sigma_1 d\widetilde{B}_{1t}, \tag{3.1}$$

$$dX_{2t} = (a_2 - b_{21}X_{1t} - b_{22}X_{2t})dt + \sigma_2 d\widetilde{B}_{2t}, \tag{3.2}$$

gdje su procesi $\widetilde{B}_{1t}$ i $\widetilde{B}_{2t}$ Brownova gibanja s obzirom na vjerojatnost $\widetilde{P}$ neutralnu na rizik s konstantnom korelacijom $\nu \in (-1, 1)$, tj. vrijedi $d\widetilde{B}_{1t}d\widetilde{B}_{2t} = \nu dt$. Pretpostavka je da su konstante σ_1 i σ_2 strogo pozitivne. Nadalje, pretpostavimo da matrica

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

ima strogo pozitivne svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2. Pozitivnost svojstvenih vrijednosti uzrokuje da faktori X_{1t} i X_{2t}, kao i kanonski faktori Y_{1t} i Y_{2t} definirani u nastavku, imaju svojstvo vraćanja prema srednjem [1]. Konačno, pretpostavljamo da je kamatna stopa afina funkcija

$$R_t = \epsilon_0 + \epsilon_1 X_{1t} + \epsilon_2 X_{2t}, \tag{3.3}$$

gdje su ϵ_0, ϵ_1 i ϵ_2 konstante. Ovo je najopćenitiji dvofaktorski Vasičekov model.

[1] Vraćanje prema srednjem je teorija u financijama koja sugerira da će se volatilnost cijena imovine i povijesni prinosi na kraju vratiti na dugoročnu srednju ili prosječnu razinu cijelog skupa podataka.

3.1 Kanonski oblik

Kao što je gore prikazano, dvofaktorski Vasičekov model je „preparametriziran”, tj. različiti izbori parametara a_i, b_{ij}, σ_i i ϵ_i mogu dovesti do iste distribucije procesa R_t. Kako bi se eliminirala prekomjerna parametrizacija, reducirat ćemo model (3.1) - (3.3) na kanonski dvofaktorski Vasičekov model

$$
\begin{aligned}
dY_{1t} &= -\lambda_1 Y_{1t} dt + d\widetilde{W}_{1t}, && (3.4)\\
dY_{2t} &= -\lambda_{21} Y_{1t} dt - \lambda_2 Y_{2t} dt + d\widetilde{W}_{2t}, && (3.5)\\
R_t &= \delta_0 + \delta_1 Y_{1t} + \delta_2 Y_{2t}, && (3.6)
\end{aligned}
$$

gdje su $\widetilde{W}_{1t}$ i $\widetilde{W}_{2t}$ nezavisna Brownova gibanja. Kanonski dvofaktorski Vasičekov model ima šest parametara:

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_{21},\ \delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2\ .$$

Parametri se koriste za kalibraciju modela. U praksi se često dopušta da neki od ovih parametara budu vremenski promjenjivi, ali neslučajni kako bi model odgovarao početnoj krivulji prinosa.
Da bi se postigla redukcija modela (3.1)-(3.2), prvo ćemo transformirati matricu B u Jordanov kanonski oblik odabirom nesingularne matrice

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

takve da je

$$K = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \kappa & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

gdje su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice B.
Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tada su stupci od P^{-1} svojstveni vektori od B i $\kappa = 0$, tj. matrica K je dijagonalna. Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tada κ može biti nula, ali se također može dogoditi da je $\kappa \neq 0$ i tada možemo odabrati P takav da je $\kappa = 1$. Koristeći oznake

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},\ \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix},\ \widetilde{B}_t = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{1t} \\ \widetilde{B}_{2t} \end{bmatrix},$$

jednadžbe (3.1) i (3.2) možemo zapisati u vektorskoj notaciji

$$dX_t = Adt - BX_t dt + \Sigma d\widetilde{B}_t\ .$$

Množenjem obje strane s P i definiranjem $\bar{X}_t = PX_t$, dobivamo da je

$$d\bar{X}_t = PAdt - K\bar{X}_t dt + P\Sigma d\widetilde{B}_t \,,$$

što se po komponentama može zapisati kao

$$d\bar{X}_{1t} = (p_{11}a_1 + p_{12}a_2)dt - \lambda_1 \bar{X}_{1t}dt + p_{11}\sigma_1 d\widetilde{B}_{1t} + p_{12}\sigma_2 d\widetilde{B}_{2t}, \tag{3.8}$$

$$d\bar{X}_{2t} = (p_{21}a_1 + p_{22}a_2)dt - \kappa \bar{X}_{1t}dt - \lambda_2 \bar{X}_{2t}dt + p_{21}\sigma_1 d\widetilde{B}_{1t} + p_{22}\sigma_2 d\widetilde{B}_{2t}. \tag{3.9}$$

Iduća lema bit će nam korisna u dokazima tvrdnji u nastavku pa ju navodimo uz dokaz.

Lema 3.1.1. *Neka su $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-1 < \nu < 1$ i neka je P nesingularna matrica definirana s* (3.7). *Tada su*

$$\gamma_i = p_{i1}^2\sigma_1^2 + 2\nu p_{i1}p_{i2}\sigma_1\sigma_2 + p_{i2}^2\sigma_2^2, \quad i = 1, 2,$$

strogo pozitivni i

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\left(p_{11}p_{21}\sigma_1^2 + \nu(p_{11}p_{22} + p_{12}p_{21})\sigma_1\sigma_2 + p_{12}p_{22}\sigma_2^2\right) \in \langle -1, 1\rangle \,. \tag{3.10}$$

Dokaz. Budući da je $\nu \in \langle -1, 1\rangle$, za matricu

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}$$

možemo pronaći kvadratni korijen. Doista, jedan korijen je

$$\sqrt{N} = \begin{bmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{bmatrix},$$

pri čemu je $a = \mathrm{sign}(\nu)\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\nu^2}}$. Provjeru ćemo provesti jednadžbom

$$\begin{aligned} 2a\sqrt{1-a^2} &= 2sign(\nu)\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\nu^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\nu^2}} \\ &= 2sign(\nu)\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1-\nu^2}} \\ &= 2sign(\nu) \cdot \frac{1}{2} \mid \nu \mid = \nu. \end{aligned}$$

Iz nesingularnosti matrica $\sqrt{N}$, Σ i P^T slijedi nesingularnost matrice

$$\sqrt{N}\Sigma P^T = \begin{bmatrix} p_{11}\sigma_1 a + p_{12}\sigma_2\sqrt{1-a^2} & p_{21}\sigma_1 a + p_{22}\sigma_2\sqrt{1-a^2} \\ p_{11}\sigma_1\sqrt{1-a^2} + p_{12}\sigma_2 a & p_{21}\sigma_1\sqrt{1-a^2} + p_{22}\sigma_2 a \end{bmatrix}.$$

Nadalje, označimo s c_1 prvi stupac matrice $\sqrt{N}\Sigma P^T$ i s c_2 drugi stupac te matrice. Zbog nesingularnosti matrice $\sqrt{N}\Sigma P^T$ vektori c_1 i c_2 su linearno nezavisni pa stoga nijedan od njih nije nul-vektor. Dakle,

$$\gamma_i = \| c_i \| > 0, \quad i = 1, 2.$$

Budući da su c_1 i c_2 linearno nezavisni vektori, iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$-\| c_1 \| \| c_2 \| < c_1 \cdot c_2 < \| c_1 \| \| c_2 \|$$

što je ekvivalento s $-1 < p < 1$. $\square$

Sada definiramo

$$\bar{B}_{it} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i}}(p_{i1}\sigma_1\widetilde{B}_{1t} + p_{i2}\sigma_2\widetilde{B}_{2t}), \quad i = 1, 2.$$

Budući da je linearna kombinacija dva neprekidna martingala neprekidni martingal te su $\widetilde{B}_{1t}$ i $\widetilde{B}_{2t}$ neprekidni martingali, procesi $\bar{B}_{1t}$ i $\bar{B}_{2t}$ su neprekidni martingali takvi da je $\bar{B}_{10} = \bar{B}_{20} = 0$. Nadalje, vrijedi

$$d\bar{B}_{1t}d\bar{B}_{1t} = d\bar{B}_{2t}d\bar{B}_{2t} = dt,$$

pa su prema Lemi 3.1.1, $\bar{B}_{1t}$ i $\bar{B}_{2t}$ Brownova gibanja. Uočimo da je

$$d\bar{B}_{1t}d\bar{B}_{2t} = \rho dt,$$

gdje je ρ definiran s (3.10). Sada, (3.8) i (3.9) možemo zapisati kao

$$d\bar{X}_{1t} = (p_{11}a_1 + p_{12}a_2)dt - \lambda_1\bar{X}_{1t}dt + \sqrt{\gamma_1}d\bar{B}_{1t}, \tag{3.11}$$

$$d\bar{X}_{2t} = (p_{21}a_1 + p_{22}a_2)dt - \kappa\bar{X}_{1t}dt - \lambda_2\bar{X}_{2t}dt + \sqrt{\gamma_2}d\bar{B}_{2t}. \tag{3.12}$$

Pomoću

$$\widehat{X}_{1t} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\left(\bar{X}_{1t} - \frac{p_{11}a_1 + p_{12}a_2}{\lambda_1}\right), \tag{3.13}$$

$$\widehat{X}_{2t} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}\left(\bar{X}_{2t} + \frac{\kappa(p_{11}a_1 + p_{12}a_2)}{\lambda_1\lambda_2} - \frac{p_{21}a_1 + p_{22}a_2}{\lambda_2}\right), \tag{3.14}$$

jednadžbe (3.11) i (3.12) možemo zapisati kao

$$d\widehat{X}_{1t} = -\lambda_1\widehat{X}_{1t}dt + d\bar{B}_{1t}, \tag{3.15}$$

$$d\widehat{X}_{2t} = -\kappa\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\widehat{X}_{1t}dt - \lambda_2\widehat{X}_{2t}dt + d\bar{B}_{2t}. \tag{3.16}$$

Kao posljednji korak, definiramo

$$\widetilde{W}_{1t} = \bar{B}_{1t}, \;\; \widetilde{W}_{2t} = \tfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[-\rho \bar{B}_{1t} + \bar{B}_{2t} \right].$$

$\widetilde{W}_{1t}$ i $\widetilde{W}_{2t}$ su neprekidni martingali, što se lako provjeri. Budući da je

$$d\widetilde{W}_{1t} d\widetilde{W}_{1t} = dt, \quad d\widetilde{W}_{1t} d\widetilde{W}_{2t} = 0, \quad \widetilde{W}_{2t}\widetilde{W}_{2t} = dt,$$

ponovno prema Lemi 3.1.1, $\widetilde{W}_{1t}$ i $\widetilde{W}_{2t}$ su nezavisna Brownova gibanja. Sada, uz oznake

$$Y_{1t} = \widehat{X}_{1t}, \quad Y_{2t} = \tfrac{-\rho \widehat{X}_{1t} + \widehat{X}_{2t}}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

imamo

$$\begin{aligned}
dY_{2t} &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[-\rho d\widehat{X}_{1t} + d\widehat{X}_{2t} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\left(\rho\lambda_1 - \kappa \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \right) \widehat{X}_{1t} - \lambda_2 \widehat{X}_{2t} \right] dt \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[-\rho d\bar{B}_{1t} + d\bar{B}_{2t} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\rho\lambda_1 - \rho\lambda_2 - \kappa \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \right) Y_{1t} dt - \lambda_2 Y_{2t} dt + d\widetilde{W}_{2t}.
\end{aligned}$$

Stoga, jednadžbe (3.15) i (3.16) možemo zapisati kao

$$dY_{1t} = -\lambda_1 Y_{1t} dt + d\widetilde{W}_{1t}, \tag{3.17}$$

$$dY_{2t} = -\lambda_{21} Y_{1t} dt - \lambda_2 Y_{2t} dt + d\widetilde{W}_{2t}, \tag{3.18}$$

pri čemu je

$$\lambda_{21} = \tfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(-\rho\lambda_1 + \rho\lambda_2 + \kappa \sqrt{\tfrac{\gamma_1}{\gamma_2}} \right).$$

To su kanonske jednadžbe (3.4) i (3.5). Da bismo pokazali da vrijedi (3.6) provodimo zamjenu varijabli

$$\begin{aligned}
Y_{1t} &= \widehat{X}_{1t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \left(\bar{X}_{1t} - \frac{p_{11}a_1 + p_{12}a_2}{\lambda_1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} \left(p_{11}X_{1t} + p_{12}X_{2t} - \frac{p_{11}a_1 + p_{12}a_2}{\lambda_1} \right),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$
\begin{aligned}
Y_{2t} &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(-\rho\widehat{X}_{1t}+\widehat{X}_{2t}\right)\\
&= -\frac{\rho}{\sqrt{\gamma_1(1-\rho^2)}}\left(\bar{X}_{1t}-\frac{p_{11}a_1+p_{12}a_2}{\lambda_1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\gamma_2(1-\rho^2)}}\left(\bar{X}_{2t}+\frac{\kappa(p_{11}a_1+p_{12}a_2)}{\lambda_1\lambda_2}-\frac{p_{21}a_1+p_{22}a_2}{\lambda_2}\right)\\
&= -\frac{\rho}{\sqrt{\gamma_1(1-\rho^2)}}\left(p_{11}X_{1t}+p_{12}X_{2t}-\frac{p_{11}a_1+p_{12}a_2}{\lambda_1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\gamma_2(1-\rho^2)}}\left(p_{21}X_{1t}+p_{22}X_{2t}+\frac{\kappa(p_{11}a_1+p_{12}a_2)}{\lambda_1\lambda_2}-\frac{p_{21}a_1+p_{22}a_2}{\lambda_2}\right).
\end{aligned}
$$

U vektorskoj notaciji to možemo pisati

$$Y_t = \Gamma(PX_t + V), \tag{3.20}$$

gdje je

$$
Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix},\quad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}} & 0 \\ -\frac{\rho}{\sqrt{\gamma_1(1-\rho^2)}} & \frac{1}{\sqrt{\gamma_2(1-\rho^2)}} \end{bmatrix},\quad V = \begin{bmatrix} -\frac{p_{11}a_1+p_{12}a_2}{\lambda_1} \\ \frac{\kappa(p_{11}a_1+p_{12}a_2)}{\lambda_1\lambda_2}-\frac{p_{21}a_1+p_{22}a_2}{\lambda_2} \end{bmatrix}.
$$

Sada zapišimo jednadžbu (3.20) po Y_t :

$$X_t = P^{-1}(\Gamma^{-1}Y_t - V).$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
R_t &= \epsilon_0 + \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{bmatrix} X_t\\
&= \epsilon_0 + \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{bmatrix} P^{-1}\Gamma^{-1}Y_t - \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{bmatrix} P^{-1}V\\
&= \delta_0 + \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} Y_t,
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
\delta_0 &= \epsilon_0 - \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{bmatrix} P^{-1}V,\\
\begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \end{bmatrix} P^{-1}\Gamma^{-1}.
\end{aligned}
$$

Time smo dobili (3.6).

3.2 Cijene obveznica

U ovom potpoglavlju izvodimo formulu za cijenu obveznica bez kupona u kanonskom dvofaktorskom Vasičekovom modelu zadanom s (3.4) - (3.6). Prema formuli za određivanje cijene neutralne na rizik, cijena u trenutku $t \in [0, T]$ obveznice bez kupona dana je s (1.4). Budući da je R_t dana s (3.6), funkcija faktora Y_{1t} i Y_{2t}, te je rješenje sustava stohastičkih diferencijalnih jednadžbi (3.4) i (3.5), zaključujemo da je proces $(R_t : t \in [0, T])$ Markovljev te da postoji funkcija $f(t, y_1, y_2)$ takva da je

$$B(t, T) = f(t, Y_{1t}, Y_{2t}). \tag{3.21}$$

Uočimo da diskontni faktor $D_t = e^{-\int_0^t R_u du}$ zadovoljava $dD_t = -R_t D_t dt$. Iterativno uvjetovanje podrazumijeva da je diskontirana cijena obveznice $D_t B(t, T)$ martingal s obzirom na $\widetilde{\mathbb{P}}$. Sada ćemo izračunati diferencijal tog martingala:

$$\begin{aligned}
d(D_t B(t,T)) &= d(D_t f(t, Y_{1t}, Y_{2t})) \\
&= -R_t D_t f(t, Y_{1t}, Y_{2t})dt + D_t df(t, Y_{1t}, Y_{2t}) \\
&= D_t[-Rf dt + f_t dt + f_{y_1} dY_1 + f_{y_2} dY_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{y_1 y_1} dY_1 dY_1 + f_{y_1 y_2} dY_1 dY_2 + \frac{1}{2} f_{y_2 y_2} dY_2 dY_2].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

U sljedećim koracima koristimo jednadžbe (3.1) - (3.3) te dobivamo

$$\begin{aligned}
d(D_t B(t,T)) = D_t[-(\delta_0 + \delta_1 Y_1 + \delta_2 Y_2) f + f_t - \lambda_1 Y_1 f_{y_1} - \lambda_{21} Y_1 f_{y_2} \\
- \lambda_2 Y_2 f_{y_2} + \frac{1}{2} f_{y_1 y_1} + \frac{1}{2} f_{y_2 y_2}]dt + D_t \left[f_{y_1} d\widetilde{W}_1 + f_{y_2} d\widetilde{W}_2 \right].
\end{aligned}$$

Ukoliko izjednačimo član uz dt s nulom dobivamo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\begin{aligned}
&- (\delta_0 + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2) f(t, y_1, y_2) + f_t(t, y_1, y_2) \\
&\qquad - \lambda_1 y_1 f_{y_1}(t, y_1, y_2) - \lambda_{21} y_1 f_{y_2}(t, y_1, y_2) - \lambda_2 y_2 f_{y_2}(t, y_1, y_2) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2} f_{y_1 y_1}(t, y_1, y_2) + \frac{1}{2} f_{y_2 y_2}(t, y_1, y_2) = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

za svaki $t \in [0, T\rangle$ i za sve $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, uz terminalni uvjet

$$f(T, y_1, y_2) = 1, \text{ za sve } y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Da bismo riješili ovu jednadžbu, tražimo rješenje oblika

$$f(t, y_1, y_2) = e^{-y_1 C_1(T-t) - y_2 C_2(T-t) - A(T-t)}, \tag{3.25}$$

za neke funkcije $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ i $A(\tau)$. Ovdje definiramo $\tau = T - t$ kao relativno dospijeće, odnosno vrijeme do dospijeća. Sve dok paramteri modela ne ovise o t, cijena obveznica bez kupona ovisit će o t i T samo kroz τ. Terminalni uvjet (3.24) implicira da je

$$C_1(0) = C_2(0) = A(0) = 0. \tag{3.26}$$

Sada računamo derivacije funkcija $C_1(\tau)$ i $C_2(\tau)$, gdje koristimo oznaku $C'(\tau) = \frac{d}{d\tau}C(\tau)$. Korištenjem činjenice da je $\frac{d}{dt}C_i(\tau) = C_i^{'}(\tau) \cdot \frac{d}{dt}\tau = -C_i^{'}(\tau),\ i = 1, 2$, te slične jednadžbe $\frac{d}{dt}A(\tau) = -A^{'}(\tau)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
f_t(t, y_1, y_2) &= \left[y_1 C_1^{'}(t) + y_2 C_2^{'}(t) + A^{'}(t)\right] f(t, y_1, y_2),\\
f_{y_1}(t, y_1, y_2) &= -C_1(t) f(t, y_1, y_2),\\
f_{y_2}(t, y_1, y_2) &= -C_2(t) f(t, y_1, y_2),\\
f_{y_1 y_1}(t, y_1, y_2) &= C_1^2(t) f(t, y_1, y_2),\\
f_{y_1 y_2}(t, y_1, y_2) &= C_1(t) C_2(t) f(t, y_1, y_2),\\
f_{y_2 y_2}(t, y_1, y_2) &= C_2^2(t) f(t, y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Sada jednadžba (3.23) postaje

$$\begin{aligned}
\Big[\Big(C_1^{'}(t) + \lambda_1 C_1(t) + \lambda_{21} C_2(t) - \delta_1\Big) y_1 + \Big(C_2^{'}(t) + \lambda_2 C_2(t) - \delta_2\Big) y_2 \\
+ \left(A^{'}(t) + \frac{1}{2} C_1^2(t) + \frac{1}{2} C_2^2(t) - \delta_0\right) \Big] f(t, y_1, y_2) = 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Budući da gornja jednadžba mora vrijediti za svaki y_1 i y_2, izraz $C_1^{'}(t) + \lambda_1 C_1(t) + \lambda_{21} C_2(t) - \delta_1$ koji množi y_1 mora biti 0. U suprotnom bi jednadžba vrijedila za fiksan y_1 te bi promjenom vrijednosti y_1 nejednakost bila narušena. Slično, član $C_2^{'}(t) + \lambda_2 C_2(t) - \delta_2$ koji množi y_2 mora biti nula pa prema tome i preostali član $A^{'}(t) + \frac{1}{2}C_1^2(t) + \frac{1}{2}C_2^2(t) - \delta_0$ mora biti nula. Ovime dobivamo sustav od tri diferencijalne jednadžbe

$$C_1^{'}(\tau) = -\lambda_1 C_1(\tau) - \lambda_{21} C_2(\tau) + \delta_1, \tag{3.28}$$

$$C_2^{'}(\tau) = -\lambda_2 C_2(\tau) + \delta_2, \tag{3.29}$$

$$A^{'}(\tau) = -\frac{1}{2} C_1^2(\tau) - \frac{1}{2} C_2^2(\tau) + \delta_0. \tag{3.30}$$

Rješenje jednadžbe (3.29) koje zadovoljava početni uvjet $C_2(0) = 0$ dano je s

$$C_2(\tau) = \frac{\delta_2}{\lambda_2}\left(1 - e^{-\lambda_2 \tau}\right). \tag{3.31}$$

Zamijenimo li to u (3.28) i riješimo koristeći početni uvjet $C_1(0) = 0$, (3.28) implicira

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(e^{\lambda_1\tau}C_1(\tau)) &= e^{\lambda_1\tau}(\lambda_1 C_1(\tau) + C_1'(\tau))\\ &= e^{\lambda_1\tau}(-\lambda_{21}C_2(\tau) + \delta_1)\\ &= e^{\lambda_1\tau}\left(-\frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2}\left(1 - e^{-\lambda_2\tau}\right) + \delta_1\right).\end{aligned}$$

Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, integriranjem od 0 do τ dobivamo

$$C_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_1}\left(\delta_1 - \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2}\right)\left(1 - e^{-\lambda_1\tau}\right) + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\left(e^{-\lambda_2\tau} - e^{-\lambda_1\tau}\right). \tag{3.32}$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tada dobivamo

$$C_1(\tau) = \frac{1}{\lambda_1}\left(\delta_1 - \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1}\right)\left(1 - e^{-\lambda_1\tau}\right) + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1}\tau e^{-\lambda_1\tau}. \tag{3.33}$$

Konačno, (3.30) i početni uvjet $A(0) = 0$ impliciraju da je

$$A(\tau) = \int_0^\tau \left[-\frac{1}{2}C_{1u}^2 - \frac{1}{2}C_{2u}^2 + \delta_0\right]du, \tag{3.34}$$

pri čemu se ovaj izraz može dobiti u zatvorenoj formi dugim, ali jednostavnim računom. Sada kombiniranjem izraza (3.31) - (3.34) zajedno s (3.25) dobivamo traženu cijenu (3.21).

3.3 Kratkoročna i dugoročna stopa

Fiksirajmo pozitivno relativno dospijeće $\bar{\tau}$. Prinos u trenutku t na obveznicu bez kupona s relativnim dospijećem $\bar{\tau}$ koja dospijeva na datum $t + \bar{\tau}$, nazivamo kamatnom stopom za dugoročno posuđivanje L_t. Jednom kada imamo model za evoluciju kratkoročne stope R_t s obzirom na vjerojatnost $\widetilde{\mathbb{P}}$ neutralnu na rizik, tada je za svaki $t \geq 0$ prinos obveznice bez kupona s relativnim dospijećem $t + \bar{\tau}$ određena formulom za određivanje cijene (1.4) pa stoga model kratkoročne stope određuje model dugoročne stope.
U nastavku ovog potpoglavlja želimo odrediti sustav stohastičkih diferencijalnih jednadžbi za kratkoročnu i dugoročnu kamatnu stopu.
Promotrimo sada kanonski dvofaktorski Vasičekov model dan s (3.4)-(3.5). Kao što smo vidjeli prije, cijene obveznica bez kupona u tom modelu imaju oblik

$$B(t, T) = e^{-Y_{1t}C_1(T-t) - Y_{2t}C_2(T-t) - A(T-t)},$$

gdje su funkcije $C_1(\tau)$, $C_2(\tau)$ i $A(\tau)$ dane s (3.31)-(3.34). Dakle, kamatna stopa za dugoročno posuđivanje u trenutku t dana je s

$$L_t = -\frac{1}{\bar{\tau}} \log B(t, t+\bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\tau}} \left[C_1(\bar{\tau}) Y_{1t} + C_2(\bar{\tau}) Y_{2t} + A(\bar{\tau}) \right]. \tag{3.35}$$

Budući da kanonski faktori Y_{1t} i Y_{2t} nemaju ekonomsku interpretaciju, htjeli bismo R_t i L_t koristiti kao faktore modela. Sada ćemo pokazati kako to učiniti, dobivajući dvofaktorski Vasičekov model oblika (3.1), (3.2) i (3.3), gdje X_{1t} zamijenimo s R_t i X_{2t} zamijenimo s L_t. Najprije ćemo formule (3.6) i (3.35) zapisati u vektorskom obliku:

$$\begin{bmatrix} R_t \\ L_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} A(\bar{\tau}) \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Ovaj sustav želimo riješiti za (Y_{1t}, Y_{2t}).
U nastavku navodimo rezultat s dokazom koji ćemo koristiti u izvođenju dvofaktorskog Vasičekovog modela s faktorima L_t i R_t.

Lema 3.3.1. *Matrica*

$$D = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix}$$

je nesingularna ako i samo ako je $\delta_2 \neq 0$ *i*

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\delta_1 + \lambda_{21}\delta_2 \neq 0. \tag{3.37}$$

Dokaz. Promotrimo funkciju $f(x) = 1 - e^{-x} - xe^{-x}$ za koju je $f(0) = 0$ i $f'(x) = xe^{-x} > 0$, za sve $x > 0$. Vrijedi da je $f(x) > 0$, za sve $x > 0$. Definirajmo sada $h(x) = \frac{1}{x}(1 - e^{-x})$. Budući da je $h'(x) = -x^{-2} f(x)$, što je strogo negativno za sve $x > 0$, $h(x)$ je strogo padajuća funkcija na $\langle 0, \infty \rangle$. Da bismo ispitali nesingularnost matrice D, najprije ćemo promotriti slučaj $\lambda_1 \neq \lambda_2$. U tom slučaju, jednadžbe (3.31) i (3.32) impliciraju

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \frac{1}{\bar{\tau}}\left[\delta_1 C_2(\bar{\tau}) - \delta_2 C_1(\bar{\tau})\right] \\
&= \frac{\delta_1\delta_2}{\lambda_2\bar{\tau}}\left(1 - e^{-\lambda_2\bar{\tau}}\right) - \frac{\delta_1\delta_2}{\lambda_1\bar{\tau}}\left(1 - e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right) \\
&\quad + \frac{\lambda_{21}\delta_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)\,\lambda_1\lambda_2\bar{\tau}}\left((\lambda_1 - \lambda_2)\left(1 - e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right) - \lambda_2 e^{-\lambda_2\bar{\tau}} + \lambda_1 e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right) \\
&= \delta_1\delta_2\left[\frac{1}{\lambda_2\bar{\tau}}\left(1 - e^{-\lambda_2\bar{\tau}}\right) - \frac{1}{\lambda_1\bar{\tau}}\left(1 - e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right)\right] \\
&\quad + \frac{\lambda_{21}\delta_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)\,\lambda_1\lambda_2\bar{\tau}}\left[\lambda_1\left(1 - e^{-\lambda_2\bar{\tau}}\right) - \lambda_2\left(1 - e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right)\right] \\
&= \delta_2\left(\delta_1 + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\left[\frac{1}{\lambda_2\bar{\tau}}\left(1 - e^{-\lambda_2\bar{\tau}}\right) - \frac{1}{\lambda_1\bar{\tau}}\left(1 - e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right)\right] \\
&= \delta_2\left(\delta_1 + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\left[h(\lambda_2\bar{\tau}) - h(\lambda_1\bar{\tau})\right].
\end{aligned}$$

Budući da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i h je strogo padajuća funkcija vrijedi $h(\lambda_1\bar{\tau}) \neq h(\lambda_2\bar{\tau})$. Nadalje, $\det(D) \neq 0$ ako i samo ako vrijedi $\delta_2 \neq 0$ i (3.37).
Zatim, razmotrimo slučaj $\lambda_1 = \lambda_2$. U tom slučaju (3.31) i (3.33) impliciraju

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \frac{1}{\bar{\tau}}\left[\delta_1 C_2(\bar{\tau}) - \delta_2 C_1(\bar{\tau})\right] \\
&= \frac{\delta_1\delta_2}{\lambda_1\bar{\tau}}\left(1 - e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right) - \frac{\delta_2}{\lambda_1\bar{\tau}}\left(\delta_1 - \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1}\right)\left(1 - e^{-\lambda_1\bar{\tau}}\right) - \frac{\lambda_{21}\delta_2^2}{\lambda_1}e^{-\lambda_1\bar{\tau}} \\
&= \frac{\lambda_{21}\delta_2^2}{\lambda_1^2\bar{\tau}} f(\lambda_1\bar{\tau}).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Budući da je $\lambda_1\bar{\tau}$ pozitivan, $f(\lambda_1\bar{\tau}) \neq 0$. U ovom slučaju, (3.37) je ekvivalentno s $\delta_2 \neq 0$ i $\lambda_{21} \neq 0$. Slijedi da je $\det(D) \neq 0$ ako i samo ako vrijedi (3.37). □

Pod pretpostavkama Leme 3.3.1, (3.36) možemo obrnuti da dobijemo

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}}C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}}C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} R_t \\ L_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \frac{1}{\bar{\tau}}A(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \right). \tag{3.39}$$

Sada možemo izračunati diferencijal od (3.36) i primijeniti (3.4) i (3.5). Time ćemo dobiti sustav jednadžbi u kojoj se Y_{1t} i Y_{2t} pojavljuju na desnoj strani, ali koristeći (3.39) možemo desnu stranu jednakosti napisati pomoću R_t i L_t. Nakon provođenja opisanih koraka dolazimo do jednadžbe

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} dR_t \\ dL_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY_{1t} \\ dY_{2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \left(- \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_{1t} \\ d\widetilde{W}_{2t} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} A(\bar{\tau}) \end{bmatrix} dt \\
&\quad - \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_t \\ L_t \end{bmatrix} dt \\
&\quad + \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\widetilde{W}_{1t} \\ d\widetilde{W}_{2t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ovo je vektorski oblik jednažbi (3.1) i (3.2) u dvofaktorskom Vasičekovom modelu za kratkoročnu stopu R_t i dugoročnu stopu L_t. Parametri a_1 i a_2 koji se pojavljuju u (3.1) i (3.2) dani su izrazom

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} A(\bar{\tau}) \end{bmatrix}.$$

Matrica B dana je s

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \frac{1}{\bar{\tau}} C_1(\bar{\tau}) & \frac{1}{\bar{\tau}} C_2(\bar{\tau}) \end{bmatrix}^{-1},$$

a svojstvene vrijednosti od B su $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$. Uz oznake

$$\sigma_1 = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\bar{\tau}} \sqrt{C_1^2(\bar{\tau}) + C_2^2(\bar{\tau})},$$

procesi

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}_{1t} &= \frac{1}{\sigma_1} \left(\delta_1 \widetilde{W}_{1t} + \delta_2 \widetilde{W}_{2t} \right), \\
\widetilde{B}_{2t} &= \frac{1}{\sigma_2 \bar{\tau}} \left(C_1(\bar{\tau}) \widetilde{W}_{1t} + C_2(\bar{\tau}) \widetilde{W}_{2t} \right)
\end{aligned}$$

su Brownova gibanja koja se pojavljuju u (3.1) i (3.2). Konačno, jednadžba (3.3) ima oblik

$$R_t = 0 + 1 \cdot R_t + 0 \cdot L_t,$$

tj. $\epsilon_0 = \epsilon_2 = 0, \epsilon_1 = 1$.

Na kraju ovog potpoglavlja u kojem smo izveli dugoročnu kamatnu stopu L_t iz kratkoročne stope R_t u dvofaktorskom Vasičekovom modelu, promotrimo kako kratkoročna i dugoročna stopa izgledaju u jednofaktorskom Vasičekovom modelu.
U Zadatku 10.5 iz [2], sličnim računima kao i u ovom potpoglavlju može se pokazati da je cijena u trenutku $t \in [0, T]$ obveznice bez kupona koja dospijeva u trenutku T dana s

$$B(t, T) = e^{-C(t,T)R_t - A(t,T)}, \tag{3.40}$$

gdje su $C(t, T)$ i $A(t, T)$ dane s

$$\begin{aligned} C(t,T) &= \int_t^T e^{-\int_t^s b dv} ds = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-b(T-t)}\right), \\ A(t,T) &= \int_t^T \left(aC(s,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(s,T)\right) ds \\ &= \frac{2ab - \sigma^2}{2b^2}(T-t) + \frac{\sigma^2 - ab}{b^3}\left(1 - e^{-b(T-t)}\right) - \frac{\sigma^2}{4b^3}\left(1 - e^{-2b(T-t)}\right). \end{aligned}$$

Budući da su $C(t, T)$ i $A(t, T)$ neslučajne funkcije, $B(t, T)$ je funkcija od R_t. Nadalje, kada bismo logaritmirali izraz (3.40) u $(t, t + \bar{\tau})$ te uvrstili u izraz za dugoročnu stopu $L_t = -\frac{1}{\bar{\tau}}\log B(t, t + \bar{\tau})$, dobili bismo da je L_t linearna transformacija od R_t. Stoga, kako su R_t i L_t slučajne varijable i L_t je linearna transformacija od R_t, L_t i R_t su savršeno korelirane, tj. koeficijent korelacije im je 1.

3.4 Degenerirani dvofaktorski Vasičekov model

U potpoglavlju o kratkoročnim i dugoročnim stopama u dvofaktorskom Vasičekovom modelu pretpostavili smo da je $\delta_2 \neq 0$ i $(\lambda_1 - \lambda_2)\delta_1 + \lambda_{21}\delta_2 \neq 0$. Sada ćemo pokazati da će se, ukoliko jedan od prethodna dva uvjeta nije zadovoljen, dvofaktorski Vasičekov model reducirati na jednofaktorski u kojem su kratkoročna i dugoročna stopa savršeno korelirane.
Pretpostavimo najprije da je $\delta_2 = 0$. Želimo pokazati da kratkoročna stopa R_t dana s (3.6) zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dR_t = (a - bR_t)dt + d\widetilde{W}_{1t}, \tag{3.41}$$

pri čemu ćemo parametre a i b definirati pomoću parametara $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{21}$.
Uočimo najprije da ako su $\delta_1 = \delta_2 = 0$, tada je kratkoročna stopa R_t konstanta pa bi to odgovaralo situaciji u kojoj kratkoročna stopa ostaje nepromijenjena tijekom vremena bez

obzira na promjene u faktorima koji obično utječu na nju. Takav slučaj je rijedak i nezanimljiv jer ne odražava realno ponašanje finacijskih tržišta pa u nastavku pretpostavljamo da je $\delta_1 \neq 0$. Tada najprije vrijedi

$$\begin{aligned} R_t &= \delta_0 + \delta_1 Y_{1t} + \delta_2 Y_{2t} \\ &\overset{\delta_2=0}{=} \delta_0 + \delta_1 Y_{1t}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Sada možemo jednadžbu (3.42) zapisati po R_t pa dobivamo

$$Y_{1t} = \frac{R_t - \delta_0}{\delta_1}. \tag{3.43}$$

Nadalje, deriviranjem izraza (3.42) dobivamo

$$dR_t = \delta_1 dY_{1t} \tag{3.44}$$

pa zajedno s (3.4) i (3.43) imamo

$$\begin{aligned} dR_t &= \delta_1 \left(-\lambda_1 \frac{R_t - \delta_0}{\delta_1} dt + d\widetilde{W}_{1t} \right) \\ &= -\lambda_1 (R_t - \delta_0) dt + \delta_1 d\widetilde{W}_{1t} \\ &= (\lambda_1 \delta_0 - \lambda_1 R_t) dt + \delta_1 d\widetilde{W}_{1t}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Uočimo da je u ovom slučaju $a = \lambda_1 \delta_0$, $b = \lambda_1$ te $\sigma = \delta_1$.
Pretpostavimo sada da je $(\lambda_1 - \lambda_2)\delta_1 + \lambda_{21}\delta_2 = 0$. I u ovom slučaju želimo pokazati da kratkoročna stopa R_t zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dR_t = (a - bR_t)dt + \sigma \widetilde{B}_t, \tag{3.46}$$

pri čemu ćemo ponovno parametre a i b definirati pomoću parametara iz (3.4)-(3.6) te ćemo Brownovo gibanje $\widetilde{B}_t$ definirati pomoću nezavisnih Brownovih gibanja $\widetilde{W}_{1t}$ i $\widetilde{W}_{2t}$ iz (3.4)-(3.5). Deriviranjem izraza (3.6) dobivamo

$$\begin{aligned} dR_t &= \delta_1 dY_{1t} + \delta_2 dY_{2t} \\ &= \delta_1 \left(-\lambda_1 Y_{1t} dt + d\widetilde{W}_{1t} \right) + \delta_2 \left(-\lambda_{21} Y_{1t} dt - \lambda_2 Y_{2t} dt + d\widetilde{W}_{2t} \right) \\ &= -\delta_1 \lambda_1 Y_{1t} dt + \delta_1 d\widetilde{W}_{1t} - \delta_2 \lambda_{21} Y_{1t} dt - \delta_2 \lambda_2 Y_{2t} dt + \delta_2 d\widetilde{W}_{2t} \\ &= -(\delta_1 \lambda_1 + \delta_2 \lambda_{21}) Y_{1t} dt + \delta_1 d\widetilde{W}_{1t} - \delta_2 \lambda_2 Y_{2t} dt + \delta_2 d\widetilde{W}_{2t} \\ &= -\delta_1 \lambda_2 Y_{1t} dt + \delta_1 d\widetilde{W}_{1t} - \delta_2 \lambda_2 Y_{2t} dt + \delta_2 d\widetilde{W}_{2t} \\ &= -\lambda_2 (\delta_1 Y_{1t} + \delta_2 Y_{2t}) dt + \delta_1 d\widetilde{W}_{1t} + \delta_2 d\widetilde{W}_{2t} \\ &= -\lambda_2 (R_t - \delta_0) dt + \delta_1 d\widetilde{W}_{1t} + \delta_2 d\widetilde{W}_{2t} \\ &= (\delta_0 \lambda_2 - \lambda_2 R_t) dt + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \left[\frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} d\widetilde{W}_{1t} + \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} d\widetilde{W}_{2t} \right], \end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku koristili (3.4) i (3.5), u četvrtom jednakost $\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_{21} = \delta_1\lambda_2$ koja nam slijedi iz uvjeta te u sedmom retku (3.6). Sada uočimo da je $a = \delta_0\lambda_2$, $b = \lambda_2$, $\sigma = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ i $\widetilde{B}_t = \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}}\widetilde{W}_{1t} + \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}}\widetilde{W}_{2t}$, pri čemu je $\widetilde{B}_t$ Brownovo gibanje, kao konveksna kombinacija dva nezavisna Brownova gibanja $\widetilde{W}_{1t}$ i $\widetilde{W}_{2t}$.

3.5 Gaussovi faktorski procesi

Kanonski dvofaktorski Vasičekov model možemo zapisati u vektorskoj notaciji kao

$$dY_t = -\Lambda Y_t + d\widetilde{W}_t, \tag{3.47}$$

gdje je

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix}, \ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_2 \end{bmatrix}, \ \widetilde{W}_t = \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{1t} \\ \widetilde{W}_{2t} \end{bmatrix}.$$

Prisjetimo se da su svojstvene vrijednosti matrice B $\lambda_1 > 0$ i $\lambda_2 > 0$. Pokazat ćemo da matrična stohastička diferencijalna jednadžba (3.47) ima rješenje u zatvorenoj formi. Da bismo izveli to rješenje najprije formiramo eksponencijalnu funkciju matrice Λt koja je dana s

$$e^{\Lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Lambda t)^n, \tag{3.48}$$

gdje je $(\Lambda t)^0 = I$ 2×2 matrica identiteta.
Sada navodimo rezultat s dokazom koji će nam biti koristan u koracima u nastavku.

Lema 3.5.1. *Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tada je*

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tada je

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \lambda_{21} t e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

U oba slučaja vrijedi

$$\frac{d}{dt}e^{\Lambda t} = \Lambda e^{\Lambda t} = e^{\Lambda t}\Lambda, \tag{3.51}$$

gdje je derivacija definirana po komponentama te je

$$e^{-\Lambda t} = \left(e^{\Lambda t}\right)^{-1}, \tag{3.52}$$

a $e^{-\Lambda t}$ se dobiva zamjenom λ_1, λ_2 i λ_{21} u formuli (3.49) *s $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ i $-\lambda_{21}$, redom.*

Dokaz. Najprije promotrimo slučaj kada je $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tvrdimo da u tom slučaju vrijedi

$$(\Lambda t)^n = \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ \lambda_{21} t^n \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} & (\lambda_2 t)^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.53}$$

Ova jednadžba trivijalno vrijedi za slučaj $n = 0$ jer je $(\Lambda t)^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sada, matematičkom indukcijom pokazujemo da jednakost (3.53) vrijedi općenito. Pretpostavimo najprije da jednakost (3.53) vrijedi za neki n. Tada u koraku matematičke indukcije dobijemo da je jednakost

$$\begin{aligned} (\Lambda t)^{n+1} &= (\Lambda t)(\Lambda t)^n \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ \lambda_{21} t & \lambda_2 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ \lambda_{21} t^n \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} & (\lambda_2 t)^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^{n+1} & 0 \\ \lambda_{21} t^{n+1} \left(\lambda_1^n + \lambda_2 \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) & (\lambda_2 t)^{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^{n+1} & 0 \\ \lambda_{21} t^{n+1} \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} & (\lambda_2 t)^{n+1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

što je jednako (3.53), ukoliko n zamijenimo s $n + 1$. Time smo pokazali da (3.53) vrijedi za svaki n. Nakon toga imamo da je

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Lambda t)^n \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_1 t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_2 t)^n \right) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda_2 t)^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

čime smo pokazali da vrijedi (3.49).
Sada promatramo slučaj kad je $\lambda_1 = \lambda_2$ i tvrdimo da je

$$(\Lambda t)^n = \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ n \lambda_{21} \lambda_1^{n-1} t^n & (\lambda_1 t)^n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.54}$$

Ponovno, jednadžba vrijedi za slučaj $n = 0$ te ćemo matematičkom indukcijom pokazati da vrijedi za svaki n. Pretpostavimo da (3.54) vrijedi za neki n. U koraku matematičke indukcije imamo da je

$$\begin{aligned}
(\Lambda t)^{n+1} &= (\Lambda t)(\Lambda t)^n \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 \\ \lambda_{21} t & \lambda_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^n & 0 \\ n\lambda_{21}\lambda_1^{n-1} t^n & (\lambda_1 t)^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^{n+1} & 0 \\ \left(\lambda_{21}\lambda_1^n + n\lambda_{21}\lambda_1^n\right) t^{n+1} & (\lambda_1 t)^{n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda_1 t)^{n+1} & 0 \\ (n+1)\,\lambda_{21}\lambda_1^n t^{n+1} & (\lambda_1 t)^{n+1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

što je jednako (3.54), ukoliko n zamijenimo s $n+1$. Nakon što smo pokazali da (3.54) vrijedi za svaki n, imamo da je

$$e^{\Lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\Lambda t)^n = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda_1 t)^n & 0 \\ \lambda_{21} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\lambda_1^{n-1} t^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda_1 t)^n \end{bmatrix}, \tag{3.55}$$

ali, također vrijedi

$$\lambda_{21} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}\lambda_1^{n-1} t^n = \lambda_{21} \frac{d}{d\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\lambda_1 t)^n = \lambda_{21} \frac{d}{d\lambda_1} e^{\lambda_1 t} = \lambda_{21} t e^{\lambda_1 t}.$$

Zamjenimo li dobiveno u jednadžbi (3.55), dokazali smo da vrijedi (3.50).
Sada dokazujemo da vrijedi (3.51) i (3.52).
U slučaju kada je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, imamo

$$\frac{d}{dt} e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\right) & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

i

$$e^{-\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) & e^{-\lambda_2 t} \end{bmatrix},$$

dok za $\lambda_1 = \lambda_2$, vrijedi

$$\frac{d}{dt} e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \lambda_{21}(1 + \lambda_1 t) e^{\lambda_1 t} & \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

i

$$e^{-\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 \\ -\lambda_{21} t e^{-\lambda_1 t} & e^{-\lambda_1 t} \end{bmatrix}.$$

Da bismo provjerili da vrijede (3.51) i (3.52), potrebno je pomnožiti prethodne matrice. □

Sada ćemo jednadžbu (3.47) koristiti za računanje

$$d(e^{\Lambda t}Y_t) = e^{\Lambda t}(\Lambda Y_t dt + dY_t) = e^{\Lambda t} d\widetilde{W}(t).$$

Integracijom od 0 do t dobivamo da je

$$e^{\Lambda t}Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\Lambda u} d\widetilde{W}(u)$$

te iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{-\Lambda t}Y_0 + e^{-\Lambda t}\int_0^t e^{\Lambda u} d\widetilde{W}(u) \\ &= e^{-\Lambda t}Y_0 + \int_0^t e^{-\Lambda(t-u)} d\widetilde{W}(u). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Ukoliko je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, jednadžba (3.56) se može napisati po komponentama kao

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= e^{-\lambda_1 t}Y_{10} + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-u)} d\widetilde{W}_1(u), \\ Y_{2t} &= \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)Y_{10} + e^{-\lambda_2 t}Y_{20} \\ &\quad + \frac{\lambda_{21}}{\lambda_1 - \lambda_2}\int_0^t \left(e^{-\lambda_1(t-u)} - e^{-\lambda_2(t-u)}\right) d\widetilde{W}_1(u) \\ &\quad + \int_0^t e^{-\lambda_2(t-u)} d\widetilde{W}_2(u). \end{aligned}$$

S druge strane, ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tada je oblik jednadžbe (3.56) po komponentama dan s

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= e^{-\lambda_1 t}Y_{10} + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-u)} d\widetilde{W}_1(u) \\ Y_{2t} &= -\lambda_{21} t e^{-\lambda_1 t}Y_{10} + e^{-\lambda_1 t}Y_{20} \\ &\quad - \lambda_{21}\int_0^t (t-u)\, e^{-\lambda_1(t-u)} d\widetilde{W}_1(u) + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-u)} d\widetilde{W}_2(u). \end{aligned}$$

U [3] možemo pronaći dokaz da su Itôvi integrali neslučajnih integranada normalno distribuirani, a kako su Y_{1t} i Y_{2t} jednaki afinim transformacijama Itôvih integrala neslučajnih integranada, slijedi da su i Y_{1t} i Y_{2t} normalno distribuirane slučajne varijable kao afina transformacija normalno distribuiranih slučajnih varijabli.

3.6 Kalibracija dvofaktorskog Vasičekovog modela

U ovom potpoglavlju promatrat ćemo kanonski dvofaktorski Vasičekov model dan s (3.4) - (3.6), gdje ćemo jednadžbu kamatne stope (3.6) zamijeniti s

$$R_t = \delta_{0t} + \delta_1 Y_{1t} + \delta_2 Y_{2t}, \tag{3.57}$$

pri čemu su δ_1 i δ_2 konstante, a δ_{0t} neslučajna funkcija vremena. Pretpostavimo da za svaki T postoji obveznica bez kupona koja dospijeva u trenutku T. Prisjetimo se, cijena takve obveznice u trenutku $t \in [0, T]$ dana je s

$$B(t,T) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[e^{-\int_t^T R_u du} | \mathcal{F}_t\right].$$

Budući da su procesi Y_{1t} i Y_{2t} Markovljevi, postoji funkcija $f(t, T, y_1, y_2)$ takva da je $B(t, T) = f(t, T, Y_{1t}, Y_{2t})$. Uočimo da za razliku od poglavlja 3.2, ovdje navodimo ovisnost funkcije f o vrijednosti T budući da ćemo uzeti u obzir više od jedne vrijednosti T. Funkcija $f(t, T, y_1, y_2)$ je funkcija afinog prinosa, odnosno forme

$$f(t, T, y_1, y_2) = e^{-y_1 C_1(t,T) - y_2 C_2(t,T) - A(t,T)}.$$

Pretpostavimo da je T fiksan te izvedimo sustav diferencijalnih jednadžbi za $\frac{d}{dt}C_1(t, T)$, $\frac{d}{dt}C_2(t, T)$ i $\frac{d}{dt}A(t, T)$.

Prisjetimo se da diskontni faktor $D_t = e^{-\int_0^t R_u du}$ zadovoljava $dD_t = -R_t D_t dt$ te da je diskontirana cijena obveznice $D_t B(t, T)$ martingal s obzirom na $\widetilde{\mathbb{P}}$. Kao i u poglavlju 3.2 imamo da je

$$\begin{aligned} d(D_t B(t,T)) &= d(D_t f(t, T, Y_{1t}, Y_{2t})) \\ &= -R_t D_t f(t, T, Y_{1t}, Y_{2t}) dt + D_t df(t, T, Y_{1t}, Y_{2t}) \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} df(t, T, Y_{1t}, Y_{2t}) = {} & [f_t(t, T, Y_{1t}, Y_{2t}) - f_{y_1}(t, T, Y_{1t}, Y_{2t})(-\lambda_1 Y_{1t}) + \\ & + f_{y_2}(t, T, Y_{1t}, Y_{2t})(-\lambda_{21} Y_{1t} - \lambda_2 Y_{2t}) + \frac{1}{2} f_{y_1 y_1}(t, T, Y_{1t}, Y_{2t}) + \\ & + \frac{1}{2} f_{y_2 y_2}(t, T, Y_{1t}, Y_{2t})] dt + D_t [f_{y_1}(t, T, Y_{1t}, Y_{2t}) d\widetilde{W}_1 + f_{y_2}(t, T, Y_{1t}, Y_{2t}) d\widetilde{W}_2]. \end{aligned}$$

Ukoliko sada izjednačimo član uz dt s nulom dobivamo sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, analognu jednadžbi (3.23)

$$\begin{aligned} &-(\delta_{0t} + \delta_1 y_1 + \delta_2 y_2) f(t, T, y_1, y_2) + f_t(t, T, y_1, y_2) \\ &\qquad - \lambda_1 y_1 f_{y_1}(t, T, y_1, y_2) - (\lambda_{21} y_1 + \lambda_2 y_2) f_{y_2}(t, T, y_1, y_2) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2} f_{y_1 y_1}(t, T, y_1, y_2) + \frac{1}{2} f_{y_2 y_2}(t, T, y_1, y_2) = 0. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Nadalje, znamo da je $f(t,T,y_1,y_2) = e^{-y_1C_1(t,T)-y_2C_2(t,T)-A(t,T)}$ pa dobivamo

$$\begin{aligned}
f_t(t,T,y_1,y_2) &= \left[y_1C_1^{'}(t,T) + y_2C_2^{'}(t,T) + A^{'}(t,T)\right] f(t,T,y_1,y_2),\\
f_{y_1}(t,T,y_1,y_2) &= -C_1(t,T)f(t,T,y_1,y_2),\\
f_{y_2}(t,T,y_1,y_2) &= -C_2(t,T)f(t,T,y_1,y_2),\\
f_{y_1y_1}(t,T,y_1,y_2) &= C_1^2(t,T)f(t,T,y_1,y_2),\\
f_{y_1y_2}(t,T,y_1,y_2) &= C_1(t,T)C_2(t,T)f(t,T,y_1,y_2),\\
f_{y_2y_2}(t,T,y_1,y_2) &= C_2^2(t,T)f(t,T,y_1,y_2).
\end{aligned}$$

Sada parcijalna diferencijalna jednadžba (3.58) postaje

$$\begin{aligned}
\Big[(-\delta_{0t} - \delta_1y_1 - \delta_2y_2) + \left(y_1C_1^{'}(t,T) + y_2C_2^{'}(t,T) + A^{'}(t,T)\right) + \lambda_1y_1C_1(t,T)\\
+ (\lambda_{21}y_1 + \lambda_2y_2)C_2(t,T) + \frac{1}{2}C_1^2(t,T) + \frac{1}{2}C_2^2(t,T)f(t,T,y_1,y_2) = 0.
\end{aligned}$$

Grupirajući članove po varijablama y_1 i y_2 dobivamo

$$\begin{aligned}
-\delta_1 + C_1^{'}(t,T) + \lambda_1C_1(t,T) + \lambda_{21}C_2(t,T) &= 0\\
-\delta_2 + C_2^{'}(t,T) + \lambda_2C_2(t,T) &= 0.\\
-\delta_{0t} + A^{'}(t,T) + \frac{1}{2}C_1^2(t,T) + \frac{1}{2}C_2^2(t,T) &= 0
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Konačno, dobivamo sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
C_1^{'}(t,T) &= -\lambda_1C_1(t,T) - \lambda_{21}C_2(t,T) + \delta_1\\
C_2^{'}(t,T) &= -\lambda_2C_2(t,T) + \delta_2\\
A^{'}(t,T) &= -\frac{1}{2}C_1^2(t,T) - \frac{1}{2}C_2^2(t,T) + \delta_{0t}.
\end{aligned}$$

Koristeći sada terminalni uvjet $C_1(T,T) = C_2(T,T) = 0$, pronađimo rješenje jednadžbi za $C_1(t,T)$ i $C_2(t,T)$. Za $C_2(t,T)$, iz gornje diferencijalne jednadžbe dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda_2t}C_2(t,T)\right) = -e^{-\lambda_2t}\delta_2.$$

Integriranjem od t do T dobivamo

$$0 - e^{-\lambda_2t}C_2(t,T) = -\delta_2\int_t^T e^{-\lambda_2s}ds = \frac{\delta_2}{\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2T} - e^{-\lambda_2t}\right).$$

Slijedi da je

$$C_2(t,T) = \frac{\delta_2}{\lambda_2}\left(1 - e^{-\lambda_2(T-t)}\right). \tag{3.60}$$

Slično, za $C_1(t,T)$ dobivamo

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda_1 t}C_1(t,T)\right) = (\lambda_{21}C_2(t,T) - \delta_1)e^{-\lambda_1 t} = \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 T + (\lambda_2-\lambda_1)t}) - \delta_1 e^{-\lambda_1 t}.$$

Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, integriranjem od t do T dobivamo

$$-e^{-\lambda_1 t}C_1(t,T) = -\frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 T} - e^{-\lambda_2 T}\right) - \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 T}\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} - e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 T} - e^{-\lambda_1 t})$$

pa je

$$C_1(t,T) = \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1(T-t)} - 1\right) + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2}\frac{e^{-\lambda_1(T-t)} - e^{-\lambda_2(T-t)}}{\lambda_2-\lambda_1} - \frac{\delta_1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1(T-t)} - 1). \tag{3.61}$$

Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$, tada dobivamo

$$-e^{-\lambda_1 t}C_1(t,T) = -\frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 T} - e^{-\lambda_1 t}\right) - \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 T}(T-t) + \frac{\delta_1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 T} - e^{-\lambda_1 t}),$$

iz čega slijedi

$$C_1(t,T) = \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1^2}\left(e^{-\lambda_1(T-t)} - 1\right) + \frac{\lambda_{21}\delta_2}{\lambda_1}e^{-\lambda_1(T-t)}(T-t) - \frac{\delta_1}{\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1(T-t)} - 1\right). \tag{3.62}$$

Nadalje, koristeći terminalni uvjet $A(T,T) = 0$ slijedi da je

$$A(t,T) = \int_t^T \left[-\frac{1}{2}C_1^2(u,T) - \frac{1}{2}C_2^2(u,T) + \delta_{0u}\right]du. \tag{3.63}$$

Kombiniranjem izraza (3.60) - (3.63) dobivamo funkciju $f(t,T,Y_{1t},Y_{2t})$, odnosno cijenu obveznice bez kupona koja dospijeva u trenutku T, označenu s $B(t,T)$.
Uočimo da se (3.61) i (3.62) podudaraju s (3.32) i (3.33). Razlika je u tome što u (3.32) i (3.33) cijena obveznice bez kupona ovisi o t i T samo kroz relativno dospijeće τ. Nadalje, uočimo da se (3.63) i (3.34) razlikuju po tome što je kod (3.63) konstanta δ_0 zamijenjena s neslučajnom funkcijom vremena δ_{0t}.

3.7 Usporedba jednofaktorskih i dvofaktorskih modela

Kako smo na kraju poglavlja 3.3 došli do zaključka da su u jednofaktorskom Vasičekovom modelu kratkoročna stopa R_t i dugoročna stopa L_t savršeno korelirane, odnosno koeficijent korelacije iznosi 1, možemo zaključiti da su dvofaktorski i ostali višefaktorski modeli prihvatljiviji u odnosu na jednofaktorske. Naime, u stvarnom svijetu, činjenica da su dugoročne i kratkoročne kamatne stope savršeno korelirane nije prihvatljiva.
Kao što smo već spomenuli, jednofaktorski modeli mogu i dalje biti korisni kod proizvoda čija cijena u svakom trenutku ovisi o jednoj kamatnoj stopi te u svrhe upravljanja rizikom kada su stope koje utječu na isplatu u svakom trenutku bliske.
Nadalje, u slučajevima u kojima korelacija igra važniju ulogu ili kada je potrebna veća preciznost, potrebno je koristiti model koji omogućuje realističnije prikaze korelacije. To se može postići višefaktorskim modelima, a posebno dvofaktorskim pa je prihvatljivije koristiti dvofaktorske modele u odnosu na jednofaktorske.
Još jedan od ekonomskih pokazatelja zašto je bolje koristiti dvofaktorske modele jest krivulja ročne strukture kamatne stope. U [1] možemo pronaći da dvofaktorski Vasičekov model obuhvaća veću klasu krivulja podijeljenih po oblicima u odnosu na jednofaktorski.
U jednofaktorskom Vasičekovom modelu mogu se postići normalni (rastući), inverzni (padajući) i grbavi (zakrivljeni s jedinstvenim maksimumom) oblici krivulja ročne strukture kamatne stope. Nekoliko dodatnih oblika krivulja kao što su *dipped* i *hump-die*, koji nisu ostvarivi u jednofaktorskom obliku, postaju ostvarivi u dvofaktorskom.
Kako su krivulje ročne strukture kamatne stope u Vasičekovom modelu glatke, njihov oblik možemo analizirati razmatranjem derivacija. Svaka promjena predznaka derivacije (od strogo pozitivne do strogo negativne i obrnuto) odgovara lokalnom ekstremu. Vrsta promjene predznaka ($+ \to -, - \to +$) određuje vrstu ekstrema (grba i naklon).
Osnovne oblike i nazive krivulja ročne strukture kamatne stope dvofaktorskog Vasičekovog modela navest ćemo prema tipovima Vasičekovog modela. Postoji Vasičekov dvofaktorski model odvojene skale, model referentne skale i model kritične skale. Više o ovim modelima možete pronaći u [1].
U slučaju modela odvojene skale mogu se postići normalni, inverzni, *humped* i *dipped* model te *HD*, *DH* i *HDH* model. Kod modela referentne skale mogući oblici su normalni, inverzni, *humped*, *dipped* i *HD*, dok kod modela kritične skale još uz sve navedene mogu se postići i *DHD* i *HDHD* oblik. Kod modela *HD*, *DH*, *HDH*, *DHD* i *HDHD* slovo *"H"* označava grbu, a *"D"* naklon pa tako oblik krivulje *"HDH"* odgovara krivulji s dva lokalna maksimuma (grbe) isprepletena jednim lokalnim minimumom (naklonom).

Bibliografija

[1] M. Keller-Ressel. The classification of term structure shapes in the two-factor vasicek model – a total positivity approach. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 24(5):3–7, 2021.

[2] Steven E Shreve. *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, volume 11. Springer, 2004.

[3] Zoran Vondraček. Financijsko modeliranje. `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/fm-sadrzaj.pdf`, 2008. [Zadnji pristup, 01. lipanj 2024.].

Sažetak

Glavna ideja ovog rada bila je uvođenje i analiza dvofaktorskog Vasičekovog modela kamatnih stopa. Cilj je bio usporediti dvofaktorske modele s jednofaktorskim, predstaviti dvofaktorski Vasičekov model te izvesti formulu za cijenu obveznica bez kupona u tom modelu. U prvom poglavlju upoznali smo se s financijskim pojmovima potrebnima za daljnji rad. Uveli smo pojmove Brownovog gibanja, Itôvog integrala, Itôvog procesa i Itôve formule, a zatim smo napravili uvod u cijene obveznica bez kupona. Ukratko smo opisali Hull-Whiteov model kamatnih stopa, budući da je verzija tog modela s konstantnim koeficijentima upravo dvofaktorski Vasičekov model, koji je glavna tema ovog rada. U drugom poglavlju dana je motivacija za uvođenje višefaktorskih modela kamatnih stopa. Treće poglavlje bilo je posvećeno Vasičekovom modelu. Najprije smo dvofaktorski model definirali sustavom stohastičkih diferencijalnih jednadžbi nakon čega smo ga reducirali na kanonski dvofaktorski Vasičekov model. Zatim smo izveli formulu za cijenu obveznica bez kupona u kanonskom modelu. Nadalje, izveli smo sustav stohastičkih diferencijalnih jednadžbi za kratkoročnu i dugoročnu stopu. U nastavku smo uveli degenerirani Vasičekov model, Gaussovske faktorske procese te smo proveli kalibraciju kanonskog Vasičekovog modela, gdje smo u jednadžbi kamatne stope konstantu δ_0 zamijenili neslučajnom funkcijom vremena δ_{0t}. Rad smo završili usporedbom jednofaktorskih i dvofaktorskih modela te naveli zašto je prihvatljivije koristiti dvofaktorski Vasičekov model u odnosu na jednofaktorski.

Summary

The main objective of this thesis is to give a complete overview of the implementation and analysis of the two-factor Vasicek interest rate model. The main goal was to compare two-factor models with the single-factor model, introduce the two-factor Vasicek model and derive the formula for the price of zero-coupon bonds in that model. In the first chapter we introduce the financial terms which are needed for further presentation. First, we recall the notions of Brownian motion, Itô's integral, Itô's process and Itô's formula, and afterwards we consider the zero-coupon bond prices. Hull-White interest rate model was briefly described, since the version of that model with constant coefficients is exactly the two-factor Vasicek model, which was the objective of this presentation.
In the second chapter the motivation was given for implementing multi-factor interest rate model. The third chapter was dedicated to the Vasicek model. First, the two-factor model was defined by the system of stochastic differential equations after which it was reduced to the canonical two-factor Vasicek model. Furthermore, the formula was derived for the price of zero-coupon bond in the canonical model. Next, a system of stochastic differential equations was derived for short-term and long-term rates. Subsequently, the degenerate Vasicek model, and Gaussian factor processes were introduced and the canonical Vasicek model, where we replaced the constant δ_0 in the interest rate equation with a non-random function of time δ_{0t}. In the concluding part of this thesis, single-factor model and two-factor model were compared.

Životopis

Rođena sam 21.03.2000.godine u Zagrebu. Osnovnu školu završila sam u Donjoj Stubici, a potom 2014.godine upisujem Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Zaboku. Završetkom srednje škole, u Rijeci, na Fakultetu za matematiku upisujem Preddiplomski sveučilišni studij matematike te 2021.godine stječem akademski naziv prvostupnika matematike. Nakon završetka preddiplomskog studija u Rijeci, iste godine upisujem Diplomski studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, smjer Financijska i poslovna matematika. Tijekom druge godine diplomskog studija zaposlila sam se kao student u struci kako bih se upoznala sa svijetom rada te sam tamo zaposlena do danas.