SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Litera

ELEMENTARNE NEJEDNAKOSTI I PRIMJENE U EKONOMIJI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Suvoditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Kojić

Zagreb, srpanj, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentorima, doc. dr. sc. Matiji Bašiću i izv. prof. dr. sc. Vedranu Kojiću na strpljenju, pomoći i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada.
Veliko hvala mojoj obitelji, zaručniku Danielu i prijateljima na podršci i razumijevanju koje su mi pružali tijekom cijelog studija.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **2**

1 Nejednakosti **3**
1.1 Aritmetičko-geometrijska nejednakost 3
1.2 Težinska AG nejednakost 8
1.3 Jensenova nejednakost 11
1.4 Bernoullijeva nejednakost 13

2 Primjene u ekonomiji **18**
2.1 Maksimizacija korisnosti potrošača uz budžetsko ograničenje 18
2.2 Jednostavne i složene kamate 28

3 Metodička primjena **32**
3.1 Radionica optimizacije 32
3.2 Radionica kamate 36

4 Zadaci s natjecanja **38**
4.1 Zadaci s AG nejednakosti 38
4.2 Zadaci s Jensenovom nejednakosti 42
4.3 Zadaci s Bernoullijevom nejednakosti 43

Bibliografija **48**

Uvod

Elementarne nejednakosti predstavljaju važan alat u matematici, koji nalazi široku primjenu u različitim područjima matematike pa tako i u financijskoj matematici. U ovom radu istaknut ćemo nekoliko nejednakosti koje su posebno korisne za učenike koji sudjeluju na natjecanjima te koje imaju široku primjenu u ekonomiji, a to su: aritmetičko-geometrijska (AG) nejednakost, težinska aritmetičko-geometrijska nejednakost, Jensenova nejednakost i Bernoullijeva nejednakost. Osim u dokazivanju drugih nejednakosti, elementarne nejednakosti možemo primijeniti i u rješavanju nekih optimizacijskih problema.

Cilj rada je riješiti niz optimizacijskih problema metodom nejednakosti. Posebna pozornost će biti posvećena određenim problemima u ekonomiji te njihovoj prilagodbi za nastavu matematike u srednjoj školi.

U radu su detaljno obrađene navedene nejednakosti, naglašavajući njihovu praktičnu primjenu u zadacima koje možemo pronaći u knjigama i udžbenicima te u zadacima s različitih natjecanja. Posebna pažnja posvećena je problemu optimizacije koji je važan koncept za mikroekonomiju. Efikasnost nejednakosti istaknut ćemo na modelu maksimizacije korisnosti potrošača uz dano budžetsko ograničenje. U navedenom modelu potrebno je odrediti košaru dobara koja maksimizira korisnost (ili zadovoljstvo potrošača) modeliranu funkcijom više varijabli uz linearno budžetsko ograničenje. Postupak maksimizacije korisnosti prikazat ćemo na primjeru Cobb-Douglasove i CES funkcije korisnosti za dvije varijable.

Problemi optimizacije najčešće se rješavaju pomoću diferencijalnog računa u kojem se provjeravaju nužni i dovoljni uvjeti za postizanje ekstrema koji su često netrivijalni te se zbog toga primjena nejednakosti ističe kao elegantnija metoda za rješavanje problema.

Dodatno, u radu su prikazani jednostavni i složeni kamatni račun, koji su neizostavan dio financijske matematike te se obrađuju u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Naglasak je stavljen na usporedbu ukupnih kamata izračunatih po jednostavnom i složenom kamatnom računu.

U radu su navedene dvije radionice, radionica o optimizaciji korisnosti potrošača i radionica o jednostavnim i složenim kamatama, koje su prilagođene za učenike srednjih škola te dodatno ilustriraju kako pomoći učenicima da steknu dublje razumijevanje financijskih koncepata na primjerima iz svakodnevnog života.

Poglavlje 1

Nejednakosti

U matematici se često koristimo različitim nejednakostima kako bismo riješili neke algebarske probleme. U ovome poglavlju istaknut ćemo četiri elementarne nejednakosti, a to su aritmetičko-geometrijska i Bernoullijeva nejednakost te težinska aritmetičko-geometrijska i Jensenova nejednakost, čije primjene nalazimo i u ekonomiji. Uz dokaz svake od navedenih nejednakosti, u ovom poglavlju ćemo prikazati i primjer zadatka u kojima se koriste navedene nejednakosti.

1.1 Aritmetičko-geometrijska nejednakost

Aritmetičko-geometrijska nejednakost, skraćeno AG nejednakost, jedna je od najpoznatijih algebarskih nejednakosti. Riječ je o nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine koja se koristi prilikom rješavanja niza matematičkih problema.

Definicija 1.1.1. ***Aritmetička sredina (prosjek)*** *je srednja vrijednost koja se dobiva zbrajanjem vrijednosti članova skupine i dijeljenjem zbroja s brojem pribrojnika.*
Odnosno, za realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ te prirodni broj $n \geq 2$ definiramo aritmetičku sredinu formulom

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \tag{1.1}$$

Definicija 1.1.2. ***Geometrijska sredina*** *je srednja vrijednost koja je n-ti korijen umnoška n zadanih pozitivnih realnih vrijednosti.*
Odnosno, za realne nenegativne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ te prirodni broj $n \geq 2$ definiramo geometrijsku sredinu formulom

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \tag{1.2}$$

Teorem 1.1.3. ***(Aritmetičko-geometrijska nejednakost)*** *Neka je zadano n, $n \geq 2$, realnih nenegativnih brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tada vrijedi nejednakost*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \tag{1.3}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Za AG nejednakost postoje razni dokazi, a ovdje su navedena dva. Jedan od poznatijih dokaza je dokaz u kojem se koristi princip matematičke indukcije. Dokaz je preuzet iz (15).

Dokaz. Dokaz se provodi pomoću matematičke indukcije.
Za $n = 2$ nejednakost 1.3 postaje

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

što je ekvivalentno s

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0.$$

Ova nejednakost je očito točna. Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.
Pretpostavimo da je nejednakost 1.3 točna za neki $n = k$, odnosno da vrijedi

$$A_k \geq G_k.$$

Tada je

$$A = \frac{x_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \geq (x_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{k}} = G.$$

Kako je

$$\begin{aligned} A_k + A &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} + \frac{x_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} \\ &= \frac{(k+1)A_{k+1} + (k-1)A_{k+1}}{k} = 2A_{k+1}, \end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{2}(A_k + A) \geq (A_k A)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (G_k G)^{\frac{1}{2}} = (G_k^k G^k)^{\frac{1}{2k}} \\ &= (G_k^k x_{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}} \\ &= (G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1})^{\frac{1}{2k}}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$A_{k+1}^{2k} \geq G_{k+1}^{k+1} A_{k+1}^{k-1},$$

odnosno,

$$A_{k+1} \geq G_{k+1}.$$

Dakle, prema principu matematičke indukcije vrijedi nejednakost 1.3.

Dokažimo sada da jednakost u 1.3 vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, onda u 1.3 vrijedi jednakost.
Obratno, pokažimo da ako u 1.3 vrijedi jednakost, onda je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Pretpostavimo da su barem dva broja od brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ različita. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x_1 \neq x_2$. Tada je

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1+x_2}{2} + x_3 + \ldots x_n}{n} \\ &\geq \left[\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 x_3 \ldots x_n\right]^{\frac{1}{n}} \\ &> (x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}},\end{aligned}$$

jer vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2},$$

za $x_1 \neq x_2$.
Time je dokaz završen. □

Nejednakost 1.3 moguće je dokazati i pomoću principa Cauchyjeve indukcije. U ovoj metodi tvrdnje se ne dokazuju korak po korak, već se neke preskoče te se kasnije vraća na njih. Dokaz je preuzet iz (10)

Dokaz. Dokaz pomoću principa Cauchyjeve indukcije.
Za $n = 2$, nejednakost 1.3 je ekvivalenta nejednakosti

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0 \quad (1.4)$$

Posljednja nejednakost u 1.4 je očito točna, pa je točna i nejednakost 1.3 za $n = 2$. Jednakost u 1.3 vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.
Ako nejednakost 1.3 vrijedi za neki broj $n \geq 2$, onda vrijedi i za broj $2n$. Naime,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}) \\ &\geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + n\sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}} \\ &\geq n \cdot 2\sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}} \\ &\geq \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.\end{aligned} \quad (1.5)$$

Kako nejednakost 1.3 vrijedi za $n = 2$, iz 1.5 slijedi da nejednakost 1.3 vrijedi i za svaki broj n oblika $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$. Odnosno, 1.3 vrijedi za svaki n koji je potencija broja 2.
Potrebno je još pokazati da ako 1.3 vrijedi za neki prirodni broj n, onda vrijedi i za njegov prethodnik, odnosno za broj $n - 1$.
Neka je

$$s = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}.$$

Kako 1.3 vrijedi za n brojeva, neka je

$$x_n = \frac{s}{n-1}.$$

Iz pretpostavke Cauchyjeve indukcije slijedi

$$s + \frac{s}{n-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{s}{n-1} \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \frac{s}{n-1}}. \tag{1.6}$$

Kako je

$$s + \frac{s}{n-1} = \frac{sn - s + s}{n-1} = \frac{n}{n-1} s,$$

nejednakost 1.6 je tada ekvivalentna s

$$\frac{n}{n-1} s \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \frac{s}{n-1}}. \tag{1.7}$$

Dijeljenjem obje strane gornje nejednakosti s n te rastavljanjem korijena umnoška na umnožak korijena, nejednakost 1.7 postaje

$$\frac{s}{n-1} \cdot \sqrt[n]{\frac{n-1}{s}} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}.$$

Gornja nejednakost je ekvivalenta s

$$\sqrt[n]{s^{n-1}} \geq \frac{n-1}{\sqrt[n]{n-1}} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}. \tag{1.8}$$

Potenciranjem nejednakosti 1.8 s eksponentom $\frac{n}{n-1}, n > 1$, nejednakost postaje

$$s \geq (n-1) \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}},$$

odnosno, uvrštavanjem $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}$, slijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}, \tag{1.9}$$

što je i trebalo pokazati.
Ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}$ nejednakost 1.7 postaje

$$\frac{(n-1)x_1}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1^{n-1}}$$

u kojoj očito vrijedi jednakost.
Ako u 1.9 vrijedi jednakost, onda jednakost mora vrijediti i u nejednakosti 1.7, a po pretpostavci indukcije tada mora vrijediti i $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{s}{n-1}$. □

U sljedećem primjeru ćemo koristiti AG nejednakost dva puta kako bismo dokazali danu nejednakost.

Primjer 1.1.4. *Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Rješenje. Prvo raspišemo lijevu stranu kao

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{a^4 + c^4}{2}.$$

Sada možemo primijeniti AG nejednakost iz čega slijedi da je:

$$\frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{a^4 + c^4}{2} \geq \sqrt{a^4b^4} + \sqrt{b^4c^4} + \sqrt{a^4c^4}.$$

Kako je riječ o pozitivnim realnim brojevima vrijedi

$$\sqrt{a^4b^4} + \sqrt{b^4c^4} + \sqrt{a^4c^4} = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2.$$

Raspišimo izraz $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2$:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} + \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} + \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{2},$$

te ponovno primijenimo AG nejednakost na pozitivne realne brojeve a, b, c

$$\begin{aligned}\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} + \frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} + \frac{a^2c^2 + b^2c^2}{2} &\geq \sqrt{a^4b^2c^2} + \sqrt{a^2b^4c^2} + \sqrt{a^2b^2c^4} \\ &= a^2bc + ab^2c + abc^2.\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

U sljedećem zadatku prikazat ćemo primjenu AG nejednakosti u zadacima s maksimizacijom zadanih izraza.

Zadatak 1.1.5. *Pronađite maksimum izraza* $2 - a - \frac{1}{2a}$ *za sve pozitivne brojeve* a.

Rješenje. Zadani izraz možemo zapisati kao

$$2 - \left(a + \frac{1}{2a}\right).$$

Da bismo maksimizirali cijeli izraz potrebno je minimalizirati izraz $a + \frac{1}{2a}$. Kako je a pozitivan broj, slijedi da je i $\frac{1}{2a}$ pozitivan broj. To znači da na a i $\frac{1}{2a}$ možemo primijeniti AG nejednakost.

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{a + \frac{1}{2a}}{2} &\geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{2a}}, \\ a + \frac{1}{2a} &\geq \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Odnosno, izraz $a + \frac{1}{2a}$ postiže svoj minimum $\sqrt{2}$ ako i samo ako je $a = \frac{1}{2a}$, odnosno ako je $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Uvrštavajući $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u početni izraz, slijedi da maksimum iznosi $2 - a - \frac{1}{2a} = 2 - \sqrt{2}$.

1.2 Težinska AG nejednakost

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine može se dodatno poopćiti na slučaj težinske nejednakosti.

Teorem 1.2.1. *Neka je* $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ *te* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. *Tada vrijedi nejednakost*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}. \tag{1.10}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.

Dokaz. Ako su λ_1, λ_2 pozitivni racionalni brojevi, onda postoje prirodni brojevi m, n, $(m < n)$, takvi da je $\lambda_1 = \frac{m}{n}$ i $\lambda_2 = \frac{n-m}{n}$. Iz AG nejednakosti 1.1 slijedi:

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= \frac{m x_1 + (n-m) x_2}{n} \\ &= \frac{\overbrace{(x_1 + x_1 + \cdots + x_1)}^{m \text{ puta}} + \overbrace{(x_2 + x_2 + \cdots + x_2)}^{n\text{-}m \text{ puta}}}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{x_1^m x_2^{n-m}} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Ako su λ_1, λ_2 realni brojevi, onda postoje dva niza racionalnih brojeva $(r_k)_{k\geq 0}$ i $(s_k)_{k\geq 0}$ za koje vrijedi $r_k \to \lambda_1$, $s_k \to \lambda_2$ i $r_k + s_k = 1$, pa za svaki $k \in \mathbb{N}$, zbog 1.11 vrijedi

$$r_k x_1 + s_k x_2 \geq x_1^{r_k} x_2^{s_k}. \tag{1.12}$$

Puštanjem k u beskonačnost i prelaskom na limes, iz 1.12 slijedi 1.11. $\square$

Teorem vrijedi i za bilo koji konačan broj pozitivnih realnih brojeva.

Teorem 1.2.2. *Neka je n prirodni broj. Ako su $x_1, \ldots, x_n$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Tada vrijedi nejednakost*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz se može pronaći u (18).

U sljedećem primjeru primijenit ćemo težinsku AG nejednakost kako bismo dokazali danu nejednakost.

Primjer 1.2.3. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi*

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

Rješenje. Primjenom AG nejednakosti na pozitivne brojeve a^2 i b^2, b^2 i c^2, te a^2 i c^2 dobivamo redom:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab,$$
$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc,$$
$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca.$$

Zbrajanjem prethodnih nejednakosti slijedi

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

što je ekvivalentno s

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca).$$

Prethodna nejednakost je ekvivalentna s

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac),$$

odnosno vrijedi

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.$$

Kako je $a+b+c=3$, iz posljednje nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a+b+c}{3} \\ &\geq \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \\ &= \frac{b}{a+b+c}\cdot a + \frac{c}{a+b+c}\cdot b + \frac{a}{a+b+c}\cdot c, \end{aligned}$$

odakle, zbog $\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}=1$, primjenom težinske AG nejednakosti slijedi

$$1 \geq a^{\frac{b}{a+b+c}}\cdot b^{\frac{c}{a+b+c}}\cdot c^{\frac{a}{a+b+c}} = (a^b b^c c^a)^{\frac{1}{a+b+c}}.$$

Dakle, vrijedi nejednakost

$$1 \geq \sqrt[3]{a^b b^c c^a},$$

što je ekvivalentno s

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c=1$.

1.3 Jensenova nejednakost

Dosad navedene nejednakosti mogu se generalizirati na Jensenovu nejednakost.

Definicija 1.3.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna ako za svaki izbor točaka $x, y \in I$ i svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{1.13}$$

Ako u 1.13 vrijedi obrnuta nejednakost, onda je funkcija f konkavna.

Teorem 1.3.2. *Neka je n prirodni broj.*

1. *Ako je funkcija f konveksna funkcija na intervalu $[a, b]$, onda za sve $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ takve da je $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ i za svaki $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ vrijedi*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n). \tag{1.14}$$

   Za strogo konveksnu funkciju f vrijedi jednakost u 1.14 ako i samo ako je $x_1 = \cdots = x_n$.

2. *Ako je funkcija f konkavna funkcija na intervalu $[a, b]$, onda za sve $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ takve da je $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ i za svaki $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ vrijedi*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n). \tag{1.15}$$

   Za strogo konkavnu funkciju f vrijedi jednakost u 1.15 ako i samo ako je $x_1 = \cdots = x_n$.

Dokaz. (1.) Dokaz se provodi pomoću matematičke indukcije.
Za $n = 1$ mora vrijediti i $t_1 = 1$, odnosno Jensenova nejednakost postaje $f(1x_1) = 1f(x_1)$.
Za $n = 2$, budući da je f konveksna funkcija, po definiciji konveksne funkcije 1.13 slijedi da za svaki $x_1, x_2 \in [a, b]$ i za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Neka su t_1, t_2 nenegativni relani brojevi takvi da je $t_1 + t_2 = 1$. Tada uvrštavanjem $t_2 = 1 - t_1$ u gornju nejednakost slijedi:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) < t_1f(x_1) + t_2f(x_2).$$

Pretpostavimo da za neki prirodni broj n i za svaki $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ te za svaki $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ takve da je $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ vrijedi $f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n)$.

Neka je $x_{n+1} \in [a, b]$ i neka su $t_1, \dots, t_n,\ t_{n+1} \in [0, 1]$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$. Tada:

$$
\begin{aligned}
f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&= f\left((1 - t_{n+1}) \frac{1}{t - t_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} t_k x_k + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq (1 - t_{n+1}) f\left(\frac{1}{1 - t_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq (1 - t_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k\right) + t_{n+1} f(x_{n+1})
\end{aligned}
$$

Kako je $t_1 + t_2 + \dots + t_n + t_{n+1} = 1$, slijedi da je $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1 - t_{n+1}$. Dijeljenjem jednakosti s $1 - t_{n+1} > 0$ vrijedi da je

$$
\frac{t_1}{1 - t_{n+1}} + \frac{t_2}{1 - t_{n+1}} + \dots + \frac{t_n}{1 - t_{n+1}} = 1.
$$

Po pretpostavci matematičke indukcije i primjenom gornje jednakosti slijedi da je

$$
\begin{aligned}
f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1}) &\leq (1 - t_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - t_{n+1}} x_k f(x_k) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n) + t_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}
$$

Dakle, po principu matematičke indukcije, 1.14 vrijedi za svaki prirodni broj n.

(2.) Dokaz slijedi analogno prvom slučaju, samo zbog konkavnosti funkcije koristimo obratni znak nejednakosti.

□

U sljedećem primjeru prikazat ćemo upotrebu Jensenove nejednakosti za dokazivanje geometrijske tvrdnje.

Primjer 1.3.3. *Neka su $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ duljine stranica trokuta, a $s > 0$ njegov poluopseg. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$
\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \geq s.
$$

Rješenje. Promatramo funkciju $f(x) = \frac{x^2}{2s-x}$.
Kako je $f'(x) = \frac{4sx-x^2}{(2s-x)^2}$ i $f''(x) = \frac{8s^2}{(2s-x)^3}$, slijedi da je $f''(x) \geq 0$ za $0 < x < 2s$. Dakle, funkcija f je konveksna na intervalu $< 0, 2s >$.
Sada možemo primijeniti Jensenovu nejednakost 1.14. Slijedi da je

$$f\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \leq \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3},$$

odnosno da je

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{2s - \frac{a+b+c}{3}} \leq \frac{\frac{a^2}{2s-a} + \frac{b^2}{2s-b} + \frac{c^2}{2s-c}}{3}.$$

Sređivanjem gornje nejednakosti slijedi

$$\frac{\frac{(a+b+c)^2}{9}}{\frac{2}{3}(a+b+c)} \leq \frac{\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}}{3},$$

odakle skraćivanjem dobijemo

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Odnosno, vrijedi:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq s.$$

1.4 Bernoullijeva nejednakost

Bernoullijeva nejednakost je nejednakost koja služi za aproksimaciju potenciranja izraza $1 + x$. Često se koristi za dokazivanje drugih nejednakosti.

Teorem 1.4.1. *(Bernoullijeva nejednakost)*

1. *Neka je n prirodni broj i x broj veći od -1. Tada vrijedi*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.16}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

2. *Za sve realne brojeve* $x_k, k = 1, 2, \ldots, n$, *koji su istog predznaka, vrijedi nejednakost*

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{1.17}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$.

Dokaz. Dokaz je preuzet iz (6).
(1.) Ako je $n = 1$, jednakost u 1.16 očito vrijedi.
Ako u 1.16 vrijedi jednakost, onda prema teoremu o jednakosti dva polinoma slijedi da je $n = 1$. Neka je $y = 1 + x$. Iz pretpostavke $x > -1$ slijedi $y > 0$.

Ako je $y \geq 1$, onda vrijedi

$$\begin{aligned}(1 + x)^n &= y^n = 1 + (y^n - 1)\\ &= 1 + (y - 1)(\underbrace{y^{n-1}}_{\geq 1} + \underbrace{y^{n-2}}_{\geq 1} + \cdots + 1)\\ &\geq 1 + (y - 1)\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ puta}} = 1 + (y - 1)n,\end{aligned}$$

slijedi nejednakost 1.16.

Ako je $0 < y < 1$, onda je $y^k < 1$, odnosno $-y^k > -1$ za svaki prirodni broj k. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned}(1 + x)^n &= y^n - 1\\ &= (1 - y)(\underbrace{-y^{n-1}}_{\geq -1} - \underbrace{y^{n-2}}_{\geq -1} - \cdots - 1)\\ &\geq (1 - y)\underbrace{(-1 - 1 - \cdots - 1)}_{n \text{ puta}} = (1 - y)(-n) = 1 + (y - 1)n,\end{aligned}$$

odakle slijedi nejednakost 1.16.

(2.) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x_k \neq 0, k = 1, 2, \ldots, n$.
Za $n = 1$ u 1.17 jednakost očito vrijedi.
Dokaz se provodi pomoću matematičke indukcije za sve $n > 1$. Za $n = 2$ vrijedi stroga nejednakost, jer je

$$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 > 1 + x_1 + x_2.$$

Pretpostavimo da za neki $n \geq 2$ vrijedi nejednakost $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$.
Kako je $x_i x_j > 0$ za $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ i koristeći pretpostavku indukcije, slijedi

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\\
&> (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\
&= (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)+x_{n+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1}\\
&> 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Odnosno za $n+1$ vrijedi:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{n+1}) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}.$$

Prema principu matematičke indukcije, vrijedi stroga nejednakost u 1.17 za svaki prirodni broj $n \geq 1$. □

Napomena 1.4.2. *Nejednakost 1.16 slijedi iz nejednakosti 1.17 za*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x.$$

Primjer 1.4.3. *Dokažite da za svaki prirodni broj $n > 1$ vrijedi nejednakost*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Za $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi jer je $2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.
Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za neki prirodni broj n veći od 2. Tada za $n+1$ slijedi

$$\begin{aligned}
(n+1)! = (n+1)n! &< (n+1)\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\\
&= 2\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Iz Bernoullijeve nejednakosti 1.16 slijedi

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n+1} = 2.$$

Odnosno, vrijedi

$$(n+1)! < 2 \cdot \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

Po principu matematičke indukcije, nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n veći od 1.

Teorem 1.4.4. *Neka je x realan broj takav da je $x > -1, x \neq 0$. Tada, ako je:*
(i) $0 < a < 1$, *onda je*

$$(a+x)^a \leq 1 + ax$$

(ii) $a < 0$ *ili* $a > 1$, *onda je*

$$(a+x)^a \geq 1 + ax$$

Jednakost u oba slučaja vrijedi ako i samo ako je $x = 0$ ili $a = 1$.

Dokaz. Pomoću Taylorove formule slijedi

$$(a+x)^a - 1 - ax = \frac{a(a-1)x^2}{2}(1+\theta x)^{a-2}, \quad (0 < \theta < 1).$$

Kako je $x > -1$ i $0 < \theta < 1$, slijedi da je $1 + \theta x > 0$.
Odnosno, vrijedi da je predznak izraza $(1+x)^a - 1 - ax$ jednak predznaku izraza $a(a-1)$, odakle slijede tražene nejednakosti. □

Teorem 1.4.5. *AG nejednakost i Bernoullijeva nejednakost su ekvivalentne.*

Dokaz. Dokaz preuzet iz (5).
(⇒) Prvo dokazujemo da Bernoullijeva nejednakost 1.16 slijedi iz AG nejednakosti 1.3.
Za $n = 1$ vrijedi jednakost u Bernoullijevoj nejednakosti 1.16. Ako je $n \geq 2$ i $0 < x \leq 1 - \frac{1}{n}$, onda vrijedi

$$x^n > 0 \geq 1 + n(x-1),$$

odnosno vrijedi Bernoullijeva nejednakost. Zbog toga možemo pretpostaviti da je $n \geq 2$ i $x > 1 - \frac{1}{n}$ i tada je $1 + n(x-1) > 0$. Sada primjenom AG nejednakosti na n pozitivnih brojeva

$$1 + n(x-1), \overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n\text{-1 puta}}$$

slijedi

$$x^n = \left(\frac{(1+n(x-1)) + 1 + 1 + \cdots + 1}{n}\right)^n \geq (1+n(x-1)) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1 + n(x-1).$$

Time je dokazana Bernoullijeva nejednakost 1.13.

($\Leftarrow$) Dokažimo da AG nejednakost slijedi iz Bernoullijeve nejednakosti.
Neka je $A_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ te $x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$ Kako je $\frac{A_n}{A_{n-1}} > 0$, odnosno $\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1$, može se primijeniti Bernoullijeva nejednakost za $x = \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1$.
Vrijedi

$$\begin{aligned}\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n &\geq 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right)\\ &= \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}}\\ &= \frac{nA_n - (n-1)A_{n-1}}{A_{n-1}}\\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}}{A_{n-1}}\\ &= \frac{x_n}{A_{n-1}}.\end{aligned}$$

Odnosno,

$$A_n^n \geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1}. \tag{1.18}$$

Iteriranjem gornje nejednakosti 1.18 slijedi

$$\begin{aligned}A_n^n &\geq x_n \cdot A_{n-1}^{n-1} \geq x_n \cdot x_{n-1} \cdot A_{n-2}^{n-2} \geq \ldots\\ &\geq x_n \cdot x_{n-1} \cdot \cdots \cdot x_2 \cdot A_1^1\\ &= x_n \cdot x_{n-1} \cdot \cdots \cdot x_2 \cdot x_1 = G_n^n\end{aligned}$$

odnosno vrijedi $A_n \geq G_n$. $\square$

Poglavlje 2

Primjene u ekonomiji

2.1 Maksimizacija korisnosti potrošača uz budžetsko ograničenje

Maksimizacija korisnosti potrošača uz budžetsko ograničenje odnosi se na postizanje najveće moguće razine zadovoljstva ili korisnosti potrošača uz zadanu razinu budžeta. To znači da potrošač treba odabrati kombinaciju dobara ili usluga koja će mu pružiti najveću korisnost, uzimajući u obzir svoj raspoloživi budžet. Ovaj koncept je važan u mikroekonomiji jer pomaže potrošačima da donesu optimalne odluke o potrošnji resursa kako bi zadovoljili svoje potrebe i želje.

Funkcija korisnosti (u) je funkcija koja košarama dobara dodjeljuje subjektivnu razinu zadovoljstva, a ovisi o potrošačevim preferencijama. Ako se funkcijom korisnosti može utvrditi koliko je košara bolja ili lošija od drugih košara, funkcija je kardinalna. Ako se može utvrditi je li neka košara bolja ili lošija od neke druge košare, ali se ne može utvrditi i za koliko, onda se radi o ordinalnoj funkciji korisnosti.
U ovome radu obradit će se funkcija korisnosti dva dobra (proizvoda) i tada funkcija korisnosti glasi $u(x_1, x_2)$, gdje je x_1 količina prvog dobra, a x_2 količina drugog dobra.

Najčešće funkcije korisnosti su:

- Cobb-Douglasova funkcija korisnosti: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,
- CES funkcija korisnosti: $u(x_1, x_2) = (x_1^{\rho} + x_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho \in < -\infty, 1 > \backslash\{0\}$,
- Linearna funkcija korisnosti: $u(q_1, q_2) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.
  Linearna funkcija je poseban slučaj CES funkcije korisnosti kada je $\rho = 1$.

Problem maksimizacije korisnosti potrošača dan je s

$$\max_{x_1, x_0 \geq 0} u(x_1, x_2) \tag{2.1}$$

uz ograničenje

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = n, \tag{2.2}$$

gdje je n dohodak potrošača, $x_1, x_2 \geq 0$ su količine dobara, $p_1, p_2 > 0$ su cijene dobara, te u funkcija korisnosti koja je strogo rastuća i strogo kvazikonkavna funkcija.

Cobb-Douglasova funkcija korisnosti

Neka je $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ Cobb-Douglasova funkcija korisnosti, gdje su α, β pozitivni brojevi koji opisuju potrošačeve preferencije.
Tada problem maksimizacije 2.1 - 2.2 postaje:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, \tag{2.3}$$

uz ograničenje

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = n. \tag{2.4}$$

Iz jednakosti 2.4 možemo izraziti x_2 kao $x_2 = \frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$. Uvrštavanjem x_2 u 2.3 slijedi

$$\max_{x_1 \geq 0} u(x_1, x_2) = x_1^\alpha \left(\frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \right)^\beta. \tag{2.5}$$

Raspisivanjem 2.5 slijedi:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \frac{1}{p_2^\beta} \left(x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right)^{\alpha+\beta} \left[(n - p_1 x_1)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right]^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{1}{p_1^\alpha p_2^\beta} \left[\beta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (\beta p_1 x_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \alpha^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha n - \alpha p_1 x_1)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right]^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\alpha^{-\beta} \beta^{-\alpha}}{p_1^\alpha p_2^\beta} \left[(\beta p_1 x_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (\alpha n - \alpha p_1 x_1)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right]^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kako je $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$, primjenom težinske AG nejednakosti 1.10 na posljednji izraz 2.6 slijedi

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &\leq \frac{\alpha^{-\beta} \beta^{-\alpha}}{p_1^\alpha p_2^\beta} \left[\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \beta p_1 x_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \alpha n - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \alpha p_1 x_1 \right]^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta}} \frac{n^{\alpha+\beta}}{p_1^\alpha p_2^\beta}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dakle, maksimalna vrijednost funkcije korisnosti, to jest maksimalna korisnost iznosi

$$u_{max} = \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}} \frac{n^{\alpha+\beta}}{p_1^\alpha p_2^\beta}, \tag{2.8}$$

i postiže se ako i samo ako je

$$\beta p_1 x_1 = \alpha n - \alpha p_1 x_1. \tag{2.9}$$

Iz jednakosti 2.9 dobivamo optimalnu vrijednost prvog i drugog dobra:

$$x_1^* = \frac{\alpha n}{p_1(\alpha+\beta)}, x_2^* = \frac{\beta n}{p_2(\alpha+\beta)}. \tag{2.10}$$

Primjer 2.1.1. *Riješiti problem maksimizacije korisnosti*

$$\max_{x_1, x_0 \geq 0} u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

uz ograničenje $x_1 + 2x_2 = 100$.

1. način: Koristeći se diferencijalnim računom.

   Primjer ćemo riješiti metodom supstitucije. Moguće ga je riješiti i korištenjem Lagrangeovih multiplikatora.
   Iz uvjeta se izrazi jedna varijabla preko druge i to se uvrsti u funkciju čiji se ekstremi traže. Tako se problem ekstrema funkcije dviju varijabli svodi na problem ekstrema funkcije jedne varijable.
   Iz uvjeta izrazimo x_1.

   $$x_1 + 2x_2 = 100 \implies x_1 = 100 - 2x_2$$

   Sada supstitucijom varijable x_1 u funkciju $u(x_1, x_2)$ dobivamo:

   $$u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) = (100 - 2x_2)^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}.$$

   Kako bismo odredili maksimum funkcije, potrebno je odrediti prvu i drugu derivaciju funkcije $\tilde{u}(x_2)$.

   $$\tilde{u}'(x_2) = \frac{-2}{3} x_2^{\frac{2}{3}} (100 - 2x_2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x_2^{-\frac{2}{3}} (100 - 2x_2)^{\frac{1}{3}}$$

Odredimo stacionarne točke:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'(x_2) &= 0,\\
\frac{-2}{3}x_2^{\frac{2}{3}}(100-2x_2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x_2^{-\frac{2}{3}}(100-2x_2)^{\frac{1}{3}} &= 0,\\
\frac{2\sqrt[3]{x_2}}{3\sqrt[3]{(100-2x_2)^2}} &= \frac{2\sqrt[3]{100-x_2}}{3\sqrt[3]{x_2}},\\
\frac{x_2^2}{(100-2x_2)^2} &= \frac{100-2x_2}{x_2},\\
x_2 &= \frac{100}{3}.
\end{aligned}$$

Odredimo sada drugu derivaciju:

$$\tilde{u}''(x_2) = \frac{-4}{9}x_2^{-\frac{1}{3}}(100-2x_2)^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{9}x_2^{\frac{2}{3}}(100-2x_2)^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{9}x_2^{-\frac{4}{3}}(100-2x_2)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}x_2^{\frac{1}{3}}(100-2x_2)^{-\frac{2}{3}}.$$

Kako je $\tilde{u}''(x_2) \approx -0.06$ za $x_2 = \frac{100}{3}$, slijedi da funkcija korisnosti poprima maksimalnu vrijednost u x_2.

Tada je $x_1 = 100 - 2x_2 = \frac{100}{3}$.

Zaključujemo da funkcija $u(x_1, x_2)$ poprima maksimalnu vrijednost $\frac{100}{3}$.

2. način: Koristeći nejednakosti.

U ovom primjeru, koristeći gore navedene oznake, vrijedi da je

$$\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = \frac{2}{3},\ p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ n = 100.$$

Iz ograničenja zadatka slijedi da je $x_1 = 100 - 2x_2$. Tada funkciju korisnosti možemo zapisati kao

$$u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) = (100-2x_2)^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}. \tag{2.11}$$

Raspišimo funkciju korisnosti:

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}(100 - 2x_2)^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{200}{3} - \frac{2}{3}\cdot 2x_2\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\frac{1}{3}\cdot 2x_2\right)^{\frac{2}{3}}\right] \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{200}{3} - \frac{4}{3}x_2\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\cdot 2x_2\right)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Sada na posljednji izraz možemo primijeniti težinsku AG nejednakost 1.10 te dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{200}{3} - \frac{4}{3}x_2\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\cdot 2x_2\right)^{\frac{2}{3}} &\le \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{200}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x_2\right] \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{200}{9} = \frac{100}{3}.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi da je

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{-1}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{200}{3} - \frac{4}{3}x_2\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\cdot 2x_2\right)^{\frac{2}{3}} \\
&\le \frac{100}{3}.
\end{aligned}$$

U prethodnoj nejednakosti, jednakost se postiže ako i samo ako je

$$\frac{200}{3} - \frac{4}{3}x_2 = \frac{1}{3}\cdot 2x_2,$$

odnosno za $x_2 = \frac{100}{3}$.

Budući da je $\tilde{u}(x_2) \le \frac{100}{3}$ za svaki x_2, to iz definicije globalnog maksimuma slijedi da je maksimalna vrijednost funkcije korisnosti jednaka $\frac{100}{3}$, te se postiže za $x_2 = \frac{100}{3}$. Tada količina prvog dobra x_1 iznosi $x_1 = 100 - 2x_2 = \frac{100}{3}$.

CES funkcija korisnosti

Neka je u CES funkcija korisnosti $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, gdje je $\rho \in < -\infty, 1 > \setminus \{0\}$. Tada problem maksimizacije korisnosti potrošača postaje

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{2.12}$$

uz ograničenje

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = n. \tag{2.13}$$

Ponovno, kao i za Cobb-Douglasovu funkciju, možemo x_2 izraziti kao $x_2 = \frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$. Uvrštavanje x_2 u 2.12, problem postaje ekvivalentan problemu maksimizacije

$$\max_{x_1 \geq 0} u(x_1, x_2) = \left[x_1^\rho + \left(\frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \right)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.14}$$

Neka su $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $t_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$, $t_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ takvi da je $t_1 + t_2 = 1, 0 < t_1, t_2 < 1$. Sada pomoću toga možemo raspisati funkciju u na sljedeći način:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1} x_1^\rho + \frac{\gamma_2}{\gamma_2} \left(\frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \right)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \\ &= \left[(\gamma_1 + \gamma_2) \left(t_1 \frac{x_1^\rho}{\gamma_1} + t_2 \frac{1}{\gamma_2} \left(\frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \right)^\rho \right) \right]^{\frac{1}{\rho}} \\ &= (\gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{\rho}} \left[t_1 \left(\frac{x_1}{\gamma_1^{\frac{1}{\rho}}} \right)^\rho + t_2 \left(\frac{\frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}{\gamma_2^{\frac{1}{\rho}}} \right)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Neka su $f, g :< 0, +\infty > \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\rho$, $g(x) = x^{\frac{1}{\rho}}$.

Za $\rho \in < -\infty, 0 >$ funkcija f je strogo konveksna, jer je $f''(x) = \rho(\rho - 1) x^{\rho - 2} > 0$, a funkcija g je strogo padajuća jer vrijedi da je $g'(x) = \frac{1}{\rho} x^{\frac{1-\rho}{\rho}} < 0$. Ako je $\rho \in < 0, 1 >$, onda je funkcija f strogo konkavna i funkcija g strogo rastuća. Koristeći navedeno i Jensenovu nejednakost 1.14-1.15 slijedi da za svaki $\rho \in < -\infty, 1 > \setminus \{0\}$ vrijedi da je

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &\leq (\gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{\rho}} \left[\left(t_1 \frac{x_1}{\gamma_1^{\frac{1}{\rho}}} + t_2 \frac{\frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}{\gamma_2^{\frac{1}{\rho}}} \right)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \\ &= (\gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{1}{\rho}} \left[t_1 \frac{x_1}{\gamma_1^{\frac{1}{\rho}}} - t_2 \frac{p_1 p_2 x_1}{\gamma_2^{\frac{1}{\rho}}} + t_2 \frac{\frac{n}{p_2}}{\gamma_2^{\frac{1}{\rho}}} \right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Želimo da izraz $t_1\frac{x_1}{\gamma_1^{\frac{1}{\rho}}} - t_2\frac{\frac{p_1}{p_2}x_1}{\gamma_2^{\frac{1}{\rho}}}$ bude jednak 0 za svaki x_1. To je moguće ako i samo ako je

$$t_1\frac{x_1}{\gamma_1^{\frac{1}{\rho}}} = t_2\frac{\frac{p_1}{p_2}x_1}{\gamma_2^{\frac{1}{\rho}}} \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\rho}}\frac{p_1}{p_2}. \tag{2.17}$$

Sada, kako vrijedi $t_1 + t_2 = 1$, $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ i jednakost 2.17, uvrštavanjem da je $\gamma_1 = 1$, slijedi

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}, \\ t_2 &= \frac{p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}, \\ \gamma_1 &= 1,\ \gamma_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Uvrštavanjem 2.18 u 2.16 slijedi da je maksimalna korisnost

$$u_{max} = n\left(p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}}. \tag{2.19}$$

Maksimalna korisnost postiže se ako i samo ako je

$$\frac{x_1}{\gamma_1^{\frac{1}{\rho}}} = \frac{\frac{n}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1}{\gamma_2^{\frac{1}{\rho}}}. \tag{2.20}$$

Iz 2.20 i 2.18, globalni maksimum (x_1^*, x_2^*) problema 2.12 i 2.13

$$x_1^* = \frac{np_1^{\frac{1}{1-\rho}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}, \tag{2.21}$$

$$x_2^* = \frac{np_2^{\frac{1}{1-\rho}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}. \tag{2.22}$$

Primjer 2.1.2. *Riješiti problem maksimizacije korisnosti*

$$\max_{x_1, x_0 \geq 0} u(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2$$

uz ograničenje $x_1 + 2x_2 = 100$.

1. način: Koristeći metodu supstitucije.

   Iz uvjeta izrazimo x_1.

   $$x_1 + 2x_2 = 100 \implies x_1 = 100 - 2x_2$$

   Sada supstitucijom varijable x_1 u funkciju $u(x_1, x_2)$ dobivamo:

   $$u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) = \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{100 - 2x_2}\right)^2.$$

   Odredimo prvu i drugu derivaciju funkcije te stacionarne točke, kako bismo odredili maksimum funkcije $\tilde{u}(x_2)$. Prva derivacija je

   $$\tilde{u}'(x_2) = 2\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{100 - 2x_2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{100 - 2x_2}}\right).$$

   Odredimo stacionarne točke:

   $$\tilde{u}'(x_2) = 0,$$

   $$2\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{100 - 2x_2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{100 - 2x_2}}\right) = 0.$$

   Slijedi da je

   $$\sqrt{x_2} + \sqrt{100 - 2x_2} = 0,$$

   ili

   $$\frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{100 - 2x_2}} = 0.$$

   Kako je $\sqrt{x_2} + \sqrt{100 - 2x_2} > 0$ za svaki $x_2 > 0$ slijedi da je

   $$u'(x_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{100 - 2x_2}} = 0,$$

   te je pripadna stacionarna točka$x_2 = \frac{50}{3}$. Odredimo sada drugu derivaciju:

   $$\tilde{u}'(x_2) = \frac{-\sqrt{100x_2 - 2x_2^2} - 4x_2 + 100}{\sqrt{100x_2 - 2x_2^2}} = -1 - \frac{4x_2}{\sqrt{100x_2 - 2x_2^2}} + \frac{100}{\sqrt{100x_2 - 2x_2^2}},$$

   $$\begin{aligned}\tilde{u}''(x_2) &= -\frac{4\sqrt{100x_2 - 2x_2^2} - 4x_2\frac{100-4x_2}{2\sqrt{100-2x_2^2}} - \frac{100\cdot(100-4x_2)}{2\sqrt{100x-2x_2^2}}}{\sqrt{100x_2 - 2x_2}^2} \\ &= -\frac{2500}{x\sqrt{100x_2 - 2x_2^2}(50 - x)}.\end{aligned}$$

Kako je $\tilde{u}''(x_2) = -0.135$ za $x_2 = \frac{50}{3}$, slijedi da funkcija korisnosti poprima maksimalnu vrijednost u x_2.

Tada je $x_1 = 100 - 2x_2 = \frac{200}{3}$, te možemo zaključiti da maksimalna vrijednost funkcije $u(x_1, x_2)$ iznosi 150.

2. način: Koristeći nejednakosti.

U ovom primjeru, koristeći gore navedene oznake, vrijedi da je

$$\rho = \frac{1}{2},\ p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ n = 100.$$

Iz ograničenja zadatka slijedi da je $x_1 = 100-2x_2$. Tada funkciju korisnosti možemo zapisati kao

$$u(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{100 - 2x_2}\right)^2. \tag{2.23}$$

Neka su $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $t_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$, $t_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$ takvi da je $t_1 + t_2 = 1, 0 < t_1, t_2 < 1$ proizvoljni. Uvrstimo na primjer $\gamma_1 = \frac{1}{3}$, $\gamma_2 = \frac{2}{3}$. Tada je $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{2}{3}$. Raspišimo funkciju korisnosti:

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= \left[\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}(100 - 2x_2)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&= \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{x_2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{2}{3}}(100 - 2x_2)^{\frac{1}{2}}\right)\right]^2 \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 \left[\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\left(\frac{100 - 2x_2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.
\end{aligned}$$

Kako je $\rho = \frac{1}{2} \in < 0, 1 >$ funkcija $f(x) = x^\rho$ je strogo konkavna, a kvadratna funkcija je rastuća na intervalu $< 0, +\infty >$, možemo primijeniti Jensenovu nejednakost 1.15.

Primijenimo 1.15 na posljednji izraz:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\left(\frac{100-2x_2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \leq \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^2\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{x_2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{2}{3}\frac{100-2x_2}{(\frac{2}{3})^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$= 1^2\left(\frac{x_2}{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{100}{\frac{4}{9}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x_2}{\frac{4}{9}}\right)$$

$$= 3x_2 + 150 - 3x_2 = 150.$$

Dakle, vrijedi da je

$$u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\left(\frac{100-2x_2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

$$\leq 150.$$

U prethodnoj nejednakosti, jednakost se postiže ako i samo ako je

$$\frac{x_2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{100-2x_2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2},$$

što je ekvivalentno s

$$9x_2 = 225 - \frac{9}{2}x_2.$$

Dakle, jednakost se postiže za $x_2 = \frac{50}{3}$.

Budući da je $\tilde{u}(x_2) \leq 150$ za svaki x_2, to iz definicije globalnog maksimuma slijedi da je maksimalna vrijednost funkcije korisnosti jednaka 150, te se postiže za $x_2 = \frac{50}{3}$.
Količina prvog dobra x_1 tada iznosi $x_1 = 100 - 2x_2 = \frac{50}{3}$.

Na kraju, istaknimo da smo u ovom poglavlju prikazali dva načina za rješavanje problema maksimizacije korisnosti potrošača uz dano budžetsko ograničenje, pri čemu je korisnost opisana Cobb-Douglasovom te CES funkcijom za funkcije 2 varijable. U literaturi je moguće pronaći slučajeve za funkcije korisnosti za $n > 2$ varijabli, na primjer u (1) i u (12).

Standardni način, s jedne strane, u rješavanju ovog problema podrazumijeva korištenje diferencijalnog računa. Kada je riječ o dva dobra, problem se svodi na optimizacijski problem jedne varijable pri čemu dalje koristimo derivacije, dok je kod slučaja tri ili više dobra potrebno koristiti diferencijalni račun više varijabli. Kako bismo odredili ekstrem, potrebno je provjeriti nužne i dovoljne uvjete računajući derivacije višeg reda, odnosno ispitujući definitnost Hesseove matrice.

S druge strane, isti je problem, kako je pokazano u ovom poglavlju, moguće riješiti i primjenom nejednakosti, pri čemu se do ekstrema dolazi izravno po definiciji te manipulacijom danih izraza. U tom smislu, izostanak netrivijalne provjere nužnih i dovoljnih uvjeta korištenjem derivacija čini primjenu nejednakosti elegantnom komplementarnom i kontrolnom metodom diferencijalnom računu.

2.2 Jednostavne i složene kamate

Pri računanju kamata koristi se jednostavan i složen kamatni račun. Jednostavni kamatni račun koristi se ako se kamate računaju na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja. Koristi se prilikom izračuna zakonskih i ugovorenih zateznih kamata, kamata na štednju, potrošačkog kredita. Složeni kamatni račun koristi se ako se kamate računaju na glavnicu koja je uvećana za prethodno obračunate kamate, računaju se kamate na kamate.

Definicija 2.2.1. *Jednostavni kamatni račun je takav kamatni račun u kojem kamate izračunavamo na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja.*

Propozicija 2.2.2. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu (kamatnjak) p u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right). \tag{2.24}$$

Dokaz. Budući da se po definiciji jednostavnog kamatnog računa kamate računaju na istu glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja, kamate za svako razdoblje dane su sa

$$K_i = \frac{C_0 p}{100}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada ukupne jednostavne kamate za svih n razdoblja iznose

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{C_0 pn}{100}.$$

Konačna vrijednost iznosa C_0 tada je

$$C_n = C_0 + K = C_0 + \frac{C_0 pn}{100} = C_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right),$$

što je i trebalo pokazati. □

Propozicija 2.2.3. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po jednostavnom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ u i-tom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}{100}\right). \tag{2.25}$$

Dokaz. Budući da se, kao i u Propoziciji 2.2.2, kamate računaju na istu (početnu) glavnicu za svako razdoblje ukamaćivanja, kamate za i-to jedinično razdoblje, $i = 1, 2, \ldots, n$, dane su formulom

$$K_i = \frac{C_0 p_i}{100}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tada su ukupne kamate za svih n razdoblja

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_0 p_i}{100} = \frac{C_0}{100} \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Tada je konačna vrijednost iznosa C_0

$$C_n = C_0 + K = C_0 + \frac{C_0 pn}{100} \sum_{i=1}^{n} p_i = C_0\left(1 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}{100}\right),$$

što je i trebalo pokazati. □

Definicija 2.2.4. *Složeni kamatni račun je postupak izračunavanja kamata na glavnicu uvećanu za prethodno obračunate kamate u svakom prethodnom vremenskom razdoblju ukamaćivanja.*

Propozicija 2.2.5. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz fiksnu kamatnu stopu p u svakom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dokaz. Dokaz se provodi matematičkom indukcijom po n. Neka je C_0 sadašnja vrijednost glavnice i neka je p fiksna kamatna stopa za jedinično razdoblje. Tada je $r = 1 + \frac{p}{100}$ fiksni dekurzivni kamatni faktor.
Neka su I_k kamate za k-to jedinično vremensko razdoblje i neka je vrijednost glavnice C_0 na kraju tog k-tog razdoblja C_k.

Za $k = 1$ je $I_1 = \frac{C_0 p}{100}$ te prema definiciji složenog kamatnog računa slijedi

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + \frac{C_0 p}{100} = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^1 = C_0 r.$$

Pretpostavimo da vrijedi $C_n = C_0(1 + \frac{p}{100})^n$ za neki prirodni broj $k = n$.
Kako je $I_{n+1} = \frac{C_n p}{100}$, slijedi da je

$$C_{n+1} = C_n + I_{n+1} = C_n + \frac{C_n p}{100} = C_n\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Po pretpostavci indukcije vrijedi

$$C_{n+1} = C_n\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n+1} = C_0 r^{n+1}.$$

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. □

Propozicija 2.2.6. *Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n-tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamate obračunavaju po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu p_i, $i = 1, 2, \dots, n$ u i-tom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan, iznosi*

$$C_n = C_0 r_1 r_2 r_3 \dots r_n = C_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_i$$

pri čemu je $r_i = 1 + \frac{p_i}{100}$, $i = 1, 2, \dots, n$, dekurzivan kamatni faktor za i-to razdoblje.

Dokaz propozicije može se pronaći u (20).

Teorem 2.2.7. *Ukupne kamate izračunate po složenom kamatnom računu nisu manje od onih izračunatih po jednostavnom kamatnom računu.*

Dokaz. 1. slučaj: Kamate se računaju uz fiksnu kamatnu stopu.
Koristeći se formulama, potrebno je dokazati da vrijedi nejednakost $I \geq K$, gdje su I ukupne kamate za svih n razdoblja izračunate po složenom kamatnom računu, a K ukupne kamate izračunate po jednostavnom kamatnom računu.

$$I \geq K \Leftrightarrow C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - C_0 \geq C_0\left(1+\frac{pn}{100}\right) - C_0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right)^n \geq 1+\frac{pn}{100}. \tag{2.26}$$

Posljednja nejednakost slijedi iz Bernoullijeve nejednakosti za $x = \frac{p}{100} > 0$. Također, nejednakost 2.20 može se dokazati i direktnom primjenom binomnog teorema. Vrijedi

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{p}{100}\right)^k = 1+\frac{pn}{100}+\underbrace{\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{p}{100}\right)^k}_{\geq 0} \geq 1+\frac{pn}{100}.$$

2. slučaj: Kamate se računaju uz varijabilnu kamatnu stopu. Potrebno je dokazati nejednakost

$$\begin{aligned} I \geq K &\Leftrightarrow C_0\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{p_i}{100}\right) - C_0 \geq C_0\left(1+\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{100}\right) - C_0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{p_i}{100}\right) \geq 1+\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{100}. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost slijedi iz 1.14 za $x_1 = \frac{p_1}{100} > 0, x_2 = \frac{p_2}{100} > 0, \ldots, x_n = \frac{p_n}{100} > 0$. Time je dokazan teorem. □

Poglavlje 3

Metodička primjena

U ovom poglavlju opisane su dvije radionice (aktivnosti) koje se mogu provesti s učenicima na satu matematike ili na dodatnoj nastavi, kako bi učenici bolje razumjeli postupak optimizacije i važnost razlike jednostavnog i složenog kamatnog računa.

3.1 Radionica optimizacije

Maksimizacija korisnosti potrošača može se predstaviti učenicima već u 2. razredu srednje škole. Učenici prvo ”na prste” mogu izračunati maksimalnu vrijednost funkcije korisnost, a zatim se uvodi pojam Cobb-Douglasove funkcije korisnosti i postupak za izračun njenog maksimuma. Cilj radionice je da učenici otkriju kako na jednostavan način mogu odrediti maksimalnu korisnost potrošača.

Ciljano matematičko znanje: optimizacija
Uzrast: srednja škola
Vrijeme: 30-45 minuta
Materijal: kalkulator, papir i olovka

Tijek aktivnosti:
Nastavnik na početku radionice provodi kratku anketu o učeničkim preferencijama. Učenici se izjašnjavaju što im je bitnije od dva dobara koja imaju na raspolaganju, u ovom primjeru uzimamo jagode i maline koje se u trgovini mogu kupiti u proizvoljnoj kilaži. Učenici iskazuju svoje preferencije u obliku 2 razlomka čiji je zbroj jednak 1.

Nakon toga nastavnik daje učenicima 20 eura i zadatak da maksimiziraju svoju korisnost koja je dana funkcijom $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, gdje x_1 predstavlja količinu prvog dobra, u ovom primjeru to su jagode, a x_2 predstavlja količinu drugog dobra, odnosno malina.

Razlomci α, β predstavljaju učeničke preferencije koje su učenici iskazali na početku sata. Cijena kilograma jagoda u trgovini iznosi 4 eura po kilogramu, dok je cijena malina po kilogramu 5.5 eura.

Maksimalna korisnost se postiže kada potrošač rasporedi svoje resurse (u ovom slučaju novac) na takav način da dobije najveće moguće zadovoljstvo, to jest korisnost, iz potrošnje tih dobara, s obzirom na ograničenje koje mu je dano, odnosno na budžet. Funkcija korisnosti općenito može imati različite oblike, a jedan od najčešćih je Cobb-Douglasova funkcija korisnosti te je primjerna za učenike srednjih škola.

RAČUN:

Učenici račun provode računajući ”na prste”.
Prema podacima iz ankete učenici znaju što im je važnije kupiti u trgovini, neka su to maline. Tada se α odnosi na preferencije učenika prema jagodama, a β na preferencije prema kupnji malina. Neka je $\alpha = \frac{2}{5}$, a $\beta = \frac{3}{5}$.
Može se zaključiti da treba vrijediti $x_1, x_2 > 0$ da bi funkcija korisnosti poprimila maksimum, jer ako je količina jednog od dobara jednaka nula, korisnost će biti jednaka nuli zbog funkcionalnog oblika.

Primjer učeničkog rješavanja prikazan je u tablici u kojoj se nalazi količina prvog i drugog dobra i funkcija korisnosti za ta dva dobra, $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}$. Potrošačev budžet, u ovom slučaju 20 eura, treba se u cijelosti iskoristiti te na taj način izborom količine prvog dobra, znamo i količinu drugog dobra.

Vrijedi da je

$$4x_1 + 5.5x_2 = 20,$$

iz čega slijedi da je

$$x_2 = \frac{20 - 4x_1}{5.5}.$$

Kako je $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$, mora vrijediti i $20 - 4x_1 > 0$, odakle slijedi da je $0 < x_1 < 5$. Zbog toga će u tablici biti prikazani podaci za x_1 od 0.2 do 4.8 te odgovarajuće vrijednosti za x_2 i $u(x_1, x_2)$.

x_1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
x_2	3.49	3.35	3.2	3.05	2.91	2.76	2.62	2.47
$u(x_1, x_2)$	1.112	1.432	1.638	1.786	1.898	1.978	2.039	2.076

x_1	1.8	**2.0**	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
x_2	2.33	**2.18**	2.04	1.89	1.75	1.6	1.45	1.31
$u(x_1, x_2)$	2.101	**2.106**	2.084	2.08	2.05	2.001	1.939	1.873

x_1	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4	4.6	4.8
x_2	1.16	1.01	0.87	0.72	0.58	0.44	0.29	0.15
$u(x_1, x_2)$	1.783	1.679	1.569	1.43	1.28	1.105	0.876	0.6

Prema podacima iz tablice, učenici mogu zaključiti da se maksimalna korisnost postiže za $x_1 = 2,\ x_2 = 2.18$.

Slijedi kratka rasprava o načinu rješavanja i zatim nastavnik upoznaje učenike s Cobb-Douglasovom funkcijom korisnosti.

Cobb-Douglasova funkcija korisnosti dana je izrazom $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, gdje x_1 predstavlja količinu prvog dobra, a x_2 predstavlja količinu drugog dobra. Koeficijenti α, β predstavljaju preferencije prema prvom i drugom dobru, redom.
U ovom primjeru se problem maksimizacije korisnosti uz zadano budžetsko ograničenje može zapisati kao

$$\max_{x_1, x_0 \geq 0} u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}$$

uz ograničenje $4x_1 + 5.5x_2 = 20$.

Koristeći gore navedene oznake, vrijedi da je

$$\alpha = \frac{2}{5},\ \beta = \frac{3}{5},\ p_1 = 4,\ p_2 = 5.5,\ n = 20.$$

Iz ograničenja zadatka slijedi da je $x_1 = 5 - \frac{11}{8} x_2$. Tada funkciju korisnosti možemo zapisati kao

$$u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) = \left(5 - \frac{11}{8} x_2\right)^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}}. \tag{3.1}$$

Raspišimo funkciju korisnosti:

$$
\begin{aligned}
u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) &= \frac{1}{4^{\frac{2}{5}}} \left(5 - \frac{11}{8} x_2\right)^{\frac{2}{5}} x_2^{\frac{3}{5}} \\
&= \frac{1}{4^{\frac{2}{5}} \cdot 5.5^{\frac{3}{5}}} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}} \left(\frac{3}{5} \cdot 20 - \frac{3}{5} \cdot 5.5 x_2\right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{-3}{5}} \left(\frac{2}{5} \cdot 5.5 x_2\right)^{\frac{3}{5}} \right] \\
&= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{-3}{5}}}{4^{\frac{2}{5}} \cdot 5.5^{\frac{3}{5}}} (12 - 3.3 x_2)^{\frac{2}{5}} (2.2 x_2)^{\frac{3}{5}}.
\end{aligned}
$$

Funkciju $\tilde{u}(x_2)$ raspisujemo na ovakav način kako bismo na nju mogli primijeniti težinsku AG nejednakost, te da bismo primjenom težinske AG nejednakosti dobili izraz u kojem će se x_2 pokratiti. Na taj način možemo odozgo ograničiti funkciju $\tilde{u}(x_2)$. Uočavamo da je izraz $-\frac{2}{5} \cdot 3.3 x_2 + \frac{3}{5} \cdot 2.2 x_2$ jednak nuli, što smo i htjeli dobiti.

Sada na posljednji izraz možemo primijeniti težinsku AG nejednakost 1.10 te dobivamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{-3}{5}}}{4^{\frac{2}{5}} \cdot 5.5^{\frac{3}{5}}} (12 - 3.3 x_2)^{\frac{2}{5}} (2.2 x_2)^{\frac{3}{5}} &\leq \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{-3}{5}}}{4^{\frac{2}{5}} \cdot 5.5^{\frac{3}{5}}} \left[\frac{2}{5} \cdot 12 - \frac{2}{5} \cdot 3.3 x_2 + \frac{3}{5} \cdot 2.2 x_2 \right] \\
&= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{-3}{5}}}{4^{\frac{2}{5}} \cdot 5.5^{\frac{3}{5}}} \cdot \frac{24}{5} \approx 2.107
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi da je

$$
\begin{aligned}
u(x_1, x_2) = \tilde{u}(x_2) &= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-2}{5}} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{-3}{5}}}{4^{\frac{2}{5}} \cdot 5.5^{\frac{3}{5}}} (12 - 3.3 x_2)^{\frac{2}{5}} (2.2 x_2)^{\frac{3}{5}} \\
&\leq 2.107.
\end{aligned}
$$

U prethodnoj nejednakosti, jednakost se postiže ako i samo ako je

$$
12 - 3.3 x_2 = 2.2 x_2,
$$

odnosno za $x_2 = \frac{24}{11} \approx 2.18$.

Dakle, za svaki x_2 vrijedi da je $\tilde{u}(x_2) \leq \frac{100}{3}$ što znači da je maksimalna vrijednost funkcije korisnosti jednaka 2.107, te se postiže za $x_2 = 2.18$.

Tada količina prvog dobra x_1 iznosi $x_1 = 5 - \frac{11}{8}x_2 = 2$.

Zaključak: Budući da se u trgovinama može kupiti proizvoljna količina jagoda i malina, računajući "na prste" ne možemo dovoljno precizno odrediti maksimalnu korisnost. Kako bismo dobili što preciznije, to jest točno rješenje potrebna je bolja metoda te zato zadatak rješavamo pomoću postupka za traženje maksimuma. Taj postupak može se izvesti na više načina. Kako se učenici u drugom i trećem razredu srednje škole ne susreću s derivacijama, za njih je najprikladnija primjena nejednakosti.

3.2 Radionica kamate

Učenici se s jednostavnim kamatnim računom susreću već u osnovnoj školi, dok složeni kamatni račun uvode tek u 4. razredu srednje škole. Cilj ove radionice je da učenici otkriju kako ukupne kamate izračunate po složenom kamatnom računu nisu manje od onih izračunatih po jednostavnom kamatnom računu.

Ciljano matematičko znanje: jednostavni i složeni kamatni račun
Uzrast: srednja škola
Vrijeme: 30 minuta
Materijal: kalkulator, papir i olovka

Tijek aktivnosti:
Učenici na početku ove aktivnosti ponavljaju kako se računaju jednostavne i složene kamatne stope. Formule se zapisuju na ploču kako bi im bile dostupne tijekom cijele radionice. Dodatno, ako nastavnik ima dovoljno vremena, do formula za vrijednost iznosa C_n izračunatog po jednostavnom i složenom kamatnom računu, može se doći raspisivanjem na ploču vrijednost iznosa C_n za svaku godinu kredita.
Nakon što su se ponovile ili izvele sve formule, učenike se dijeli u parove. Svi učenici uzimaju kredit od 2000 eura te svi imaju jednaku kamatnu stopu od 5% te uzimaju kredit na 2 godine. Kamate su tijekom 2 godine kredita fiksne.

Prvi učenik računa kolike su obračunate kamate na kredit, ako su kamate jednostavne, dok drugi učenik računa kolike su kamate za isti kredit ako su kamate složene.
Nakon što su oba učenika izračunala kamate, provode diskusiju tko je bolje prošao prilikom podizanja kredita, odnosno tko mora vratiti manje kamate.
Zatim svaki par učenika u razredu bira proizvoljnu kamatu i ponovno ponavljaju postupak. Nakon promjene kamate, učenici mogu mijenjati i glavnicu ili godine otplate kredita.

RAČUN:
Ukupne jednostavne kamate za n razdoblja iznose:

$$K = \frac{C_0 \cdot p \cdot n}{100}. \tag{3.2}$$

U našem primjeru vrijedi $C_0 = 2000,\ n = 2,\ p = 5$. Uvrštavanjem u jednakost 3.2 slijedi da kamate nakon dvije godine iznose $K = 200$ eura.

Ukupne kamate koje se računaju po složenom računu uz fiksnu kamatnu stopu iznose

$$I = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - C_0. \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem $C_0 = 2000,\ n = 2,\ p = 5$ u 3.3 slijedi da su ukupne kamate nakon 2 godine jednake $I = 205$ eura.

Analogno se izvodi račun za bilo koji iznos glavnice, kao i kamatnu stopu i broj godina otplate kredita. Učenicima se savjetuje da mijenjaju svaki od podataka kako bi došli do zaključka.

Zaključak: Zaključak do kojeg učenici dolaze nakon ove aktivnosti je da su ukupne kamate izračunate po složenom kamatnom računu veće od kamata koje su izračunate po jednostavnom kamatnom računu.

Poglavlje 4

Zadaci s natjecanja

Na natjecanjima iz matematike često se javljaju zadaci s nejednakostima. Takvi zadaci najčešće se pojavljuju na državnim natjecanjima i olimpijadama, ali se ponekad pojave lakši zadaci i na županijskom i općinskom natjecanju. U ovom poglavlju izdvojit ćemo neke od zadataka te njihova rješenja prikazati na više načina, ako je to moguće.

4.1 Zadaci s AG nejednakosti

Zadatak 4.1.1. *Neka je a realan broj takav da je $a^5 - a^3 + a = 2$. Dokažite da vrijede nejednakosti*

$$3 < a^6 < 4.$$

(Županijsko natjecanje, ožujak 2002., 1. razred)

Rješenje. Prvo raspišimo izraz $a^6 + 1$.

$$\begin{aligned} a^6 + 1 &= (a^2)^3 + 1 = (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1) \\ &= \frac{a^2 + 1}{a}(a^5 - a^3 + a) = 2\left(a + \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Kako je $a^6 > 0$, slijedi da je $a^6 + 1 > 0$, pa je onda i $2\left(a + \frac{1}{a}\right) > 0$, odnosno $a > 0$.
Kako je $a > 0$, možemo primijeniti AG nejednakost.

$$a^6 + 1 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 4\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 4. \tag{4.1}$$

Za $a = 1$, ne vrijedi uvjet $a^5 - a^3 + a = 2$, stoga u 4.1 mora vrijediti stroga nejednakost. Odnosno, slijedi da je $a^6 > 3$.

Pokažimo sada drugu nejednakost. Iz početnog uvjeta slijedi da je:

$$a^3 + 2 = a^5 + a. \tag{4.2}$$

Dijeljenjem gornje jednakosti 4.2 s a^3 slijedi da je

$$1 + \frac{2}{a^3} = a^2 + \frac{1}{a^2}.$$

Sada možemo primijeniti AG nejednakost

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2.$$

Nejednakost mora biti stroga, jer je $a^2 \neq \frac{1}{a^2}$.
Slijedi da je

$$a^3 < 2,$$

odnosno kvadriranjem slijedi da je

$$a^6 < 4.$$

Zadatak 4.1.2. *Dokažite da za pozitivne realne brojeve a i b vrijedi nejednakost*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

(Državno natjecanje, svibanj 2001. godine, 1. razred.)

Rješenje. Kubiranjem dane nejednakosti i primjenom formule za kubiranje zbroja, dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{a}{b} \leq 2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Sređivanjem gornje nejednakosti slijedi

$$3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) \leq 4 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \tag{4.3}$$

Kako je 4.3 nejednakost ekvivalentna početnoj nejednakosti, dovoljno je nju pokazati. To je moguće na dva načina.

Prvi način.
Neka je $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Tada vrijedi da je x pozitivan realan broj, a nejednakost 4.3 postaje

$$3\left(x + \frac{1}{x}\right) \leq 4 + x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Množenjem nejednakosti s x^3 dobivamo ekvivalentne nejednakosti

$$\begin{aligned} x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1 &\geq 0, \\ (x-1)(x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 1) &\geq 0, \\ (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Posljednja nejednakost očito vrijedi za $x \geq 0$.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = 1$, odnosno ako je $a = b$.

Drugi način.
Pomoću AG nejednakosti.
Želimo pokazati da je

$$3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \leq 2 + \frac{a}{b},$$

odnosno

$$3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq 2 + \frac{b}{a}.$$

Izraz $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ možemo zapisati kao $\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot \frac{a}{b}}$, te na taj izraz možemo primijeniti AG nejednakost:

$$\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot \frac{a}{b}} \leq \frac{1 + 1 + \frac{a}{b}}{3},$$

odakle množenjem s 3 slijedi da je $3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \leq 2 + \frac{a}{b}$.

Analogno možemo napraviti i za izraz $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ pa vrijedi i $3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq 2 + \frac{b}{a}$.
Zbrajanjem prethodnih nejednakosti dobivamo

$$3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq 4 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

odakle slijedi nejednakost 4.3 što smo i htjeli pokazati.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

Zadatak 4.1.3. *Neka su a, b i c duljine stranica trokuta površine S. Dokažite da je*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Kada vrijedi jednakost?

(Međunarodna matematička olimpijada, održana u Mađarskoj, 1961. godine.)

Rješenje. Koristeći Heronovu formulu za površinu trokuta, slijedi da je površina trokuta

$$s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je s poluopseg, odnosno $s = \frac{a+b+c}{2}$. Formulu za površinu tada možemo zapisati kao

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

Svaki od faktora pod korijenom je pozitivan jer su a, b, c duljine stranica trokuta pa na umnožak $(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ možemo primijeniti AG nejednakost.

Vrijedi da je $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, odnosno $xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27}$.

Označimo li s $x = -a+b+c, y = a-b+c, z = a+b-c$, slijedi da je

$$\begin{aligned} 4S &= \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\ &\leq \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^3}{27}} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Raspisivanjem posljednjeg izraza dobivamo da vrijedi

$$\frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \frac{3a^2+3b^2+3c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}},$$

odnosno

$$4S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}},$$

što je i trebalo pokazati.
Jednakost u zadatku vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

4.2 Zadaci s Jensenovom nejednakosti

Zadatak 4.2.1. *Neka su a, b, c realni pozitivni brojevi. Dokažite da je*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

(Međunarodna matematička olimpijada, 2001., Washington)

Zadatak je moguće riješiti na više načina. Ovdje ćemo prikazati kako riješiti zadatak korištenjem Jensenove i AG nejednakosti, a ostala rješenja mogu se pronaći u (22).

Rješenje.
Zadani izraz

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

možemo zapisati kao

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{8abc}{a}}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{8abc}{b}}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\frac{8abc}{c}}},$$

što je ekvivalentno izrazu

$$\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3+8abc}}+\frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{b^3+8abc}}+\frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{c^3+8abc}}.$$

Neka je $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+abc}}$. Kako je $f'(x)=\frac{3}{2}abc\sqrt{\frac{x}{(x^3+abc)^3}}>0$ i $f''(x)=\frac{8abc(abc-8x^3)}{4\sqrt{x(x^3+abc)^5}}>0$ za a, b, c, x pozitivne realne brojeve, slijedi da je funkcija f konveksna i strogo rastuća, te možemo primijeniti Jensenovu nejednakost, a zatim i AG nejednakost:

$$\begin{aligned}
f(a)+f(b)+f(c) &\geq 3f\left(\left(\frac{1}{3}a\right)+\left(\frac{1}{3}b\right)+\left(\frac{1}{3}c\right)\right)\\
&\geq 3f\left(\sqrt[3]{abc}\right)\\
&= 3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}>1.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1,$$

a jednakost se postiže ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Zadatak 4.2.2. *Neka su a, b, c pozitivni brojevi za koje vrijedi $abc = 1$. Dokažite da vrijedi*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{2}{3}.$$

(Međunarodna matematička olimpijada, 1995., Toronto)

Rješenje. Uvedimo nove varijable $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Tada vrijedi da je $xyz = 1$. Zadanu nejednakost tada možemo zapisati kao

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \tag{4.4}$$

Uvedimo novu oznaku. Neka je $x + y + z = s$. Tada možemo primijeniti AG nejednakost iz koje slijedi da je $s \geq 3\sqrt[3]{xyz}$. Izraz $\frac{x^2}{y+z}$ možemo zapisati pomoću s kao $\frac{x^2}{s-x}$.

Stoga promatramo funkciju

$$f(x) = \frac{x^2}{s-x}.$$

Za funkciju f vrijedi da je $f''(x) > 0$, za svaki $x \in < 0, s >$. Odnosno, f je strogo konveksna na $< 0, s >$. Sada na funkciju f možemo primijeniti Jensenovu nejednakost, odnosno

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} \geq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &= \frac{x^2}{s-x} + \frac{y^2}{s-y} + \frac{z^2}{s-z} \\ &\geq 3 \cdot \frac{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2}{s - \frac{x+y+z}{3}} = \frac{s}{2} \geq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Nejednakost vrijedi za svaki čvrsti s, pa vrijedi i općenito.

4.3 Zadaci s Bernoullijevom nejednakosti

Zadaci s Bernoullijevom nejednakosti, za razliku od AG nejednakosti, rijetko se javljaju na natjecanjima. Ponekad se javljaju na Međunarodnim matematičkim olimpijadama, no ni tada nije nužno njihovo korištenje već se može doći do istog rezultata na drugi način, kao što ćemo prikazati u primjeru.

Zadatak 4.3.1. *Dokažite da za po volji odabrane prirodne brojeve m i n vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

(Državno natjecanje, travanj 2008., A kategorija za 4. razred srednje škole)

Rješenje. Ako je neki od brojeva m ili n jednak 1, dana nejednakost očito vrijedi. Neka je $m > 1$ i $n > 1$. Tada vrijedi da je $\sqrt[n]{m} = 1 + u$ te $\sqrt[m]{n} = 1 + v$, gdje su u i v neki pozitivni realni brojevi. Primjenom Bernoullijeve nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned} m &= (1+u)^n > 1 + nu, \\ n &= (1 + uv^m > 1 + mv, \end{aligned}$$

odnosno vrijedi da je $u < \frac{m-1}{n}$ i $v < \frac{n-1}{m}$. Dodavanje 1 u oba izraza, slijedi da je

$$\begin{aligned} 1 + u &< \frac{m+n-1}{n}, \\ 1 + v &< \frac{m+n-1}{m}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem gornjih nejednakosti u početni izrazi, vrijedi da je :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} &= \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} \\ &> \frac{n}{m+n-1} + \frac{n}{m+n-1} \\ &= \frac{m+n}{m+n-1} > 1 \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

Napomena 4.3.2. *Do nejednakosti* $m > 1 + nu$ *i* $n > 1 + mv$ *moglo se doći i korištenjem binomne formule*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Zadatak 4.3.3. *Neka je* a_n *niz takav da je* $a_1 = \frac{21}{16}$ *i*

$$2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}, \quad n \geq 2. \tag{4.5}$$

Neka je m pozitivan cijeli broj i m ≥ 2. Dokažite da za n ≤ m vrijedi

$$\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1}. \tag{4.6}$$

(Kineska matematička olimpijada, Kina, 2005.)

Rješenje. Iz jednakosti 4.5 slijedi da je

$$2^n a_n = 3 \cdot 2^{n-1} a_{n-1} + \frac{3}{4}.$$

Neka je $b_n = 2^n a_n$, za $n = 1, 2, \ldots$. Tada prethodnu jednakost možemo zapisati kao

$$b_n = 3b_{n-1} + \frac{3}{4},$$

odnosno kao

$$b_n + \frac{3}{8} = 3\left(b_{n-1} + \frac{3}{8}\right).$$

Kako je $b_1 = 2a_1 = \frac{21}{8}$, vrijedi da je

$$b_n + \frac{3}{8} = 3^{n-1}\left(b + \frac{3}{8}\right) = 3^n,$$

iz čega slijedi

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2^{n+3}}.$$

Kako bismo dokazali nejednakost 4.6, dovoljno je pokazati da vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2-1}{m-n+1},$$

što je ekvivalentno s

$$\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < m - 1. \tag{4.7}$$

Sada, korištenjem Bernoullijeve nejednakosti možemo odozgo ograničiti izraz $1 - \frac{n}{m+1}$. Vrijedi da je

$$1 - \frac{n}{m+1} < \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^n,$$

odnosno, vrijedi

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m < \left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{mn} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{mn} = \left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right]^n. \tag{4.8}$$

Kako je $m \geq 2$ pomoću binomne formule, slijedi da je

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \geq 1 + m \cdot 1 \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2m} \geq \frac{9}{4}.$$

Slijedi da je

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m < \left(\frac{4}{9}\right)^n,$$

odnosno da je

$$1-\frac{n}{m+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}.$$

Ako želimo dokazati 4.8, potrebno je dokazati da vrijedi

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < m-1,$$

odnosno

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < m-1. \tag{4.9}$$

Označimo $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}} = t$. Tada nejednakost 4.9 postaje

$$t(m - t^{m-1}) < m-1,$$

što možemo zapisati kao

$$(t-1)\left[m - (t^{m-1} + t^{m-2} + \cdots + 1)\right] < 0.$$

Gornja nejednakost očito vrijedi, stoga vrijedi i 4.7 što je i trebalo pokazati.

Napomena 4.3.4. *Do nejednakosti u 4.8 mogli smo doći i bez korištenja Bernoullijeve nejednakosti. Izraz* $\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m$ *možemo zapisati kao*

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m &= \left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{mn\text{-}m \text{ puta}} \\
&\leq \left(\frac{m\left(1 - \frac{n}{m+1}\right) + mn - m}{mn}\right)^{mn} \\
&= \left(\frac{m}{m+1}\right)^{nm}
\end{aligned}$$

korištenjem AG nejednakosti.

Bibliografija

[1] S. N. Avvakumov, Yu. N. Kiselev, M. V. Orlov, and A. M. Taras'ev, *PROFIT MAXIMIZATION PROBLEM FOR COBB–DOUGLAS AND CES PRODUCTION FUNCTIONS*, Springer Science+Business Media, Inc., 2010.

[2] X. Bin, L. Peng Yee, *Mathematical Olympiad in China*, World Scientific Publishing Company, 2007.

[3] I. Brnetić, *Nejednakosti na međunarodnim matematičkim olimpijadama*, Osječki matematički list 8 (5-18), Osijek, 2008.

[4] Z. Cvetkovski, *Inequalities*, Springer, Skoplje, 2012.

[5] N. Elezović, *Diskontna matematika*, Element, Zagreb, 2017.

[6] I. Ilišević, *Bernoullijeva nejednakost*, Osječki matematički list 9 (1-6), Osijek, 2009.

[7] I. Ilišević, *Jensenova nejednakost*, Osječki matematički list 5 (9-19), Osijek, 2005.

[8] G. A. Jehle , P. J. Reny, *Advanced Microeconomic Theory*, Pearson Education Limited, Harlow, 2011.

[9] V. Kojić, B. Šego, *O odnosu između jednostavnih i složenih kamata*, Matematičko-fizički list, LXIX 4, 2018.-2019.

[10] V. Kojić, M. Krpan *Primjena težinske AG-nejednakosti u problemu maksimizacije profita: slučaj Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje s dva faktora proizvodnje*, Ekon. misao i praksa dbk. god XXX. (2021.) BR. 1. (205 - 223), Zagreb, 2021.

[11] V. Kojić, *Solving the consumer's utility-maximization problem with CES and Cobb-Douglas utility function via mathematical inequalities*, CRORR 6, 2015.

[12] V. Kojić, *Solving the consumer's utility-maximization problem with CES and Cobb-Douglas utility function via mathematical inequalities*, Springer, 2017.

[13] R. B. Manfrino, J, A. Gomez Ortega, R. V. Delgado, *Inequalities A Mathematical Olympiad Approach*, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, 2009.

[14] L. Neralić , B. Šego, *Matematika*, 1. izdanje, Element, 2009.

[15] J. Pečarić,*Mala matematička biblioteka 6, Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1996.

[16] R. S. Pindyck , D. L. Rubinfels, *Mikroekonomija*, 5. izdanje, Mate

[17] *Proofs of AM-GM*, AoPS Online, `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Proofs_of_AM-GM`

[18] *Proof of Weighted AM-GM*, AoPS Online, `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Proofs_of_AM-GM#Proof_of_Weighted_AM-GM`

[19] A. Puljić, I. Vrankić, M. Oraić, *Dolazak na putanju dohodak-potrošnja u točke maksimalnog zadovoljstva i minimalnih izdataka*, Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, Zagreb, 2006.

[20] B. Šego, *Financijska matematika*, Zgombić & Partneri, 2008.

[21] Školjka, Web arhiva zadataka iz matematike, `https://skoljka.org/search/?q=nejednakost%2C`

[22] *2001 IMO Problems/Problem 2*, AoPS Online, `https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2001_IMO_Problems/Problem_2`

Sažetak

Tema ovog rada su elementarne nejednakosti i njihova primjena u ekonomiji. U radu su istaknute aritmetičko-geometrijska, težinska AG, Jensenova i Bernoullijeva nejednakost te njihova primjena na zadacima s natjecanja i u ekonomiji. Metodu nejednakosti možemo primijeniti prilikom rješavanja problema korisnosti potrošača uz budžetsko ograničenje, jer izostanak provjere nužnih i dovoljnih uvjeta korištenjem derivacija, koji su često netrivijalni, čini primjenu nejednakosti elegantnom komplementarnom metodom diferencijalnom računu. Primjena metode nejednakosti prikazana je na Cobb-Douglasovoj i CES funkciji korisnosti. Nadalje, u radu su navedene dvije radionice čiji je cilj da učenici uz pomoć metode nejednakosti upoznaju pojmove maksimizacije korisnosti potrošača uz dano budžetsko ograničenje na primjeru Cobb-Douglasove funkcije korisnosti te odnos jednostavnih i složenih kamata.

Summary

The topic of this thesis is elementary inequalities and their application in economics. In the paper, we highlighted arithmetic-geometric, weighted AG, Jensen's and Bernoulli's inequality, and their application to tasks from competitions and economics. We can apply the inequality method for solving the problem of consumer utility with a budget constraint, because the absence of checking necessary and sufficient conditions using derivations, which are often non-trivial, makes the application of inequality an elegant complementary method to differential calculus. The application of the inequality method is shown in the Cobb-Douglas and CES utility functions. Furthermore, two workshops are listed in the paper, the aim of which is for students to learn, with the help of the inequality method, the concepts of consumer utility maximization with a given budget constraint using the example of the Cobb-Douglas utility function and the relationship between simple and compound interest.

Životopis

Rođena sam 29. kolovoza 1999. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 2006. godine u Osnovnoj školi Malešnica u Zagrebu. Po završetku osnovne škole, 2014. godine upisujem Gimnaziju Lucijana Vranjanina, prirodoslovno-matematički smjer. U srpnju 2018. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika, nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2022. godine upisujem diplomski studij Matematika, nastavnički smjer na istom fakultetu. Tijekom prve godine diplomskog studija sudjelovala sam u projektu Financijska pismenost, a iste godine sam sudjelovala u ljetnoj školi STEMkey u Lisabonu. Za vrijeme studiranja radim u banci u odjelu knjigovodstvenog usklađivanja te kasnije u odjelu tržišnog rizika.