Američka call opcija u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama

Rogina, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Rogina

AMERIČKA CALL OPCIJA U BLACK-SCHOLES-MERTONOVOM MODELU S DIVIDENDAMA

Diplomski rad

Zagreb, srpanj, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Hvala mentorici doc.dr.sc. Vanji Wagner na pomoći i razumijevanju tijekom pisanja ovog rada.
Posebno hvala roditeljima i Emilu na bezuvjetnoj podršci i ljubavi.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Osnove opcija **3**
1.1 Uvod u opcije . . . 3
1.2 Trgovanje opcijama . . . 4
1.3 Karakteristike ugovora . . . 4
1.4 Utjecaj ključnih faktora na vrijednost opcije . . . 5

2 Primjena Girsanovljevog teorema na Black-Scholes-Mertonov model **7**
2.1 Ekvivalentna martingalna mjera . . . 7
2.2 Girsanovljev teorem . . . 9
2.3 Black-Scholes-Mertonov model . . . 10

3 Američka call opcija u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama **15**
3.1 Black- Scholes- Mertonov model s dividendama . . . 15
3.2 Američka call opcija . . . 18

4 Blackova aproksimacija i Roll-Geske-Whaley pristup **29**
4.1 Blackova aproksimacija . . . 29
4.2 Blackova aproksimacija - primjer . . . 32
4.3 Rollov pristup . . . 34
4.4 Geske formula . . . 36
4.5 Whaleyev ispravak . . . 37
4.6 Roll-Geske-Whaley pristup - primjer . . . 38
4.7 Usporedba pristupa . . . 42

Bibliografija **45**

Uvod

Opcija je široko korištena financijska izvedenica koju investitori koriste kako bi se zaštitili od rizika, špekulirali ili dodatno diverzificirali svoj portfelj. Uvođenjem Black-Scholes-Mertonovog modela Fischer Black, Myron Scholes i Robert C. Merton postavili su osnovu za izračun vrijednosti različitih vrsta opcija na dionicu. Izvorni Black-Scholes-Mertonov model pretpostavlja da se na dionicu ne isplaćuje dividenda što je pojednostavljenje stvarnog stanja na tržištu. U praksi, mnoge dionice imaju redovnu isplatu dividendi što ima utjecaj na vrijednost opcije stoga je važno razviti modele koji uključuju isplate dividendi kako bi se bolje procijenila stvarna vrijednost opcija na financijskom tržištu.

U prvom poglavlju ovog rada dan je ekonomski uvod u opcije te je dan opis trgovanja opcijama na burzi. U drugom poglavlju uvedeni su osnovni matematički pojmovi te je opisan klasičan Black-Scholes-Mertonov model. U trećem poglavlju opisan je generaliziran Black-Scholes-Mertonov model u kojem se pretpostavlja da se na dionicu u fiksnim trenucima isplaćuje dividenda. Također, dan je algoritam za određivanje nearbitražne cijene američke call opcije u takvom modelu. Na kraju, u četvrtom poglavlju opisan je Roll-Geske-Whaley pristup određivanju nearbitražne cijene američke call opcije na dionicu na koju se isplaćuje dividenda te dana usporedba ovakve cijene s cijenom dobivenom pomoću Blackove aproksimacije. Nadalje, pokazana je primjena spomenutih pristupa kroz izračun nearbitražne cijene za konkretnu američku call opciju.

Poglavlje 1

Osnove opcija i trgovanja opcijama

U prvom poglavlju dan je ekonomski uvod u opcije, uključujući osnovne definicije i postupak trgovanja. Objašnjeno je što su opcije, koje vrste opcija postoje te kako se i gdje njima trguje. Također, objašnjeno je kako promjene važnih faktora koji određuju jednu opciju utječu na promjenu njezine vrijednosti.

1.1 Uvod u opcije

Opcija je izvedeni vrijednosni papir kojim se trguje na burzi i OTC-u. Postoje dvije osnovne vrste opcija: call i put. Call opcija je ugovor koji vlasniku ugovora daje pravo, ali ne i obavezu kupiti neku imovinu do određenog datuma ili na određeni datum kojeg zovemo datum dospijeća po unaprijed dogovorenoj cijeni koju zovemo cijena izvršenja. Put opcija je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo, ali ne i obavezu prodati neku imovinu do datuma dospijeća ili na datum dospijeća po unaprijed dogovorenoj cijeni izvršenja. U ugovoru sudjeluju dvije osobe: kupac, odnosno vlasnik opcije te prodavatelj, odnosno pisac opcije. Osnovno svojstvo je da vlasnik opcije ne mora iskoristiti opciju kako bi kupio ili prodao imovinu no ukoliko se on na to odluči pisac opcije je dužan to ispoštovati. Za kupca opcije kažemo da ima dugu poziciju, a za pisca opcije da ima kratku poziciju. Također, razlikujemo američke i europske vrste opcija. Osnovna razlika je što kupac američku opciju može iskoristiti u bilo kojem trenutku do datuma dopijeća, a europsku opciju može iskoristiti samo na datum dospijeća. U praksi, najviše se trguje američkim tipom opcije. Uz ove dvije vrste opcija postoje i druge kompleksnije opcije, npr. azijske opcije, bermudske opcije itd. i njih nazivamo egzotičnim opcijama. Financijska imovina za koju su vezane opcije može biti cijena dionice, dionički indeks, tečaj, kamatna stopa i mnoge druge. U ovom radu detaljnije će biti analizirana američka call opcija na dionicu na koju se isplaćuje dividenda. Ovakvim opcijama najviše se trguje na burzi. Najveća burza na svijetu za trgovanje opcijama na dionice je Chicago Board Option Exchange (CBOE) u Sjedinjenim

Američkim Državama i u sljedećim potpoglavljima je opisana praksa trgovanja ovakvim opcijama na toj burzi.

1.2 Trgovanje opcijama

Nakon definicije što su opcije u ovom potpoglavlju analiziramo kako funkcionira tržište opcijama. Kao što je već ranije spomenuto sav opis tržišta u nastavku odnosi se na burzu, a neki postupci su striktno vezani za Chicago Board Option Exchange (CBOE). Općenito, opcije na dionicu na burzi su američki tip ugovora kojim se kupcu daje pravo kupiti ili prodati 100 dionica. Ovako definiran ugovor je prikladan jer se dionicama općenito trguje u lotovima po 100. Na tržištu je uvedena određena terminologija vezano za opcije. Sve opcije istog tipa (call ili put) nazivaju se klasom opcija. Serija opcija sastoji se od svih opcija iste klase s istim datumom dopijeća i istom cijenom izvršenja. Zapravo, serija opcija odnosi se na konkretan ugovor kojim se trguje. Također, opcije se nazivaju na sljedeći način: in the money, at the money ili out of money. Call opcija na dionicu je in the money ako je cijena dionice veća od cijene izvršenja, at the money ako je cijena dionice jednaka cijeni izvršenja, a out of money ako je cijena dionice manja od cijene izvršenja. Dakle, racionalan kupac opcije će iskoristiti opciju samo ako je ona in the money u trenutku kad je iskorištava. Unutarnja vrijednost opcije u nekom trenutku definira se kao maksimum između nule i vrijednosti koju bi opcija imala ako bi se iskoristila u tom trenutku. Većina burzi koja trguje opcijama koristi tzv. ”market makers” kako bi se olakšalo trgovanje i povećala likvidnost. Market makeri su financijske institucije ili pojedinci koji kotiraju kupovne (bid) i prodajne (offer) cijene neke opcije. Oni su spremni po kupovnoj cijeni kupiti određenu opciju, a po prodajnoj cijeni su je spremni prodati. Postojanje market makera osigurava da se kupnja ili prodaja opcija može izvršiti u bilo kojem trenutku bez odgađanja što povećava likvidnost tržišta. U Sjedinjenim Američkim Državama gdje se najviše trguje američkim opcijama postoji institucija Options Clearing Corporation (OCC) koja ima funkciju klirinške kuće za opcije. Ova organizacija jamči da će pisac opcije ispuniti svoje obveze prema uvjetima opcijskih ugovora i vodi evidenciju svih dugih i kratkih pozicija. OCC ima nekoliko članova i sve trgovine opcijama koje se obavljaju moraju biti odobrene od strane nekog člana.

1.3 Karakteristike ugovora

U ovom potpoglavlju dan je opis kako isplata dividendi utječe na uvjete, odnosno karakteristike opcije. Burze obično ne rade promjene u uvjetima ugovora ako na dionicu postoji gotovinska isplata dividende. Iznimke se mogu dogoditi u slučaju velikih iznosa isplata dividendi. Opcije na burzi su prilagođene za podjele dionica. Podjela dionica nastupa kad se već postojeća dionica podijeli na njih više. Na primjer, n-za-m podjela dionica je podjela kad n novih dionica zamjenjuje m prethodnih, postojećih dionica. To rezultira padom cijene dionica na $\frac{m}{n}$ vrijednosti prethodne cijene. U ovakvom slučaju se onda mijenjaju i neke stavke ugovora. Cijena izvršenja smanji se na $\frac{m}{n}$ originalno ugovorene cijene izvršenja i broj dionica pokrivene opcijom povećaju se na $\frac{n}{m}$ prethodnog broja. Ako cijena dionice padne ovako kako je opisano, tj. kako bi se očekivalo i naprave sve opisane izmjene ugovora, pozicije kupca i pisca opcije ostaju nepromijenjene. Također, opcije na dionice se prilagođavaju dioničkim dividendama. Dionička dividenda podrazumijeva izdavanje dodatnih dionica već postojećim dioničarima. Na primjer, 20% dionička dividenda podrazumijeva da se svakom dioničaru daje jedna nova dionica na već pet njegovih postojećih. Zbog dioničkih dividendi očekujemo pad cijene jedne dionice i 20% dioničku dividendu možemo poistovjetiti sa 6-za-5 podjelom dionica. Dakle, kao što je već i opisano, očekujemo pad cijene dionica na $\frac{5}{6}$ prethodne vrijednosti i ugovor koji predstavlja opciju mijenja se na već opisan način kod podjele dionica.

1.4 Utjecaj ključnih faktora na vrijednost opcije

U ovom potpoglavlju opisano je kako promjena vrijednosti bitnih faktora utječe na vrijednost američke call opcije na dionicu. Ključni faktori koje promatramo su: početna cijena dionice, cijena izvršenja, vrijeme do dospijeća, volatilnost cijene dionice, bezrizična kamatna stopa te očekivane isplate dividendi. Promatramo kako promjena jednog od faktora utječe na vrijednost opcije kad svi ostali faktori ostanu nepromijenjeni.

Američka call opcija ima veću vrijednost ukoliko je cijena dionice na koju je napisana veća te ukoliko je cijena izvršenja manja. Također, ukoliko se tijekom trajanja opcije povećava cijena dionice ili smanjuje cijena izvršenja utoliko se vrijednost opcije povećava. To proizlazi iz činjenice da kupac opcije pri iskorištavanju opcije zaradi razliku cijene dionice i cijene izvršenja. Nadalje, vrijednost call opcije se povećava, ili barem ostaje ista ako do dospijeća ima više vremena. Razlog tome je to da vlasnik opcije s više vremena do dospijeća ima mogućnost iskoristiti opciju u svim trenucima u kojima ima i vlasnik opcije s manje vremena do dospijeća uz još nekoliko dodatnih trenutaka. Ipak, ovo ne mora vrijediti uvijek. Promotrimo dvije američke call opcije na istu dionicu tako da jedna opcija ima vrijeme dospijeća za jedan mjesec, a druga za dva mjeseca. Pretpostavimo da za 6 tjedana očekujemo veliku isplatu dividende. U ovom slučaju bi opcija s vremenom dospijeća za jedan mjesec mogla vrijediti više zbog očekivane dividende koja uzorkuje pad cijene dionice, a i sama isplata dividende donosi zaradu. Promotrimo sada kako promjena volatilnosti utječe na vrijednost opcije. Ako je volatilnost cijene dionice velika tada je veća vjerojatnost da će cijena dionice postići puno veće vrijednosti od trenutne, ali i puno manje vrijednosti od trenutne. Vlasnik call opcije može puno profitirati ukoliko se cijena dionice jako poveća, no ne riskira puno ako cijena dionice jako padne jer tada može samo odlučiti ne iskoristiti opciju. Stoga, povećanjem volatilnosti cijene dionice povećava se vrijednost opcije. Nadalje, ako se poveća bezrizična kamatna stopa na tržištu, očekivani povrat na dionicu poraste. Također, diskontirane vrijednosti budućih novčanih tokova su manje. Zajednički utjecaj opisanog vodi to toga da povećanjem bezrizične kamatne stope na tržištu vrijednost američke call opcije raste. Na kraju, promotrimo utjecaj očekivanih dividendi. Kao što je ranije spomenuto, isplata dividendi uzrokuje pad cijene dionice što je nepovoljno za kupca call opcije jer tada može ostvariti manju dobit preko razlike između cijene dionice i cijene izvršenja za koju pretpostavljamo da je ostala ista. Slijedi da vrijednost opcije pada ako očekujemo da će iznos isplate dividendi biti veći jer je pad cijene dionice proporcionalan iznosu dividende.

Ovime je dan kratak pregled o opcijama. Više detalja može se pronaći u sljedećoj literaturi [4].

Poglavlje 2

Primjena Girsanovljevog teorema na Black-Scholes-Mertonov model

Cilj ovog poglavlja je uvesti osnovne pojmove pomoću kojih možemo objasniti ekvivalentnu martingalnu mjeru i iskazati Girsanovljev teorem te Teorem o reprezentaciji martingala. Nadalje, dan je opis Black-Scholes-Mertonovog modela te je pokazana primjena Girsanovljeg teorema za dobivanje ekvivalentne martingalne mjere u ovom modelu te izračun cijene neke financijske izvedenice u ovom modelu.

2.1 Ekvivalentna martingalna mjera

Na početku uvodimo nekoliko osnovnih pojmova kako bi mogli objasniti što je ekvivalentna martingalna mjera i zašto nam je potrebna. Neka je $T > 0$ fiksno vrijeme te neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$. Promatramo neprekidni model financijskog tržišta koji se sastoji od jedne rizične financijske imovine i jedne nerizične financijske imovine. Nerizičnu financijsku imovinu predstavlja novac koji se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t : t \in [0, T])$ koja je $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces. Rizičnu financijsku imovinu predstavlja dionica čija je vrijednost $\mathbb{F}$-adpatirani slučajni proces $S = (S_t : t \in [0, T])$.

Definicija 2.1.1. *Portfelj ili startegija je $\mathbb{F}$-adaptirani slučajni proces $\Phi = \left(\left(\Phi^0_t, \Phi^1_t\right) : t \in [0, T]\right)$ gdje je Φ^0_t količina novca u trenutku t, a Φ^1_t količina dionica u trenutku t.*

Označimo $U_t = \int_0^t r_s ds$ i $R_t = e^{U_t}$. Vrijednost portfelja u trenutku t dana je s

$$V^\Phi_t = \Phi^0_t R_t + \Phi^1_t S_t, \ t \in [0, T].$$

Definicija 2.1.2. *Portfelj* $\Phi = \left(\left(\Phi_t^0, \Phi_t^1\right) : t \in [0, T]\right)$ *je samofinancirajući ako je*

$$\int_0^T \left|\Phi_t^0\right| dt + \int_0^T \left|\Phi_t^1\right|^2 dt < \infty \quad \mathbb{P} - g.s$$

te za sve $t \in [0, T]$

$$V_t^\Phi = V_0^\Phi + \int_0^t \Phi_s^0 dR_s + \int_0^t \Phi_s^1 dS_s \quad \mathbb{P} - g.s.$$

Financijska izvedenica kao što je američka call opcija u modelu financijskih tržišta predstavlja jedan slučajni zahtjev.

Definicija 2.1.3. *Slučajni zahtjev je slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *takva da je* $0 < C \leq \infty$ $\mathbb{P} - g.s.$

Želimo da cijena slučajnog zahtjeva bude jedinstvena što se postiže primjenom replicirajućeg portfelja. Replicirajući portfelj za slučajni zahtjev C je samofinancirajući portfelj Φ takav da je $V_T^\Phi = C$ i $V_t^\Phi \geq 0$ $\mathbb{P} - g.s.$ za sve $t \in [0, T]$. Ako takav portfelj postoji kažemo da je slučajni zahtjev C dostižan. Pomoću replicirajućeg portfelja možemo definirati kada model financijskog tržišta dopušta arbitražu.

Definicija 2.1.4. *Samofinancirajući portfelj* Φ *je arbitraža ako je* $V_0^\Phi = 0$, $V_t^\Phi \geq 0$ $\mathbb{P} - g.s.$ *za sve* $t \in [0, T]$ *i* $\mathbb{P}\left(V_T^\Phi > 0\right) > 0$.

Postojanje arbitraže ukazuje na neefikasnost tržišta i u relanom svijetu ovakva pojava je rijetka pa su zbog toga u ovom radu promatrana tržišta bez arbitraže. Po definiciji arbitraže nije jednostavno provjeriti da model tržišta ne dopušta arbitražu. Zbog toga uvodimo pojam ekvivalentne martingalne mjere koja će znatno olakšati provjeru dopušta li model tržišta arbitražu. Vrlo važnu ulogu u definiranju ekvivalentne martringalne mjere ima diskontirani proces vrijednosti dionica $\tilde{S} = (\tilde{S}_t : t \in [0, T])$.

Definicija 2.1.5. *Vjerojatnosna mjera* $\mathbb{P}^*$ *na* $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ *je ekvivalentna martingalna mjera za* $\mathbb{P}$ *ako je* $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ *i* $\tilde{S} = (\tilde{S}_t : t \in [0, T])$ *je* $\mathbb{P}^*$*-martingal.*

Ekvivalentnu martingalnu mjeru još zovemo i mjera neutralna na rizik. Sljedeći teorem nam daje vezu između arbitraže i ekvivalentne martingalne mjere.

Teorem 2.1.6. *(1. fundamentalni teorem određivanja cijene imovine) Tržište ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.*

Najjednostavniji modeli financijskih tržišta bez arbitraže su oni u kojima su svi slučajni zahtjevi dostižni, odnosno modeli u kojima za svaki slučajni zahtjev postoji replicirajući portfelj.

Definicija 2.1.7. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.*

Teorem 2.1.8. *(2. fundamentalni teorem određivanja cijene imovine) Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Tada je tržište potpuno ako i samo ako postoji jednistvena ekvivalentna martingalna mjera.*

Kasnije ćemo pokazati da je Black-Scholes-Mertonov model potpun uz određene pretpostavke što će nam olakšati izračun cijene neke financijske izvedenice.

2.2 Girsanovljev teorem

Promatramo proceduru zamjene mjere pomoću koje možemo promijeniti distribuciju slučajne varijable. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je Z nenegativna slučajna varijabla za koju vrijedi $\mathbb{E}Z = 1$. Definiramo $\mathbb{P}^* : \mathcal{F} \to [0, 1]$ formulom

$$\mathbb{P}^*(A) := \int_A Z(\omega)\, dP(\omega),\ A \in \mathcal{F}.$$

Ovako definirana mjera $\mathbb{P}^*$ je vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ i ekvivalentna je s vjerojatnosnom mjerom $\mathbb{P}$. Naime, ako je $\mathbb{P}(A) = 0$ tada je prema gornjoj definiciji $\mathbb{P}^*(A) = 0$ i vrijedi $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$. Također, po definiciji od $\mathbb{P}^*$ vrijedi $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[1_A Z]$. Pretpostavimo da je $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$. Sada, ako je $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}[1_A Z] = 0$ tada zbog $Z > 0$ $\mathbb{P}$-g.s. slijedi da je $\mathbb{P}(A) = 0$, tj. $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$.

Teorem 2.2.1. *(Girsanovljev teorem) Neka je $B = (B_t : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0, T])$ filtracija za to Brownovo gibanje. Za adaptiran slučajni proces $\Phi = (\Phi_t : t \in [0, T])$ takav da je*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Phi_s^2 ds\right] < \infty$$

definiramo

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t \Phi_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_u^2 du\right\},\ Z = Z_T$$

$$B_t^* = B_t + \int_0^t \Phi_u du.$$

Ako vrijedi

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Phi_u^2 Z_u^2 du\right] < \infty$$

tada je slučajni proces $B^* = (B_t^* : t \in [0, T])$ Brownovo gibanje obzirom na vjerojatnost $\mathbb{P}^*$ definiranu formulom $\mathbb{P}^*(A) := \int_A Z(\omega) dP(\omega),\ A \in \mathcal{F}$.

Pomoću Girasnovljevog teorema možemo u Black-Scholes-Mertonovom modelu dobiti ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. S obzirom da je ta mjera ekvivalentna objektivnoj vjerojatnosti $\mathbb{P}$ one će se slagati u tome koji su putevi kretanja cijena rizične imovine, tj. dionica mogući. Idući teorem će nam omogućiti da u Black-Scholes-Mertonovom modelu ispitamo potpunost.

Teorem 2.2.2. *(Teorem o reprezentaciji martingala) Neka je $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0,T])$ filtracija generirana tim Brownovim gibanjem. Pretpostavimo da je $M = (M_t : t \in [0,T])$ martingal s obzirom na filtraciju $\mathbb{F}$ i vjerojatnost $\mathbb{P}$, odnosno Brownovski martingal. Tada postoji adaptiran slučajni proces $\Gamma = (\Gamma_t : t \in [0,T])$ takav da je*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_s dB_s, \ 0 \leq t \leq T.$$

2.3 Black-Scholes-Mertonov model

U ovom potpoglavlju opisan je Black-Scholes-Mertonov model i prikazana primjena Girsanovljevog teorema za dobivanje ekvivalentne martingalne mjere u tom modelu. Također, pokazano je kako računamo cijenu proizvoljnog slučajnog zahtjeva, odnosno neke financijske izvedenice u ovom modelu. Neka je $B = (B_t : t \in [0,T])$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in [0,T])$ filtracija za to Brownovo gibanje. Neka je $T > 0$ proizvoljan vremenski trenutak.

U Black-Scholes-Mertonovom modelu tržišta pretpostavljamo da imamo dva financijska instrumenta: novac kao nerizičnu imovinu i dionicu kao rizičnu imovinu. Novac se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = (r_t : t \in [0,T])$ koja je neslučajna funkcija. Cijenu dionice modeliramo generaliziranim geometrijskim Brownovim gibanjem i označavamo sa $S = (S_t : t \in [0,T])$. Generalizirano geometrijsko Brownovo gibanje zadovoljava sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$dS_t = \alpha_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \ 0 \leq t \leq T$$

pri čemu su $\alpha = (\alpha_t : t \in [0,T])$ i $\sigma = (\sigma_t : t \in [0,T])$ neslučajne funkcije. Proces α označava srednju stopu povrata na dionicu, a proces σ volatilnost dionice. Pretpostavljamo da je $\sigma_t > 0$ za sve $t \in [0,T]$.

Sada kada znamo kako modeliramo cijenu dionice možemo odrediti stohastičku diferencijalnu jednadžbu koja opisuje kretanje vrijednosti portfelja $X = (X_t : t \in [0,T])$ u ovom modelu. Promatramo promjenu vrijednosti portfelja dX_t od trenutka t do trenutka $t + \Delta t$. Pretpostavimo da u trenutku t imamo Δ_t dionica. Promjena vrijednosti portfelja je tada

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \Delta_t \left(S_{t+\Delta t} - S_t\right) + (X_t - \Delta_t S_t)\left(e^{\int_t^{t+\Delta t} r_s ds} - 1\right).$$

Dakle promjena dolazi od promjene vrijednosti dionice i zarađene kamate. Puštanjem $\Delta t \to 0$ dobivamo sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$dX_t = \Delta_t dS_t + r_t(X_t - \Delta_t S_t)dt.$$

Uvrštavajući izraz za dS_t u formulu dobivamo

$$dX_t = r_t X_t dt + \Delta_t(\alpha_t - r_t)S_t dt + \Delta_t \sigma_t S_t dB_t.$$

Definicija 2.3.1. *Proces diskontiranja je slučajni proces $D = (D_t : t \in [0,T])$ oblika $D_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$.*

Označimo $U_t = \int_0^t r_s ds$ i $R_t = e^{U_t}$. Odavde slijedi da je $dU_t = r_t dt$ i $dU_t dU_t = 0$. Uz funkciju $f(x) = e^{-x}$ primjenom Itôve formule za Itôv proces dobivamo:

$$\begin{aligned} dD_t = df(U_t) &= f'(U_t)dU_t + \frac{1}{2}f''(U_t)dU_t dU_t \\ &= -f(U_t)dU_t = -D_t r_t dt. \end{aligned}$$

Koristeći Itôvu formulu za produkt slijedi da za diskontiranu cijenu dionice $\tilde{S} = (\tilde{S}_t : t \in [0,T])$ vrijedi stohastička diferencijalna jednadžba:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t = d(D_t S_t) &= D_t(\alpha_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t) - S_t r_t D_t dt \\ &= (\alpha_t - r_t)D_t S_t dt + \sigma_t D_t S_t dB_t. \end{aligned}$$

Neka je proces $\Theta = (\Theta_t : t \in [0,T])$ definiran s $\Theta_t = \frac{\alpha_t - r_t}{\sigma_t}$. Tada za diskontiranu cijenu dionice vrijedi

$$d\tilde{S}_t = \sigma_t D_t S_t \left[\Theta_t dt + dB_t\right].$$

Proces $\Theta = (\Theta : t \in [0,T])$ zovemo tržišna cijena rizika ili Sharpeov omjer. Neka je $\mathbb{P}^*$ vjerojatnost kao u Girsanovljevom teoremu uz proces Θ_t. Po Girsanovljevom teoremu imamo $B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_s ds$ što u difrencijalnom obliku možemo zapisati kao $dB_t^* = dB_t + \Theta_t dt$. Uvrštavajući ovaj diferencijalni oblik u diferencijalnu jednadžbu za diskontiranu cijenu dionica dobivamo

$$d\tilde{S}_t = \sigma_t D_t S_t dB_t^*.$$

Iz prethodne stohastičke diferencijalne jednadžbe vidimo da je $\tilde{S}$ Itôv integral obzirom na $\mathbb{P}^*$-Brownovo gibanje B^*, a kako je svaki Itôv integral martingal onda slijedi da je i $\tilde{S}$ $\mathbb{P}^*$-martingal. Prema definiciji ekvivalentne martingalne mjere slijedi da je $\mathbb{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Prema prvom fundamentalnom teoremu o određivanju cijena imovine slijedi da Black-Scholes-Mertonov model ne dopušta arbitražu.

Promotrimo sada diskontiranu vrijednost portfelja $\tilde{X} = (D_t X_t : t \in [0,T])$ s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Koristeći Itôvu formulu za produkt dobivamo

$$\begin{aligned} d(D_t X_t) &= D_t(r_t X_t dt + \Delta_t(\alpha_t - r_t) S_t dt + \Delta_t \sigma_t S_t dB_t) - r_t D_t X_t dt \\ &= \Delta_t(\alpha_t - r_t) S_t D_t dt + \Delta_t \sigma_t S_t D_t dB_t \\ &= \Delta_t \sigma_t S_t D_t (\Theta_t dt + dB_t). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem da je $dB_t^* = dB_t + \Theta_t dt$ kao ranije dobivamo sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu:

$$d\tilde{X}_t = \Delta_t \sigma_t S_t D_t dB_t^*.$$

Slijedi da je proces diskontiranih vrijednosti portfelja također $\mathbb{P}^*$-martingal.

Black-Scholes-Mertonov model općenito ne mora biti potpun, no bit će potpun ukoliko za filtraciju $\mathbb{F}$ uzmemo filtraciju generiranu Brownovim gibanjem B, odnosno ako vrijedi $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$. Prije nego što pokažemo ovu tvrdnju navodimo još jedan teorem.

Teorem 2.3.2. *(Karakterizacija dostižnosti) Slučajni zahtjev $C \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}^*)$ je dostižan ako i samo ako je $\mathbb{P}^*$-martingal $M = (M_t : t \in [0,T])$ definiran s $M_t = \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_t]$ oblika*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s d\tilde{S}_s, \; t \in [0,T]$$

gdje je $\theta = (\theta_t : t \in [0,T])$ neki adaptiran slučajni proces.

Neka je C proizvoljan slučajni zahtjev u ovom modelu i proces $M = (M_t : t \in [0,T])$ definiran s $M_t = \mathbb{E}[D_T C | \mathcal{F}_t]$. Slučajni proces M je je $\mathbb{P}^*$-martingal. Prema Teoremu o reprezentaciji martingala tada postoji slučajni proces $\Gamma^* = (\Gamma_t^* : t \in [0,T])$ takav da M ima reprezentaciju

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_s^* dB_s^*, \; t \in [0,T].$$

S obzirom da smo pretpostavili da je $\sigma_t > 0$, slijedi da je $\sigma_t D_t S_t > 0$ pa iz stohastičke diferencijalne jednadžbe za cijenu dionice dobivamo

$$dB_t^* = \frac{d\tilde{S}_t}{\sigma_t D_t S_t}$$

pa slijedi da martingal M ima reprezentaciju

$$M_t = M_0 + \int_0^t \Gamma_s^* \frac{d\tilde{S}_s}{\sigma_s D_s S_s}, \; t \in [0,T].$$

Prema karakterizaciji dostižnosti slijedi da je C dostižan slučajni zahtjev, a kako je C bio izabran proizvoljno slijedi da je svaki slučajni zahtjev dostižan, odnosno Black-Scholes-Mertonov model uz ovu pretpostavku je potpun.

Na kraju, promotrimo kako izračunati cijenu nekog slučajnog zahtjeva C u potpunom Black-Scholes-Mertonovom modelu. Ovaj problem rješavamo primjenom replicirajućeg portfelja za taj slučajni zahtjev. Ako s $X = (X_t : t \in [0, T])$ označimo vrijednost portfelja koji replicira slučajni zahtjev tada mora vrijediti

$$X_T = C \ g.s.$$

Nadalje, zbog nepostojanja arbitraže na tržištu cijena slučajnog zahtjeva, u oznaci $\Pi(C) = (\Pi(C)_t : t \in [0, T])$ u trenutku t mora biti jednaka vrijednosti replicirajućeg portfelja za taj slučajni zahtjev u trenutku t. Sada, zbog toga što je diskontirani proces vrijednosti portfelja martingal s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ slijedi:

$$D_t \Pi(C)_t = D_t X_t = \mathbb{E}^*[D_T X_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_t]$$

Dakle, cijena slučajnog zahtjeva u trenutku t jednaka je

$$\Pi(C)_t = X_t = R_t \mathbb{E}^*[D_T C | \mathcal{F}_t].$$

Poglavlje 3

Američka call opcija u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama

U ovom poglavlju opisan je Black-Scholes-Mertonov model u kojem se na rizičnu imovinu, tj. dionicu isplaćuje dividenda. Promatramo situaciju u kojoj se dividenda isplaćuje u nekim fiksnim vremenskim trenutcima. Uz opis modela bit će prikazan algoritam za određivanje vrijednosti američke call opcije u ovom modelu.

3.1 Black- Scholes- Mertonov model s dividendama

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da su diskontirane cijene dionica martingali obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$ dobivenu pomoću Girsanovljevog teorema. Također, pokazano je da je i diskontirana vrijednost portfelja također $\mathbb{P}^*$-martingal. Da bi diskontirana vrijednost portfelja koji investira u dionice koje isplaćuju dividendu bila martingal, diskontirana vrijednost dionice s reinvestiranim dividendama mora biti martingal. Međutim, sama diskontirana vrijednost dionice nije martingal.

Promatramo situaciju u kojoj se dividenda isplaćuje na određene dane. To znači da postoje vremena $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ i u svakom trenutku t_j za $j \in \{1, 2, \dots n\}$ isplati se dividenda. Pretpostavimo da je za sve $j \in \{1, 2, \dots n\}$ a_j $\mathcal{F}_j$-izmjeriva slučajna varijabla koja prima vrijednosti u $[0, 1]$. Vrijednost a_j predstavlja koliki udio cijene dionice iznosi dividenda. Dakle, u trenutku t_j isplaćuje se dividenda iznosa $a_j S_{t_j-}$ pri čemu je S_{t_j-} cijena dionice neposredno prije isplate dividende. Cijena dionice nakon isplate dividende jednaka je cijeni dionice prije isplate dividende umanjena za iznos dividende:

$$S_{t_j} = S_{t_j-} - a_j S_{t_j-} = \left(1 - a_j\right) S_{t_j-} \tag{3.1}$$

Ako je $a_j = 0$ dividenda se ne isplaćuje u trenutku t_j, a ako je $a_j = 1$ isplaćuje se cjelokupna vrijednost dionice nakon čega vrijednost dionice pada na 0.
Označimo $t_0 = 0$ i $t_{n+1} = T$ no kao što je i gore pretpostavljeno to nisu trenutci u kojima se isplaćuje dividenda. Pretpostavljamo da se između dvije isplate dividendi vrijednost dionice modelira generaliziranim geometrijskim Brownovim gibanjem, tj:

$$dS_t = \alpha_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \quad t_j \leq t < t_j + 1, j = 0, 1, \dots n. \tag{3.2}$$

Jednadžbe (3.1) i (3.2) u potpunosti određuju evoluciju cijene dionice.

Promotrimo vrijednost portfelja X_t u ovom modelu za neki vremenski trenutak $t \in [0, T]$ u kojem imamo Δ_t dionica. Stohastička diferencijalna jednadžba za vrijednost portfelja između dva trenutka u kojima imamo isplatu dividendi jednaka je kao u prošlom poglavlju:

$$dX_t = r_t X_t dt + \Delta_t(\alpha_t - r_t) S_t dt + \Delta_t \sigma_t S_t dB_t.$$

U danima kad nastupa isplata dividendi vrijednost dijela portfelja u dionicama gubi na vrijednosti zbog pada cijene dionice, no kako se taj dio odmah reinvestira u portfelj, vrijednost portfelja se ne mijenja i stohastička diferencijalna jednadžba za vrijednost portfelja jednaka je prethodnoj:

$$dX_t = r_t X_t dt + \Delta_t \sigma_t S_t (\Theta_t dt + dB_t)$$

pri čemu je Θ_t tržišna cijena rizika kao u prethodnom poglavlju. Analogno kao u prethodnom poglavlju, pomoću Girsanovljevog teorema definiramo vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^*$ pomoću slučajnog procesa Θ_t. Tada je $B_t^* = B_t + \int_0^t \Theta_s ds$ Brownovo gibanje u odnosu na mjeru $\mathbb{P}^*$. Mjera $\mathbb{P}^*$ je mjera neutralna na rizik. Uvrštavajući diferencijalni oblik $dB_t^* = dB_t + \Theta_t dt$ u stohastičku diferencijalnu jednadžbu za vrijednost portfelja dobivamo

$$dX_t = r_t X_t dt + \Delta_t \sigma_t S_t dB_t^*.$$

Koristeći Itôvu formulu za produkt dobivamo da za diskontiranu vrijednost portfelja vrijedi:

$$d(D_t X_t) = \Delta_t \sigma_t S_t D_t dB_t^*$$

pa je diskontirana vrijednost portfelja $\mathbb{P}^*$-martingal. Neka je C neki slučajni zahtjev, npr. američka call opcija. Taj slučajni zahtjev repliciramo pomoću portfelja čija je vrijednost u trenutku t jednaka X_t. Budući da je diskontirana vrijednost portfelja $\mathbb{P}^*$-martingal te da je vrijednost replicirajućeg portfelja X_t u trenutku t jednaka cijeni slučajnog zahtjeva $\Pi(C)_t$ u trenutku t slijedi:

$$D_t \Pi(C)_t = D_t X_t = \mathbb{E}^* \left[D_T X_T | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^* \left[D_T C | \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T].$$

Dobivena je ista formula kao i u slučaju bez dividendi. Razlika između modela s divedendama i bez dividendi je u evoluciji cijene dionica uz mjeru $\mathbb{P}^*$.

Usporedimo evoluciju cijene dionice u Black-Scholes-Mertonovom modelu bez dividendi i u istom modelu gdje se na dionicu u fiksnim trenutcima isplaćuje dividenda. Pretpostavljamo da su kamatna stopa r, volatilnost σ i a_j konstantni. U modelu bez dividendi cijena dionice se kroz cijeli period promatranja modelira geometrijskim Brownovim gibanjem:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Uvrštavajući

$$dB_t = dB_t^* - \Theta_t dt$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t (dB_t^* - \Theta_t dt) = \alpha S_t dt + \sigma S_t \left(dB_t^* - \frac{\alpha - r}{\sigma} dt \right) \\ &= r S_t dt + \sigma S_t dB_t^*. \end{aligned}$$

Rješenje ove stohastičke diferencijalne jednadžbe je:

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \sigma B_t^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right\}, \quad t \in [0, T].$$

Promotrimo sada model u kojem se na dionicu isplaćuje dividenda. Tada cijenu dionica između dva trenutka u kojima se isplaćuje dividenda modeliramo kao i u modelu bez dividendi:

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dB_t^*, \quad t_j \le t < t_{j+1}, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Koristeći rješenje ove stohastičke diferencijalne jednadžbe slijedi:

$$S_{t_{j+1}-} = S_{t_j} \exp\left\{ \sigma \left(B_{t_{j+1}}^* - B_{t_j}^* \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_{j+1} - t_j) \right\}.$$

Iz (3.1) i prethodne jednakosti slijedi:

$$S_{t_{j+1}} = \left(1 - a_{j+1} \right) S_{t_j} \exp\left\{ \sigma \left(B_{t_{j+1}}^* - B_{t_j}^* \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_{j+1} - t_j) \right\}.$$

Odavde slijedi:

$$\frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} = (1 - a_{j+1}) \exp\left\{ \sigma \left(B_{t_{j+1}}^* - B_{t_j}^* \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_{j+1} - t_j) \right\} \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Neka je t proizvoljni trenutak u periodu $[0, T]$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $t \in [t_k, t_{k+1})$ odnosno da se vrijeme t nalazi između k-te i $(k+1)$-ve isplate dividende za neki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\frac{S_t}{S_0} &= \frac{S_{t_k} \exp\left\{\sigma\left(B_t^* - B_{t_k}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_k)\right\}}{S_0} \\
&= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{S_{t_{j+1}}}{S_{t_j}} \cdot \exp\left\{\sigma\left(B_t^* - B_{t_k}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_k)\right\} \\
&= \prod_{j=0}^{k-1}(1 - a_{j+1}) \cdot \exp\left\{\sigma B_{t_k}^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t_k\right\} \cdot \exp\left\{\sigma\left(B_t^* - B_{t_k}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_k)\right\} \\
&= \prod_{j=0}^{k-1}(1 - a_{j+1}) \cdot \exp\left\{\sigma B_t^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right\}.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi:

$$S_t = S_0 \prod_{j=0}^{k-1}(1 - a_{j+1}) \cdot \exp\left\{\sigma B_t^* + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right\}.$$

Usporedimo li ovu jednakost s jednakosti koju smo dobili za cijenu dionice u Black-Scholes-Mertonovom modelu bez dividendi uočavamo sljedeće: cijena dionice koja isplaćuje dividendu u fiksnim trenutcima u trenutku t koji se nalazi između k-te i $(k+1)$-ve isplate dividende uz početnu vrijednost S_0 jednaka je cijeni dionice u istom trenutku t koja ne isplaćuje dividendu uz početnu vrijednost $S_0 \prod_{j=0}^{k-1}(1 - a_{j+1})$.

3.2 Vrijednost američke call opcije

U ovom potpoglavlju promatramo algoritam za određivanje vrijednosti američke call opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama koji je opisan u prethodnom potpoglavlju. U nastavku rada za pojam vrijednosti opcije korišten je pojam nearbitražne cijene. Naime, vrijednost opcije predstavlja teorijsku cijenu koju dobivamo pomoću modela i ona pomaže trgovcima na financijskom tržištu u procjeni koliko bi opcija trebala vrijediti, ali treba imati na umu da se stvarna cijena kojom će se na kraju trgovati na tržištu može razlikovati. Neki od razloga razlike stvarne cijene i teorijske cijene mogu biti anomalije na tržištu, razlika u ponudi i potražnji, razlika u likvidnosti tržišta i troškovi transakcija. U spomenutom algoritmu ćemo cijenu američke call opcije uspoređivati s cijenom europskih call opcija. Europska call opcija s dospijećem T i cijenom izvršenja K u Black-Scholes-Mertonovom modelu je ugovor između kupca i prodavatelja opcije pri čemu kupac opcije ima pravo, ali ne i obavezu kupnje dionice u trenutku T po cijeni K. Američka call opcija s dospijećem T i cijenom izvršenja K je ugovor između kupca i prodavatelja, pri čemu kupac opcije ima pravo, ali ne i obavezu kupnje dionice u proizvoljnom trenutku do trenutka T

po cijeni K. Osnovna razlika između ove dvije opcije je što kod europske opcije kupac može kupiti dionicu, tj. iskoristiti opciju samo u vremenu dospijeća, a kod američke opcije kupac može iskorititi opciju u bilo kojem trenutku sve do vremena dospijeća.
Europska call opcija je slučajni zahtjev u Black-Scholes-Mertonovom modelu tržišta.

Definicija 3.2.1. *Europska call opcija s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C = (S_T - K)^+$.*

Promotrimo američku call opciju. U trenutku $t \in [0, T]$ unutarnja vrijednost te opcije je $(S_t - K)^+$. Stavimo $Z_t = (S_t - K)^+,\ t \in [0, T]$.

Definicija 3.2.2. *Američka call opcija je adaptiran niz slučajnih varijabli $Z = (Z_t : t \in [0, T])$.*

Prije nego što krenemo na analizu cijene američke call opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama promotrimo tvrdnje koje vrijede u općenitijem slučaju. U tom općenitijem slučaju promatarmo proizvoljnu američku financijsku izvedenicu, dakle ne nužno call opciju. Također, pretpostavljamo da cijenu dionice modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem:

$$dS_t = rS_t + \sigma S_t dB_t^*$$

pri čemu su kamatna stopa r i volatilnost σ konstantni, a B_t^* je Brownovo gibanje obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$. U ovom slučaju se na dionicu ne isplaćuje dividenda.

Lema 3.2.3. *Neka je $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ konveksna funkcija za koju vrijedi $h(0) = 0$. Tada je diskontirana unutarnja vrijednost $e^{-rt} h(S_t)$ američke financijske izvedenice koja isplaćuje $h(S_t)$ prilikom izvršenja submartingal.*

Dokaz. Kako je $h(x)$ konveksna tada za sve $0 \le x_1 \le x_2$ i sve $0 \le \lambda \le 1$ vrijedi

$$h((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1 - \lambda)h(x_1) + \lambda h(x_2).$$

Uvrštavajući $x_1 = 0$ i $x_2 = x$ u gornju nejednakost i koristeći da vrijedi $h(0) = 0$ dobivamo da za sve $x \ge 0$ i sve $0 \le \lambda \le 1$ vrijedi

$$h(\lambda x) \le \lambda h(x).$$

Za $0 \le u \le t \le T$ imamo da je $0 \le e^{-r(t-u)} \le 1$. Ako u prethodnoj nejednakosti uzmemo $\lambda = e^{-r(t-u)}$ za $0 \le u \le t \le T$ dobivamo da vrijedi:

$$\mathbb{E}^* \left[e^{-r(t-u)} h(S_t) \middle| \mathcal{F}_u \right] \ge \mathbb{E}^* \left[h\left(e^{-r(t-u)} S_t \right) \middle| \mathcal{F}_u \right].$$

Koristeći uvjetnu Jensenovu nejednakost (pretpostavili smo da je $h(x)$ konveksna funkcija) imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\left[h\left(e^{-r(t-u)}S_t\right)\Big|\mathcal{F}_u\right] &\geq h\left(\mathbb{E}^*\left[e^{-r(t-u)}S_t\big|\mathcal{F}_u\right]\right)\\ &= h\left(e^{ru}\mathbb{E}^*\left[e^{-rt}S_t\big|\mathcal{F}_u\right]\right).\end{aligned}$$

Kako je $e^{-rt}S_t$ martingal obzirom na $\mathbb{P}^*$ slijedi

$$h\left(e^{ru}\mathbb{E}^*\left[e^{-rt}S_t\big|\mathcal{F}_u\right]\right) = h\left(e^{ru}e^{-ru}S_u\right) = h(S_u).$$

Sada slijedi, koristeći prethodne nejednakosti i jednakosti

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(t-u)}h(S_t)\Big|\mathcal{F}_u\right] \geq h(S_u) \tag{3.3}$$

što je ekvivalentno s

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-rt}h(S_t)\big|\mathcal{F}_u\right] \geq e^{-ru}h(S_u).$$

Prethodno je svojstvo submartingalnosti za $e^{-rt}h(S_t)$ i ovime je tvrdnja pokazana. □

Teorem 3.2.4. *Neka je $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ konveksna funkcija za koju vrijedi $h(0) = 0$. Tada je cijena američke financijske izvedenice s vremenom dospijeća T i unutranjom vrijednosti $h(S_t)$, $t \in [0, T]$ jednaka cijeni Europske financijske izvedenice koja isplaćuje $h(S_T)$ u vremenu dospijeća T.*

Dokaz. Ako zamijenimo t s T u nejednakosti (3.3) dobivamo sljedeće:

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-u)}h(S_T)\Big|\mathcal{F}_u\right] \geq h(S_u), \quad 0 \leq u \leq T.$$

Lijeva strana gornje nejednakosti je cijena europske izvedenice u trenutku u, dok je desna strana nejednakosti jednaka unutarnjoj vrijednosti američke izvedenice u trenutku u. Iz ovog zaključujemo da nema koristi od iskorištavanja američke izvedenice prije dospijeća i slijedi da su cijena amričke i europske financijske izvedenice jednake. □

Korolar 3.2.5. *Cijena američke call opcije na imovinu koja ne isplaćuje dividendu jednaka je cijeni europske call opcije na istu imovinu s istim datumom dospijeća.*

Dokaz. Uzimamo $h(x) = (x - K)^+$ u prethodnom teoremu. □

Prema prethodnom korolaru, za kupca koji posjeduje američku call opciju u Black-Scholes-Mertonovom modelu bez dividendi optimalno je čekati do vremena dospijeća i tada odlučiti hoće li opciju iskoritit ili ne.

Prethodne rezultate ćemo koristiti u daljnoj analizi gdje promatramo američku call opciju u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama. Pretpostavimo da je vrijeme dospijeća američke call opcije T i da je cijena izvršenja jednaka K. Pretpostavimo da cijenu dionice između isplate dividendi modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem

$$dS_t = rS_t + \sigma S_t dB_t^*$$

pri čemu su kamatna stopa r i volatilnost σ konstantni, a B_t^* je Brownovo gibanje obzirom na mjeru neutralnu na rizik $\mathbb{P}^*$. U fiksnim trenutcima $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$ imamo isplatu dividende kao u prethodnom potpoglavlju. Prema analizi iz prethodnog potpoglavlja znamo da za $t \in [t_j, t_{j+1}]$ vrijedi:

$$S_t = S_{t_j} \cdot \exp\left\{\sigma\left(B_t^* - B_{t_j}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_j)\right\}.$$

Također vrijede i sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} S_{t_{j+1}-} &= S_{t_j} \cdot \exp\left\{\sigma\left(B_{t_{j+1}}^* - B_{t_j}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{j+1} - t_j)\right\}, \\ S_{t_{j+1}} &= (1 - a_{j+1})S_{t_j} \cdot \exp\left\{\sigma\left(B_{t_{j+1}}^* - B_{t_j}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{j+1} - t_j)\right\}, \\ S_T &= S_{t_n} \cdot \exp\left\{\sigma\left(B_T^* - B_{t_n}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_n)\right\}. \end{aligned}$$

Promotrimo sada cijenu američke call opcije u trenucima $t \in [t_n, T]$. Nakon isplate dividende u trenutku t_n u svim daljnim trenucima $t \in [t_n, T]$ kretanje cijene dionica modeliramo geometrijskim Brownovim gibanjem. Pokazano je da je obzirom na Brownovo gibanje B_t^* proces diskontiranih cijena dionica P^*-martingal. Također, funkcija $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definirana sa $h(x) = (x - K)^+$ je konveksna i vrijedi $h(0) = 0$ pa je prema Lemi 3.2.3. proces $e^{-rt}(S_t - K)^+$ za $t \in [t_n, T]$ submartingal, tj. vrijedi

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-rT}(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] \geq e^{-rt}(S_t - K)^+, \quad t \in [t_n, T]. \tag{3.4}$$

U prethodnom potpoglavlju izveli smo da je cijena slučajnog zahtjeva C u trenutku t u ovom modelu jednaka $\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}C \middle| \mathcal{F}_t\right]$. Kako za europsku call opciju vrijedi $C = (S_T - K)^+$ slijedi da je za sve $t \in [t_n, T]$ cijena europske call opcije u trenutku t jednaka

$$c_n(t, S_t) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Ako nejednakost u (3.4) pomnožimo sa e^{rt} dobivamo

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] \geq (S_t - K)^+, \quad t \in [t_n, T].$$

Uočavamo da je lijeva strana nejednakosti jednaka cijeni europske call opcije u trenutku t, a desna strana jednaka unutranjoj vrijednosti američke call opcije u trenutku t. Kako je cijena europske call opcije uvijek veća ili jednaka od unutarnje vrijednosti američke call opcije slijedi da kupac ne može ostvariti veću korist ukoliko iskoristi opciju prije trenutka T. Dakle cijena europske call opcije i cijena američke call opcije jednake su za sve trenutke $t \in [t_n, T]$. Odredimo formulu pomoću koje možemo izračunati tu cijenu. Budući da je proces vrijednosti dionice S Markovljev proces, vrijedi

$$c_n(t, S_t) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ \middle| S_t\right].$$

Uvrštavajući izraz za S_T u prethodnu jednakost dobivamo

$$c_n(t, S_t) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}\left(S_t \cdot \exp\left\{\sigma (B_T^* - B_t^*) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\} - K\right)^+ \middle| S_t\right]$$

Slijedi da je u trenutku $t \in [t_n, T]$ uvjetno na $S_t = x$ cijena američke call opcije jednaka:

$$c_n(t, x) = \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t)}\left(x \cdot \exp\left\{\sigma (B_T^* - B_t^*) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right\} - K\right)^+\right]. \tag{3.5}$$

Neka je $\tau := T - t$, a $Y := -\frac{B_T^* - B_t^*}{\sqrt{T-t}}$. Kako je B_t^* $\mathbb{P}^*$- Brownovo gibanje slijedi da prirast $B_T^* - B_t^*$ uz mjeru $\mathbb{P}^*$ ima normalnu distribuciju s očekivanjem 0 i varijancom $T - t$. Iz toga slijedi da je Y uz mjeru $\mathbb{P}^*$ standardna normalna slučajna varijabla. Uvrštavanjem τ i Y u formulu (3.5) dobivamo

$$c_n(t, x) = E\left[e^{-r\tau}\left(x \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}Y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)^+\right].$$

Koristeći distribuciju od Y dobivamo:

$$c_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau}\left(x \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)^+ e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Integrand

$$\left(x \exp\left\{-\sigma\sqrt{\tau}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right\} - K\right)^+$$

poprima vrijednosti koje su različite od 0 ako i samo ako vrijedi

$$y < d_-(\tau, x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right].$$

Sada dobivamo:

$$
\begin{aligned}
c_n(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau} \left(x \exp\left\{ -\sigma\sqrt{\tau} y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\tau \right\} - K \right) e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau} x \exp\left\{ -\sigma\sqrt{\tau} y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\tau \right\} e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-r\tau} K e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} x \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{\tau} y - \frac{\sigma^2\tau}{2} \right\} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} e^{-r\tau} K e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(y + \sigma\sqrt{\tau} \right)^2 \right\} dy - K e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-(\tau,x)+\sigma\sqrt{\tau}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} z^2 \right\} dz - K e^{-r\tau} \Phi(d_-(\tau,x)).
\end{aligned}
$$

Označimo s $d_+(\tau,x) = d_-(\tau,x) + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\log\frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\tau \right]$. Uz ovu oznaku slijedi da je formula za cijenu američke call opcije u trenucima $t \in [t_n, T]$ jednaka

$$
c_n(t,x) = x\Phi(d_+(\tau,x)) - K e^{-r\tau} \Phi(d_-(\tau,x)). \tag{3.6}
$$

Posebno, u trenutku $t = t_n$ uvjetno na $S_t = x$ dobivamo da je cijena američke call opcije jednaka

$$
c_n(t_n,x) = \mathbb{E}^* \left[e^{-r(T-t_n)} \left(x \cdot \exp\left\{ \sigma\left(B_T^* - B_{t_n}^* \right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t_n) \right\} - K \right)^+ \right].
$$

Funkcija $c_n(t,x)$ zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$
\frac{\partial c_n(t,x)}{\partial t} + rx\frac{\partial c_n(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} c_n(t,x) = r c_n(t,x), \quad t_n \le t < T, \quad x \ge 0
$$

uz uvjet

$$
c_n(t,x) = (x-K)^+.
$$

Može se pokazati da je funkcija $c_n(t_n,x)$ konveksna u x. Da bi pokazali da je $c_n(t_n,x)$ konveksna u x trebamo pokazati da za sve $0 \le x_1 \le x_2$ i sve $0 \le \lambda \le 1$ vrijedi

$$
c_n(t_n,(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1-\lambda)c_n(t_n,x_1) + \lambda c_n(t_n,x_2).
$$

Znamo da je za sve $\beta \in \mathbb{R}_+$ funkcija $(\beta x - K)^+$ konkveksna u x. Ukoliko uzmemo

$$
\beta = \exp\left\{ \sigma\left(B_T^* - B_{t_n}^* \right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T - t_n) \right\}
$$

dobivamo da je funkcija

$$\left(x \cdot \exp\left\{\sigma\left(B_T^* - B_{t_n}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_n)\right\} - K\right)^+ \tag{3.7}$$

konveksna u x. Pomoću ove opservacije dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
c_n(t_n, (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &= \mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t_n)}\left((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \exp\left\{\sigma\left(B_T^* - B_{t_n}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_n)\right\} - K\right)^+\right] \\
&\leq (1-\lambda)\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t_n)}\left(x_1 \exp\left\{\sigma\left(B_T^* - B_{t_n}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_n)\right\} - K\right)^+\right] \\
&+ \lambda\mathbb{E}^*\left[e^{-r(T-t_n)}\left(x_2 \exp\left\{\sigma\left(B_T^* - B_{t_n}^*\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t_n)\right\} - K\right)^+\right] \\
&= (1-\lambda)c_n(t_n, x_1) + \lambda c_n(t_n, x_2)
\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj nejednakosti koristili da je funkcija (3.7) konveksna u x te monotonost i linearnost matematičkog očekivanja. Ovime je pokazano da je funkcija $c_n(t_n, x)$ konveksna u x.

Promotrimo trenutak t_n, tj. neposredni trenutak prije isplate posljednje dividende. U tom trenutku kupac koji posjeduje američku call opciju ima dvije mogućnosti: može iskoristiti tu opciju i zaraditi/izgubiti $S_{t_n-} - K$ ili može ne iskoristiti tu opciju. Ako odluči ne iskoristiti tu opciju tada će se dividenda isplatiti onome tko posjeduje dionicu i cijena dionice će pasti na $S_{t_n} = (1 - a_n) S_{t_n-}$. Tada će, prema prethodno pokaznom vrijednost opcije biti jednaka $c_n(t_n, (1 - a_n) S_{t_n-})$. Optimalna odluka za kupca opcije ovisi o tome u kakvom su odnosu vrijednosti $S_{t_n-} - K$ i $c_n(t_n, (1 - a_n) S_{t_n-})$. Ukoliko je

$$S_{t_n-} - K > c_n(t_n, (1 - a_n) S_{t_n-})$$

tada je za kupca optimalno iskorititi opciju u trenutku t_n neposredno prije isplate dividende, a ukoliko je

$$S_{t_n-} - K < c_n(t_n, (1 - a_n) S_{t_n-})$$

tada je za kupca optimalno ne iskoristiti tu opciju. Također, ako vrijedi

$$S_{t_n-} - K = c_n(t_n, (1 - a_n) S_{t_n-})$$

tada za kupca nema razlike u odluci koju donese. Neka je sada funkcija $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadana s

$$h_n = \max\{x - K, c_n(t_n, (1 - a_n) x)\}.$$

Vrijednost američke call opcije u trenutku t_n neposredno prije isplate dividende jednaka je $h\left(S_{t_n-}\right)$. Želimo pokazati da funkcija $h_n(x)$ zadovoljava pretpostavke Leme 3.2.3. Uočimo da $c_n\left(t_n, (1-a_n)\cdot 0\right) = 0$ pa iz toga slijedi

$$h_n(0) = \max\left\{0 - K, c_n\left(t_n, (1-a_n)\cdot 0\right)\right\} = 0.$$

Kako je $c_n\left(t_n, (1-a_n)\,x\right) \geq 0$ za sve $x \geq 0$ onda je i $h_n(x) \geq 0$ za sve $x \geq 0$. Još treba pokazati da je funkcija $h_n(x)$ konveksna. Pokažimo prvo da je funkcija $c_n(t_n, (1-a_n)x)$ konveksna u x. Već smo pokazali da je funkcija $c_n(t_n, x)$ konveksna tj. da za sve $0 \leq x_1 \leq x_2$ i sve $0 \leq \lambda \leq 1$ vrijedi sljedeće:

$$c_n(t_n, (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)c_n\left(t_n, x_1\right) + \lambda c_n(t_n, x_2).$$

Ako u gornjoj nejednakosti zamijenimo x_1 sa $(1-a_n)x_1$ te x_2 zamijenimo s $(1-a_n)x_2$ dobivamo da za sve $0 \leq x_1 \leq x_2$ i sve $0 \leq \lambda \leq 1$ vrijedi:

$$c_n(t_n, (1-a_n)((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)) \leq (1-\lambda)c_n(t_n, (1-a_n)x_1) + \lambda c_n(t_n, (1-a_n)x_2).$$

Funkcija $c_n(t_n, (1-a_n)x)$ je konveksna u x. Funkcija $x - K$ je trivijalno konveksna. Maksimum dvije konveksne funkcije je konveksna funkcija pa slijedi da je $h_n(x)$ konveksna funkcija u x. Ovime je pokazano da funkcija h_n zadovoljava pretpostavke Leme 3.2.3. Sada kada znamo cijenu opcije za trenutke $t_n \leq t \leq T$ promotrimo cijenu u trenucima $[t_{n-1}, t_n)$. Počevši od trenutka $t \in [t_{n-1}, t_n)$, kupac američke call opcije ima pravo iskoritití tu opciju u bilo kojem budućem trenutku $u \in [t, t_n)$ i ako odluči iskoritití opciju zaradi $S_u - K$. Ako ne iskoristi tu opciju prije trenutka t_n, tada u tom trenutku, neposredno prije isplate dividende ta opcija vrijedi $h_n\left(S_{t_n-}\right)$. U trenutcima $t_{n-1} \leq t < t_n$ cijena američke call opcije s vremenom dospijeća T jednaka je cijeni američke call opcije koja pri dospijeću vrijedi $h_n(S_{t_n-})$ i kojoj je vrijeme dospijeća t_n neposredno prije isplate dividende. Nakon isplate dividende u trenutku t_{n-1} u svim daljnim trenucima $t \in [t_{n-1}, t_n)$ nema isplate dividende na dionicu i u tom periodu cijena dionice modelira se geometrijskim Brownovim gibanjem. Prema Lemi 3.2.3 znamo da je za sve $t \in [t_{n-1}, t_n)$ proces $e^{-rt}h_n(S_t)$ submartingal, tj. da vrijedi

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(u-t)}h_n(S_u)\middle|\mathcal{F}_t\right] \geq h_n(S_t), \quad t_{n-1} \leq t \leq u < t_n.$$

Puštajući $u \to t_n$ dobivamo da vrijedi

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(t_n-t)}h_n\left(S_{t_n-}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \geq h_n(S_t), \quad t_{n-1} \leq t < t_n.$$

Koristeći definiciju funkcije $h_n(x)$ znamo da je $h_n(S_t) \geq S_t - K$ što zajedno s prethodnom nejednakosti daje

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(t_n-t)}h_n\left(S_{t_n-}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] \geq S_t - K, \quad t_{n-1} \leq t < t_n. \tag{3.8}$$

Lijeva strana nejednakosti (3.8) jednaka je cijeni europske call opcije s vremenom dospijeća t_n neposredno prije isplate dividende i vrijednosti $h_n(S_{t_n-})$ pri dospijeću, dok je desna strana nejednakosti jednaka unutarnjoj vrijednosti američke call opcije. Slijedi da se ne može ostvariti veća korist iskorištavanjem američke call opcije prije trenutka t_n. Cijena američke call opcije jednaka je cijeni upravo opisane europske call opcije i ta cijena jednaka je

$$\mathbb{E}^*\left[e^{-r(t_n-t)}h_n(S_{t_n-})\middle|\mathcal{F}_t\right],\quad t\in[t_{n-1},t_n]$$

Koristeći da je proces vrijednosti dionice S Markovljev proces, te izraz za S_{t_n-} dobivamo da je cijena američke call opcije u trenutku $t\in[t_{n-1},t_n)$ uvjetno na $S_t=x$ jednaka

$$c_{n-1}(t,x)=\mathbb{E}^*\left[e^{-r(t_n-t)}h_n\left(x\cdot\exp\left\{\sigma\left(B^*_{t_n}-B^*_t\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_n-t)\right\}\right)\right]\tag{3.9}$$

Posebno, u trenutku $t=t_{n-1}$ uvjetno na $S_t=x$ dobivamo da je cijena amreičke call opcije jednaka:

$$c_{n-1}(t_{n-1},x)=\mathbb{E}^*\left[e^{-r(t_n-t_{n-1})}h_n\left(x\cdot\exp\left\{\sigma\left(B^*_{t_n}-B^*_{t_{n-1}}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_n-t_{n-1})\right\}\right)\right]\tag{3.10}$$

Funkcija $c_{n-1}(t,x)$ zadovoljava Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferencijalnu jednažbu:

$$\frac{\partial c_{n-1}(t,x)}{\partial t}+rx\frac{\partial c_{n-1}(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2c_{n-1}(t,x)}{\partial x^2}=rc_{n-1}(t,x),\quad t_{n-1}\le t<t_n,\quad x\ge 0$$

uz uvjet

$$c_{n-1}(t_n,x)=h_n(x),\ x\ge 0.$$

Na analogan način možemo promatrati vremenski period $[t_{n-2},t_{n-1}]$ tako da definiramo

$$h_{n-1}(x)=\max\{x-K,c_{n-1}(t_{n-1},(1-a_{n-1})x)\}.$$

Analognim postupkom kao za vremenski period $[t_{n-1},t_n]$ pokaže se da je cijena američke call opcije s vremenom dospijeća T u trenutku $t\in[t_{n-2},t_{n-1})$ jednaka cijeni europske call opcije s vremenom dospijeća t_{n-1} i vrijednosti $h_{n-1}(S_{t_{n-1}-})$ pri dospijeću.
Ovime dobivamo rekurzivni algoritam za određivanje cijene američke call opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama gdje se na dionicu u fiksnim trenucima $0<t_1<t_2<...<t_n<T$ isplaćuje dividenda. Za $j=n,n-1,...,1$ rekurzivno rješavamo Black-Scholes-Mertonovu parcijalnu diferncijalnu jednadžbu:

$$\frac{\partial c_{j-1}(t,x)}{\partial t}+rx\frac{\partial c_{j-1}(t,x)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2c_{j-1}(t,x)}{\partial x^2}=rc_{j-1}(t,x),\quad t_{j-1}\le t<t_j,\quad x\ge 0$$

uz terminalni uvjet

$$c_{j-1}(t_n,x)=h_j(x),\ x\ge 0.$$

Za početak algoritma potrebna je funkcija

$$c_n(t,x) = x\Phi\left(d_+(\tau,x)\right) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-(\tau,x))$$

pri čemu je

$$d_+(\tau,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right],\quad d_-(\tau,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]$$

te funkcija

$$h_n(x) = \max\left\{x - K, c_n(t_n,(1-a_n)x)\right\}.$$

Funkcije $h_{j-1}(x)$ za $j \in \{2,..,n\}$ definirane su s

$$h_{j-1} = \max\left\{x - K, c_{j-1}(t_{j-1},(1-a_{j-1})x)\right\}\quad x \geq 0.$$

Za $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ ako je $S_t = x$ tada je $c_{j-1}(t,x)$ cijena američke call opcije u trenutku t. Unutar svakog intervala $[t_{j-1},t_j)$ za $j \in \{1,2,...,n+1\}$ cijena američke call opcije jednaka je cijeni europske call opcije s vremenom dospijeća t_j. Optimalno vrijeme za iskoristiti američku call opciju je minimalno vrijeme t_j u kojem je $S_{t_j-} - K > c_j\left(t_j,\left(1-a_j\right)S_{t_j-}\right)$. Ako takvo vrijeme ne postoji tada je za kupca opcije optimalno čekati do trenutka T. Ukoliko je u trenutku T $S_T > K$ tada bi kupac trebao iskoristiti opciju i zaraditi $S_T - K$, a ukoliko je $S_T < K$ tada kupac opcije ne bi trebao iskoristiti tu opciju.

Poglavlje 4

Usporedba Blackove aproksimacije cijene i Roll-Geske-Whaley pristupa

U ovom poglavlju prikazana je primjena Blackove aproksimacije za izračun nearbitražne cijene na konkretnoj američkoj call opciji. Uz to, objašnjen je Roll-Geske-Whaley pristup izračunu nearbitražne cijene, pokazana primjena na istu američku call opciju i dana usporedba spomenutih pristupa.

4.1 Blackova aproksimacija

U prethodnom poglavlju pokazano je da su u slučaju isplate dividende na dionicu jedina moguća optimalna vremena za iskoristiti opciju ona neposredno prije isplate dividende. Pretpostavimo da imamo isplatu dividende u fiksnim trenutcima $t_1, t_2, ..., t_n$ takvima da je $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < T$ i da su dividende iznosa $D_1, D_2, ..., D_n$. Na početku promotrimo što mora vrijediti da bi se isplatilo iskoristiti opciju neposredno prije trenutka posljednje isplate dividende t_n. Ako kupac opcije odluči iskoristiti opciju neposredno prije posljednje isplate dividende on dobiva $S_{t_n-} - K$, a ako ne iskoristi tada cijena dionice pada na $S_{t_n-} - D_n$ i u prethodnom poglavlju je pokazano da je tada nearbitražna cijena američke call opcije do trenutka T jednaka nearbitražnoj cijeni europske call opcije do trenutka T. Također, u trenucima nakon t_n više nema isplati dividendi.

Promotrimo ograničenja koja moraju vrijediti za nearbitražnu cijenu u trenutku t_n za europsku call opciju s vremenom dospijeća T na dionicu na koju nema isplate dividendi. S obzirom da je u tom trenutku ta cijena jednaka nearbitražnoj cijeni za američku call opciju ista ograničenja će vrijediti i za američku call opciju. Gornja ograda za cijenu je cijena dionice

$$c\,(t_n, S_{t_n-} - D_n) \leq S_{t_n-} - D_n.$$

Kad ne bi vrijedila ova nejednakost postojala bi mogućnost arbitraže jer bi se mogao ostvariti nerizičan profit na način da se kupi dionica i proda opcija na tu dionicu. Donja ograda za cijenu je

$$S_{t_n-} - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}.$$

Da bi objasnili ovu nejednakost promotrimo sljedeća dva portfelja. Portfelj A sastoji se od europske call opcije i obveznice bez kupona s isplatom K i vremenom dospijeća T. Portfelj B sastoji se od jedne dionice za koju imamo američku call opciju. Promotrimo portfelj A. U slučaju da je $S_T > K$ iskoristit će se europska call opcija i ona će zajedno s obveznicom bez kupona u trenutku T vrijediti

$$S_T - K + K = S_T.$$

U slučaju da je $S_T < K$ tada investitor neće iskoristiti opciju i portfelj će u trenutku T vrijediti K. Dakle, portfelj A u trenutku T vrijedi

$$\max\{S_T, K\}.$$

Portfelj B u trenutku T vrijedi S_T. Kako u trenutku T portfelj A vrijedi barem onoliko koliko vrijedi i portfelj B da ne bi postojala arbitraža na tržištu to mora vrijediti u trenutku t_n, tj. mora vrijediti sljedeće:

$$c\left(t_n, S_{t_n-} - D_n\right) + Ke^{-r(T-t_n)} \geq S_{t_n-} - D_n.$$

Iz prethodne nejednakosti dobivamo da cijena europske call opcije u trenutku t_n nakon isplate dividende, a to je ujedno i cijena američke call opcije u tom istom trenutku mora biti veća od

$$S_{t_n-} - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}.$$

Ako vrijedi da je prethodni izraz veći od unutarnje vrijednosti američke call opcije neposredno prije trenutka t_n, što možemo zapisati kao

$$S_{t_n-} - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geq S_{t_n-} - K,$$

tada ne može biti optimalno iskoristiti opciju u trenutku t_n. Iz prethodne nejednakosti slijedi da nećemo iskoristiti opciju neposredno prije trenutka t_n ako vrijedi

$$D_n \leq K\left(1 - e^{-r(T-t_n)}\right), \tag{4.1}$$

a iskoristit ćemo ako vrijedi sljedeća nejednakost

$$D_n > K\left(1 - e^{-r(T-t_n)}\right), \tag{4.2}$$

te ako u trenutku t_n neposredno prije isplate dividende cijena dionice postiže dovoljno veliku vrijednost S_{t_n-}. Nejednakost (4.2) će biti zadovoljena ako je dividenda D_n velika te ako je vrijeme posljednje isplate dividende t_n dovoljno blizu vremena dospijeća T.

Promotrimo sada trenutak t_{n-1}. Ako kupac opcije odluči iskoristiti tu opciju neposredno prije isplate dividende dobiva $S_{t_{n-1}-} - K$, a ako ne iskoristi opciju tada cijena dionice pada na $S_{t_{n-1}-} - D_{n-1}$. Prema analizi iz prethodnog poglavlja prvo vrijeme nakon trenutka t_{n-1} kada postoji mogućnost da se optimalno iskoristi opcija je t_n i nearbitražna cijena američke call opcije je od trenutka t_{n-1} do trenutka t_n jednaka cijeni europske call opcije s vremenom dospijeća t_n. Analogno kao i u trenutku t_n donja ograda za cijenu američke call opcije u trenutku t_{n-1} je

$$S_{t_{n-1}-} - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})}.$$

Također, ako vrijedi

$$S_{t_{n-1}-} - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})} \geq S_{t_{n-1}-} - K,$$

odnosno

$$D_{n-1} \leq K\left(1 - e^{-r(t_n - t_{n-1})}\right),$$

nije optimalno iskoristiti opciju u trenutku t_{n-1}. Slično, za proizvoljni $i < n$, ako vrijedi

$$D_i \leq K\left(1 - e^{-r(t_{i+1} - t_i)}\right) \tag{4.3}$$

tada nije optimalno iskoristiti opciju u trenutku t_i. Jednakost (4.3) aproksimativno je jednaka

$$D_i \leq Kr\left(t_{i+1} - t_i\right). \tag{4.4}$$

Ako nejednakost (4.3) vrijedi za sve $i = 1, 2, ..., n-1$, te ako vrijedi (4.1), nije optimalno iskoristiti američku call opciju ni u jednom trenutku prije vremena dospijeća T. Također, ako postoji mogućnost da se američka call opcija na dionicu na koju imamo isplatu dividende u fiksnim trenucima na optimalan način iskoristi prije datuma dospijeća to će se u većini slučajeva dogoditi prije posljednje isplate dividende. Razlog je što svaka opcija ima i vremensku vrijednost. Vremenska vrijednost opcije ovisi o očekivanju tržišta o budućim kretanjima cijene dionice i preostalom vremenu do dospijeća opcije. Što je više vremena do vremena dospijeća to je vremenska vrijednost opcije veća zato što je veća vjerojatnost da će dionica u budućnosti postići veću cijenu koja će omogućiti veću dobit za kupca opcije. Veća vjerojatnost proizlazi iz toga što dionica ima više vremena da joj se cijena poveća. Također, što je cijena dionice volatilnija to je veća vremenska vrijednost opcije zato što veće fluktuacije cijene povećavaju vjerojatnost da će cijena postići veću vrijednost te, kao i ranije, omogućiti veću dobit za kupca opcije. Promotrimo prethodno na američkoj call opciji na dionicu s fiksnim isplatama dividendi. Isplata dividendi smanjuje cijenu dionice no vrijednost opcije uključuje i vremensku vrijednost koja može nadoknaditi taj pad. Pri prvim isplatama dividendi vremenska vrijednost opcije je veća jer je više vremena do vremena dopijeća pa kupci opcija u većini slučajeva ne iskoriste opciju jer se nadaju nekoj boljoj prilici za iskoristiti opciju u budućnosti. Također, neposredno prije posljednje isplate dividende vremenska vrijednost opcije je manja nego prije. Tada bi kupci opcije mogli iskoristiti opciju kako ne bi propustili priliku zaraditi dividendu, ali i jer su svjesni da će nakon isplate dividende cijena dionice pasti i imati manje vremena za dostići neku povoljnu vrijednost za kupca opcije.

4.2 Primjer izračuna nearbitražne cijene Blackovom aproksimacijom

U ovom potpoglavlju izračunati ćemo cijenu američke call opcije na dionicu na koju se isplaćuje jedna dividenda kroz vrijeme trajanja opcije pomoću Blackove aproksimacije. Blackova aproksimacija uključuje izračun nearbitražnih cijena europskih call opcija s vremenima dospijeća T i t_1 te postavljanje cijene američke call opcije kao maksimum ovih vrijednosti. Pretpostavimo da je početna cijena dionice jednaka $S_0 = 52\$$, vrijeme dospijeća je $T = 1$ godina, nerizična kamatna stopa jednaka je $r = 8\%$ godišnje, cijena izvršenja jednaka je $K = 55\$$ i volatilnost dionice $\sigma = 25\%$. Očekuje se jedna isplata dividende nakon $t_1 = 9$ mjeseci u iznosu 1.5$.

Za početak, promotrimo vrijedi li nejednakost (4.2) uzimajući u obzir $n = 1$. Kako je

$$K\left(1 - e^{-r(T-t_1)}\right) = 55\left(1 - e^{-0.08(1-0.75)}\right) \approx 1.09$$

slijedi da je $D_1 = 1.5\$ > 1.09\$$ pa ima smisla promatrati je li optimalno iskoristiti opciju nakon 9 mjeseci. Uočimo da je uvjet (4.2) nužan uvjet za optimalnost iskorištavanja opcije u trenutku t_1, ali ne i dovoljan. Računamo cijenu europske call opcije $c_1(0, S_0)$ s vremenom dospijeća $T_1 = 9$ mjeseci te cijenu europske call opcije $c_2\left(0, \widetilde{S_0}\right)$ s vremenom dospijeća $T_2 = 1$ godina pri čemu je $\widetilde{S_0}$ početna cijena dionice umanjena za diskontiranu vrijednost dividende, tj.

$$\widetilde{S_0} = S_0 - D_1 e^{-rt_1}.$$

Za cijenu američke call opcije u početnom trenutku uzimamo maksimum ovih vrijednosti, dakle

$$c(0, S_0) = \max\left\{c_1(0, S_0), c_2\left(0, \widetilde{S_0}\right)\right\}.$$

Pri izračunu nearbitražnih cijena europskih call opcija koristimo formulu (3.6):

$$c_n(t, x) = x\Phi(d_+(\tau, x)) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_-(\tau, x))$$

uz

$$d_+(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right], \; d_-(\tau, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\log\frac{x}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right], \; \tau = T - t.$$

Uvrštavajući $S_0 = 52\$$, $T_1 = \frac{3}{4}$, $K = 55\$$, $\sigma = 25\%$ i $r = 8\%$ dobivamo

$$d_-\left(\frac{3}{4}, 52\right) = -0.09, \quad d_+\left(\frac{3}{4}, 52\right) = 0.13.$$

Sada slijedi

$$c_1(0, 52) = 52 \cdot \Phi(0.13) - 55e^{-0.08 \cdot 0.75}\Phi(-0.09) = 4.58\$.$$

Na analogan način za $\widetilde{S_0} = 50.59\$$, $T_2 = 1$ te ostale vrijednosti kao i ranije dobivamo

$$d_-(1, 50.59) = -0.14, \quad d_+(1, 50.59) = 0.11$$

iz čega slijedi

$$c_1(0, 50.59) = 50.59 \cdot \Phi(0.11) - 55e^{-0.08 \cdot 1}\Phi(-0.14) = 4.95\$.$$

Dakle, nearbitražna cijena američke call opcije pri sklapanju ugovora jednaka je

$$c(0, 52) = \max\{4.58\$, 4.95\$\} = 4.95\$.$$

Promotrimo optimalnu strategiju za kupca opcije ovakve američke call opcije. Već je pokazano da su jedini mogući optimalni trenuci za iskoristiti američku call opciju vrijeme dospijeća i trenutak neposredno prije isplate dividende što bi u ovom primjeru bilo nakon 1 godine ili nakon 9 mjeseci. Dakle, kupac bi svakako trebao čuvati opciju do isplate dividende zato što se do tada američka call opcija ponaša jednako kao i europska call opcija s dospijećem neposredno prije isplate dividende. Nakon što prođe 9 mjeseci i treba nastupiti dividenda, kupac opcije bi u tom trenutku trebao usporediti unutarnju vrijednost američke call opcije $S_{\frac{3}{4}-} - K$ i cijenu europske call opcije s početnom cijenom jednakom $S_{\frac{3}{4}-} - D_1$ i vremenom dospijeća 3 mjeseca što je razlika između originalnog vremena dospijeća i vremena isplate dividende. Ako je cijena upravo opisane europske opcije veća od unutarnje vrijednosti američke call opcije nakon 9 mjeseci za kupca bi bilo optimalno ne iskoristiti opciju. U protivnom, za kupca je optimalno iskoristiti opciju. Ako kupac ne iskoristi opciju nakon 9 mjeseci optimalno je da je čuva do vremena dospijeća, tj. 1 godine. Nakon što prođe 1 godina usporedi cijenu dionice i cijenu izvršenja. Ako je cijena dionice iznad cijene izvršenja tada će tu opciju iskoristiti, ali ako nije opcija ostaje neiskorištena.

Zaključno, Blackova aproksimacija omogućuje jednostavan izračun nearbitražne cijene američke call opcije na dionicu s jednom isplatom dividendi uspoređujući nearbitražne cijene dviju europskih call opcija, a formula za izračun cijene europske call opcije dobro je poznata. Također, kupac opcije mora kontinuirano pratiti stanje na tržištu kako bi mogao donijeti optimalnu odluku u vezi iskorištavanja opcije. U idućim potpoglavljima analiziran je alternativni pristup izračunu cijene.

4.3 Rollov pristup

Richard Roll uvidio je da je američka call opcija na dionice na koje se isplaćuje dividenda prevladavajuća opcija u trgovanju. U svom radu iz 1977. nadopunjuje Black-Scholesovu teoriju predstavljanjem formule za određivanje cijene američke call opcije koja bi se mogla primijeniti na mnoge empirijske situacije. U ovom i u daljnjim potpoglavljima promatramo američku call opciju na dionicu na koju se za vrijeme trajanja opcije isplaćuje samo jedna dividenda. Američka call opcija ima vrijeme dospijeća T, cijenu izvršenja K, očekivanu isplatu dividende iznosa D_1 u trenutku $t_1 < T$. Također, zbog jednostavnosti analize uvodimo novu oznaku $\widetilde{S_t}$ koja označava cijenu dionice u trenutku t umanjenu za diskontiranu vrijednost očekivane dividende u budućnosti. Dakle, vrijedi sljedeće

$$\widetilde{S_t} = S_t - D_1 e^{-r(t_1 - t)},\ t < t_1$$

te

$$\widetilde{S_t} = S_t,\ t \geq t_1.$$

Roll u svojem radu na cijenu dionice gleda u smislu $\widetilde{S_t}$ umjesto S_t. Kako imamo samo jednu isplatu dividende onda nam je prva isplate dividende ujedno i posljednja isplata dividende pa uzimajući u obzir oznake iz prethodnih potpoglavlja imamo da je $n = 1$ i $t_n = t_1$. Iz prethodnog potpoglavlja znamo da ako vrijedi nejednakost (4.2) i ako je cijena dionice dovoljno velika u trenutku t_1 prije isplate dividende da je tada optimalno ranije iskoristiti tu opciju. Pokazuje se da ta cijena mora biti veća od cijene $S^*_{t_1}$ koja je rješenje sljedeće jednadžbe:

$$c\left(t_1, S^*_{t_1}\right) = S^*_{t_1} + D_1 - K$$

pri čemu je $c(t, S_t)$ formula za cijenu europske call opcije (3.6). Dakle, ako je u trenutku t_1 prije isplate dividende $S^*_{t_1} < \widetilde{S_{t_1}}$ tada je optimalno iskoristiti opciju prije isplate dividende, no ako je $S^*_{t_1} > \widetilde{S_{t_1}}$ tada je optimalno ne iskoristiti opciju. Možemo uočiti da je $S^*_{t_1}$ različita za opcije ugovorene pod različitim uvjetima. Kako su u trenutku ugovaranja opcije poznate sve vrijednosti potrebne za određivanje cijene $S^*_{t_1}$ koja razdvaja slučajeve hoće li se opcija iskoristiti prije isplate dividende ili ne, Roll u svojem radu daje kombinacije opcija koje odgovaraju neizvjesnostima s kojima se suočava kupac američke call opcije.

Propozicija 4.3.1. *Vrijednost američke call opcije s cijenom izvršenja K i vremenom dospijeća T na dionicu na koju imamo jednu isplatu dividende iznosa D_1 u trenutku $t_1 < T$ je zbroj sljedećih vrijednosti:*

(a) vrijednost europske call opcije na dionicu s cijenom izvršenja K i vremenom dospijeća T

(b) plus vrijednost europske call opcije na dionicu s cijenom izvršenja $S^*_{t_1} + D_1$ i vremenom dospijeća t_1 neposredno prije isplate dividende

(c) *minus vrijednost europske call opcije na opciju u (a) s cijenom izvršenja* $S^*_{t_1} + D_1 - K$ *i vremenom dospijeća* t_1 *neposredno prije isplate dividende.*

Roll je uočio sljedeće: ako vrijedi da je $\widetilde{S}_{t_1} > S^*_{t_1}$, tada će se iskoristiti opcije (b) i (c). Investitor koji u svom portfelju ima prethodno opisane opcije će pomoću opcije (b) zaraditi $\widetilde{S}_{t_1} + D_1 - S^*_{t_1} - D_1$, a pomoću opcije (c) $S^*_{t_1} + D_1 - K$. Opciju (a) će izgubiti zbog iskorištavanja opcije (c) i tu zaradi 0. Sveukupno, ako je $\widetilde{S}_{t_1} > S^*_{t_1}$ u optimalnom slučaju zarada investitora je

$$\widetilde{S}_{t_1} + D_1 - S^*_{t_1} - D_1 + S^*_{t_1} + D_1 - K = \widetilde{S}_{t_1} + D_1 - K = S_{t_1-} - K$$

što je jednako vrijednosti koju bi kupac američke call opcije zaradio kad bi je iskoristio. Ako vrijedi da je $\widetilde{S}_{t_1} > S^*_{t_1}$ tada se opcije (b) i (c) neće iskoristiti, a investitor će i dalje u svojem portfelju imati opciju (a). U tom slučaju investitor u tom trenutku ne zaradi ništa, ali ima opciju koja vrijedi jednako kao i američka call opcija ako se ne iskoristi prije isplate dividende. Roll je zaključio sljedeće: da bi izračunali vrijednost američke call opcije potrebno je izračunati vrijednosti triju opcija opisanih u propoziciji. Kasnije će se pokazati da je Roll napravio pogrešku pri ovom izračunu zbog pogreške u definiranju opcije (b) i bit će prikazana točna formula. Za opcije (a) i (b) imamo Black-Scholes-Mertonovu formulu (3.6) pa je samo vrijednost opcije (c) malo teže izračunati. Vrijednost opcije (a) označavamo s c_a, opcije (b) s c_b te vrijednost opcije (c) s c_c. Formule su sljedeće:

$$\begin{aligned}
c_a &= \widetilde{S}_0 \cdot N_1(a_1) - Ke^{-rT} \cdot N_1(a_2), \\
c_b &= \widetilde{S}_0 \cdot N_1(d_1) - \left(S^*_{t_1} + D_1\right) \cdot e^{-rt_1} \cdot N_1(d_2), \\
c_c &= \widetilde{S}_0 \cdot N_2(b_1, a_1) - e^{-rt} \cdot K \cdot N_2(b_2, a_2) - e^{-rt} \cdot N_1(b_2) \cdot \left(S^*_{t_1} + D_1 - K\right)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

pri čemu je $N_1(\cdot)$ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe, a $N_2(\cdot,\cdot)$ funkcija distribucije standardne bivarijatne normalne razdiobe s koeficijentom korelacije $\sqrt{\frac{t_1}{T}}$. Funkcija distribucije standardne bivarijatne normalne razdiobe $N_2(\cdot,\cdot)$ s koeficijentom korelacije ρ definirana je na sljedeći način:

$$N_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u^2 - 2\rho uv + v^2\right)\right\} du\, dv.$$

Ostale vrijednosti zadane su na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\widetilde{S_0}}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}, \\
b_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\widetilde{S_0}}{S^*_{t_1}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t}, \\
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\widetilde{S_0}}{S^*_{t_1}+D_1}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Sada slijedi da u trenutku ugovaranja američke call opcije, odnosno u trenutku $t = 0$ njezinu nearbitražnu cijenu možemo izračunati kao:

$$c_{ROLL} = c_a + c_b - c_c.$$

4.4 Geske formula

Robert Geske se 1979. godine osvrnuo na rad Richarda Rolla opisanog u prethodnom potpoglavlju i u svojem radu opisao manje složenu formulu za izračun nearbitražne cijene američke call opcije. U nastavku se koriste iste oznake kao i u prethodnom potpoglavlju. Geske je pokazao da je analitičko rješenje Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{\partial c\left(t_0, \widetilde{S}_0\right)}{\partial t_0} + r\widetilde{S}_0 \frac{\partial c\left(t_0, \widetilde{S}_0\right)}{\partial \widetilde{S}_0} + \frac{1}{2}\sigma^2 \widetilde{S}_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \widetilde{S}_0^2} c\left(t_0, \widetilde{S}_0\right) = rc\left(t_0, \widetilde{S}_0\right)$$

uz rubni uvjet da je cijena američke call opcije u trenutku t_1 jednaka

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S_{t_1}} + D_1 - K, &\quad \widetilde{S_{t_1}} > S^*_{t_1}, \\
c\left(t_1, \widetilde{S_{t_1}}\right), &\quad \widetilde{S_{t_1}} \leq S^*_{t_1}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

dano formulom

$$
\begin{aligned}
c_{GES} =& \widetilde{S}_0 \left(N_1(b_1) + N_2\left(a_1, c_1, \sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right) - Ke^{-rT}\left(N_1(b_2)e^{r(T-t_1)} + N_2\left(a_2, c_2, \sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right) \\
&+ D_1 e^{-rt_1} N_1(b_2).
\end{aligned}
$$

Funkcije $N_1(\cdot)$ i $N_2(\cdot,\cdot,\cdot)$ iste su kao i u formulama koje je postavio Roll, dakle funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe te funkcija distribucije standardne bivarijatne normalne razdiobe. Vrijednosti od $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ zadane su kao u formuli (4.6), a vrijednosti od c_1 i c_2 zadane su kao:

$$c_1 = \frac{\ln\left(\frac{S^*_{t_1}}{\widetilde{S_0}}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad c_2 = c_1 + \sigma\sqrt{t}. \tag{4.8}$$

Geske je u svom radu napravio pogrešku koju je kasnije ispravio i objasnio Robert Whaley.

4.5 Whaleyev ispravak

Robert Whaley u svom radu 1981. godine osvrnuo se na rad Roberta Geskea i Richarda Rolla te ispravio njihove pogreške. Whaley je uočio da se nearbitražna cijena američke call opcije može računati kao nearbitražna cijena portfelja koji se sastoji od sljedećih instrumenata:

(a) duge pozicije europske call opcije s cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T

(b) duge pozicije europske call opcije s cijenom izvršenja $S^*_{t_1}$ i dospijećem t_1 neposredno prije isplate dividende

(c) kratke pozicije europske call opcije na opciju definiranu u dijelu (a) s cijenom izvršenja $S^*_t + D_1 - K$ i vremenom dospijeća t_1 neposredno prije isplate dividende.

Razlog zbog kojeg možemo na ovaj način računati nearbitražnu cijenu američke call opcije je taj što su potencijalni prihodi opisanog portfelja identični prihodima na američku call opciju pa nam pretpostavka nepostojanje arbitraže na tržištu osigurava da su i nearbitražne cijene jednake. Koristeći Black-Scholesovu formulu za dobivanje nearbitražne vrijednosti za opcije (a) i (b) te koristeći jednakost

$$N_2(a,-b,-\rho) = N_1(a) - N_2(a,b,\rho)$$

dobivamo da je formula za nearbitražnu cijenu američke call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka:

$$\begin{aligned} c =& \widetilde{S_0}\left(N_1(b_1) + N_2\left(a_1, -b_1, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right) - Ke^{-rT}\left(N_1(b_2)e^{r(T-t_1)} + N_2\left(a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right) \\ &+ D_1 e^{-rt_1} N_1(b_2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

pri čemu su funkcije $N_1(\cdot)$ i $N_2(\cdot,\cdot,\cdot)$ i vrijednosti $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ iste kao i ranije. Važno je napomenuti da izbor portfelja čija je nearbitražna cijena jednaka nearbitražnoj cijeni američke call opcije nije jedinstven, no ipak portfelj koje je postavio Roll nije točan. Problem u Rollovom portfelju predstavlja opcija (b) i njena cijena izvšenja $S^*_{t_1} + D_1$. Cijena izvršenja koja je točna je ona koju je definirao Whaley $S^*_{t_1}$. Ipak, možemo koristiti opciju (b) onako kako ju je postavio Roll no tada za cijenu opcije trebamo promatrati cijenu S_t koja nije umanjena za diskontirani iznos očekivane dividende. Naime, bitno je da opcija (b) u slučaju da iskoristimo opciju prije trenutka t_1 osigurava novčani prihod u iznosu

$$\widetilde{S_{t_1}} + D_1 - S^*_{t_1} - D_1.$$

Opcija koja osigurava takav novčani prihod je europska opcija čija je nearbitražna cijena zadana s $c(0, S_0)$. Naime, tada u trenutku t_1 vlasnik opcije dobiva:

$$\begin{array}{rl} S_{t_1} - S^*_{t_1} - D_1 & \text{ako} \;\; S_{t_1} > S^*_{t_1} + D_1, \\ 0 & \text{ako} \;\; S_{t_1} \leq S^*_{t_1} + D_1. \end{array}$$

Kako je $\widetilde{S_{t_1}} \approx S_{t_1} - D_1$ u trenutku t_1 neposredno prije isplate dividende, prethodni uvjeti se mogu zapisati na drugačiji način:

$$\begin{array}{rl} \widetilde{S_{t_1}} - S^*_{t_1} & \text{ako} \;\; \widetilde{S_{t_1}} > S^*_{t_1}, \\ 0 & \text{ako} \;\; \widetilde{S_{t_1}} \leq S^*_{t_1}. \end{array}$$

Ako izraz za c_b u Roll-ovoj formuli za izračun nearbitražne cijene zamijenimo s

$$c_b = \widetilde{S_0} \cdot N_1(b_1) - S^*_{t_1} \cdot e^{-rt_1} \cdot N_1(b_2)$$

dobivamo točnu formulu koja se pojednostavljenjem svodi na formulu koju je opisao Whaley.

U formuli koju je postavio Geske pogreška je u tome što se za korelaciju u bivarijatnoj normalnoj razdiobi koristi $\sqrt{\frac{t_1}{T}}$ umjesto $-\sqrt{\frac{t_1}{T}}$. Također, vrijednosti c_1 i c_2 mogu se respektivno zamijeniti s vrijednostima $-b_1$ i $-b_2$. Kad se naprave ove izmjene u formuli koju je postavio Geske opet dobivamo formulu koju je postavio Whaley. Sad kad imamo točnu formulu za izračun nearbitražne cijene možemo na istom primjeru kao kod Blackove aproksimacije izračunati koliko bi pri ugovaranju kupac opcije trebao platiti prodavatelju.

4.6 Primjer izračuna nearbitražne cijene Roll-Geske-Whaley pristupom

U ovom potpoglavlju pomoću Roll-Geske-Whaley pristupa računamo nearbitražnu cijenu za američku call opciju za koju smo računali cijenu i pomoću Blackove aproksimacije.

Dakle, $S_0 = 52\$$, $K = 55\$$, $\sigma = 25\%$, $r = 8\%$ godišnje, vrijeme dospijeća opcije je 1 godina i očekuje se isplata dividende u iznosu $D_1 = 1.5\$$ nakon $t_1 = 9$ mjeseci. Imamo formulu:

$$\begin{aligned} c =& \widetilde{S_0}\left(N_1(b_1) + N_2\left(a_1, -b_1, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right) - Ke^{-rT}\left(N_1(b_2)e^{r(T-t_1)} + N_2\left(a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right)\right) \\ &+ D_1 e^{-rt_1} N_1(b_2). \end{aligned} \tag{4.10}$$

pri čemu je N_1 funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe, N_2 funkcija distribucije standardne bivarijatne normalne razdiobe, a vrijednosti a_1, b_1, a_2, b_2 zadane su s:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\widetilde{S_0}}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}, \\ b_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\widetilde{S_0}}{S^*_{t_1}}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{t}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Također vrijedi da je $S^*_{t_1}$ rješenje jednadžbe :

$$c\left(t_1, S^*_{t_1}\right) = S^*_{t_1} + D_1 - K, \tag{4.12}$$

pri čemu je $c(t, S_t)$ formula za nearbitražnu cijenu europske call opcije s vremenom dospijeća T zadana s (3.6), a za $\widetilde{S_0}$ vrijedi $\widetilde{S_0} = S_0 - e^{-rt_1}D_1$. Uvrštavajući vrijednosti dobivamo

$$\widetilde{S_0} = 52\$ - e^{-0.08\cdot\frac{3}{4}} \cdot 1.5\$ = 50.59\$.$$

Za $S^*_{t_1}$ moramo izračunati rješenje sljedeće jednadžbe:

$$S^*_{t_1} N_1\left(d_+\left(T - t_1, S^*_{t_1}\right)\right) - Ke^{-r(T-t_1)}N_1(d_-\left(T - t_1, S^*_{t_1}\right)) = S^*_{t_1} + D_1 - K$$

koja se uvrštavnjem vrijednosti koje unaprijed znamo svodi na:

$$S^*_{t_1} N_1\left(8\ln\left(\frac{S^*_{t_1}}{55}\right) + \frac{89}{400}\right) - 53.91 \cdot N_1\left(\ln\left(\frac{S^*_{t_1}}{55}\right) + \frac{39}{400}\right) = S^*_{t_1} - 53.5.$$

Pomoću numeričke aproksimacije dobivamo da je rješenje gornje jednadžbe jednako

$$S^*_{t_1} = 62.598\$.$$

Sad kad imamo sve potrebno za izračunati vrijednosti od a_1, b_1, a_2 i b_2 dobivamo sljedeće:

$$a_1 = 0.1105, \quad a_2 = -0.1395, \quad b_1 = -0.5986, \quad b_2 = -0.8151.$$

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije distribucije standardne normalne razdiobe te vrijednosti funkcije distribucije standardne bivarijatne normalne razdiobe. Vrijednosti standardne normalne razdiobe možemo jednostavno izračunati u R-u. Dobivene vrijednosti su:

$$N_1(b_1) = 0.2747, \quad N_1(b_2) = 0.2075.$$

Vrijednost funkcije distribucije $N_2(a, b, \rho)$ u standardnoj bivarijatnoj normalnoj razdiobi, gdje je prva varijabla manja od a i druga varijabla manja od b uz koeficijent korelacije ρ između varijabli možemo uz pretpostavku da vrijedi $a \leq 0$, $b \leq 0$ i $\rho \leq 0$ aproksimirati pomoću sljedeće formule:

$$N_2(a, b, \rho) \approx \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \sum_{i,j=1}^{4} A_i A_j f(B_i, B_j) \tag{4.13}$$

pri čemu je

$$f(x, y) = \exp\left[a'(2x - a') + b'(2y - b') + 2\rho(x - a')(y - b')\right]. \tag{4.14}$$

Ostale vrijednosti zadane su s:

$$a' = \frac{a}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}, \quad b' = \frac{b}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$$

te

$$A_1 = 0.3253030, \; A_2 = 0.4211071, \; A_3 = 0.1334425, \; A_4 = 0.006374323$$
$$B_1 = 0.1337764, \; B_2 = 0.6243247, \; B_3 = 1.3425378, \; B_4 = 2.2626645.$$

Prethodna formula preuzeta je iz [5] i daje vrijednosti s točnošću na četiri decimalna mjesta. Ta formula dobivena je pomoću Gauss-Hermiteove kvadrature. Gauss-Hermiteova kvadratura je numerička metoda koja aproksimira integral oblika:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} f(x, y)\, dx\, dy$$

koristeći zbroj težinskih faktora i vrijednosti funkcije $f(x, y)$ izračunate u određenim čvorovima. Uočimo da se funkcija distribucije bivarijatne normalne razdiobe može određenim supstitucijama zapisati kao spomenuti oblik integrala, točnije:

$$N_2(a, b, \rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} f(x, y)\, dx\, dy,$$

pri čemu je $f(x, y)$ zadano s (4.14). Prema Gauss-Hermiteovoj kvadraturi gornji integral možemo aproksimirati kao (4.13) pri čemu su čvorovi B_i za $i = 1, 2, 3, 4$ nultočke Hermiteovih polinama u toj metodi, a A_i za $i = 1, 2, 3, 4$ su težine koje odgovaraju pojedinom čvoru određene tako da bi se osigurala što bolja aproksimacija integrala. Više detalja može se pronaći u Dreznerovom radu [2]. U nastavku se nalazi račun za vrijednosti funkcija distribucija bivarijatne normlane razdiobe za naš konkretan primjer. Kako u većini slučajeva nije zadovoljena pretpostavka $a \leq 0$, $b \leq 0$ i $\rho \leq 0$ aproksimacijske formule (4.10) korištene su zamjenske formule. Drezner je u svojem radu [2] dao algoritam koju zamjensku formulu trebamo koristiti u pojedinom slučaju i taj algoritam je korišten u daljnem izračunu.

Kako za izračun trebamo $N_2\left(a_1, -b_1, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right) = N_2\left(0.1105, 0.5986, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ ne vrijede pretpostavke formule (4.10) no umjesto nje možemo koristiti sljedeću formulu za izračun:

$$N_2\left(a_1, -b_1, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right) = N_1(a_1) + N_1(-b_1) - 1 + N_2\left(-a_1, b_1, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right).$$

Dakle, vrijednost od $N_2\left(0.1105, 0.5986, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ možemo izračunati kao

$$N_2\left(0.1105, 0.5986, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = N_1(0.1105)+N_1(0.5986)-1+N_2\left(-0.1105, -0.5986, -\sqrt{0.75}\right).$$

Vidimo da $N_2\left(-0.1105, -0.5986, -\sqrt{0.75}\right)$ zadovoljava pretpostavke formule (4.10) pa je možemo iskoristiti i dobivamo da vrijedi:

$$N_2\left(a_1, -b_1, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right) = N_2\left(0.1105, 0.5986, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = 0.2773.$$

Također, trebamo još izračunati $N_2\left(a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right) = N_2\left(-0.1395, 0.8151, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ što isto ne zadovoljava pretpostavke formule (4.10) no umjesto toga možemo koristiti:

$$N_2\left(a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right) = N_2\left(a_2, 0, \rho_1\right) + N_2\left(-b_2, 0, \rho_2\right) - \delta$$

pri čemu su

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \geq 0 \\ -1 & \text{ako } x < 0 \end{cases}$$

$$\rho_1 = \frac{(a_2\rho + b_2)\operatorname{sgn}(a_2)}{\sqrt{a_2^2 + 2\rho a_2 b_2 + b_2^2}}, \quad \rho_2 = \frac{(-b_2\rho - a_2)\operatorname{sgn}(-b_2)}{\sqrt{a_2^2 + 2\rho a_2 b_2 + b_2^2}}, \quad \delta = \frac{1 - \operatorname{sgn}(a_2)\operatorname{sgn}(-b_2)}{4}.$$

Uvrštavajući vrijednosti $a_2 = -0.1395$ i $b_2 = -0.8151$ dobivamo sljedeće:

$$\rho_1 = 0.995, \quad \rho_2 = -0.8117, \quad \delta = 0.5.$$

Nadalje, slijedi da je je vrijednost od $N_2\left(-0.1395, 0.8151, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$ jednaka:

$$N_2\left(-0.1395, 0.8151, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = N_2(-0.1395, 0, 0.995) + N_2(0.8151, 0, -0.8117) - 0.5.$$

Možemo uočiti da $N_2(-0.1395, 0, 0.995)$ i $N_2(0.8151, 0, -0.8117)$ ne zadovoljavaju pretpostavke formule (4.10) no možemo se koristiti sljedećim formulama:

$$\begin{aligned} N_2(-0.1395, 0, 0.995) &= N_1(-0.1395) - N_2(-0.1395, 0, -0.995), \\ N_2(0.8151, 0, -0.8117) &= N_1(0.8151) + N_1(0) - 1 + N_2(-0.8151, 0, -0.8117). \end{aligned}$$

Primjenom ovih formula dobivamo sljedeće vrijednosti:

$$N_2(-0.1395, 0, 0.995) = 0.443, \quad N_2(0.8151, 0, -0.8117) = 0.3024$$

i na kraju dobivamo

$$N_2\left(a_2, -b_2, -\sqrt{\frac{t_1}{T}}\right) = N_2\left(-0.1395, 0.8151, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = 0.2455.$$

Uvrštavajući sve dobivene vrijednosti u formulu (4.10) za nearbitražnu cijenu američke call opcije u trenutku $t = 0$ dobivamo sljedeće:

$$c = 5.01\$.$$

Usporedimo li ovaj iznos s nearbitražnom cijenom dobivenom pomoću Blackove aproksimacije 4.95\$ vidimo da male razlike u iznosima postoje, no to je očekivano obzirom na to da se radi o aproksimacijama. Detaljnija usporedba pristupa dana je u sljedećem potpoglavlju.

4.7 Usporedba Blackove aproksimacije i Roll-Geske-Whaley pristupa

Za kraj, promotrimo kratku usporedbu Blackovog pristupa i Roll-Geske-Whaley pristupa koji su detaljnije objašnjeni u prethodnim potpoglavljima.

U izračunu pomoću Blackove aproksimacije nearbitražnu cijenu američke call opcije aproksimiramo maksimumom nerabitražnih cijena dviju europskih call opcija: jedna od tih opcija je s dospijećem u trenutku neposredno prije isplate dividende i stvarnom početnom cijenom dionice, a druga sa stvarnim vremenom dospijeća američke call opcije i početnom cijenom dionice diskontiranom za vrijednost očekivane dividende. Kako je formula za izračun nearbitražne cijene europske call opcije poznata ova metoda je brza i jednostavna jer ne zahtijeva numeričko rješavanje Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednadžbe. Nadalje, Roll-Geske-Whaley pristup temelji se na primjeni portfelja čija je vrijednost u svakom trenutku jednaka vrijednosti američke call opcije. Taj portfelj sastoji se od triju europskih call opcija:

(a) duge pozicije europske call opcije s cijenom izvršenja K i datumom dospijeća T

(b) duge pozicije europske call opcije s cijenom izvršenja $S^*_{t_1}$ i dospijećem t_1 neposredno prije isplate dividende

(c) kratke pozicije europske call opcije na opciju definiranu u dijelu (a) s cijenom izvršenja $S^*_t + D_1 - K$ i vremenom dospijeća t_1 neposredno prije isplate dividende.

pri čemu je K cijena izvršenja američke call opcije, T vrijeme dospijeća, a $S^*_{t_1}$ je cijena dionice iznad koje je za kupca opcije optimalno iskoristiti opciju prije isplate dividende. Zbrajanjem i oduzimanjem formula za cijene gore spomenutih opcija možemo dobiti formulu za izračun cijene američke call opcije. Ta formula odgovara i analitičkom rješenju Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednažbe pa bi ova metoda mogla dati bolje rezultate od Blackove aproksimacije. S obzirom da pri izračunu ove formule moramo koristiti numeričke aproksimacije, npr. za izračun vrijednosti funkcije distribucije bivarijatne normalne razdiobe i za dobivanje vrijednosti od $S^*_{t_1}$, nećemo dobiti egzaktnu vrijednost za cijenu američke call opcije no aproksimirana vrijednost neće puno odstupati od prave vrijednosti za cijenu. Također, možemo uočiti da je Roll-Geske-Whaley pristup složeniji pa je potrebno više vremena za dobivanje rezultata u odnosu na Blackovu aproksimaciju. Investitori koji trguju američkom call opcijom na dionicu za koju očekujemo isplatu dividende mogu birati između ove dvije metode za izračun nearbitražne cijene, a sam odabir metode ovisi o njihovim preferencijama za preciznošću i spremnosti za složenije numeričke izračune.

Bibliografija

[1] F. Black, *Fact and Fantasy in the Use of Options*, Financial Analysts Journal **31** (1975), br. 4, 36–41,61–72.

[2] Z. Drezner, *Computation of the Bivariate Normal Integral," Mathematics of Computation*, Mathematics of Computation **32** (1978), br. 141, 277–279.

[3] R. Geske, *Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends*, Journal of Financial Economics (1979), br. 7, 375–380.

[4] J.C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Pearson Education Limited, 2012.

[5] ______, *Calculation of Cumulative Probability in Bivariate Normal Distributions*, `https://www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes/TechnicalNote5.pdf`.

[6] ______, *Exact Procedure for Valuating American Calls on Dividend-Paying Stocks*, `https://www-2.rotman.utoronto.ca/~hull/TechnicalNotes/TechnicalNote4.pdf`.

[7] R. Roll, *An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends*, Journal of Financial Economics (1977), br. 5, 251–258.

[8] S.E. Shreve, *Stohastic Calculus for Finance II Continuaous-Time Models*, Springer, 2004.

[9] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/fm-p6.pdf`, datum zadnjeg pristupanja: lipanj 2024.

[10] V. Wagner, *Financijsko modeliranje 1*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm1_p.pdf`, datum zadnjeg pristupanja: lipanj 2024.

[11] ———, *Financijsko modeliranje 2*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~wagner/userfiles/nastava/rezultati/fm2_p.pdf, datum zadnjeg pristupanja: lipanj 2024.

[12] R.E. Whaley, *On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends*, Journal of Financial Economics (1981), br. 9, 207–211.

Sažetak

U ovom radu analizirana je nearbitražna cijena američke call opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu s dividendama. Nakon što je u prvom poglavlju dan kratak ekonomski uvod, u drugom poglavlju objašnjena je ekvivalentna martingalna mjera, iskazan Girsanovljev teorem, opisan klasičan Black-Scholes-Mertonov model te pokazana primjena Girsanovljevog teorema za dobivanje ekvivalentne martingalne mjere u tom modelu. U trećem poglavlju dokazano je da se u klasičnom modelu cijena europske call opcije i američke call opcije na istu dionicu i istim datumom dospijeća te cijenom izvršenja podudaraju. Uvedena je generalizacija klasičnog modela pretpostavkom da se u fiksnim trenucima na dionicu isplaćuje dividenda, a cijena dionice između isplata modelira geometrijskim Brownovim gibanjem. U modelu s dividendama analiziran je algoritam za izračun nearbitražne cijene američke call opcije na dionicu i pokazano je da u trenucima neposredno prije isplate dividende američka call opcija može vrijediti više od europske call opcije s istim dospijećem i cijenom izvršenja. U četvrtom poglavlju opisana su dva pristupa za izračun nearbitražne cijene američke call opcije na dionicu za koju očekujemo jednu isplatu dividende. Ti pristupi su Blackova aproksimacija i Roll-Geske-Whaley pristup. Na kraju rada uspoređeni su spomenuti pristupi te pokazani izračuni nearbitražne cijene pomoću oba pristupa za konkretnu američku call opciju na dionicu za koju tijekom trajanja opcije postoji jedna isplata dividende.

Summary

This thesis analyzes the arbitrage-free price of an American call option in the Black-Scholes-Merton model with dividends. After a brief economic introduction in the first chapter, the second chapter explains the equivalent martingale measure, states the Girsanov theorem, describes the classical Black-Scholes-Merton model, and demonstrates the application of the Girsanov theorem to obtain the equivalent martingale measure in that model. In the third chapter, it is proven that in the classical model, the prices of a European call option and an American call option on the same stock with the same expiration date and strike price coincide. A generalization of the classical model is introduced by assuming that dividends are paid on the stock at fixed moments, and the stock price between payments is modeled by geometric Brownian motion. In the model with dividends, an algorithm for calculating the arbitrage-free price of an American call option on the stock is analyzed, and it is shown that immediately before the dividend payment dates, the American call option can be worth more than the European call option with the same expiration date and strike price. In the fourth chapter, two approaches for calculating the arbitrage-free price of an American call option on a stock expected to have a single dividend payment are described. These approaches are Black's approximation and the Roll-Geske-Whaley approach. Finally, the mentioned approaches are compared, and calculations of the arbitrage-free price using both approaches are demonstrated for a specific American call option on a stock that has a single dividend payment during the option's duration.

Životopis

Rođena sam 11. prosinca 2000. u Varaždinu. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja u Osnovnoj školi Tužno, 2015. godine upisujem u Drugoj gimnaziji Varaždin prirodoslovno-matematički smjer. Srednjoškolsko obrazovanje završavam 2019. godine te iste godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2022. godine te upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu.