Linearni operatori na unitarnim prostorima

Štriga, Marta

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marta Štriga

LINEARNI OPERATORI NA UNITARNIM PROSTORIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, srpanj 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Prije svega, želim se zahvaliti svojoj mentorici prof. dr. sc. Ljiljani Arambašić na pruženom povjerenju, podršci, strpljenju i stručnom vodstvu kroz proces pisanja ovog rada.

Posebnu zahvalu dugujem svojim roditeljima i sestri na beskrajnoj ljubavi, podršci i razumijevanju tijekom cijelog mog obrazovanja. Hvala vam što ste uvijek vjerovali u mene.

Hvala svim mojim kolegama studentima i prijateljima što su ovaj period mog života učinili nezaboravnim.

Sadržaj

Uvod

Linearni operatori na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima glavni su predmet proučavanja grane matematike koja se zove linearna algebra. Definiranje skalarnog produkta na vektorskom prostoru omogućava definiranje norme, ortogonalnosti i ortonormiranosti. Posebno, omogućava definiranje ortonormirane baze za unitarni prostor koja pojednostavljuje mnoge račune. U ovom radu će se posebno proučavati linearni operatori na unitarnim prostorima. Zbog pojednostavljenja računa s linearnim operatorima, odnosno pripadnim matricama, glavni cilj će biti pronaći što jednostavnije matrične zapise operatora u ortonormiranoj bazi unitarnog prostora. Tvrdnje za linearne operatore će se prevesti i u tvrdnje za matrice gdje je to moguće.

U prvom dijelu rada dat ćemo pregled linearne algebre koja je nužna za razumijevanje glavnog dijela rada. Prisjetit ćemo se kako su definirani linearni operatori na vektorskom prostoru te kako izgleda matrični zapis linearnog operatora u paru baza. Nakon uvođenja skalarnog produkta, to jest unitarnog prostora, proučit ćemo linearne funkcionale na unitarnom prostoru te uvesti hermitski adjungirane operatore. Ti će operatori omogućiti definiranje klasa operatora kojima se bavimo u nastavku.

U drugom dijelu ćemo se baviti problemom dijagonalizacije u ortonormiranoj bazi. U sklopu toga će se opisati dvije klase linearnih operatora, a to su normalni i hermitski operatori. Uz pomoć njih će se iskazati spektralni teoremi na kompleksnom i realnom unitarnom prostoru koji govore kada postoji ortonormirana baza u kojoj je operator dijagonalizabilan. Navest ćemo i nekoliko primjera iz primjene.

Za kraj ćemo se baviti dekompozicijom linearnih operatora. Nakon uvođenja unitarnih i pozitivnih linearnih operatora, opisat ćemo kako bilo koji linearni operator možemo zapisati kao kompoziciju unitarnog i pozitivnog operatora. Za kraj ćemo pokazati da za svaki linearni operator postoji par ortonormiranih baza u kojima je matrični zapis linearnog operatora dijagonalna matrica.

Poglavlje 1

Linearni operatori na unitarnim prostorima

1.1 Vektorski prostor

Do kraja 19. stoljeća, skupovi kao što su točke u ravnini ili prostoru, polinomi, funkcije itd. proučavali su se samostalno. Uočavanjem da različiti matematički primjeri zadovoljavaju neka zajednička svojstva koja uključuju dva skupa i dvije algebarske operacije koje se nazivaju zbrajanje i množenje skalarima došlo se do formalne definicije vektorskog prostora.

Definicija 1.1.1. *Neka je V neprazan skup i neka su na njemu definirane operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$.*
*Kažemo da je V **vektorski prostor nad poljem** $\mathbb{F}$ ako vrijede sljedeća svojstva:*

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ *za sve* $a, b, c \in V$ *(asocijativnost zbrajanja)*

(2) postoji element $0 \in V$ *takav da je* $a + 0 = 0 + a = a$ *za svaki* $a \in V$

(3) za svaki $a \in V$ *postoji element* $-a \in V$ *takav da je* $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(4) $a + b = b + a$ *za sve* $a, b \in V$ *(komutativnost zbrajanja)*

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ *za sve* $a \in V$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *(kvaziasocijativnost)*

(6) $1 \cdot a = a$ *za svaki* $a \in V$ *(svojstvo jedinice ili netrivijalnost množenja)*

(7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *i* $a \in V$ *(distributivnost prema zbrajanju skalara)*

(8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{F}$ *i* $a, b \in V$ *(distributivnost prema zbrajanju vektora).*

Elemente vektorskog prostora nazivamo **vektorima**. Neki od njih imaju posebna imena, pa se tako element 0 iz svojstva (2) naziva **nulvektor** ili **neutralni element** za zbrajanje, a element $-a$ iz svojstva (3) naziva **suprotni vektor** ili **suprotni element** od a.

Elemente polja $\mathbb{F}$ nazivamo **skalarima**. Polje $\mathbb{F}$ će nam biti polje realnih ili polje kompleksnih brojeva i obično je iz konteksta jasno na koje polje se oznaka $\mathbb{F}$ odnosi. Kažemo da je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ realni vektorski prostor, a vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ kompleksni vektorski prostor.

Na taj način se objedinjuje proučavanje konkretnih primjera, odnosno pojedine tvrdnje se sada dokazuju na apstraktnoj razini.

U nastavku navodimo dva primjera vektorskih prostora.

Primjer 1.1.2. *Neka je* $\mathbb{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *skup svih uređenih* n*-torki elemenata iz* $\mathbb{F}$. *Tada je* $\mathbb{F}^n$ *uz operacije definirane na sljedeći način*

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

gdje je $\alpha \in \mathbb{F}$ *te* $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$.

Primjer 1.1.3. *Neka je* $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, $n \in \mathbb{N}$ *skup svih polinoma stupnja najviše* n *s realnim koeficijentima. Svaki* $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ *ima oblik*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

za neke koeficijente $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$.

Ako $p, q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ *zapišemo kao*

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad q(x) = n_n x^n + \dots + b_1 x + b_0,$$

gdje su $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_0 \in \mathbb{F}$, *onda je* $p + q$ *polinom zadan izrazom*

$$(p + q)(x) = (a_n + b_n)x^n + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

Množenje polinoma p *skalarom* $\alpha \in \mathbb{F}$ *dano je formulom*

$$(\alpha p)(x) = \alpha a_n x^n + \dots + \alpha a_1 x + \alpha a_0.$$

Skup $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ *uz tako definirane operacije zbrajanja i množenja skalarom je vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$.

Lako se vidi da vrijede sljedeće tvrdnje.

Propozicija 1.1.4. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi:*

(1) Neutralni element za zbrajanje je jedinstven.

(2) Za svaki $a \in V$ postoji jedinstveni suprotni element.

(3) Za svaki $a \in V$ vrijedi $0 \cdot a = 0$.

(4) Za svaki $\alpha \in \mathbb{F}$ vrijedi $\alpha \cdot 0 = 0$.

(5) Za svaki $a \in V$ vrijedi $(-1)a = -a$.

1.2 Linearni operator

Sljedeći važan pojam u linearnoj algebri je linearni operator. Često se opisuje kao preslikavanje između vektorskih prostora koje je usklađeno sa strukturom vektorskog prostora.

Definicija 1.2.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ je* ***linearni operator*** *ako vrijedi*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Linearne operatore $f : V \to \mathbb{F}$, dakle one kojima je kodomena polje $\mathbb{F}$, nazivamo ***linearnim funkcionalima****.*

Svojstvo navedeno u definiciji naziva se **linearnost od** A i ekvivalentno je sa sljedeća dva svojstva:

(1) $A(x + y) = Ax + Ay$ za sve $x, y \in V$ (**aditivnost od** A)

(2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ za sve $x \in V$ i $\alpha \in \mathbb{F}$ (**homogenost od** A)

Očito je da smo (1) dobili iz definicije za $\alpha = \beta = 1$, a (2) za $y = 0$. Odmah iz definicije vidimo da svaki linearni operator preslikava nulvektor u nulvektor.

Navodimo neke jednostavne primjere linearnog operatora.

Primjer 1.2.2. *(1) Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\lambda \in \mathbb{F}$. Preslikavanje $h : V \to V$ zadano kao*

$$h(x) = \lambda x, \quad \forall x \in V$$

naziva se homotetija, a lako se provjerava da je h linearni operator na V.

Za $\lambda = 1$ dobivamo jedinični operator I koji preslikava svaki vektor u samog sebe, a za $\lambda = 0$ nuloperator koji svaki vektorski prostor preslikava u nulvektor.

(2) Neka je $\mathbb{C}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Preslikavanje $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadano s

$$k(z) = \overline{z}$$

koje se naziva kompleksno konjugiranje, je linearni operator.

(3) Preslikavanje $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano kao

$$Z(x, y) = (y, x)$$

naziva se osna simetrija s obzirom na pravac $y = x$ te se lako provjerava da je Z linearni operator.

(4) Na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ svih polinoma s realnim koeficijentima promatramo operator deriviranja

$$D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad Dp = p'.$$

Iz pravila za deriviranje zbroja funkcija i derivacije umnoška funkcije sa skalarom slijedi da je D linearni operator.

Definicija 1.2.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori te $A \in L(V, W)$. Prostor $\{Ax : x \in V\}$ naziva se* ***slika*** *od A i označava se s $\operatorname{Im} A$. Dimenzija slike naziva se* ***rang*** *od A i označava se s $r(A)$.*

Prostor $\{x \in V : Ax = 0\}$ se naziva ***jezgra*** *od A i označava se s $\operatorname{Ker} A$. Dimenzija jezgre naziva se* ***defekt*** *od A i označava se s $d(A)$.*

Za sve linearne operatore vrijedi teorem o rangu i defektu.

Teorem 1.2.4 (Teorem o rangu i defektu). *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori te $A \in L(V, W)$. Tada je $r(A) + d(A) = \dim V$.*

Definicija 1.2.5. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori te $A \in L(V, W)$. Operator A se naziva* ***monomorfizam*** *ako je A injektivan,* ***epimorfizam*** *ako je A surjektivan te* ***izomorfizam*** *ako je A bijektivan. Za dva vektorska prostora V i W kažemo da su* ***izomorfni*** *ako postoji izomorfizam $A \in L(V, W)$.*

Propozicija 1.2.6. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori te $A \in L(V, W)$. Operator A je injektivan ako i samo ako $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, to jest, $d(A) = 0$.*

Sljedeća propozicija govori kada su dva vektorska prostora izomorfna.

Propozicija 1.2.7. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori. Tada su V i W izomorfni ako i samo ako $\dim V = \dim W$.*

Sljedeći korolar je posljedica teorema o rangu i defektu.

Korolar 1.2.8. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori takvi da je $\dim V = \dim W$ i $A \in L(V, W)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) A je monomorfizam.

(2) A je epimorfizam.

(3) A je izomorfizam.

Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V s fiksiranim poretkom elemenata. Za svaki $x \in V$ postoje jedinstveni skalari $x_1, \ldots, x_n$ takvi da vrijedi

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Vektoru x se sada može pridružiti stupčana matrica

$$x(e) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{F}),$$

koja se naziva **matrični zapis (prikaz) vektora** x **u bazi** (e).

Na ovaj način je definirano preslikavanje

$$\varphi : V \to M_{n1}(\mathbb{F}), \quad \varphi(x) = x(e)$$

koje je izomorfizam vektorskih prostora V i $M_{n1}(\mathbb{F})$.

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori te $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ redom baze za V i W. Neka je $A \in L(V, W)$. Kako su $Ae_1, \ldots, Ae_n$ elementi vektorskog prostora W, mogu se na jedinstven način zapisati uz pomoć baze (f):

$$Ae_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} f_i, \quad Ae_2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i2} f_i, \quad \ldots, \quad Ae_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} f_i.$$

Od dobivenih koeficijenata α_{ij} formira se sljedeća matrica

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

koja se naziva **matrični zapis (prikaz) linearnog operatora** A **u paru baza** (e, f). Ako je $A \in L(V)$ i $(e) = (f)$, tada se oznaka $A(e, e)$ obično krati u $A(e)$.

Uspostavlja se veza između vektorskih prostora $L(V, W)$ i $M_{mn}(\mathbb{F})$, odnosno, definira se preslikavanje

$$\Phi : L(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{F}), \qquad \Phi(A) = A(f, e)$$

koje je izomorfizam vektorskih prostora $L(V, W)$ i $M_{mn}(\mathbb{F})$.

Neka je $A \in M_{mn}$. Definiramo operator $L_A : M_{n1} \to M_{m1}$ kao $L_A(X) = AX$ za svaki $X \in M_{n1}$ i nazivamo ga **linearni operator pridružen matrici** A.

1.3 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Prije definicije dijagonalizabilnosti uvedimo nekoliko pojmova.

Definicija 1.3.1. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je* ***svojstvena vrijednost linearnog operatora*** *A ako postoji $x \in V$, $x \neq 0$ takav da je*

$$Ax = \lambda x.$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti od A naziva se ***spektar linearnog operatora*** *A i označava sa $\sigma(A)$.*

Vektor x naziva se ***svojstveni vektor linearnog operatora*** *A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.*

Jednadžba $Ax = \lambda x$ ekvivalentna je jednadžbi $(A - \lambda I)x = 0$. Prema tome, λ je svojstvena vrijednost od A ako i samo ako $A - \lambda I$ nije injektivan jer je tada $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$, a kako je $A - \lambda I \in L(V)$, to je ekvivalnetno s tim da $A - \lambda I$ nije surjektivan.

Kako bismo odredili svojstvene vrijednosti linearnog operatora definiramo sljedeći polinom.

Definicija 1.3.2. *Neka je $A \in M_n$. Polinom k_A definiran kao*

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

naziva se ***karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom matrice*** *A.*

Propozicija 1.3.3. *Slične matrice imaju iste karakteristične polinome.*

Neka je V vektorski prostor te (e) i (f) dvije baze za V. Može se pokazati da su matrice $A(e)$ i $A(f)$ slične.

Sada pomoću karakterističnog polinoma matrice uvodimo karakteristični polinom linearnog operatora, a zbog propozicije 1.3.3 je ovaj pojam dobro definiran, to jest ne ovisi o izboru baze

Definicija 1.3.4. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$, te (e) neka baza za V.* ***Karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom*** *operatora A je karakteristični polinom matrice $A(e)$.*

Teorem 1.3.5. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \mathbb{F}$. Tada je λ_0 svojstvena vrijednost od A ako i samo ako je $k_A(\lambda_0) = 0$.*

Sada pretpostavimo da postoji baza $(f) = \{f_1, \dots, f_n\}$ za V takva da je matrični zapis operatora $A \in L(V)$ u toj bazi dijagonalna matrica, dakle

$$A(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

za neke $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Iz definicije matričnog zapisa linearnog operatora u bazi slijedi da je $Af_i = \lambda_i f_i$ za svaki $i = 1, \dots, n$. Dakle, baza (f) je nužno sastavljena od svojstvenih vektora za A. Pritom se na dijagonali matričnog zapisa nalaze svojstvene vrijednosti od A. Prema tome, da bismo došli do dijagonalne matrice linearnog operatora moramo pronaći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore pridružene svojstvenim vrijednostima. Pitanje je može li se od svojstvenih vektora sastaviti baza za V. Iz toga slijedi definicija dijagonalizabilnosti linearnog operatora.

Definicija 1.3.6. *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor. Kažemo da se linearni operator $A \in L(V)$* ***može dijagonalizirati*** *ili da je A* ***dijagonalizabilan*** *ako postoji baza $(f) = \{f_1, \dots, f_n\}$ za V u kojoj je matrični zapis $A(f)$ dijagonalna matrica.*

Može se pokazati da ako su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti od operatora $A \in L(V)$ i $x_1, \dots, x_k$ redom pridruženi svojstveni vektori, tada je $\{x_1, \dots, x_k\}$ linearno nezavisan skup. Također, ako A ima n različitih svojstvenih vrijednosti, onda se A može dijagonalizirati.

Slične definicije uvodimo i za kvadratne matrice. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost matrice A ako postoji $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$, $X \neq 0$ takav da vrijedi $AX = \lambda X$. Sada, ako za $A \in M_n(\mathbb{F})$ postoji regularna matrica $S \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $S^{-1}AS$ dijagonalna matrica, onda se na dijagonali matrice $S^{-1}AS$ nalaze svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ matrice A, a stupci matrice S su svojstveni vektori pridruženi svojstvenim vrijednostima. Matrica za koju postoji takva matrica S naziva se **dijagonalizabilna matrica**.

Sljedećom propozicijom se uspostavlja veza između matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ i njoj pridruženog linearnog operatora $L_A \in L(M_{n1}(\mathbb{F}))$.

Propozicija 1.3.7. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i $L_A \in L(M_{n1}(\mathbb{F}))$ pridruženi linearni operator.*

(1) Vrijedi $k_A = k_{L_A}$.

(2) Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je svojstvena vrijednost linearnog operatora L_A.

(3) Vektor $X \in M_{n1}(\mathbb{F})$ je svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ ako i samo ako je svojstveni vektor linearnog operatora L_A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

(4) Matrica A može se dijagonalizirati ako i samo ako se operator L_A može dijagonalizirati.

Kod određivanja nultočaka karakterističnog polinoma, nultočke mogu izlaziti iz skupa na kojem polinom promatramo. To je slučaj kada se na realnom vektorskom prostoru dobivaju nultočke iz $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Također, svojstveni vektori ne moraju činiti bazu vektorskog prostora. Zbog toga, nije uvijek moguće dijagonalizirati linearni operator, odnosno matricu.

1.4 Unitarni prostor

Definicija 1.4.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. **Skalarni produkt** ili **skalarno množenje** na V je preslikavanje*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$$

koje ima sljedeća svojstva:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ za svaki $x \in V$

(2) $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$

(3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ za sve $x_1, x_2, y \in V$

(4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $x, y \in V$

(5) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ za sve $x, y \in V$.

*Broj $\langle x, y \rangle$ naziva se **skalarni produkt** ili **skalarni umnožak vektora** x **i** y. Vektorski prostor V na kojem je zadan skalarni produkt naziva se **unitarni prostor**.*

Unitarni prostor koji se sastoji od vektorskog prostora V i na njemu definiranog skalarnog produkta označavamo kao uređeni par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Primjer 1.4.2. *Na realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ za $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ iz $\mathbb{R}^n$ definira se*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Provjeravanjem svojstava iz definicije unitarnog prostora slijedi da je $\mathbb{R}^n$ unitaran prostor. Ovaj skalarni produkt naziva se ***standardni skalarni produkt na*** *$\mathbb{R}^n$.*

Analogno, $\mathbb{C}^n$ je unitaran prostor uz skalarni produkt definiran kao

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \ldots + x_n \overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Ovako definirani skalarni produkt naziva se ***standardni skalarni produkt na*** *$\mathbb{C}^n$.*

Primjer 1.4.3. *Na prostoru polinoma s realnim koeficijentima $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ za skalarni produkt se najčešće uzima preslikavanje*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t) q(t) dt,$$

za $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Primjenom svojstava određenog integrala, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ je realan unitaran prostor.

Definiranje skalarnog produkta omogućuje nam uvođenje sljedećih pojmova.

Definicija 1.4.4. *Neka je V unitarni prostor. Vektori $x, y \in V$ su* ***ortogonalni*** *ako je $\langle x, y \rangle = 0$. Pišemo $x \perp y$.*

Definicija 1.4.5. *Neka je V unitarni prostor. Konačan skup vektora u V je* ***ortogonalan skup*** *ako su svaka dva njegova elementa međusobno ortogonalni.*

Definiramo preslikavanje primjenom skalarnog produkta.

Definicija 1.4.6. *Neka je V unitarni prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Funkcija $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ definirana kao*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

naziva se ***norma na V inducirana skalarnim produktom****. Realni broj $\|x\|$ naziva se* ***norma*** *ili* ***duljina vektora*** *x.*

Definicija 1.4.7. *Neka je V unitarni prostor. Vektor $x \in V$ je **jedinični** ili **normirani vektor** ako je $\|x\| = 1$.*

Definicija 1.4.8. *Neka je V unitarni prostor. Konačan skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ u V je **ortonormiran** ako je ortogonalan skup i svi članovi su normirani. **Ortonormirana baza** za V je ortonormiran skup koji je i baza za V.*

Propozicija 1.4.9. *Neka je V unitarni prostor te $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V. Za svaki $x \in V$ vrijedi*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

U nastavku će baza unitarnog operatora biti ortonormirana jer omogućava jednostavnije računanje s linearnim operatorima i matricama.

1.5 Linearni funkcionali na unitarnim prostorima

Linearne funkcionale na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$ već smo definirali kao linearne operatore sa V u $\mathbb{F}$. Na primjer, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiran kao $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ je linearni funkcional na $\mathbb{R}^3$. Prostor svih linearnih funkcionala na V označavat ćemo s V^*.

Sljedeći teorem govori da se svaki linearni funkcional na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru može zapisati u obliku skalarnog produkta.

Teorem 1.5.1 (Rieszov teorem o reprezentaciji linearnih funkcionala). *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $f \in V^*$. Tada postoji jedinstveni vektor $a \in V$ takav da je*

$$f(x) = \langle x, a \rangle$$

za svaki $x \in V$.

Dokaz. Prvo pokazujemo egzistenciju vektora $a \in V$ takvog da je $f(x) = \langle x, a \rangle$ za svaki $x \in V$. Neka je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V. Tada je

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\langle x, e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle x, e_n \rangle e_n) \\ &= \langle x, e_1 \rangle f(e_1) + \ldots + \langle x, e_n \rangle f(e_n) \\ &= \langle x, \overline{f(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{f(e_n)} e_n \rangle \end{aligned}$$

za svaki $x \in V$. Tada za vektor $a = \overline{f(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{f(e_n)} e_n$ vrijedi $f(x) = \langle x, a \rangle$ za svaki $x \in V$.

Neka su $a, b \in V$ takvi da $f(x) = \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$ za svaki $x \in V$. Tada je

$$0 = \langle x, a\rangle - \langle x, b\rangle = \langle x, a - b\rangle$$

za svaki $x \in V$. Ako uzmemo $x = a - b$, onda slijedi da je $a - b = 0$, odnosno $a = b$. Odavde slijedi jedinstvenost vektora a. $\square$

Iz drugog dijela dokaza prethodnog teorema direktno slijedi korolar.

Korolar 1.5.2. *Neka je V unitarni operator i $a, b \in V$. Ako za svaki $x \in V$ vrijedi $\langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$, onda je $a = b$.*

U dokazu teorema 1.5.1 dobili smo formulu $a = \overline{f(e_1)}e_1 + \ldots + \overline{f(e_n)}e_n$. Zbog jedinstvenosti, a ne ovisi o izboru ortonormirane baze (e) za V. U sljedećim primjerima ćemo pokazati kako odrediti vektor a.

Primjer 1.5.3. *Neka je $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ zadan kao $f(z_1, z_2, z_3) = (1+i)z_1+(2-i)z_2-iz_3$. Lako provjeravamao da je f linearni operator. Očito je $f(z_1, z_2, z_3) = \langle (z_1, z_2, z_3), (1+i, 2-i, -i)\rangle$ pa je traženi vektor $a = (1 + i, 2 - i, -i)$.*

Primjer 1.5.4. *Neka je $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ zadan kao $f(p) = \int_0^1 p(t^2)dt$, pri čemu je $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ unitarni prostor s obzirom na skalarni produkt $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ vrijedi*

$$f(\alpha p + \beta q) = \int_0^1 (\alpha p(t^2) + \beta q(t^2))dt = \alpha \int_0^1 p(t^2)dt + \beta \int_0^1 q(t^2)dt = \alpha f(p) + \beta f(q),$$

pa je f linearni funkcional. Od baze $\{1, x, x^2\}$ za $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ Gram-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije dobivamo ortonormiranu bazu $(e) = \{1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, 6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5}\}$. Tada je

$$\begin{aligned} a(x) &= f(e_1)e_1 + f(e_2)e_2 + f(e_3)e_3 \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{5}}{5}(6\sqrt{5}x^2 - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5}) \\ &= 6x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

Prema tome, linearni funkcional f možemo zapisati kao $f(p) = \int_0^1 p(t)\cdot(6t^2-8t+1)dt$, za svaki $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

1.6 Hermitski adjungirani operator

Definicija 1.6.1. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Operator $A^* \in L(W, V)$ (čitamo: A zvijezda) takav da je*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \forall x \in V, \forall y \in W$$

naziva se ***hermitski adjungirani operator*** *operatora A. Preslikavanje $* : L(V, W) \to L(W, V)$ zadano s $A \mapsto A^*$ naziva se* ***adjungiranje***.

Sljedeći teorem pokazuje da takav operator A^* zaista postoji i da je jedinstven, a u dokazu se koristi Rieszov teorem o reprezentaciji linearnih funkcionala.

Teorem 1.6.2. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Tada postoji jedinstveni $A^* \in L(W, V)$ takav da je*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \forall x \in V, \forall y \in W.$$

Dokaz. Za $A \in L(V, W)$ te prizvoljan i fiksan $y \in W$ definiramo $f_y : V \to \mathbb{F}$ kao $f_y(x) = \langle Ax, y\rangle$. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi

$$f_y(\alpha x + \beta z) = \langle A(\alpha x + \beta z), y\rangle = \alpha\langle Ax, y\rangle + \beta\langle Az, y\rangle = \alpha f_y(x) + \beta f_y(z)$$

za sve $x, z \in V$. Dakle, f_y je linearni funkcional na V.

Prema Rieszovu teoremu o reprezentaciji linearnog funkcionala postoji jedinstveni element $a_y \in V$ takav da je

$$f_y(x) = \langle x, a_y\rangle$$

za svaki $x \in V$. Tada je preslikavanje $A^* : W \to V$ definirano kao $A^*(y) = a_y$ dobro definirano jer za svaki $y \in W$ postoji $a_y \in V$ i jedinstven je.

Vrijedi

$$\langle Ax, y\rangle = f_y(x) = \langle x, a_y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

za sve $x \in V$ i $y \in W$.

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Tada za sve $x \in V$ i $y_1, y_2 \in W$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle x, A^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle &= \langle Ax, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle Ax, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle Ax, y_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle x, A^*y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, A^*y_2\rangle \\
&= \langle x, \alpha A^*y_1 + \beta A^*y_2\rangle.
\end{aligned}$$

Iz korolara 1.5.2 slijedi $A^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^*y_1 + \beta A^*y_2$. Dakle, A^* je linearan operator.

Još treba provjeriti jedinstvenost tog operatora. Neka je $B \in L(W, V)$ takav da je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ za sve $x \in V$ i $y \in W$. Tada je $\langle x, A^*y\rangle = \langle x, By\rangle$ za sve $x \in V$ i $y \in W$. Opet iz korolara 1.5.2 slijedi da je $A^*y = By$ za svaki $y \in W$, pa je $A^* = B$. □

Za hermitski adjungirane operatore vrijedi nekoliko vrlo jednostavnih tvrdnji.

Propozicija 1.6.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori. Tada za sve $A, B \in L(V, W)$ vrijedi $(A + B)^* = A^* + B^*$.*

Dokaz. Za sve $x \in V$ i $y \in W$ vrijedi

$$\begin{aligned}\langle (A + B)x, y\rangle &= \langle Ax + Bx, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle \\ &= \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle = \langle x, A^*y + B^*y\rangle \\ &= \langle x, (A^* + B^*)y\rangle.\end{aligned}$$

Kako je $(A + B)^*$ jedinstveni operator za koji vrijedi $\langle (A + B)x, y\rangle = \langle x, (A + B)^*y\rangle$ za sve $x \in V$ i $y \in W$, slijedi $(A + B)^* = A^* + B^*$. □

Propozicija 1.6.4. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Tada za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $A \in L(V, W)$ vrijedi $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$*

Dokaz. Za sve $x \in V$ i $y \in W$ vrijedi

$$\begin{aligned}\langle \alpha Ax, y\rangle &= \alpha\langle Ax, y\rangle = \alpha\langle x, A^*y\rangle \\ &= \langle x, \overline{\alpha}A^*y\rangle.\end{aligned}$$

Kako je $(\alpha A)^*$ jedinstveni operator za koji vrijedi $\langle \alpha Ax, y\rangle = \langle x, (\alpha A)^*y\rangle$ za sve $x \in V$ i $y \in W$, slijedi $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$. □

Svojstvo iz propozicije 1.6.3 naziva se aditivnost, a iz propozicije 1.6.4 konjugirana homogenost. Iz toga slijedi da je adjungiranje, to jest preslikavanje $* : L(V, W) \to L(W, V)$, $A \mapsto A^*$ linearno ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, odnosno antilinearno ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Propozicija 1.6.5. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori. Tada za sve $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, Z)$ vrijedi $(BA)^* = A^*B^*$.*

Dokaz. Za sve $x \in V$ i $z \in Z$ vrijedi

$$\begin{aligned}\langle (BA)x, z\rangle &= \langle B(Ax), z\rangle = \langle Ax, B^*z\rangle \\ &= \langle x, A^*(B^*z)\rangle = \langle x, (A^*B^*)z\rangle.\end{aligned}$$

Kako je $(BA)^*$ jedinstveni linearni operator za koji vrijedi $\langle (BA)x, z\rangle = \langle x, (BA)^*z\rangle$ za sve $x \in V$ i $z \in Z$, slijedi $(BA)^* = A^*B^*$. □

Propozicija 1.6.6. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Tada za sve $A \in L(V, W)$ vrijedi $(A^*)^* = A$.*

Dokaz. Za sve $x \in V$ i $y \in W$ vrijedi $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle$, pa zbog jedinstvenosti adjungiranog operatora vrijedi $\langle A^*y, x\rangle = \langle y, (A^*)^*x\rangle$, slijedi $(A^*)^* = A$. $\square$

Propozicija 1.6.7. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Ako je $A \in L(V, W)$ izomorfizam, tada je i operator $A^* \in L(W, V)$ izomorfizam i vrijedi $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Dokaz. Uočimo da je $I^* = I$. Adjungiranjem jednakosti $AA^{-1} = I$ zbog propozicije 1.6.5 slijedi $(A^{-1})^*A^* = I$. Na isti način iz $A^{-1}A = I$ slijedi $A^*(A^{-1})^* = I$. Odavde zaključujemo da je A^* izomorfizam te vrijedi $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. $\square$

Pogledajmo sada nekoliko primjera. Očito je adjungirani operator nuloperatora $0 \in L(V, W)$ nuloperator $0 \in L(W, V)$, a adjungirani operator identitete $I \in L(V)$ je opet operator identitete $I^* = I$.

Primjer 1.6.8. *Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator definiran kao*

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3),$$

pri čemu su $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ unitarni prostori. Za $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ i $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \langle (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + x_3), (y_1, y_2)\rangle \\
&= (x_1 + x_2 - x_3)y_1 + (x_1 + 2x_2 + x_3)y_2 \\
&= x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 2y_2) + x_3(-y_1 + y_2) \\
&= \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1 + y_2, y_1 + 2y_2, -y_1 + y_2)\rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje $A^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ takvo da vrijedi

$$A^*(y_1, y_2) = (y_1 + y_2, y_1 + 2y_2, -y_1 + y_2)$$

za svaki $y = (y_1, y_2) \in W$ je hermitski adjungirani operator od A.

Sljedeća propozicija pokazuje vezu između slike i jezgre operatora i njemu adjungiranog operatora.

Propozicija 1.6.9. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Tada vrijedi*

(1) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$

(2) $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$

(3) $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

(4) $\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

Dokaz. Neka je $y \in W$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Ker} A^* &\Leftrightarrow A^* y = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, A^* y \rangle = 0, \quad \forall x \in V \\ &\Leftrightarrow \langle Ax, y \rangle = 0, \quad \forall x \in V \\ &\Leftrightarrow y \in (\operatorname{Im} A)^\perp. \end{aligned}$$

Time smo pokazali tvrdnju (1).

Direktno iz (1) slijedi tvrdnja (2): $\operatorname{Im} A = ((\operatorname{Im} A)^\perp)^\perp = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$. Tvrdnje (3) i (4) dobivaju se zamjenom operatora A operatorom A^* u tvrdnjama (1) i (2). □

Propozicija 1.6.10. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Tada vrijedi*

$$V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^* \quad i \quad W = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Im} A.$$

Dokaz. Prva jednakost vrijedi ako i samo ako je $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$ što prema prethodnoj propoziciji vrijedi. Druga jednakost vrijedi primjenom prve na operator A^*. □

Uočimo, po teoremu o rangu i defektu je $\dim V = r(A) + d(A)$, a iz $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$ slijedi da je $\dim A = d(A) + r(A^*)$. Dakle, $r(A) = r(A^*)$.

Iz $V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^*$ slijedi da je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ ako i samo ako je $\operatorname{Im} A^* = V$, a iz $W = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Im} A$ slijedi da je $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$ ako i samo ako je $\operatorname{Im} A = W$. Iz toga slijedi sljedeći korolar.

Korolar 1.6.11. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) A je injektivan ako i samo ako je A^* surjektivan.

(2) A je surjektivan ako i samo ako je A^* injektivan.

Promotrimo vezu između spektra linearnog operatora i spektra njegovog adjungiranog operatora.

Propozicija 1.6.12. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Tada je $\lambda \in \sigma(A)$ ako i samo ako je $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada postoji $x \in V$, $x \neq 0$ takav da vrijedi $Ax = \lambda x$, što je ekvivalentno s tim da je $(A - \lambda I)x = 0$. Dakle, $A - \lambda I$ nije injektivan operator, što je prema korolaru 1.6.11 ekvivalentno da $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$ nije surjektivan. Prema teoremu o rangu i defektu $A^* - \overline{\lambda} I$ nije ni injektivan. Dakle, postoji $y \in V$, $y \neq 0$ takav da je $A^* y = \overline{\lambda} y$, odnosno $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$. □

Sljedećom propozicijom iskazuje se veza između matričnih zapisa linearnog operatora $A \in L(V, W)$ i njegovog adjungiranog operatora $A^* \in L(W, V)$.

Propozicija 1.6.13. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Ako je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ ortonormirana baza za W, tada je*

$$A^*(e, f) = (A(f, e))^*.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ ortonormirana baza za W. Promatramo i-ti stupac matrice $A(f, e)$. Imamo

$$Ae_i = \langle Ae_i, f_1 \rangle f_1 + \ldots + \langle Ae_i, f_m \rangle f_m$$

za svaki $i = 1, \ldots, n$. Tada je matrični zapis operatora A u paru baza (e, f) matrica

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} \langle Ae_1, f_1 \rangle & \langle Ae_2, f_1 \rangle & \ldots & \langle Ae_n, f_1 \rangle \\ \langle Ae_1, f_2 \rangle & \langle Ae_2, f_2 \rangle & \ldots & \langle Ae_n, f_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle Ae_1, f_m \rangle & \langle Ae_2, f_m \rangle & \ldots & \langle Ae_n, f_m \rangle \end{bmatrix}.$$

Sada promatramo i-ti stupac matrice $A^*(e, f)$. Imamo

$$A^* f_i = \langle A^* f_i, e_1 \rangle e_1 + \ldots + \langle A^* f_i, e_n \rangle e_n$$

za svaki $i = 1, \ldots, m$. Tada je matrični zapis operatora A^* u para baza (f, e)

$$A^*(e, f) = \begin{bmatrix} \langle A^* f_1, e_1 \rangle & \langle A^* f_2, e_1 \rangle & \ldots & \langle A^* f_m, e_1 \rangle \\ \langle A^* f_1, e_2 \rangle & \langle A^* f_2, e_2 \rangle & \ldots & \langle A^* f_m, e_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle A^* f_1, e_n \rangle & \langle A^* f_2, e_n \rangle & \ldots & \langle A^* f_m, e_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Za operator A^* vrijedi

$$\langle A^* f_i, e_j \rangle = \langle f_i, Ae_j \rangle = \overline{\langle Ae_j, f_i \rangle}$$

za svaki $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$, pa imamo

$$\begin{aligned} A^*(e,f) &= \begin{bmatrix} \overline{\langle Ae_1, f_1\rangle} & \overline{\langle Ae_2, f_1\rangle} & \ldots & \overline{\langle Ae_n, f_1\rangle} \\ \overline{\langle Ae_1, f_2\rangle} & \overline{\langle Ae_2, f_2\rangle} & \ldots & \overline{\langle Ae_n, f_2\rangle} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{\langle Ae_1, f_m\rangle} & \overline{\langle Ae_2, f_m\rangle} & \ldots & \overline{\langle Ae_n, f_m\rangle} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \langle Ae_1, f_1\rangle & \langle Ae_2, f_1\rangle & \ldots & \langle Ae_n, f_1\rangle \\ \langle Ae_1, f_2\rangle & \langle Ae_2, f_2\rangle & \ldots & \langle Ae_n, f_2\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle Ae_1, f_m\rangle & \langle Ae_2, f_m\rangle & \ldots & \langle Ae_n, f_m\rangle \end{bmatrix}^* = A(f,e)^*. \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da tvrdnja vrijedi. $\square$

Poglavlje 2

Dijagonalizacija linearnog operatora u ortonormiranoj bazi

U ovom poglavlju ćemo proučavati linearni operator A na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V za koje postoji ortonormirana baza (e) takva da je $A(e)$ dijagonalna matrica. Najprije uvodimo dvije nove klase linearnih operatora na unitarnim prostorima.

2.1 Normalni operatori

Definicija 2.1.1. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Kažemo da je operator $A \in L(V)$* ***normalan*** *ako je*

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle, \quad \forall x, y \in V. \tag{2.1}$$

Jednakost (2.1) je ekvivalentna s $\langle A^*Ax, y \rangle = \langle AA^*x, y \rangle$ za sve $x, y \in V$. Dakle, operator A je normalan ako i samo ako je $A^*A = AA^*$.

U sljedećoj propoziciji navodimo jednu jednostavnu karakterizaciju normalnog operatora.

Propozicija 2.1.2. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Tada je A normalan operator ako i samo ako je $\|Ax\| = \|A^*x\|$ za svaki $x \in V$.*

Dokaz. Neka je operator $A \in L(V)$ normalan. Tada za svaki $x \in V$ vrijedi

$$\langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle \Rightarrow \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\|Ax\| = \|A^*x\|$ za svaki $x \in V$. Primjenom polarizacijske formule za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ koja glasi

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2,$$

na izraze $\langle Ax, Ay\rangle$ i $\langle A^*x, A^*y\rangle$ dobivamo

$$\langle Ax, Ay\rangle = \frac{1}{4}\|Ax + Ay\|^2 - \frac{1}{4}\|Ax - Ay\|^2$$

i

$$\langle A^*x, A^*y\rangle = \frac{1}{4}\|A^*x + A^*y\|^2 - \frac{1}{4}\|A^*x - A^*y\|^2.$$

Iz linearnosti od A i A^* slijedi $\|Ax \pm Ay\| = \|A^*x \pm A^*y\|$ za svaki $x, y \in V$, pa je $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle$. Slično dobivamo primjenom polarizacijske formule za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Prema tome, operator A je normalan. □

U slučaju normalnih operatora tvrdnju 1.6.12 možemo pojačati.

Propozicija 2.1.3. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor, $A \in L(V)$ normalan, $\lambda \in \sigma(A)$ i $x \in V$, $x \neq 0$. Vektor x je svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ ako i samo ako je x svojstveni vektor od A^* pridružen svojstvenoj vrijednosti $\overline{\lambda}$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ i $x \in V$, $x \neq 0$. Provjerimo da je $A - \lambda I$ normalan operator, odnosno da je $(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) = (A-\lambda I)(A-\lambda I)^*$. Zbog $(A-\lambda I)^* = (A^* - \overline{\lambda} I)$ vrijedi

$$(A-\lambda I)^*(A-\lambda I) = A^*A - \lambda A^* - \overline{\lambda}A + |\lambda|^2 I, \tag{2.2}$$

$$(A-\lambda I)(A-\lambda I)^* = AA^* - \overline{\lambda}A - \lambda A^* + |\lambda|^2 I. \tag{2.3}$$

Iz jednakosti (2.2) i (2.3) slijedi da je $A - \lambda I$ normalan. Prema propoziciji 2.1.2 je

$$\|(A-\lambda I)x\| = \|(A-\lambda I)^*x\|.$$

Za $\lambda \in \sigma(A)$ i x svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ imamo

$$\begin{aligned} Ax = \lambda x &\Leftrightarrow (A-\lambda I)x = 0 \Leftrightarrow \|(A-\lambda I)x\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|(A-\lambda I)^*x\| = 0 \Leftrightarrow (A^* - \overline{\lambda}I)x = 0 \Leftrightarrow A^*x = \overline{\lambda}x. \end{aligned}$$

Dakle, x je svojstveni vektor od A^* pridružen svojstvenoj vrijednosti $\overline{\lambda}$. □

Propozicija 2.1.4. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$ normalan. Tada su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.*

Dokaz. Neka su λ i μ svojstvene vrijednosti od A takve da $\lambda \neq \mu$ te x i y pridruženi svojstveni vektori. Tada je $Ax = \lambda x$ i $Ay = \mu y$. Iz prethodne propozicije slijedi da je $A^*x = \overline{\lambda}x$ i $A^*y = \overline{\mu}y$. Imamo

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \Rightarrow \langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle \Rightarrow \lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

S obzirom na to da je $\lambda \neq \mu$, slijedi $\langle x, y\rangle = 0$. Prema tome, svojstveni vektori x i y su ortogonalni. □

Paralelno s definiranjem normalnih operatora definiramo i pojam normalnih matrica

Definicija 2.1.5. *Matrica $A \in M_n$ je **normalna** ako je $AA^* = A^*A$, pri čemu je A^* hermitski adjungirana matrica matrice A, a dobivena je transponiranjem matrice A i kompleksnim konjugiranjem njezinih elemenata.*

Možemo se pitati u kakvoj su vezi normalni operatori i normalne matrice, hoće li matrični zapis normalnog operatora biti normalna matrica i obratno. Sljedeće dvije leme pokazuju upravo tu vezu.

Lema 2.1.6. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor, $A \in L(V)$ te (e) ortonormirana baza za V. Tada je A normalan operator ako i samo ako je $A(e)$ normalna matrica.*

Dokaz. Neka je A normalan operator i (e) ortonormirana baza za V. Tada vrijedi $(AA^*)(e) = (A^*A)(e)$, odnosno $A(e)A^*(e) = A^*(e)A(e)$. Dakle, matrica $A(e)$ je normalna.

Neka je $A(e)$ normalna matrica i (e) ortonormirana baza za V. Tada vrijedi $A(e)A^*(e) = A^*(e)A(e)$. Slijedi $(AA^*)(e) = (A^*A)(e)$, odnosno $AA^* = A^*A$. □

Ova ekvivalencija ne vrijedi ako (e) nije ortonormirana baza.

Lema 2.1.7. *Neka je $A \in M_n$ te $L_A \in L(M_{n1})$ pridruženi linearni operator. Tada je A normalna matrica ako i samo ako je L_A normalan operator.*

Dokaz. Neka je (e) kanonska baza za M_{n1}. Tada je (e) ortonormirana baza i vrijedi $L_A(e) = A$. Prema prethodnoj lemi je L_A normalan operator ako i samo ako je $L_A(e) = A$ normalna matrica. □

2.2 Hermitski operatori

Definicija 2.2.1. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Kažemo da je operator $A \in L(V)$* ***hermitski*** *ako je $A = A^*$, to jest*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Očito su nuloperator i jedinični operator hermitski operatori. Također, uočimo da je svaki hermitski operator normalan. Navedimo još jedan primjer.

Primjer 2.2.2. *Neka je V unitarni prostor. Za svaki potprostor M od V može se definirati ortogonalni komplement $M^\perp$ od M takav da vrijedi $V = M \oplus M^\perp$. Tada za svaki $x \in V$ postoji jedinstveni zapis $x = a + b$ pri čemu je $a \in M$, $b \in M^\perp$. Preslikavanje $P : V \to V$ definirano kao $Px = a$ nazivamo ortogonalni projektor na M. Provjerimo je li to linearni operator. Neka je $x = a + b$ takav da je $a \in M$, $b \in M^\perp$ i $y = c + d$ takav da je $c \in M$, $d \in M^\perp$. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vrijedi*

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha a + \beta c = \alpha Px + \beta Py.$$

Dakle, P je linearni operator. Također, vrijedi

$$\langle Px, y \rangle = \langle a, c + d \rangle = \langle a, c \rangle = \langle a + b, c \rangle = \langle x, Py \rangle.$$

Dakle, operator P je hermitski.

Sada ćemo navesti nekoliko tvrdnji čiji dokazi su kratki i intuitivni.

Propozicija 2.2.3. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor. Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(a) Ako su $A, B \in L(V)$ hermitski, onda je $A + B$ hermitski operator.

(b) Ako je $A \in L(V)$ hermitski i $\alpha \in \mathbb{R}$, onda je αA hermitski operator.

(c) Ako su $A, B \in L(V)$ hermitski, onda je AB hermitski operator ako i samo ako A i B komutiraju. Posebno, za $k \in \mathbb{N}$ je A^k hermitski.

(d) Ako je $A \in L(V)$ hermitski, onda je $(A^{-1})^* = A^{-1}$.

Dokaz. (a) Prema propoziciji 1.6.3 vrijedi $(A + B)^* = A^* + B^*$, pa je za A i B hermitske operatore $A + B$ hermitski operator.

(b) Prema propoziciji 1.6.4 vrijedi $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$. Kako je $\alpha \in \mathbb{R}$, slijedi $\overline{\alpha} = \alpha$, pa je za A hermitski operator i αA hermitski.

(c) Prema propoziciji 1.6.5 vrijedi $(AB)^* = B^*A^*$. Kako su A i B hermitski operatori vrijedi $(AB)^* = BA$. Stoga, AB je hermitski ako i samo ako A i B komutiraju.

Drugu tvrdnju dokažimo matematičkom indukcijom. Za $k = 2$ tvrdnja vrijedi direktno zamjenom operatora B operatorom A. Pretpostavimo da je za $k \in \mathbb{N}$ operator A^k hermitski. Tada je prema dokazanom dijelu operator $A^{k+1} = A^k A$ također hermitski.

(d) Kako je A izomorfizam, prema propoziciji 1.6.7 slijedi da je A^* izomorfizam i da vrijedi $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. Dakle, vrijedi $(A^{-1})^* = A^{-1}$. □

Kao i kod normalnih operatora uvodimo pojam hermitske matrice te vezu hermitskih operatora s hermitskim matricama.

Definicija 2.2.4. *Matrica $A \in M_n$ je **hermitska** ako je $A = A^*$.*

Lema 2.2.5. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor, $A \in L(V)$ te (e) ortonormirana baza za V. Tada je A hermitski operator ako i samo ako je $A(e)$ hermitska matrica.*

Dokaz. Neka je (e) ortonormirana baza za V. Prema propoziciji 1.6.13 vrijedi $A^*(e) = (A(e))^*$. Sada imamo:

$$A = A^* \Leftrightarrow A(e) = A^*(e) \Leftrightarrow A(e) = (A(e))^*,$$

dakle A je hermitski operator ako i samo ako je $A(e)$ hermitska matrica. □

Lema 2.2.6. *Neka je $A \in M_n$ i $L_A \in L(M_{n1})$ pridruženi linearni operator. Tada je A hermitska matrica ako i samo ako je L_A hermitski operator.*

Dokaz. Neka je (e) kanonska ortonormirana baza za M_{n1}. Tada vrijedi $L_A(e) = A$. Prema prethodnoj lemi je L_A hermitski operator. □

Pogledajmo što vrijedi za spektar hermitske matrice.

Propozicija 2.2.7. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ hermitska matrica. Tada je $\sigma(A)$ neprazan skup sadržan u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je $L_A : M_{n1}(\mathbb{C}) \to M_{n1}(\mathbb{C})$ operator zadan kao $L_A(X) = AX$. Neka za $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi $k_A(\lambda) = 0$. Tada je λ svojstvena vrijednost linearnog operatora L_A. Dakle, postoji $X \in M_{n1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$ takav da je $L_A(X) = \lambda X$. Kako je A hermitska matrica, prema lemi 2.2.6 je L_A hermitski operator. Kako je svaki hermitski operator normalan, prema propoziciji 2.1.3 je X svojstveni vektor od $(L_A)^*$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\overline{\lambda}$. Prema tome, vrijedi $L_A(X) = \lambda X$ i $L_A(X) = (L_A)^* X = \overline{\lambda} X$, odnosno $AX = \lambda X$ i $AX = \overline{\lambda} X$. Odavde je $\lambda X = \overline{\lambda} X$, to jest $(\lambda - \overline{\lambda})X = 0$, a kako je $X \neq 0$, slijedi $\lambda = \overline{\lambda}$ i zato je $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prema tome, sve nultočke polinoma k_A su realne, pa su sve one svojstvene vrijednosti od A, bilo da se radi o realnoj ili kompleksnoj matrici. Zaključujemo da je spektar od A neprazan i sadržan u $\mathbb{R}$. $\square$

Iz ove propozicije dobivamo tvrdnju za spektar hermitskog operatora.

Propozicija 2.2.8. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$ hermitski. Tada je $\sigma(A)$ neprazan skup sadržan u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je (e) ortonormirana baza za V. Tada je $A(e)$ hermitska matrica. Prema prethodnoj propoziciji, spektar od $A(e)$ je neprazan i sadržan u $\mathbb{R}$. Kako je $k_A = k_{A(e)}$, slijedi da je spektar od A neprazan i sadržan u $\mathbb{R}$. $\square$

2.3 Spektralni teorem

Sada ćemo iskazati spektralni teorem koji govori o nužnim i dovoljnim uvjetima za dijagonalizaciju linearnog operatora, ali budući da zaključci ovise od $\mathbb{F}$, podijelit ćemo ih u dva dijela.

Promatramo najprije linearni operator A na kompleksnom unitarnom prostoru V. Dokaz se temelji na Schurovom teoremu o zapisu linearnog operatora kojeg ovdje navodimo bez dokaza.

Teorem 2.3.1 (**Schurov teorem**). *Neka je V kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Tada postoji ortonormirana baza za V u kojoj je matrični zapis od A gornjetrokutasta matrica.*

Teorem 2.3.2 (**Spektralni teorem na kompleksnom unitarnom prostoru**). *Neka je V kompleksni konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Postoji ortonormirana baza (e) za V u kojoj se A dijagonalizira ako i samo ako je A normalan.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji ortonormirana baza (e) za V u kojoj je $A(e)$ dijagonalna matrica. Matrica $(A(e))^*$ je hermitski adjungirana matrica matrice $A(e)$, pa je i ona dijagonalna. Za dijagonalne matrice vrijedi da komutiraju, odnosno $A(e)(A(e))^* = (A(e))^*A(e)$. Prema propoziciji 1.6.13 vrijedi $(A(e))^* = A^*(e)$. Slijedi $A(e)A^*(e) = A^*(e)A(e)$, odnosno $AA^*(e) = A^*A(e)$. Prema tome, A je normalan operator.

Pretpostavimo sada da je A normalan. Prema Schurovom teoremu 2.3.1 slijedi da postoji ortonormirana baza (e) od V takva da je $A(e)$ gornjetrokutasta matrica. Neka je

$$A(e) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Prema propoziciji 1.6.13 opet vrijedi $(A(e))^* = A^*(e)$, pa imamo

$$A^*(e) = (A(e))^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Iz matričnih zapisa imamo

$$Ae_1 = a_{11}e_1 \quad i \quad A^*e_1 = \overline{a_{11}}e_1 + \overline{a_{12}}e_2 + \ldots + \overline{a_{1n}}e_n.$$

Prema propoziciji 2.1.3, iz $Ae_1 = a_{11}e_1$ slijedi $A^*e_1 = \overline{a_{11}}e_1$. Iz jedinstvenosti zapisa vektora u bazi slijedi

$$a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0.$$

Dalje, zbog $a_{12} = 0$ imamo

$$Ae_2 = a_{22}e_2 \quad i \quad A^*e_2 = \overline{a_{22}}e_2 + \overline{a_{23}}e_3 + \ldots + \overline{a_{2n}}e_n.$$

Kao u prethodnom koraku zaključujemo da je $A^*e_2 = \overline{a_{22}}e_2$. Prema tome,

$$a_{23} = \ldots = a_{2n} = 0.$$

Analogno se dobiva da je $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$. Dakle, $A(e)$ je dijagonalna matrica. Prema tome, postoji ortonormirana baza u kojoj se A dijagonalizira. $\square$

U sljedećem primjeru provjerimo može li se zadani operator dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi.

Primjer 2.3.3. *Neka je $A \in L(\mathbb{C}^2)$ zadan kao $A(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 3x_1 + 2x_2)$. Tada je $A^*(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, -3x_1 + 2x_2)$. Imamo*

$$\begin{aligned} (AA^*)(x_1, x_2) &= A(2x_1 + 3x_2, -3x_1 + 2x_2) \\ &= (2(2x_1 + 3x_2) - 3(-3x_1 + 2x_2), 3(2x_1 + 3x_2) + 2(-3x_1 + 2x_2)) \\ &= (13x_1, 13x_2) \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} (A^*A)(x_1, x_2) &= A^*(2x_1 - 3x_2, 3x_1 + 2x_2) \\ &= (2(2x_1 - 3x_2) + 3(33x_1 + 2x_2), -3(2x_1 - 3x_2) + 2(3x_1 + 2x_2)) \\ &= (13x_1, 13x_2). \end{aligned}$$

Dakle, A je normalan, pa prema spektralnom teoremu slijedi da postoji ortonormirana baza koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora A.

Odredimo svojstvene vektore za A. Iz matričnog zapisa operatora A u kanonskoj bazi (e) određujemo svojstvene vrijednosti

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i).$$

Sada za svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2 + 3i$ i $\lambda_2 = 2 - 3i$ određujemo pripadne svojstvene vektore $(i, 1)$ i $(-i, 1)$. Oni su međusobno ortogonalni pa ih je potrebno samo normirati. Tako dobivamo ortonormiranu bazu $\{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ za V u kojoj je

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{bmatrix}.$$

Sada slijedi spektralni teorem na realnom unitarnom prostoru.

Teorem 2.3.4 (Spektralni teorem na realnom unitarnom prostoru). *Neka je V realni konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Postoji ortonormirana baza (e) za V u kojoj se A dijagonalizira ako i samo ako je A hermitski operator.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji ortonormirana baza (e) za V u kojoj je $A(e)$ dijagonalna. Kako smo na realnom unitarnom prostoru matrica $A(e)$ jednaka je hermitski adjungiranoj matrici, odnosno $A(e) = (A(e))^*$. Prema propoziciji 1.6.13 je $A(e) = A^*(e)$. Dakle, A je hermitski operator.

Obratno, pretpostavimo da je A hermitski operator. Dokaz provodimo indukcijom po $n = \dim V$. Tvrdnja očito vrijedi ako je $n = 1$, pa pretpostavimo da je $n > 1$. Neka je V n-dimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$ hermitski. Prema propoziciji 2.2.8 postoji svojstvena vrijednost $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i svojstveni vektor $a \in V$, $a \neq 0$ takvi da je $Aa = \lambda_0 a$. Označimo

$$M = [\{a\}].$$

Tada je $\dim M^\perp = \dim V - \dim M = n - 1$.

Dokažimo da je $A(M^\perp) \subseteq M^\perp$. Uzmimo $x \in M^\perp$. Tada je $\langle x, a\rangle = 0$ i imamo

$$\langle Ax, a\rangle = \langle x, A^*a\rangle = \langle x, Aa\rangle = \langle x, \lambda_0 a\rangle = \lambda_0\langle x, a\rangle = 0.$$

Dakle, $Ax \in M^\perp$, pa je linearni operator

$$A_1 : M^\perp \to M^\perp, \quad A_1(x) = Ax$$

dobro definiran. Za $x, y \in M^\perp$ vrijedi

$$\langle A_1x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, A_1y\rangle$$

jer je A_1 restrikcija od A, a A je hermitski, pa je i A_1 hermitski. Sada primijenimo pretpostavku indukcije da postoji ortonormirana baza $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ za $M^\perp$ koja se sastoji od svojstvenih vektora za A_1. Označimo

$$e_n = \frac{1}{\|a\|}a.$$

Tada je $(e) = \{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ ortonormirana baza za V sastavljena od svojstvenih vektora za A. Time smo pokazali da postoji ortonormirana baza (e) za V sastavljena od svojstvenih vektora za A, odnosno da se u njoj A dijagonalizira. $\square$

Kako je svaki hermitski operator normalan, iz spektralnih teorema 2.3.2 i 2.3.4 direktno slijedi sljedeći korolar.

Korolar 2.3.5. *Neka je V (kompleksni ili realni) n-dimenzionalni unitarni prostor. Ako je A hermitski tada postoji ortonormirana baza za V u kojoj se A dijagonalizira.*

Poglavlje 3

Dekompozicija singularnim vrijednostima

U ovom poglavlju ćemo pokušati linearni operator zapisati kao kompoziciju nekih drugih linearnih operatora koji imaju dodatna korisna svojstva. Prije toga definirajmo još dvije klase linearnih operatora na unitarnim prostorima.

3.1 Unitarni operatori

Definicija 3.1.1. *Neka su V i W unitarni prostori i neka je* $\dim V = \dim W$. *Kažemo da je linearni operator $A \in L(V, W)$* ***unitaran*** *ako je*

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in V.$$

Za unitarni operator $A \in L(V, W)$, tvrdnja da je $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ za sve $x, y \in V$ je ekvivalentna tvrdnji da je $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in V$. Naime, ako stavimo $y = x$, onda imamo $\langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle$, odnosno $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in V$. Time smo pokazali da ako je A unitaran operator, onda vrijedi $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in V$.

Vrijedi i obrat, a dokazuje se primjenom polarizacijske formule koja za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ glasi

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 + \frac{i}{4}\|x + iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x - iy\|^2, \quad \forall x, y \in V.$$

Pretpostavimo da za $A \in L(V, W)$ vrijedi $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in V$. Tada primjenom pretpostavke na polarizacijsku formulu dobivamo

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{4}\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 + \frac{i}{4}\|x+iy\|^2 - \frac{i}{4}\|x-iy\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|A(x+y)\|^2 - \frac{1}{4}\|A(x-y)\|^2 + \frac{i}{4}\|A(x+iy)\|^2 - \frac{i}{4}\|A(x-iy)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|Ax+Ay\|^2 - \frac{1}{4}\|Ax-Ay\|^2 + \frac{i}{4}\|Ax+iAy\|^2 - \frac{i}{4}\|Ax-iAy\|^2 \\ &= \langle Ax, Ay\rangle\end{aligned}$$

za sve $x, y \in V$. Slično u slučaju $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Time smo pokazali da je A unitaran operator.

Svojstvo $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in V$ naziva se izometričnost te ono govori da je operator unitaran ako čuva normu.

Pogledajmo nekoliko primjera unitarnih operatora. Operator identitete je očito unitaran, kao i svaki λI za $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Teorem 3.1.2. *Neka su V i W n-dimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Tada je A unitaran operator ako i samo ako za svaku ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za V je skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ također ortonormirana baza za W.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A unitaran operator i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ neka ortonormirana baza za V. Tada za sve e_i i e_j, $i, j = 1, \ldots, n$ vrijedi $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Prema tome, $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ je ortonormiran skup u W. Kako su V i W jednakih dimenzija, onda je $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ baza za W.

Obratno, pretpostavimo da je $A \in L(V, W)$ takav da za svaku ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za V je $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ ortonormirana baza za W. Neka su $x, y \in V$. Vrijedi

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \quad i \quad y = \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j.$$

Tada imamo

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}.$$

S druge strane

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle Ae_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle Ae_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle} \langle Ae_i, Ae_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}\end{aligned}$$

jer je $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ ortonormiran skup. Slijedi da je $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, odnosno, operator A je unitaran. $\square$

Prethodni teorem nam daje način kako konstruirati unitarni operator. Neka je V n-dimenzionalni unitarni prostor s ortonormiranom bazom $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i W n-dimenzionalni unitarni prostor s ortonormiranom bazom $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Definiramo operator $A : V \to W$ djelovanjem na bazi kao $Ae_i = f_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$ te ga proširimo po linearnosti. Prema prethodnom teoremu, A je unitaran.

Iz dokaza prethodnog teorema vidimo da, čim linearni operator preslikava neku ortonormiranu bazu domene u ortonormiranu bazu kodomene, on je nužno unitaran, a onda svaku ortonormiranu bazu domene preslikava u ortonormiranu bazu kodomene. Možemo se pitati hoće li unitaran operator ortogonalne vektore iz V preslikati u ortogonalne vektore iz W.

Pogledajmo jedan primjer.

Primjer 3.1.3. *Neka je $V^2(O)$ unitarni prostor i $R_\varphi \in L(V^2(O))$ rotacija za kut φ oko ishodišta. Tada se pri rotaciji ortonormirane baze $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dobiva ortonormirana baza $\{R_\varphi \vec{i}, R_\varphi \vec{j}\}$. Prema prethodnom teoremu, operator R_φ je unitaran.*

Teorem 3.1.4. *Neka su V i W n-dimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Tada za sve $x, y \in V$ takve da je $x \perp y$ vrijedi $Ax \perp Ay$ ako i samo ako je $A = \alpha U$ za neki skalar α i unitarni operator $U \in L(V, W)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da za sve $x, y \in V$ takve da je $x \perp y$ vrijedi $Ax \perp Ay$. Neka je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V. Prema pretpostavci vrijedi da je skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ ortogonalan. Označimo $\alpha = \|Ae_i\|$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Za svaki $j \neq i$ vrijedi $\langle e_j + e_i, e_j - e_i\rangle = 1 - 1 = 0$. Djelovanjem operatora A na tu jednakost dobivamo

$$0 = \langle Ae_j + Ae_i, Ae_j - Ae_i\rangle = \|Ae_j\|^2 - \|Ae_i\|^2 = \|Ae_j\|^2 - \alpha^2.$$

Slijedi da je $\|Ae_j\| = \alpha$ za svaki $j = 1, \ldots, n$. Ako je $A = 0$, onda možemo uzeti $\alpha = 0$ i $U = I$ te tvrdnja očito vrijedi, a ako je $A \neq 0$ onda je i $\alpha \neq 0$. Tako dobivamo skup $\{\frac{1}{\alpha}Ae_1, \ldots, \frac{1}{\alpha}Ae_n\}$ koji je ortonormirana baza za W.

Definiramo novi operator $U = \frac{1}{\alpha}A$. On preslikava ortonormiranu bazu (e) za V u ortonormiranu bazu za W, pa je prema prethodnom teoremu U unitaran.

Obratno, neka je $A = \alpha U$ za neki skalar α i unitarni operator $U \in L(V, W)$. Neka su $x, y \in V$ takvi da je $x \perp y$, to jest $\langle x, y\rangle = 0$. Vrijedi

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle \alpha Ux, \alpha Uy\rangle = |\alpha|^2\langle Ux, Uy\rangle = |\alpha|^2\langle x, y\rangle = 0.$$

Prema tome, za $Ax, Ay \in W$ vrijedi $Ax \perp Ay$. $\square$

Uočimo da je operator A iz prethodnog teorema unitaran ako i samo ako je $|\alpha| = 1$.

Teorem 3.1.5. *Neka su V i W n-dimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Tada je A unitaran operator ako i samo ako je A izomorfizam i $A^{-1} = A^*$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in L(V, W)$ unitaran operator. Tada je

$$\langle (A^*A - I)x, y\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle - \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle - \langle x, y\rangle = 0$$

za sve $x, y \in V$. Kako su V i W istih dimenzija, slijedi da je $A^{-1} = A^*$. □

Naglasimo da za unitaran operator $A \in L(V, W)$ vrijedi $A^*A = I$. Kako je $A^* = A^{-1}$, onda vrijedi $AA^* = I$. Odnosno,

$$0 = \langle (AA^* - I)x, y\rangle = \langle AA^*x, y\rangle - \langle x, y\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle - \langle x, y\rangle$$

za sve $x, y \in W$. Slijedi $\langle A^*x, A^*y\rangle = \langle x, y\rangle$ za sve $x, y \in W$, odnosno $A^* \in L(W, V)$ je unitaran operator. Sada za operator $A^* = A^{-1}$ vrijedi teorem analogan teoremu 3.1.2.

Neka je $A \in L(V)$ unitaran operator. Prema teoremu 3.1.5 vrijedi $A^*A = AA^* = I$. Prema tome, operator A je normalan. Prema spektralnom teoremu na kompleksnom unitarnom prostoru postoji ortonormirana baza (e) u kojoj se A dijagonalizira. Tada se na dijagonali matrice $A(e)$ nalaze svojstvene vrijednosti operatora A. Sljedeća propozicija govori o tim svojstvenim vrijednostima.

Propozicija 3.1.6. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator. Tada je apsolutna vrijednost svih svojstvenih vrijednosti operatora A jednaka* 1.

Dokaz. Za svaku svojstvenu vrijednost λ od A postoji $x \in V$, $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Vrijedi $\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, a zbog unitarnosti operatora A vrijedi $\|Ax\| = \|x\|$. Zbog $\|x\| \neq 0$ slijedi $|\lambda| = 1$. □

Kako su svi unitarni operatori normalni, za svojstvene vektore vrijedi tvrdnja iz propozicije 2.1.4.

Lema 3.1.7. *Neka su V, W i Z n-dimenzionalni unitarni prostori te $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, Z)$. Ako su A i B unitarni operatori, onda je i $BA \in L(V, Z)$ unitaran operator.*

Dokaz. Ako su A i B unitarni operatori, onda za sve $x, y \in V$ vrijedi

$$\langle (BA)x, (BA)y\rangle = \langle B(Ax), B(Ay)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle,$$

pa je BA unitaran. □

Promotrimo vezu između unitarnih operatora i njihovih matričnih zapisa.

Definicija 3.1.8. *Matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je* ***unitarna*** *ako je*

$$AA^* = A^*A = I.$$

Propozicija 3.1.9. *Neka su V i W n-dimenzionalni unitarni prostori, $A \in L(V, W)$ te (e) i (f) ortonormirane baze za V i W. Linearni operator A je unitaran ako i samo ako je $A(f, e)$ unitarna matrica.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in L(V, W)$ unitaran operator. Ako su (e) i (f) ortonormirane baze, tada prema propoziciji 1.6.13 slijedi $A^*(e, f) = (A(f, e))^*$. Iz $AA^* = I$ i produkta njihovih matričnih zapisa slijedi

$$A(f, e)(A(f, e))^* = A(f, e)A^*(e, f) = (AA^*)(f) = I(f) = I.$$

Kako je $A(f, e)$ kvadratna matrica, slijedi da je $(A(f, e))^{-1} = (A(f, e))^*$, to jest $A(f, e)$ je unitarna matrica.

Obratno, pretpostavimo da je matrica $A(f, e)$ unitarna. Koristeći produkt matričnih zapisa kompozicije linearnih operatora, dobivamo

$$(AA^*)(f) = A(f, e)A^*(e, f) = A(f, e)(A(f, e))^* = I = I(f),$$

pa je $AA^* = I$. Slijedi da je $A^{-1} = A^*$, dakle A je unitaran. □

Propozicija 3.1.10. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Stupce matrice A označimo sa $S_1, \ldots, S_n$, a retke s $R_1, \ldots, R_n$. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne.*

(1) Matrica A je unitarna.

(2) Skup $\{S_1, \ldots, S_n\}$ je ortonormirana baza za M_{n1}.

(3) Skup $\{R_1, \ldots, R_n\}$ je ortonormirana baza za M_{1n}.

Dokaz. Matrica A je unitarna ako i samo ako je $AA^* = I$, odnosno ako i samo ako je $A^*A = I$.

Za matricu AA^* vrijedi

$$(AA^*)_{ij} = R_i R_j^* = \langle R_i, R_j \rangle$$

za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Vrijedi da je $AA^* = I$ ako i samo ako je $\langle R_i, R_j \rangle = \delta_{ij}$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$ što vrijedi ako i samo ako je skup $\{R_1, \ldots, R_n\}$ ortonormirana baza za M_{1n}, gdje je M_{1n} unitarni prostor s obzirom na standardni skalarni produkt.

Analogno, za matricu A^*A vrijedi

$$(A^*A)_{ij} = S_i^* S_j = \mathrm{tr}(S_j S_i^*) = \langle S_j, S_i \rangle$$

za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Vrijedi $A^*A = I$ ako i samo ako je $\langle S_j, S_i \rangle = \delta_{ij}$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$ što vrijedi ako i samo ako je skup $\{S_1, \ldots, S_n\}$ ortonormirana baza za M_{n1}, gdje je M_{n1} unitarni prostor s obzirom na standardni skalarni produkt. $\square$

Primjer 3.1.11. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. *Tada je* $A^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$. *Množenjem matrica dobivamo* $A^*A = I$ *i* $AA^* = I$ *pa je* A *unitarna matrica. Lako provjeravamo da su retci i stupci matrice* A *ortogonalni i duljine* 1.

Sada, nakon što smo uveli unitarnu matricu možemo izreći spektralne teoreme u matričnom obliku.

Prvo iskazujemo matričnu verziju teorema 2.3.2.

Teorem 3.1.12. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *normalna matrica. Postoje unitarna matrica* $U \in M_n(\mathbb{C})$ *i dijagonalna matrica* $D \in M_n(\mathbb{C})$ *takve da je*

$$A = UDU^*.$$

Dokaz. Definiramo linearni operator $L_A : M_{n1}(\mathbb{C}) \to M_{n1}(\mathbb{C})$ kao $L_A(X) = AX$. Prema lemi 2.1.7, L_A je normalan, a onda prema teoremu 2.3.2 postoji ortonormirana baza (f) za $M_{n1}(\mathbb{C})$ u kojoj je $L_A(f)$ dijagonalna matrica. Označimo $L_A(f) = D$. Neka je (e) kanonska baza za $M_{n1}(\mathbb{C})$. Matrica $L_A(f)$ se može zapisati kao

$$D = L_A(f) = I(f, e) L_A(e) I(e, f).$$

Označimo $U = I(e, f)$ i $L_A(e) = A$. Prema propoziciji 3.1.9, U je unitarna matrica (jer je I unitaran operator). Na kraju imamo $D = U^*AU$, odnosno $A = UDU^*$. $\square$

U slučaju kada je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, hermitske matrice su upravo simetrične matrice, a unitarne realne matrice se nazivaju ortogonalne matrice.

Teorem 3.1.13. *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *hermitska matrica. Tada postoje* $Q \in M_n(\mathbb{R})$ *orotognalna matrica i* $D \in M_n(\mathbb{R})$ *dijagonalna matrica takve da je*

$$A = QDQ^T.$$

Dokaz. Operator $L_A : M_{n1}(\mathbb{R}) \to M_{n1}(\mathbb{R})$ definiran kao $L_A(X) = AX$ je prema lemi 2.2.6 hermitski operator na realnom unitarnom prostoru. Prema teoremu 2.3.4 postoji ortonormirana baza (f) za $M_{n1}(\mathbb{R})$ u kojoj je $L_A(f)$ dijagonalna matrica. Označimo $L_A(f) = D$. Neka je (e) kanonska baza za $M_{n1}(\mathbb{R})$. Tada vrijedi

$$L_A(e) = I(e, f)L_A(f)I(f, e) = I(e, f)DI(f, e).$$

Označimo $I(e, f) = Q$ i $L_A(e) = A$. Prema propoziciji 3.1.9, U je unitarna matrica, a kako je $U \in M_n(\mathbb{R})$, U je ortogonalna. Tada je

$$I(f, e) = (I(e, f))^{-1} = (I(e, f))^T = U^T.$$

□

3.2 Pozitivni operatori

Definicija 3.2.1. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Kažemo da je operator A **pozitivan** ako je A hermitski i vrijedi*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0$$

za svaki $x \in V$. Pišemo: $A \geq 0$.

Primjer 3.2.2. *Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan kao $A(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3)$. Provjerimo je li A pozitivan operator.*

Najprije odredimo A^*. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3$. Imamo

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \langle(6x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle\\ &= (6x_1 + 2x_2)y_1 + (2x_1 + 3x_2)y_2 + x_3y_3\\ &= (6y_1 + 2y_2)x_1 + (2y_1 + 3y_2)x_2 + x_3y_3\\ &= \langle(x_1, x_2, x_3), (6y_1 + 2y_2, 2y_1 + 3y_2, y_3)\rangle\end{aligned}$$

Prema tome, $A^*(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3) = A(x_1, x_2, x_3)$. Dakle, A je hermitski.

Sada provjerimo vrijedi li $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^3$. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle(6x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle\\ &= 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2\\ &= (2x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 0\end{aligned}$$

jer su svi sumandi nenegativni. Dakle, operator A je pozitivan.

Prije rezultata o pozitivnim operatorima definirajmo operator $T \in L(V)$ pridružen operatoru $A \in L(V)$ koji je pozitivan i takav da vrijedi $T^2 = A$ za $A \in L(V)$. Operator T nazivamo **pozitivan drugi korijen** iz A.

Teorem 3.2.3. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) A je pozitivan operator.

(2) A je hermitski operator i za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi $\lambda \geq 0$.

(3) A ima pozitivan drugi korijen.

(4) Postoji operator $T \in L(V)$ takav da vrijedi $A = T^*T$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2) Pretpostavimo da je A pozitivan. Po definiciji pozitivnog operatora, A je hermitski. Pretpostavimo da je $\lambda \in \sigma(A)$, odnosno da je λ svojstvena vrijednost od A. Neka je x svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ. Budući da je A pozitivan operator, vrijedi $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. Po definiciji svojstvene vrijednosti vrijedi

$$\langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle.$$

Kako je $\langle x, x\rangle > 0$, slijedi da je $\lambda \geq 0$. Kako je λ bilo koja svojstvena vrijednost, slijedi tvrdnja.

(2) $\Rightarrow$ (3) Pretpostavimo da je A hermitski operator i da su sve svojstvene vrijednosti operatora A pozitivne. Tada prema korolaru 2.3.5 slijedi da postoji ortonormirana baza $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ za V koja se sastoji od svojstvenih vektora od A. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A pridružene svojstvenim vektorima $e_1, \ldots, e_n$. Definiramo operator $T \in L(V)$ kao

$$Te_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$$

za svaki $i = 1, \ldots, n$. Vektor $x \in V$ možemo zapisati kao $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, pri čemu je $\alpha_i \in \mathbb{F}$, pa vrijedi

$$Tx = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sqrt{\lambda_i} e_i.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \sqrt{\lambda_i} e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \sqrt{\lambda_i} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \sqrt{\lambda_i} \geq 0\end{aligned}$$

jer su svi sumandi u zadnjoj sumi nenegativni. Prema tome, T je pozitivan operator.

Nadalje, vrijedi $T^2 e_i = \lambda_i e_i = Ae_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$, a onda je i $T^2 x = Ax$ za svaki $x \in V$. Time smo dokazali da je T pozitivan drugi korijen od A.

(3) $\Rightarrow$ (4) Pretpostavimo da postoji pozitivan drugi korijen T od A. Tada vrijedi $T^2 = A$. Po definiciji pozitivnog operatora, slijedi da je T hermitski. Za hermitski operator T vrijedi $T = T^*$. Slijedi, $T^*T = T^2$, a kako je T pozitivan drugi korijen od A, vrijedi $T^*T = A$.

(4)$\Rightarrow$ (1) Pretpostavimo da postoji operator $T \in L(V)$ takav da vrijedi $A = T^*T$. Tada je $A^* = (T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T = A$, pa je A hermitski operator. Također, vrijedi

$$\langle Ax, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle, \quad \forall x \in V.$$

Kako je $\langle Tx, Tx\rangle \geq 0$ za svaki $x \in V$, slijedi da je A pozitivan. $\square$

Napomena. *Pokazali smo da svaki pozitivan operator A ima pozitivan drugi korijen. Također, može se pokazati da je taj operator jedinstven.*

Očiti primjeri pozitivnih operatora su nuloperator i operator identitete kao i svaki ortogonalni projektor (jer je ortogonalni projektor hermitski, a 0 i 1 su jedine svojstvene vrijednosti). Ako je $A \in L(V)$ proizvoljan, tada su A^*A i AA^* pozitivni operatori. U sljedećem primjeru koristeći prethodni teorem provjerimo je li zadani operator pozitivan.

Primjer 3.2.4. *Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan kao $A(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3)$. Provjerimo je li A pozitivan operator.*

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^3$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \langle (6x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle \\
&= (6x_1 + 2x_2)y_1 + (2x_1 + 3x_2)y_2 + x_3y_3 \\
&= (6y_1 + 2y_2)x_1 + (2y_1 + 3y_2)x_2 + x_3y_3 \\
&= \langle (x_1, x_2, x_3), (6y_1 + 2y_2, 2y_1 + 3y_2, y_3)\rangle \\
&= \langle x, Ay\rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, A je hermitski. Ovo možemo vidjeti i iz matričnog zapisa operatora A u nekoj ortonormiranoj bazi za $\mathbb{R}^3$. Jedna takva baza je kanonska baza (e). Kako je

$$A(e) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hermitska, slijedi da je A hermitski operator.

Provjerimo je li operator A pozitivan. Iz matričnog zapisa linearnog operatora A u kanonskoj bazi (e) je karakteristični polinom

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 18 = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-6).$$

Nultočke karakterističnog polinoma su 1, 3 *i* 6. *Budući da su sve svojstvene vrijednosti veće od* 0, *po teoremu 3.2.3 operator A je pozitivan.*

Propozicija 3.2.5. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$ pozitivan operator. Ako je A pozitivan izomorfizam, tada je A^{-1} također pozitivan operator.*

Dokaz. Neka je operator A pozitivan i izomorfizam. Tada postoji A^{-1}. Prema propoziciji 1.6.7 vrijedi $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$ pa je i A^{-1} hermitski operator. Ako je $x \in V$, tada postoji $y \in V$ takav da je $x = Ay$. Vrijedi

$$\langle A^{-1}x, x\rangle = \langle A^{-1}Ay, Ay\rangle = \langle y, Ay\rangle = \langle A^*y, y\rangle = \langle Ay, y\rangle \geq 0.$$

Budući da tvrdnja vrijedi za bilo koji $x \in V$, slijedi da je A^{-1} pozitivan operator. □

Propozicija 3.2.6. *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Ako je A pozitivan, onda je i A^k pozitivan za svaki $k \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Ako je A hermitski operator, tada je i A^k hermitski za svaki $k \in \mathbb{N}$. Nadalje, ako je A pozitivan, onda su sve njegove svojstvene vrijednosti veće ili jednake od 0. Svojstvene vrijednosti od A^k su oblika λ^k, gdje je $\lambda \in \sigma(A)$. Slijedi da je $\lambda^k \geq 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ i svaki $\lambda \in \sigma(A)$. Zato je $A^k \geq 0$. □

3.3 Polarna forma operatora

Svaki kompleksni broj $z \in \mathbb{C}$ različit od 0 može se na jedinstven način zapisati kao

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

pri čemu je $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Taj zapis broja z možemo zapisati u obliku umnoška $z = |z|u$, pri čemu je $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Vrijedi $u\overline{u} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ i $|z| \geq 0$. Sada bismo se mogli zapitati može li se svaki linearni operator A zapisati u obliku $A = UT$, gdje je U unitarni i T pozitivni operator. O tome govori sljedeći teorem koji zbog analogije s polarnim zapisom kompleksnog broja ima naziv *polarna forma* ili *polarna dekompozicija operatora*.

Teorem 3.3.1 (Polarna forma operatora). *Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Tada postoje unitaran operator $U \in L(V)$ i pozitivan operator $T \in L(V)$ takvi da je*

$$A = UT.$$

Dokaz. Neka je $A \in L(V)$. Prema teoremu 3.2.3, operator A^*A je pozitivan, te zato i hermitski, pa prema korolaru 2.3.5 postoji ortonormirana baza $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ za koju je $(A^*A)(e)$ dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, na dijagonali. Definiramo $T : V \to V$ na bazi (e) kao

$$Te_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$$

za svaki $i = 1, \dots, n$, te proširimo po linearnosti

$$Tx = T\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle Te_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Tada je

$$\langle Tx, x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} |\langle x, e_i \rangle|^2 \geq 0$$

za svaki $x \in V$. Dakle, T je pozitivan operator.

Dalje, neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od A^*A. Pretpostavimo da su $\lambda_i, \dots, \lambda_r$ pozitivni, a $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ jednaki 0. Za elemente skupa $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Ae_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} Ae_r\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Ae_i, \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} Ae_j \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle A^*Ae_i, e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle \lambda_i e_i, e_j \rangle \\ &= \frac{\lambda_i \sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i \sqrt{\lambda_j}} \langle e_i, e_j \rangle = \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \end{aligned}$$

za svaki $i, j = 1, \dots, r$, pa je taj skup ortonormiran. Njega sada nadopunimo vektorima $\{f_{r+1}, \dots, f_n\}$ do ortonormirane baze za V.

Ako su sve svojstvene vrijednosti različite od 0, onda je $r = n$, pa je u tom slučaju $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Ae_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} Ae_r\}$ ortonormirana baza za V i nije ju potrebno nadopunjavati.

Definiramo operator $U : V \to V$ na bazi $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Ae_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} Ae_r, f_{r+1}, \dots, f_n\}$ kao

$$Ue_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Ae_i, & \text{ako je } i = 1, \dots, r, \\ f_i, & \text{ako je } i = r+1, \dots, n, \end{cases}$$

te ga proširimo po linearnosti. Tada U preslikava ortonormiranu bazu (e) u ortonormiranu bazu $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}Ae_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}Ae_r, f_{r+1}, \ldots, f_n\}$ pa je prema teoremu 3.1.2 operator U unitaran.

Također, vrijedi

$$UTe_i = U(\sqrt{\lambda_i}e_i) = \sqrt{\lambda_i}Ue_i = Ae_i,$$

za svaki $i = 1, \ldots, r$ te

$$UTe_i = U(0) = 0 = Ae_i$$

jer su $\lambda_i = 0$ za svaki $i = r+1, \ldots, n$. Dakle, $A = UT$. □

Za svojstvene vrijednosti operatora T iz dokaza imamo poseban naziv.

Definicija 3.3.2. *Neka je A linearni operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Broj $\lambda \geq 0$ takav da je λ^2 svojstvena vrijednost operatora A^*A naziva se **singularna vrijednost** linearnog operatora A.*

3.4 Dekompozicija singularnim vrijednostima

Sljedeći teorem kaže da se za svaki linearni operator $A \in L(V)$ mogu pronaći dvije ortonormirane baze (e) i (f) za V takve da je $A(f, e)$ dijagonalna matrica.

Teorem 3.4.1 (**Dekompozicija singularnim vrijednostima**). *Neka je A linearni operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoje ortonormirane baze (e) i (f) za V takve da je $A(f, e)$ dijagonalna matrica. Na dijagonali od $A(f, e)$ se nalaze singularne vrijednosti od A.*

Dokaz. Neka je $T \in L(V)$ pozitivan operator te $U \in L(V)$ unitaran takvi da je $A = UT$. Kako je svaki pozitivan operator hermitski, prema korolaru 2.3.5 slijedi da postoji ortonormirana baza (e) za V u kojoj je T dijagonalizabilan. Po teoremu 3.1.2 slijedi da je skup $(f) = \{Ue_1, \ldots, Ue_n\}$ također ortonormirana baza za V.

Iz polarne forme operatora slijedi da se svaki $A \in L(V)$ može zapisati kao kompozicija operatora U i T. Tada za matrični zapis operatora A u paru baza (e, f) imamo

$$A(f, e) = (UT)(f, e) = U(f, e)T(e).$$

Matrica $U(f, e)$ na mjestu (i, j) ima $\langle f_i, Ue_j\rangle = \langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$, pa je zato $U(f, e)$ jedinična matrica. Slijedi $A(f, e) = T(e)$.

Kako je $T(e)$ dijagonalna matrica, na dijagonali se nalaze svojstvene vrijednosti od $T(e)$, odnosno singularne vrijednosti od A. Time smo dokazali tvrdnju. □

Neka je $A \in L(V)$. Neka su ortonormirane baze (e) i (f) definirane kao u dokazu teorema o polarnoj formi operatora. Tada je $T^2 = A^*A$ i vrijedi $Te_i = \sqrt{\lambda_i}e_i$ za svaki $i = 1, \dots, n$ te $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Tada je

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle e_i. \tag{3.1}$$

Iz polarne forme operatora, postoji unitarni operator U takav da je $A = UT$. Na jednakost (3.1) djelujemo operatorom U i dobivamo

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle U e_i.$$

Vrijedi $Ue_i = f_i$ za svaki $i = 1, \dots, n$, pa je tražena dekompozicija

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle f_i.$$

Pokažimo na primjeru kako odrediti dekompoziciju singularnim vrijednostima.

Primjer 3.4.2. *Neka je $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan kao $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_1 - x_3)$. Pronađimo dekompoziciju singularnim vrijednostima za A.*

Najprije odredimo singularne vrijednosti operatora A. Vrijedi da je $A^*(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_1 - x_3)$, odnosno $A^* = A$. Dalje, $A^*A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2, 2x_3)$. Matrica hermitskog operatora A^*A u kanonskoj bazi $(e) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ je dijagonalna matrica

$$A^*A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dakle, svojstvene vrijednosti od A^*A su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 2$. Po definiciji, singularne vrijednosti od A su $\sqrt{2}$, 1 i $\sqrt{2}$.

Sada odredimo drugu ortonormiranu bazu (f). Iz dokaza polarne forme operatora slijedi da je operator $U \in L(\mathbb{C}^3)$ definiran kao $Ue_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Ae_1$, $Ue_2 = Ae_2$, $Ue_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}Ae_3$ unitaran. Kako su sve singularne vrijednosti od A različite od 0, onda je $(f) = \{Ue_1, Ue_2, Ue_3\} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{C}^3$. Tada je

$$A(f,e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Dakle, odrediti dekompoziciju singularnim vrijednostima linearnog operatora znači odrediti dvije ortonormirane baze u kojima je matrični zapis tog operatora dijagonalna matrica.

Iz dekompozicije singularnim vrijednostima linearnog operatora A slijedi dekompozicija kvadratnih matrica.

Korolar 3.4.3. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada postoje unitarne matrice $U, V \in M_n(\mathbb{F})$ i dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{F})$ takve da je*

$$A = UDV.$$

Dokaz. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i L_A pripadni linearni operator. Iz dekompozicije linearnog opereatora slijedi da postoje ortonormirane baze (f) i (g) takve da je $L_A(f, g)$ dijagonalna matrica. Označimo ovu matricu s D. Neka je (e) kanonska baza za $M_{n1}(\mathbb{F})$. Tada vrijedi

$$A = L_A(e) = I(e, f)L_A(f, g)I(g, e).$$

Kako je I unitarni operator te (e), (f) i (g) ortonormirane baze, slijedi da su $I(e, f) = U$ i $I(g, e) = V$ unitarne matrice. Prema tome, $A = UDV$. $\square$

Bibliografija

[1] Lj. Arambašić, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2022.

[2] S. Axler, *Linear algebra done right*, Springer-Verlg, New York, 1997.

[3] D. Bakić, *Linearna algebra*, dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/linearna_algebra_sk_7.pdf` (lipanj 2024.)

[4] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[5] D. Poole, *Linear algebra, a modern introduction*, Brooks/Cole, 2011.

Sažetak

U ovom radu proučavamo linearne operatore na unitarnim prostorima. Jedno od važnih pitanja koje razmatramo su matrični zapisi linearnih operatora u ortonormiranoj bazi, odnosno paru ortonormiranih baza. U ovom razmatranju se pojavljuju određene klase linearnih operatora karakteristične samo za unitarne prostore, a to su hermitski, normalni i unitarni operatori. Dokazat ćemo spektralni teorem, te proučiti polarnu formu operatora i dekompoziciju singularnim vrijednostima.

Summary

In this thesis, we study linear operators on inner-product spaces. One of the important issues we discuss are matrix representations of linear operators with respect to an orthonormal basis or a pair of orthonormal bases. In this consideration, certain classes of linear operators on inner-product spaces appear, and these are self-adjoint, normal and unitary operators. We prove the spectral theorem, the polar form of an operator and the singular value decomposition.

Životopis

Rođena sam 19. srpnja 1999. godine u Varaždinu. Osnovnu školu završila sam u Osnovnoj školi Ljubešćica 2014. godine. Nakon toga, nastavila sam srednjoškolsko obrazovanje u Drugoj gimnaziji Varaždin koje sam završila 2018. godine. Iste godine sam upisala preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Na istom fakultetu, 2022. godine upisujem diplomski studij Matematika, smjer nastavnički.