

# Teorija klasične elektrodinamike s topološki kvantiziranim singularitetima kao električnim nabojima

---

Golik, Bruno

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:925564>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-15**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Bruno Golik

TEORIJA KLASIČNE ELEKTRODINAMIKE S  
TOPOLOŠKI KVANTIZIRANIM  
SINGULARITETIMA KAO ELEKTRIČNIM  
NABOJIMA

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI  
STUDIJ FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Bruno Golik**

Diplomski rad

**Teorija klasične elektrodinamike s  
topološki kvantiziranim  
singularitetima kao električnim  
nabojima**

Voditelj diplomskog rada: Prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2024.



## Sažetak

U ovom radu iskazana je teorija klasične elektrodinamike u kojoj jedini dozvoljeni električni naboji odgovaraju topološkim singularitetima u elektromagnetskom polju, dok kontinuirane raspodjele naboja nisu dopuštene. Kvantizacija naboja unutar teorije garantirana je Chernovim teoremom. Teorija je formulirana pomoću para Weylovih jednadžbi, čija svojstvena stanja parametarski ovise o prostornim i vremenskim koordinatama i obliku trajektorije singulariteta. Pomoću svojstvenih stanja Weylove jednadžbe računaju se Berryjeva koneksija i Berryjeva zakrivljenost. Dobivene komponente Berryjeve zakrivljenosti egzaktno odgovaraju komponentama elektromagnetskog polja točkastog naboja dobivenog iz Maxwellovih jednadžbi, do na fiksnu multiplikativnu konstantu. Detaljnim računom pokazano je da ovaj rezultat vrijedi za proizvoljnu trajektoriju naboja.

Ključne riječi: Maxwellove jednadžbe, Berryjeva koneksija, Berryjeva zakrivljenost, Chernov teorem, kvantizacija naboja, topološki singularitet

# Theory of classical electrodynamics with topologically quantized singularities as electric charges

## Abstract

This thesis presents an alternative formulation of classical electrodynamics where the only permissible electric charges correspond to topological singularities in the electromagnetic field, thereby disallowing continuous charge distributions. Charge quantization within this theory is guaranteed by the Chern theorem. The theory is formulated using a pair of Weyl equations, whose eigenstates have a parametric dependence on spacetime coordinates and the trajectory of the singularity. These eigenstates are then used to calculate the Berry connection and Berry curvature. The obtained components of Berry curvature exactly correspond to the electromagnetic field components of a singular electric charge, as predicted by Maxwell equations. This result is demonstrated, via detailed calculation, to be valid for an arbitrary motion trajectory of the charge.

Keywords: Maxwell equations, Berry connection, Berry curvature, Chern theorem, charge quantization, topological singularity

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorijski koncepti</b>	<b>2</b>
2.1	Liénard-Wiechertovi potencijali i pripadna polja . . . . .	2
2.2	Berryjeva koneksija i zakrivljenost u kvantnoj adijabatskoj aproksimaciji	3
<b>3</b>	<b>Formulacija teorije</b>	<b>7</b>
3.1	Općenita formulacija . . . . .	7
3.2	Kvantizacija i Chernov teorem . . . . .	10
3.3	Kovarijantnost teorije . . . . .	11
3.4	Primjeri trajektorija . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Eksplicitni račun Berryjeve zakrivljenosti</b>	<b>14</b>
4.1	Gibanje konstantnom brzinom . . . . .	14
4.2	Općenito gibanje po pravcu (Bremsstrahlung) . . . . .	15
4.3	Općenito gibanje u ravnini . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>21</b>
	<b>Literatura</b>	<b>22</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>24</b>
<b>A</b>	<b>Lorentzove transformacije i Thomasova precesija</b>	<b>24</b>

# 1 Uvod

Kvantizacija električnog naboja jedno je od najpoznatijih otvorenih pitanja moderne fizike. U svom originalnom članku [2], Dirac pokazuje da bi postojanje barem jednog magnetskog monopola bilo dovoljno da objasni kvantizaciju električnog naboja. U svojoj analizi, on razmatra interakciju električnog naboja iznosa  $e$  s magnetskim nabojem iznosa  $g$  u formalizmu kvantne mehanike, dolazeći do zaključka da produkt  $eg$  mora biti kvantizirana veličina. Detaljan izvod ove tvrdnje dan je u referencama [2,3]. No, postojanje magnetskog monopola nikada nije bilo eksperimentalno potvrđeno, ostavljajući ovo pitanje otvorenim.

Za razliku od Diracovog pristupa, koji nastoji objasniti kvantizaciju naboja kao inherentno kvantnomehanički efekt, u ovom radu razmatramo pitanje formulacije potpuno nove klasične teorije elektrodinamike u kojoj je kvantizacija naboja intrinzično prisutna. Zahtijevamo da ovakva teorija egzaktno reproducira rezultate klasične elektrodinamike opisane Maxwellovim jednažbama, ali u kojoj su jedini dopušteni naboji kvantizirani i singularni.

Neke od već postojećih alternativnih formulacija klasične elektrodinamike uključuju Lorentz - Diracovu [4] i Feynman - Wheelerovu [5,6] formulaciju. Iako se one bave pitanjima samosile i interakcije među točkastim nabojima, one ne razmatraju pitanje kvantizacije i singularnosti tih naboja, već ih uzimaju kao dane pretpostavke.

Teorija iskazana u ovom radu temelji se na referenci [1]. U njoj su singularnost i kvantizacija naboja intrinzično svojstvo jednažbi, bez potrebe za *a posteriori* pretpostavkama. Naboji unutar teorije odgovaraju topološkim singularitetima, dok električno i magnetsko polje odgovaraju komponentama Berryjeve zakrivljenosti. Integracijom zakrivljenosti (polja) po zatvorenoj plohi i korištenjem Chernovog teorema dolazi se do uvjeta kvantizacije naboja, koji tada poprimaju dva moguća iznosa:  $+e$  i  $-e$ . Konkretna formulacija ove teorije dana je u odjeljku 3, dok je u odjeljku 4 obavljen eksplicitni račun koji potvrđuje valjanost formulacije.



## 2 Teorijski koncepti

### 2.1 Liénard-Wiechertovi potencijali i pripadna polja

U klasičnoj elektrodinamici opisanoj Maxwellovim jednadžbama, električno ( $\mathbf{E}$ ) i magnetsko ( $\mathbf{B}$ ) polje ovise o raspodjelama naboja i struja  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  na način opisan Jefimenkovim jednadžbama [7]. Posebno značajan elektrodinamički problem je sustav točkastog naboja  $q$  koji se u vakuumu giba po trajektoriji  $\mathbf{w}(t)$ . Distribucije naboja i struja kod ovog sustava iznose  $\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{w}(t))$ ,  $\mathbf{j} = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{w}(t))$ , gdje  $\mathbf{v}(t)$  odgovara brzini naboja. Rješenje ovog problema u Lorentzovom baždarenju dano je Liénard-Wiechertovim (L-W) potencijalima  $V_M$  i  $\mathbf{A}_M$ :

$$V_M(x^\mu) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{sc - \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}}, \quad \mathbf{A}_M(x^\mu) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V_M, \quad (2.1)$$

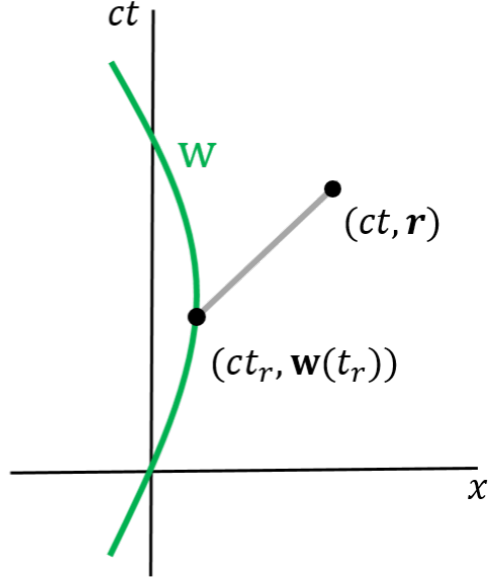
gdje je  $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$  oznaka za točku prostorvremena,  $c$  je brzina svjetlosti,  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$ ,  $s = |\mathbf{s}|$ , i  $\mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \right|_{t_r}$  je brzina točkastog naboja izvrijednjena u retardiranom vremenu  $t_r$ . Retardirano vrijeme definirano je implicitnom relacijom:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r). \quad (2.2)$$

Ovisnost potencijala (2.1) o retardiranom vremenu posljedica je konačnog vremena propagacije informacije o gibanju naboja, koja se širi brzinom svjetlosti. Matematički gledano, moguće je konstruirati i alternativno rješenje Maxwellovih jednadžbi koje ovisi o avansiranom vremenu  $t_a = t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|$ . S fizikalnog stajališta, ovo rješenje ne zadovoljava zahtjev kauzalnosti, i zato ga možemo odbaciti. Konačno, električno i magnetsko polje slijede izravno iz L-W potencijala:

$$\mathbf{E}_M(x^\mu) = -\nabla V_M - \frac{\partial \mathbf{A}_M}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_M(x^\mu) = \nabla \times \mathbf{A}_M. \quad (2.3)$$

Donji indeks  $M$  označava da se radi o rješenju Maxwellovih jednadžbi. Valja naglasiti da električno i magnetsko polje u nekoj točki prostorvremena ovise o brzini i akceleraciji naboja izvrijednjenim u samo *jednoj* točki svjetske linije naboja. Ova korespondencija ilustrirana je na slici 2.1. Detaljan izvod jednadžbi (2.1)-(2.3) dan je u udžbenicima Griffiths [7] i Jackson [8].



Slika 2.1: Pojednostavljeni prikaz prostorvremena Minkowskog sa svjetskom linijom naboja. Točka na svjetskoj liniji  $w^\mu(t_r) = (ct_r, \mathbf{w}(t_r))$  povezana je točkom  $x^\mu$  linijom svjetlosnog tipa, koja predstavlja širenje signala informacije o gibanju naboja.

## 2.2 Berryjeva koneksija i zakrivljenost u kvantnoj adijabatskoj aproksimaciji

Teorija elektromagnetizma opisana u odjeljku 3 oslanja se na Berryjev račun koneksija i zakrivljenosti, koji je u originalnom članku [9] obavljen u kontekstu kvantne adijabatske aproksimacije. Zbog identičnog matematičkog formalizma, korisno je uspostaviti analogiju s originalnim problemom.

Neka je kvantni sustav opisan Hamiltonijanom  $H(\mathbf{R}(t))$ , koji implicitno ovisi o vremenu preko skupa parametara  $\mathbf{R}(t)$ . Neka je  $H_0(\mathbf{R}(t))$  vremenski neovisan Hamiltonijan koji odgovara  $H(\mathbf{R}(t))$  zamrznutom u trenutku  $t$  i neka su  $|n(t)\rangle$  i  $E_n(t)$  pripadna svojstvena stanja i energije. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je u  $t = 0$  sustav u svojstvenom stanju  $|n(0)\rangle$  i da nema degeneracije u  $H_0$ . U specijalnom slučaju spore vremenske promjene parametara  $\mathbf{R}(t)$  vrijedi adijabatska aproksimacija [9], pa je evolucija stanja sustava  $|\psi\rangle$  opisana jednačbom:

$$|\psi(t)\rangle = e^{\theta_n^D + \theta_n^G} |n(t)\rangle, \quad \theta_n^D = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'. \quad (2.4)$$

Odnosno, sustav ostaje u istom svojstvenom stanju trenutnog  $H_0$ , do na fazni faktor. Osim dinamičke faze  $\theta_n^D$ , koja je uvijek prisutna u evoluciji, sustav dobiva i dodatnu

geometrijsku fazu  $\theta_n^G$ , koja je definirana relacijom:

$$\theta_n^G = \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} i \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R}. \quad (2.5)$$

Geometrijska faza odgovara integralu *Berryjeve koneksije*  $\mathbf{A} \equiv i \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle$  po krivulji u parametarskom prostoru. U posebnom slučaju kada se parametri sustava nakon evolucije vrate u početno stanje, krivulja integracije  $\partial S$  je zatvorena, i odgovara rubu neke plohe  $S$ . Linijski integral (2.5) može se tada pomoću Stokesovog teorema pretvoriti u površinski integral po  $S$ . U specijalnom slučaju, kada je parametarski prostor trodimenzionalan, vrijedi:

$$\theta_n^G = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{R} = \oiint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \equiv \oiint_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{a}. \quad (2.6)$$

Veličina  $\boldsymbol{\Omega}$  odgovara *Berryjevoj zakrivljenosti*. U općenitom slučaju parametarskog prostora proizvoljne dimenzije, Berryjeva zakrivljenost definirana je kao antisimetrični tenzor:

$$\Omega_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.7)$$

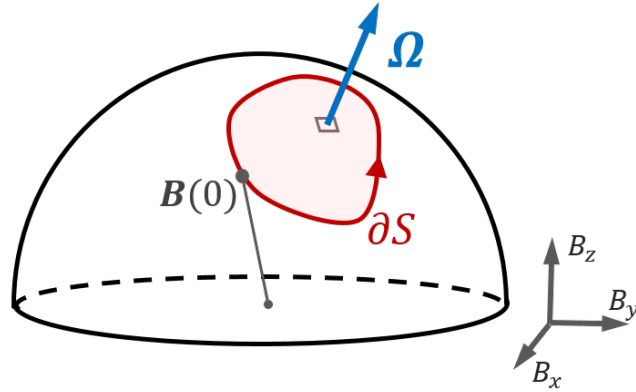
U tri dimenzije se ova definicija svodi na rotaciju koneksije. Valja naglasiti da se prilikom promijene koordinatne baze parametara  $R(t) \rightarrow R'(t)$  koneksija i zakrivljenost respektivno transformiraju kao vektor i tenzor ranga 2.

Promotrimo kvantni sustav magnetskog dipola u homogenom magnetskom polju  $\mathbf{B}$ , čiji smjer se može adijabatski mijenjati u vremenu. Hamiltonijan ovog sustava glasi:

$$H = \kappa \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.8)$$

gdje konstanta  $\kappa$  opisuje jačinu interakcije s magnetskim poljem, a  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  su Paulijeve matrice. Kako bi se izračunala Berryjeva zakrivljenost u ovom sustavu, potrebno je prvo naći svojstvene funkcije Hamiltonijana (2.8). Korisno je komponente magnetskog polja parametrizirati pomoću polarnih koordinata:

$$(B_x, B_y, B_z) = |\mathbf{B}| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (2.9)$$



Slika 2.2: Zatvorena krivulja u parametarskom prostoru za sustav opisan Hamiltonijanom (2.8) prilikom adijabatske promjene smjera magnetskog polja. Berryjeva faza odgovara integralu koneksije po  $\partial S$  ili zakrivljenosti po  $S$ . Zakrivljenost ima radijalni smjer, analogno električnom polju mirnog naboja.

Račun valnih funkcija  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  tada se svodi na svojstveni problem:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

gdje su sve konstante ujedinjene u  $\lambda$ . Svojstvene vrijednosti i funkcije dobivene rješavanjem ovog problema iznose:

$$\lambda_+ = -1 \rightarrow \psi_+ = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda_- = +1 \rightarrow \psi_- = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Notacija indeksa + i – odabrana je tako da bude konzistentna s onom u ostatku rada. Promotrimo račun Berryjeve koneksije i zakrivljenosti na primjeru funkcije  $\psi_+$  (račun je potpuno analogan za  $\psi_-$ ). Kartezijevu komponentu koneksije  $A_i$  ( $i \in \{x, y, z\}$ ) računamo pomoću definicije (2.5):

$$A_i = \psi_+^\dagger \frac{\partial}{\partial B_i} \psi_+ = \psi_+^\dagger \left( \frac{\partial \theta}{\partial B_i} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial B_i} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \psi_+ \quad (2.12)$$

Dobivene komponente koneksije iznose:

$$A_x = \frac{1}{2} \frac{-B_y}{B_x^2 + B_y^2} \left( 1 - \frac{B_z}{|\mathbf{B}|} \right), \quad A_y = \frac{1}{2} \frac{B_x}{B_x^2 + B_y^2} \left( 1 - \frac{B_z}{|\mathbf{B}|} \right), \quad A_z = 0. \quad (2.13)$$

Zbog toga što je parametarski prostor u ovom problemu trodimenzionalan, Berryjeva zakrivljenost odgovara rotaciji koneksije:

$$\Omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial B_j} A_k, \quad i, j, k \in \{x, y, z\}, \quad (2.14)$$

gdje je  $\epsilon_{ijk}$  Levi-Civita simbol, i podrazumijeva se sumacija po ponovljenim indeksima. Uvrštavanjem koneksija (2.13) u izraz (2.14) dolazimo do konačnog izraza za Berryjevu zakrivljenost:

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^3}. \quad (2.15)$$

Berryjeva zakrivljenost dobivena pomoću funkcije  $\psi_-$  razlikuje se od izraza (2.15) samo u predznaku (notacija indeksa  $\psi_{\pm}$  upravo je tako odabrana da predznak indeksa odgovara predznaku zakrivljenosti). U oba slučaja, dobivena zakrivljenost radijalnog je smjera i ima isti oblik kao električno polje mirujućeg naboja. Rezultat je ilustriran na slici 2.2. Zbog matematičke sličnosti, ovaj kvantni sustav poslužit će kao korisna analogija s teorijom opisanom u odjeljku 3.

## 3 Formulacija teorije

### 3.1 Općenita formulacija

Standardna teorija klasične elektrodinamike opisana Maxwellovim jednadžbama općenito dopušta kontinuirane raspodjele naboja. Singularnost i kvantizacija električnih naboja nisu intrinzična svojstva Maxwellovih jednadžbi, i kao takve ih je potrebno naknadno postulirati. U ovom odjeljku iskazujemo teoriju koja predviđa identična elektromagnetska polja kao i Maxwellova teorija, ali dopušta isključivo kvantizirane, točkaste naboje.

Teorija se bazira na relativističkoj Weylovoj jednadžbi u prostoru koji je inverzan prostorvremenu Minkowskog:

$$c \frac{\partial}{\partial \omega} \tilde{\psi}_R(k^\mu; \rho^\nu) = -(\sigma_x \frac{\partial}{\partial k_x} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial k_y} + \sigma_z \frac{\partial}{\partial k_z}) \tilde{\psi}_R(k^\mu; \rho^\nu), \quad (3.1)$$

gdje je  $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$  4-vektor u inverznom prostoru, a  $\sigma_i$  su Paulijeve matrice. Jednadžba (3.1) predstavlja desni oblik Weylove jednadžbe, što je označeno indeksom R u  $\tilde{\psi}_R(k^\mu; \rho^\nu)$ . Lijeva Weylova jednadžba odgovara (3.1) s negativnim predznakom na lijevoj strani jednakosti. Obje Weylove jednadžbe koriste se u ovoj teoriji za dobivanje različitih rješenja, na način opisan u ostatku odjeljka.

Valna funkcija  $\tilde{\psi}(k^\mu; \rho^\nu)$  je dvokomponentni spinor koji parametarski ovisi o 4-vektoru  $\rho^\nu$ , koji sadrži informaciju o koordinatama prostora i vremena i trajektoriji naboja ( $\rho^\nu$  je detaljnije definiran ispod). U trenutnoj teoriji,  $\tilde{\psi}(k^\mu; \rho^\nu)$  nema fizikalnu interpretaciju, i služi samo kao pomoćna funkcija za izračun Berryjeve koneksije i zakrivljenosti. Kako bi se (3.1) svela na algebarsku jednadžbu, korišten je ansatz:

$$\tilde{\psi}_R(k^\mu) = \psi_R(\rho^\mu) \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} - i\frac{\omega}{c}\rho^0\right), \quad (3.2)$$

pri čemu je veličina  $\rho^\mu = (\rho^0, \boldsymbol{\rho})$  4-vektor definiran kao:

$$\rho^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu (x^\nu - w^\nu) \equiv \Lambda^\mu{}_\nu s^\nu, \quad (3.3)$$

gdje je  $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$  točka prostorvremena u kojoj računamo polja, dok  $w^\mu = (ct_c, \mathbf{w}(t_c))$  odgovara položaju naboja u trenutku  $t_c$ , odnosno opisuje svjetsku liniju naboja.

$\Lambda^\mu_\nu$  predstavlja matricu Lorentzove transformacije koja ovisi o trajektoriji naboja na način koji će biti kasnije specificiran. Za sada zahtijevamo da ova transformacija pripada pravoj, ortokronoj Lorentzovoj grupi  $SO^+(1,3)$  (Eng. *Restricted Lorentz group*). Uvrštavanjem (3.2) u (3.1) dobiva se svojstvena jednačba:

$$H\psi_R(\rho^\mu) \equiv \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}\psi_R(\rho^\mu) = \rho^0\psi_R(\rho^\mu). \quad (3.4)$$

Uvjet postojanja netrivialnog rješenja jednačbe (3.4) glasi  $\rho^\mu\rho_\mu = 0$ , odnosno vrijedi  $\rho^0 = \pm|\boldsymbol{\rho}|$ . Pripadna svojstvena stanja jednačbe su  $|\psi_{R,n}\rangle$  i  $|\psi_{R,p}\rangle$ , gdje indeksi  $p, n$  odgovaraju predznaku  $\rho^0$ . Uvjet  $\rho^\mu\rho_\mu = 0$  implicira da je 4-vektor  $\rho^\mu$  svjetlosnog tipa. 4-Vektori  $\rho^\mu$  i  $s^\mu$  povezani su Lorentzovom transformacijom (3.3). Općenita Lorentzova transformacija čuva normu 4-vektora, što znači da je i  $s^\mu$  svjetlosnog tipa:  $s^0 = \pm|s|$ . Zbog zahtjeva da transformacija pripada  $SO^+(1,3)$ , ona čuva predznak vremenske komponente 4-vektora svjetlosnog tipa:  $\text{sgn}(s^0) = \text{sgn}(\rho^0)$ . Korištenjem ovih svojstava i definicije  $s^\mu$ , dobivamo dvije moguće vrijednosti  $t_c$ :

$$t_c = t \pm \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_c)|. \quad (3.5)$$

Jednačba (3.5) odgovara definiciji retardiranog vremena (2.2) u slučaju kada je  $\rho^0 > 0$ . Slučaj  $\rho^0 < 0$  daje definiciju avansiranog vremena. Račun Berryjeve zakrivljenosti iz pripadnih funkcija  $|\psi_{R,p}\rangle$  i  $|\psi_{R,n}\rangle$  respektivno bi dao retardirana i avansirana rješenja Maxwellovih jednačbi.

Primjenom identičnog računskog postupka na lijevu Weylovu jednačbu dobivaju se funkcije  $|\psi_{L,p}\rangle$  i  $|\psi_{L,n}\rangle$ . Iz lijeve i desne Weylove jednačbe zajedno se dobivaju 4 rješenja: 2 retardirana i 2 avansirana. Zbog toga što avansirana rješenja nisu u skladu s kauzalnosti, u ovom radu ih nećemo detaljnije analizirati. Preostaju dva prihvatljiva rješenja:  $|\psi_{L,p}\rangle$  i  $|\psi_{R,p}\rangle$ . Kao što će biti pokazano u odjeljku 4, zakrivljenosti dobivene pomoću njih respektivno odgovaraju elektromagnetskim poljima pozitivnog i negativnog točkastog naboja. Zato nadalje uvodimo pojednostavljenu notaciju  $|\psi_{-}\rangle \equiv |\psi_{R,p}\rangle$ ,  $|\psi_{+}\rangle \equiv |\psi_{L,p}\rangle$ .

Lorentzova transformacija  $\Lambda$  u definiciji (3.3) ovisi o brzinama i akceleracijama singulariteta izvrijednjenim u vremenu  $t_c$ , što se svodi na ovisnost o  $t_r$  za kauzalna rješenja. Transformacija ima oblik  $\Lambda = \mathbf{RB}$ , gdje  $\mathbf{B}(\mathbf{v})$  odgovara čistom Lorentzovom potisku definiranim brzinom naboja  $\mathbf{v}(t_r)$ , a  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = e^{i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)}$  je rotacija koja ovisi

o brzini i akceleraciji naboja. Operatori  $J_i$  odgovaraju generatorima rotacije (dodatak A), dok je  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  definiran u integralnom smislu na sljedeći način:

$$\boldsymbol{\theta}(t_r) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \int^{t_r} (\boldsymbol{\omega}_{Th}(t') \cdot \hat{\mathbf{n}}) dt' \quad (3.6)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{Th}(t') = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\mathbf{a}(t') \times \mathbf{v}(t')). \quad (3.7)$$

Izraz (3.7) odgovara *Thomasovoj frekvenciji* [12], gdje su  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{a}$  brzina i akceleracija naboja i  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Fenomen Thomasove precesije detaljnije je prikazan u dodatku A. Vektor  $\hat{\mathbf{n}}$  predstavlja konstantni jedinični vektor smjera okomit na ravninu koju čine  $\mathbf{a}(t_r)$  i  $\mathbf{v}(t_r)$ . U odjeljku 4 bit će pokazano da elektromagnetska polja ne ovise eksplicitno o  $\boldsymbol{\theta}$ , već isključivo o njegovoj derivaciji po retardiranom vremenu  $d\boldsymbol{\theta}(t_r)/dt_r = \boldsymbol{\omega}_{Th}(t_r)$ . U slučaju gibanja po pravcu vrijedi  $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = 0$  i Lorentzova transformacija svodi se na čisti potisak. U slučaju 2D gibanja u ravnini se definicija  $\boldsymbol{\theta}$  pojednostavljuje u:

$$\boldsymbol{\theta}(t_r) = \int^{t_r} \boldsymbol{\omega}_{Th}(t') dt'. \quad (3.8)$$

Ovisnost  $\mathbf{A}$  o retardiranom vremenu posljedica je odabira retardiranih rješenja. Kada bi nas zanimala avansirana rješenja, potrebno bi bilo u definiciji  $\mathbf{A}$  zamijeniti  $t_r$  sa  $t_a$ .

Jednom kada su izračunata svojstvena stanja  $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ , iz njih se može dobiti Berryjeva koneksija, čije se komponente u teoriji identificiraju s vektorskim i skalarnim potencijalom:

$$\mathbf{A} = i\langle\psi|\nabla|\psi\rangle, \quad V = -\frac{1}{c^2} i\langle\psi|\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle. \quad (3.9)$$

Valja naglasiti da su ovi potencijali bitno različiti od L-W potencijala  $\mathbf{A}_M, V_M$  iz Maxwelllove teorije. Računom Berryjeve zakrivljenosti iz koneksije dobivaju se električno i magnetsko polje naboja:

$$\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Može se pokazati da izraz (3.10) odgovara antisimetričnoj definiciji (2.7) uz povoljan izbor koordinata (obavljeno na početku odjeljka 4.1). Polja (3.10) se od polja točkastog naboja iz Maxwelllove teorije razlikuju samo u globalnoj multiplikativnoj konstanti:

$$\mathbf{E}_M = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}_M = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \mathbf{B}, \quad (3.11)$$



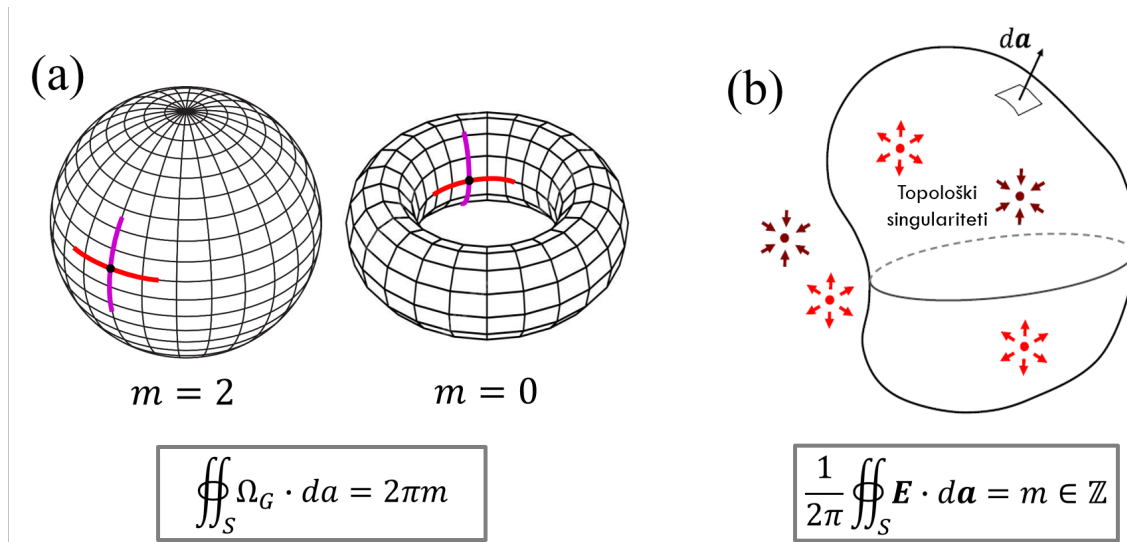
gdje je  $\epsilon_0$  električna permitivnost vakuumu. Ova konstanta je fiksirana unutar teorije. Primijetimo da je električno polje definirano kao rotacija koneksije. Matematički identitet  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$  implicira da kontinuirana gustoća naboja u prostoru nužno iščezava, i jedini prihvatljivi izvori ostaju singulariteti za koje taj identitet ne vrijedi. Ovime je pokazano da teorija podržava isključivo točkaste naboje.

### 3.2 Kvantizacija i Chernov teorem

Kvantizacija unutar naše teorije zasniva se na Chernovom teoremu [10]. Chernov teorem generalizacija je Gauss - Bonnetovog (GB) teorema [11] na višedimenzionalnim mnogostrukostima. Radi stjecanja bolje intuicije, korisno je uspostaviti analogiju našeg problema s jednostavnijim primjerom ilustriranim na slici 3.1a. U ovom primjeru promatramo integral Gaussove zakrivljenosti po orijentabilnim mnogostrukostima bez ruba, konkretno 2-sferi i 2-torusu. Gaussova zakrivljenost definirana je kao produkt glavnih zakrivljenosti u točki:

$$\Omega_G = \kappa_{min} \cdot \kappa_{max}. \quad (3.12)$$

Smjerovi glavnih zakrivljenosti u jednoj točki naznačeni su na slici. Gauss - Bonnetov



Slika 3.1: (a) Gauss - Bonnetov teorem na primjeru 2-sfere i 2-torusa. Ukupni površinski integral Gaussove zakrivljenosti  $\Omega_G$  ovisi samo o genusu mnogostrukosti. (b) Integral Berryjeve zakrivljenosti po zatvorenoj plohi ovisi o broju i smjeru topoloških singulariteta koje obuhvaća ploha, i kvantiziran je prema Chernovom teoremu. Identifikacijom Berryjeve zakrivljenosti s električnim poljem dolazimo do Gaussovog zakona za kvantizirane naboje. Slika je preuzeta iz [1].

teorem zahtijeva da ukupni površinski integral Gaussove zakrivljenosti odgovara cijelom broju (do na faktor  $2\pi$ ) koji ovisi isključivo o tipu mnogostrukosti, odnosno njenom genusu  $g$ :

$$m = 2 - 2g. \quad (3.13)$$

Sada možemo uspostaviti analogiju s originalnim problemom (slika 3.1b). U njemu umjesto Gaussove zakrivljenosti promatramo integral Berryjeve zakrivljenosti po zatvorenoj plohi u prostoru. Prema Chernovom teoremu, ovaj integral bit će kvantiziran, i ovisit će isključivo o broju i smjeru ( $\pm$ ) topoloških singulariteta (naboja) koji se nalaze unutar plohe. Komponente Berryjeve zakrivljenosti moguće je identificirati kao komponente električnog polja pomoću (3.9) i (3.10). Ovime dolazimo do zaključka da je površinski integral električnog polja po zatvorenoj plohi kvantiziran, što upravo odgovara Gaussovom zakonu za kvantizirane naboje.

### 3.3 Kovarijantnost teorije

Preostaje još pitanje Lorentz kovarijantnosti teorije. Promotrimo dva inercijalna sustava:  $S$  i  $S'$ , s pripadnim necrtanim i crtanim koordinatama. Hamiltonijan u sustavu  $S$  izražen je preko necrtanih koordinata, i oblika je (3.4). Metodom računa koneksije i zakrivljenosti iz njega se dobivaju polja  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  i  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ . Transformacijom u sustav  $S'$  dobio bi se Hamiltonijan ovisan o crtanim koordinatama, iz kojeg bi se računom zakrivljenosti (deriviranjem po crtanim koordinatama) na identičan način dobila polja  $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$  i  $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ . Važno je primijetiti da dobivena polja odgovaraju rješenjima Maxwellovih jednadžbi u bilo kojem sustavu (račun je matematički potpuno ekvivalentan, i nema razloga da sustav  $S$  bude poseban). Maxwellove jednadžbe su Lorentz kovarijantne, pa je zbog identičnih rezultata i ovako konstruirana teorija također kovarijantna.

### 3.4 Primjeri trajektorija

Promotrimo nekoliko specijalnih slučajeva trajektorije naboja. U slučaju mirnog naboja koji se nalazi u točki  $\mathbf{w}$ , Hamiltonijan (3.4) svodi se na oblik analogan (2.8). Kao što je očekivano, dobiveno električno polje radijalno je, analogno rezultatu (2.15),

dok magnetsko polje iščezava:

$$\mathbf{E} = \pm \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{w}}{|\mathbf{r} - \mathbf{w}|^3}, \quad \mathbf{B} = 0; \quad (3.14)$$

ova polja odgovaraju poljima mirujućeg naboja do na multiplikativnu konstantu. Predznak polja posljedica je izbora funkcije  $|\psi_+\rangle$  ili  $|\psi_-\rangle$  pri računu zakrivljenosti.

Promotrimo nadalje slučaj naboja koji se giba konstantnom brzinom. Zbog rotacijske simetrije može se bez gubitka općenitosti uzeti da se naboj giba po  $z$  osi. Hamiltonijan (3.4) tada ima oblik:

$$H = x\sigma_x + y\sigma_y + \gamma(z - v_z t)\sigma_z. \quad (3.15)$$

Računom zakrivljenosti (odjeljak 4.1) dobivaju se polja:

$$\mathbf{E} = \pm \frac{1}{2} \frac{\gamma(\mathbf{r} - v_z t \hat{\mathbf{z}})}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - v_z t)^2]^{3/2}}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} v_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}, \quad (3.16)$$

koja su konzistentna s rješenjem Maxwellovih jednadžbi. Ovo nije iznenađujuće jer je (3.15) samo Lorentz potisnuta verzija Hamiltonijana za mirujući naboj. No, ono što nije trivijalno očito je da se (3.15) može generalizirati i na slučaj akceleriranog gibanja po pravcu. Slijedeći definiciju, Hamiltonijan općenitog, akceleriranog gibanja po  $z$  osi glasi:

$$H = x\sigma_x + y\sigma_y + \gamma(t_r)(z - w_z(t_r) - v_z(t_r)(t - t_r))\sigma_z. \quad (3.17)$$

Zakrivljenost za ovaj slučaj izračunata je u odjeljku 4.2, i njene komponente savršeno se slažu s poljima dobivenih pomoću Maxwellovih jednadžbi. Odnosno, račun savršeno replicira efekte radijacije koji su očekivani pri akceleriranom gibanju naboja.

Hamiltonijan općenitog 2D gibanja u ravnini bitno je kompliciraniji od 1D slučaja zbog prisutnosti rotacije, odnosno Thomasove precesije. Unatoč tome, račun zakrivljenosti egzaktno reproducira rješenja Maxwellovih jednadžbi [7]:

$$\mathbf{E} = \pm \frac{1}{2} \frac{s}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})^3} \left[ (c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{s} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right], \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}, \quad (3.18)$$

gdje su uvedene pokrate  $\mathbf{s} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$ ,  $s = |\mathbf{s}|$ ,  $\mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{v}(t_r)$ . Podrazumijeva se da su sve brzine i akceleracije u (3.18) izvrijednjene u retardiranom vremenu. Zbog kompleksnosti 2D računa, u odjeljku 4.3 je on prikazan samo za  $z$  komponentu

električnog polja. Račun preostalih komponenti mogao bi se analitički obaviti na potpuno analogan način, i numerički je (pomoću Wolfram Mathematica programa) potvrđeno da daje točne rezultate.

Usporedbom s Maxwellovom teorijom [7], možemo primijetiti da izraz (3.18) ne daje točna polja samo u slučaju gibanja u ravnini, već i za općenitu 3D putanju naboja. Razlog je to što polja u točki prostorvremena  $x^\mu$  ovise samo o brzini i akceleraciji naboja u jednoj retardiranoj točki putanje, a svaki dio putanje lokalno izgleda kao 2D krivulja. Zamislimo česticu koja se giba po 2D putanji takvoj da su joj brzina i akceleracija izvrijednjeni u  $t_r$  identični brzini i akceleraciji čestice koja se giba po 3D putanji. Signal koji se širi u  $x^\mu$  iz retardirane točke putanje bit će isti za obje čestice, rezultirajući identičnim poljima u  $x^\mu$ . Zbog ove lokalne sličnosti putanja će Hamiltonijan za općenitu 3D putanju imati isti oblik kao za gibanje u ravnini, do na jednu razliku: definiciju kuta  $\theta$ . U slučaju 2D gibanja je  $\theta$  po definiciji (3.8) uvijek okomit na ravninu gibanja. No, kada bi naivno postulirali da (3.8) vrijedi i za općenitu putanju, ova okomitost ne bi bila zadovoljena jer vektor Thomasove kutne brzine u integrandi može mijenjati smjer tijekom gibanja, što vodi do desinkronizacije smjerna  $\theta$  i  $\omega_{Th}$ . Zato je u općenitoj definiciji (3.6) potrebno projicirati  $\theta$  tako da uvijek bude okomit na ravninu gibanja u retardiranoj točki. Numerička provjera potvrđuje da ovakva generalizacija daje točna polja za proizvoljnu 3D putanju naboja.

## 4 Eksplicitni račun Berryjeve zakrivljenosti

### 4.1 Gibanje konstantnom brzinom

Kako bi ujediniли račun polja  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  u jednu proceduru, korisno je definirati vektor koneksije  $A_\mu$  i antisimetrični tenzor zakrivljenosti  $\Omega_{\mu\nu}$  na sljedeći način:

$$A_\mu = i\langle\psi|\partial_\mu|\psi\rangle, \quad (4.1)$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.2)$$

Indeksi  $\mu, \nu$  označavaju komponente odabrane koordinatne baze. Uvodimo dva značajna izbora koordinatne baze:  $b' = \{-c^2t, \rho^1, \rho^2, \rho^3\}$  i  $b = \{-c^2t, x, y, z\}$ . Komponente tenzora u ovim bazama bit će označene crtanim i necrtanim indeksima, respektivno. Lako se može potvrditi da je komponente tenzora zakrivljenosti u bazi  $b$  moguće identificirati kao polja definirana u (3.10) na sljedeći način:

$$B_i = \Omega_{i0}, \quad \epsilon_{ijk}E_k = \Omega_{ij}, \quad (4.3)$$

gdje je  $\epsilon_{ijk}$  Levi-Civita simbol i latinski indeksi idu od 1 do 3. S druge strane, baza  $b'$  sadrži prirodne koordinate Hamiltonijana (3.4):  $\rho^1, \rho^2, \rho^3$ . Zato će izrazi za komponente koneksije i zakrivljenosti u ovoj bazi imati vrlo jednostavnu formu.

Računska procedura koju koristimo prvo zahtijeva dobivanje komponenti koneksije ili zakrivljenosti u crtanoj bazi, nakon čega se necrtane komponente računaju standardnim tenzorskim transformacijama pri promjeni baze. Svojstvena stanja  $|\psi_+\rangle$  i  $|\psi_-\rangle$  dobivena iz (3.4) (i pripadne lijeve Weylove jednadžbe) glase:

$$|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Ovdje su korištene polarne koordinate za zapis vektora  $\rho$ , čije komponente su parametrizirane kao  $\rho^1 = \rho \sin \theta \cos \phi$ ,  $\rho^2 = \rho \sin \theta \sin \phi$  i  $\rho^3 = \rho \cos \theta$ . Nadalje ćemo proučavati isključivo rezultate dobivene pomoću  $|\psi_+\rangle$ , jer se potpuno analogan račun može napraviti za  $|\psi_-\rangle$ , za koji bi jedina razlika u rezultirajućim poljima bila promjena predznaka. Nakon uvrštavanja  $|\psi_+\rangle$  u (4.1) i vraćanja natrag u Kartezijeve

koordinate, dobivamo komponente koneksije:

$$\begin{aligned} A_{0'} &= A_{3'} = 0, \\ A_{1'} &= \frac{1}{2} \frac{-\rho^2}{(\rho^1)^2 + (\rho^2)^2} \left(1 - \frac{\rho^3}{|\boldsymbol{\rho}|}\right), \\ A_{2'} &= \frac{1}{2} \frac{\rho^1}{(\rho^1)^2 + (\rho^2)^2} \left(1 - \frac{\rho^3}{|\boldsymbol{\rho}|}\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Valja napomenuti da ova koneksija divergira na negativnom dijelu  $\rho^3$  osi. Ovo je poznati rezultat koji kaže da su dvije koneksije potrebne kako bi pokrile parametarski prostor u cijelosti (detaljnije opisano u [13]). Druga koneksija dobivena je korištenjem drugačijeg baždarenja, koje je ekvivalentno množenju  $|\psi_+\rangle$  s faznim faktorom; moguće je odabrati baždarenje takvo da koneksija divergira na pozitivnom dijelu  $\rho^3$  osi. Ove dvije koneksije su tada povezane baždarnom transformacijom na dijelu parametarskog prostora gdje im se domene preklapaju.

Promotrimo rješenje za najjednostavniji oblik trajektorije: 1D gibanje konstantnom brzinom po  $z$  osi, koje je opisano Hamiltonijanom (3.15). Korištenjem (4.5) i relacija  $\rho^1 = x$ ,  $\rho^2 = y$ ,  $\rho^3 = \gamma(z - vt)$ , dobivamo komponente koneksije u necrtanoj bazi:

$$A_\mu = \frac{\partial b^{v'}}{\partial b^\mu} A_{v'} \rightarrow A_0 = A_3 = 0, \quad A_1 = A_{1'}, \quad A_2 = A_{2'}, \quad (4.6)$$

gdje  $b^{v'}$  and  $b^\mu$  respektivno označavaju koordinate crtane i necrtane baze. Slijeđenjem definicije zakrivljenosti (4.2) i identifikacijom polja pomoću (4.3), dolazimo do elektromagnetskih polja:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \frac{\gamma(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{3/2}}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2c^2} \frac{\gamma v_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{r}}{[x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{3/2}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}, \quad (4.8)$$

koja su identična poljima naboja koji se giba konstantnom brzinom u Maxwelllovoj teoriji, do na multiplikativnu konstantu  $q/2\pi\epsilon_0$ .

## 4.2 Općenito gibanje po pravcu (Bremsstrahlung)

U ovom odjeljku je demonstrirana generalizacija rezultata iz 4.1 dopuštanjem općenite vremenske ovisnosti brzine naboja. Pri tome se još uvijek ograničavamo na gibanje

po pravcu, odnosno z osi. Hamiltonijan koji opisuje generalno gibanje po z osi dan je s (3.17).

Radi jednostavnosti, koristit ćemo modificiranu verziju procedure iz odjeljka 4.1. Umjesto transformiranja vektora koneksije i njegovog korištenja za izračun  $\Omega_{\mu\nu}$ , ovdje prvo računamo tenzor zakrivljenosti  $\Omega_{\mu'\nu'}$  te zatim radimo transformaciju baze. Ova metoda je matematički ekvivalentna prijašnjoj, ali je u tehničkom smislu mnogo jednostavnija. Korištenjem (4.5) i definicije (4.2), dobivamo zakrivljenost:

$$\Omega_{i'j'} = \frac{1}{2} \epsilon_{i'j'k'} \frac{\rho^{k'}}{|\rho|^3}, \quad (4.9)$$

dok ostale komponente zakrivljenosti iščezavaju. Korištenjem pravila transformacije tenzora, kao i činjenice da  $\Omega_{0\nu'}$  i  $\Omega_{\mu'0'}$  iščezavaju, dobivamo komponente zakrivljenosti potrebne za identifikaciju polja:

$$\Omega_{ij} = \frac{\partial \rho^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial \rho^{j'}}{\partial x^j} \Omega_{i'j'}, \quad \Omega_{i0} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial \rho^{j'}}{\partial t} \Omega_{i'j'}. \quad (4.10)$$

Ovdje  $x^i$  označavaju prostorne koordinate  $\{x, y, z\}$ , dok  $\rho^{i'}$  označavaju  $\{\rho^1, \rho^2, \rho^3\}$ . U slučaju 1D gibanja, ova transformacija se dodatno pojednostavljuje zbog trivijalnih veza  $\rho^1 = x$  i  $\rho^2 = y$ . Za razliku od specijalnog slučaja konstantne brzine u prijašnjem odjeljku, koordinata  $\rho^3 = \gamma(t_r)[z - w_z(t_r) - v_z(t_r)(t - t_r)]$  je funkcija i vremena i svih prostornih koordinata zbog ovisnosti o retardiranom vremenu. Koristeći (4.10) i identificirajući polja pomoću (4.3), dolazimo do izraza za polja:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial \rho^3}{\partial z} \Omega_{2'3'}, & B_x &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho^3}{\partial t} \Omega_{1'3'}, \\ E_y &= \frac{\partial \rho^3}{\partial z} \Omega_{3'1'}, & B_y &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho^3}{\partial t} \Omega_{2'3'}, \\ E_z &= \Omega_{1'2'} - \frac{\partial \rho^3}{\partial y} \Omega_{3'1'} - \frac{\partial \rho^3}{\partial x} \Omega_{2'3'}, & B_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Koordinata  $\rho^3$  eksplicitno ovisi o  $z$  i  $t$ , ali ima i dodatnu ovisnost o  $\{t, x, y, z\}$  preko  $t_r$ . Korištenjem pravila za lančano deriviranje, kao i identiteta (4.9), izrazi za polja

postaju:

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{2} \frac{x}{|\rho|^3} \left[ \gamma + \frac{\partial t_r}{\partial z} \frac{\partial \rho^3}{\partial t_r} \right], & B_x &= \frac{1}{2c^2} \frac{y}{|\rho|^3} \left[ -\gamma v_z + \frac{\partial t_r}{\partial t} \frac{\partial \rho^3}{\partial t_r} \right], \\
E_y &= \frac{1}{2} \frac{y}{|\rho|^3} \left[ \gamma + \frac{\partial t_r}{\partial z} \frac{\partial \rho^3}{\partial t_r} \right], & B_y &= \frac{1}{2c^2} \frac{-x}{|\rho|^3} \left[ -\gamma v_z + \frac{\partial t_r}{\partial t} \frac{\partial \rho^3}{\partial t_r} \right], \\
E_z &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\rho|^3} \left[ \rho^3 - \left( y \frac{\partial t_r}{\partial y} + x \frac{\partial t_r}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho^3}{\partial t_r} \right], & B_z &= 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Potrebne derivacije dane su ispod. Derivacije retardiranog vremena dobivene su implicitnim deriviranjem njegove definicijske relacije  $c(t - t_r) = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)|$ :

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{s}{s - \beta \cdot \mathbf{s}}, \quad \frac{\partial t_r}{\partial x^i} = -\frac{1}{c} \frac{s^i}{s - \beta \cdot \mathbf{s}}, \quad \frac{\partial \rho^3}{\partial t_r} = -\frac{1}{c} \gamma^3 a_z [s - \beta \cdot \mathbf{s}], \tag{4.13}$$

gdje vektor  $\mathbf{s}$  predstavlja prostorni dio  $s^\mu$ ,  $s \equiv |\mathbf{s}|$  i  $\beta = \mathbf{v}/c$ . Kako bi eliminirali  $|\rho|$  u nazivniku, koristimo identitet:

$$|\rho| = \rho^0 = \gamma(s - \beta \cdot \mathbf{s}), \tag{4.14}$$

koji vrijedi za retardirana rješenja. Uvrštavanjem rezultata (4.13) i (4.14) u (4.12) i prebacivanjem u standardnu vektorsku notaciju, konačni izraz za polja glasi:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \frac{s}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})^3} \left[ (c^2 - v_z^2) \mathbf{u} + \mathbf{s} \times (c \hat{\mathbf{s}} \times (a_z \hat{\mathbf{z}})) \right], \tag{4.15}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{E}, \tag{4.16}$$

uz pokratu  $\mathbf{u} \equiv c \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{v}(t_r)$ . Ova polja podudaraju se s poljima dobivenim iz Maxwellovih jednadžbi za 1D gibanje, do na multiplikativnu konstantu  $q/2\pi\epsilon_0$ .

### 4.3 Općenito gibanje u ravnini

U ovom odjeljku promatramo općenito 2D gibanje naboja u  $xy$  ravnini. Račun je identičan onom u 4.2 jer su jednadžbe (4.10) jednako valjane. Radi jednostavnosti, ovdje je demonstriran samo račun komponente polja  $E_z$ ; ostale komponente mogu se dobiti potpuno analognim postupkom. Lorentzova transformacija  $\Lambda$  koja povezuje 4-vektore  $\rho^\mu$  i  $s^\mu$  (izraz (3.3)) sada odgovara umnošku potiska i rotacije  $\Lambda = \mathbf{RB}$ .



Konkretno, matrica transformacije dana je s:

$$\begin{pmatrix} \rho^0 \\ \rho^1 \\ \rho^2 \\ \rho^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & S & 0 \\ 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & 0 \\ -\gamma\beta_x & \epsilon_x & \delta & 0 \\ -\gamma\beta_y & \delta & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^0 \\ s^1 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Ovdje su uvedene pokrate:  $\epsilon_i \equiv 1 + (\gamma - 1)\beta_i^2/\beta^2$ ,  $\delta \equiv (\gamma - 1)\beta_x\beta_y/\beta^2$ ,  $S \equiv \sin \theta_z$  i  $C \equiv \cos \theta_z$ . Kut rotacije je  $\theta_z(t_r) = \int^{t_r} \omega_{Th}(t') dt'$ , gdje je Thomasova kutna brzina okomita na  $xy$  ravninu:  $\boldsymbol{\omega}_{Th}(t') = \omega_{Th}(t')\hat{\mathbf{z}}$ . Kao što će biti pokazano, konačna polja ne ovise o  $\theta_z$ , već isključivo o njegovoj derivaciji:

$$\frac{d\theta_z}{dt_r} = \omega_{Th}(t_r) = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (a_x v_y - v_x a_y). \quad (4.18)$$

Ovo svojstvo u skladu je s Maxwellovom teorijom, gdje polja u  $x^\mu$  ovise isključivo o brzini i akceleraciji naboja u jednoj (retardiranoj) točki prostorvremena. Bilo kakva eksplicitna ovisnost o  $\theta_z$  narušavala bi ovo svojstvo, jer  $\theta_z$  sadrži "povijest" gibanja unutar integralne definicije.

Radi kasnije usporedbe, ovdje pišemo izraz za komponentu  $E_z$  dobivenu iz Maxwellovih jednadžbi za 2D gibanje u  $xy$  ravnini:

$$E_z = \frac{1}{2} \frac{z}{\gamma^3 \alpha^3} \left[ \gamma + \frac{1}{c^2} \gamma^3 (a_x s^1 + a_y s^2) \right], \quad (4.19)$$

gdje je  $s = s^0 = |\mathbf{s}|$ , te je uvedena pokrata  $\alpha \equiv s - \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\beta}$ . Zbog razloga koji će kasnije biti jasan, korisno je (4.19) zapisati tako da se drugi član u uglatoj zagradi proširi s  $\alpha/\alpha = 1$ :

$$E_z = \frac{1}{2} \frac{z}{\gamma^3 \alpha^3} \left[ \gamma + \frac{1}{c^2 \alpha} \gamma^3 \left( a_x s^1 s^0 + a_y s^2 s^0 - a_x \beta_x (s^1)^2 - a_y \beta_y (s^2)^2 - (a_x \beta_y + a_y \beta_x) s^1 s^2 \right) \right] \equiv \frac{1}{2} \frac{z}{\gamma^3 \alpha^3} (\star\star), \quad (4.20)$$

gdje simbol  $(\star\star)$  označava sadržaj uglate zagrade. Vratimo se sada originalnom

problemu. Komponente vektora  $\rho$  su:

$$\rho^1 = -\gamma(C\beta_x + S\beta_y)s^0 + (C\epsilon_x + S\delta)s^1 + (C\delta + S\epsilon_y)s^2 \quad (4.21)$$

$$\equiv \rho^{1(0)}s^0 + \rho^{1(1)}s^1 + \rho^{1(2)}s^2,$$

$$\rho^2 = -\gamma(-S\beta_x + C\beta_y)s^0 + (-S\epsilon_x + C\delta)s^1 + (-S\delta + C\epsilon_y)s^2 \quad (4.22)$$

$$\equiv \rho^{2(0)}s^0 + \rho^{2(1)}s^1 + \rho^{2(2)}s^2,$$

$$\rho^3 = s^3 = z. \quad (4.23)$$

Ovdje su koeficijenti  $\rho^{i(j)}$  uvedeni kao pokrate za članove koji množe  $s^0$ ,  $s^1$  i  $s^2$ :  $\rho^{1(0)} = -\gamma(C\beta_x + S\beta_y)$ ,  $\rho^{1(1)} = C\epsilon_x + S\delta$ , itd. Kako bi izračunali  $E_z$ , koristimo jednadžbu (4.10) za  $\Omega_{12}$ . U tom slučaju preživljavaju samo dva člana:

$$E_z = \left( \frac{\partial \rho^1}{\partial x} \frac{\partial \rho^2}{\partial y} - \frac{\partial \rho^2}{\partial x} \frac{\partial \rho^1}{\partial y} \right) \Omega_{1'2'} = \frac{1}{2} \frac{z}{\gamma^3 \alpha^3} \left( \frac{\partial \rho^1}{\partial x} \frac{\partial \rho^2}{\partial y} - \frac{\partial \rho^2}{\partial x} \frac{\partial \rho^1}{\partial y} \right) \equiv \frac{1}{2} \frac{z}{\gamma^3 \alpha^3} (\star); \quad (4.24)$$

$\rho^1$  i  $\rho^2$  ovise o  $x$  i  $y$  eksplicitno kroz  $s^1$  i  $s^2$ , ali sadrže i dodatnu ovisnost zbog prisutnosti  $t_r$ . Korištenjem pravila za lančano deriviranje, dobivamo:

$$(\star) = \left[ \rho^{1(1)} + \frac{\partial t_r}{\partial x} \dot{\rho}^1 \right] \left[ \rho^{2(2)} + \frac{\partial t_r}{\partial y} \dot{\rho}^2 \right] - \left[ \rho^{1(2)} + \frac{\partial t_r}{\partial y} \dot{\rho}^1 \right] \left[ \rho^{2(1)} + \frac{\partial t_r}{\partial x} \dot{\rho}^2 \right] \quad (4.25)$$

$$= \left[ \rho^{1(1)} \rho^{2(2)} - \rho^{1(2)} \rho^{2(1)} \right] + \dot{\rho}^1 \left[ \frac{\partial t_r}{\partial x} \rho^{2(2)} - \frac{\partial t_r}{\partial y} \rho^{2(1)} \right] + \dot{\rho}^2 \left[ \frac{\partial t_r}{\partial y} \rho^{1(1)} - \frac{\partial t_r}{\partial x} \rho^{1(2)} \right], \quad (4.26)$$

gdje točka iznad simbola označava derivaciju po retardiranom vremenu. Prva uglati zagrada u (4.26) jednaka je  $\gamma$ . Derivacije  $\rho^1$  i  $\rho^2$  po  $t_r$  iznose:

$$\dot{\rho}^j = \rho^{j(0)}s^0 + \rho^{j(1)}s^1 + \rho^{j(2)}s^2 - c[\rho^{j(0)} + \beta_x \rho^{j(1)} + \beta_y \rho^{j(2)}], \quad j \in \{1, 2\}. \quad (4.27)$$

Derivacije  $t_r$  po  $x$  i  $y$  dane su u (4.13). Nakon uvrštavanja (4.27) i (4.13) u (4.26), članovi unutar uglatih zagrada u (4.27) egzaktno se pokrate. Grupirajući preživjele članove, dolazimo do izraza:

$$\begin{aligned} (\star) = \gamma + \frac{1}{c\alpha} & \left( [\rho^{2(0)}\rho^{1(2)} - \rho^{1(0)}\rho^{2(2)}]s^1s^0 + [\rho^{1(0)}\rho^{2(1)} - \rho^{2(0)}\rho^{1(1)}]s^2s^0 + \right. \\ & [\rho^{2(1)}\rho^{1(2)} - \rho^{1(1)}\rho^{2(2)}](s^1)^2 + [\rho^{1(2)}\rho^{2(1)} - \rho^{2(2)}\rho^{1(1)}](s^2)^2 + \\ & \left. [\rho^{1(1)}\rho^{2(1)} - \rho^{1(2)}\rho^{2(2)} + \rho^{2(2)}\rho^{1(2)} - \rho^{2(1)}\rho^{1(1)}]s^1s^2 \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Uspoređujući (4.20) i (4.24), cilj nam je pokazati da su (★) i (★★) jednaki. Unutar njihovih definicija,  $s^0$ ,  $s^1$  i  $s^2$  su jedine veličine koje sadrže eksplicitnu ovisnost o  $x$  ili  $y$ . Dakle, kako bi (★) i (★★) bili jednaki za proizvoljno odabranu točku prostora i vremena, koeficijenti  $C_{\mu\nu}$  koji množe produkte  $s^\mu s^\nu$  moraju biti jednaki u oba izraza. Valja naglasiti da indeksna notacija ovih koeficijenata nema veze s tenzorskom notacijom, već samo služi da označi koji koeficijent pripada kojem produktu. Usporedbom individualnih koeficijenata se problem efektivno podijelio na 5 manjih problema, od kojih se svi rješavaju na analogan način. Za demonstraciju, promotrimo koeficijent koji množi  $s^1 s^0$ , koji iznosi:

$$C_{10} = \frac{1}{c\alpha} [\rho^{\dot{2}(0)} \rho^{1(2)} - \rho^{\dot{1}(0)} \rho^{2(2)}] \quad (4.29)$$

$$= \frac{1}{c\alpha} \left[ (C\delta + S\epsilon_y) \frac{d}{dt_r} (\gamma(S\beta_x - C\beta_y)) + (-S\delta + C\epsilon_y) \frac{d}{dt_r} (\gamma(C\beta_x + S\beta_y)) \right] \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{c\alpha} \left[ \gamma^2 \beta_y (\dot{S}C - S\dot{C}) + \left( \epsilon_y \frac{d}{dt_r} (\gamma\beta_x) - \delta \frac{d}{dt_r} (\gamma\beta_y) \right) \right]. \quad (4.31)$$

Kao što je očekivano, veličina  $\dot{S}C - S\dot{C}$  koja se pojavljuje u konačnom izrazu jednaka je  $\omega_{Th} = d\theta_z/dt_r$ , dok se svi članovi koji eksplicitno ovise o  $\theta_z$  egzaktno pokrate. Odnosno, konačni rezultat ovisi isključivo o derivaciji kuta  $\theta_z$ , bez ovisnosti o njemu samome. Preostale funkcije u (4.31) ovise o  $t_r$  preko  $\beta_x$  i  $\beta_y$ . Računom derivacija lančanim pravilom i uvrštavanjem definicije  $\omega_{Th}$  dobiva se konačni izraz za  $C_{10}$ :

$$C_{10} = \frac{\gamma^3}{c^2\alpha} a_x, \quad (4.32)$$

koji egzaktno odgovara pripadnom koeficijentu u (★★). Analogna procedura može se prikazati za preostala 4 koeficijenta, što nas dovodi do zaključka da su izrazi za  $E_z$  u obje teorije zaista jednaki.

## 5 Zaključak

U ovom radu demonstrirana je alternativna teorija klasične mehanike koja dopušta isključivo singularne, kvantizirane naboje. Pokazano je da singularnost naboja slijedi iz definicije električnog polja kao rotacije vektorskog potencijala, dok kvantizacija proizlazi iz Chernovog teorema i identifikacije polja s komponentama Berryjeve zakrivljenosti. Računom Berryjeve koneksije i zakrivljenosti iz rješenja Weylove jednadžbe pokazano je da teorija reproducira identična elektromagnetska polja gibajućeg naboja kao i Maxwellove jednadžbe. Račun je eksplicitno prikazan za općenite slučajeve gibanja naboja po pravcu i unutar ravnine, dok je generalizacija na općenitu 3D putanju napravljena kvalitativnom argumentacijom, i potvrđena numeričkim računom.

## Literatura

- [1] Golik B.; Jukić D.; Buljan H. *Theory of classical electrodynamics with topologically quantized singularities as electric charges*, arXiv: 2311.14771.
- [2] Dirac P. A. M. *Quantised singularities in the electromagnetic field*. Proc. R. Soc. London **A133**, 60 (1931).
- [3] Dirac P. A. M. *The theory of magnetic poles*. Phys. Rev **74**, 60 (1948).
- [4] Dirac P. A. M. *Classical theory of radiating electrons*. Proc. R. Soc. London **A167**, 148 (1938).
- [5] Wheeler J. A.; Feynman R. P. *Interaction with the absorber as the mechanism of radiation*. Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945).
- [6] Wheeler J. A.; Feynman R. P. *Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action*, Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949).
- [7] Griffiths D. J. *Introduction to Electrodynamics. 4.th ed*. London : Pearson, (2013).
- [8] Jackson J. D. *Classical Electrodynamics. 3.rd ed*. New York : John Wiley and Sons, (1999).
- [9] Berry M. V. *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*. Proc. R. Soc. London **A392**, 45 (1984).
- [10] Chern S.S. *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*. The Annals of Mathematics **45**, 747 (1944).
- [11] Rotskoff G. *The Gauss - Bonnet theorem*. The University of Chicago, (2010).
- [12] Thomas L. H. *The kinematics of an electron with an axis*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **3**, 1 (1927).
- [13] Wu T. T.; Yang C. N. *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*. Phys. Rev.D **12**, 3845 (1975).
- [14] Krivuchenko M. I. *Rotation of the swing plane of Foucault's pendulum and Thomas spin precession: Two faces of one coin* arXiv: 0805.1136.

- [15] Kogul J. *Supplemental Lecture 5 Thomas Precession and Fermi-Walker Transport in Special Relativity and Geodesic Precession in General Relativity*. (2019).
- [16] Lambare J.P. *Fermi-Walker Transport and Thomas Precession*. Eur. J. Phys. **38** 045602 (2017).
- [17] Goldstein H.; Poole C.; Safko J. *Classical Mechanics 3rd ed*. Boston : Addison Wesley, (2002).

# Dodaci

## Dodatak A Lorentzove transformacije i Thomasova precesija

Radi jednostavnosti, u ovom odjeljku promatramo Lorentzove transformacije koje pripadaju pravoj, ortokronoj Lorentzovoj grupi  $SO^+(1,3)$  (Eng. *restricted Lorentz group*). Odnosno, ne uzimamo u obzir diskretne transformacije kao što su zrcaljenje prostora ili inverzija smjera vremena. Transformacije  $\Lambda$  koje pripadaju ovoj grupi kontinuirane su i mogu se identificirati kao Lorentzovi potisci  $\mathbf{B}$  (Eng. *boost*), prostorne rotacije  $\mathbf{R}$  ili kombinacije potiska i rotacije. Grupa  $SO^+(1,3)$  ima 6 generatora (3 generatora rotacije i 3 generatora potiska), odnosno svaku Lorentzovu transformaciju moguće je karakterizirati pomoću 6 parametara. Općenita Lorentzova transformacija može se zapisati u eksponencijalnom obliku:

$$\Lambda = \exp[i(\boldsymbol{\theta}' \cdot \mathbf{J} + \boldsymbol{\alpha}' \cdot \mathbf{K})], \quad (\text{A.1})$$

gdje je  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  vektor sastavljen od generatora rotacije, dok  $\mathbf{K} = (K_x, K_y, K_z)$  odgovara generatorima potiska. Lorentzova transformacija može se faktorizirati i na jednostavniji način, kao produkt čiste rotacije i čistog potiska:

$$\Lambda = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}) \cdot \exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{K}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{A.2})$$

Valja napomenuti da se parametri  $\boldsymbol{\theta}$  i  $\boldsymbol{\alpha}$  u (A.2) općenito razlikuju od onih u izrazu (A.1) jer generatori rotacije i potiska ne komutiraju, i dekompozicija eksponencijale nije trivijalna. Alternativno, moguće je napraviti i dekompoziciju u kojoj je poredak rotacije i potiska zamijenjen:  $\Lambda = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{R}'$ , gdje se rotacija i potisak općenito razlikuju od onih u izrazu (A.2).

Radi smanjenja apstrakcije, Lorentzove transformacije korisno je promotriti u matričnoj reprezentaciji. Množenje matrice transformacije s vektor - stupcem tada predstavlja djelovanje transformacije na 4-vektor. Uobičajena reprezentacija genera-

tora rotacije i potiska dana je matricama:

$$J_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$K_x = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Konvencija predznaka odabrana je tako da bude konzistentna s izrazima u odjeljcima 3 i 4. Generatori potiska su simetrične matrice, pa će matrica općenitog Lorentzovog potiska također biti simetrična. Eksplicitni oblik općenite matrice potiska iznosi:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & \epsilon_x & \delta_{xy} & \delta_{xz} \\ -\gamma\beta_y & \delta_{xy} & \epsilon_y & \delta_{yz} \\ -\gamma\beta_z & \delta_{xz} & \delta_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

gdje su uvedene pokrate  $\epsilon_i \equiv 1 + (\gamma - 1)\beta_i^2/\beta^2$ ,  $\delta_{ij} \equiv (\gamma - 1)\beta_i\beta_j/\beta^2$ ,  $\beta = |\boldsymbol{\beta}|$  i  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ . Potisak je u ovoj formi opisan parametrima brzine  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \mathbf{v}/c$ . Ova parametrizacija matematički je ekvivalentna parametrizaciji potiska pomoću apstraktnih parametara  $\boldsymbol{\alpha}$  u izrazu (A.2).

Grupa prostornih rotacija  $SO(3)$  čini podgrupu  $SO^+(3, 1)$ : kompozicija dvaju rotacija daje transformaciju koja također odgovara rotaciji. Za razliku od rotacija, općeniti Lorentzovi potisci ne čine grupu. Kompozicija dvaju općenitih potisaka  $\mathbf{B}_1$  i  $\mathbf{B}_2$  ne rezultira čistim potiskom, već kombinacijom potiska i rotacije:

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{R}(d\Omega) \cdot \mathbf{B}_{12}. \quad (\text{A.6})$$

Rotacija  $\mathbf{R}(d\Omega)$  naziva se *Wignerova rotacija*, i njezina os je okomita na ravninu u kojoj leže brzine koje definiraju potiske. U slučaju kada su brzine potisaka kolinearne, ova rotacija iščezava (kolinearni potisci zaista čine podgrupu  $SO^+(3, 1)$ ). Jedna od posljedica Wignerova rotacija je fenomen *Thomasove precesije*, odnosno zakretanje



osi tijela koje se giba relativističkom brzinom po zakrivljenoj putanji.

Promotrimo relativističko gibanje malog rotirajućeg zvrka po kružnoj putanji. Kružnu putanju neka održava centralni potencijal s izvorom u ishodištu. Primitimo da u ovom sustavu ne postoji dinamički razlog za zakretanje osi zvrka: Djelovanje centralnog potencijala na zvrk takvo je da je ukupni zakretni moment jednak nuli. Thomasova precesija zvrka isključivo je kinematički efekt, analogan fenomenu odklona Foucaultovog njihala. Matematička analogija Thomasove Precesije i Foucaultovog njihala detaljnije je prikazana u članku [14].

Kako bi se pojednostavila analiza precesije osi zvrka u formalizmu STR, povoljno je smjer osi zvrka povezati s veličinom koja se transformira kao 4-vektor. U tu svrhu uvodimo Pauli-Lubanski (P-L) 4-vektor  $S^a$ , koji je po komponentama definiran kao:

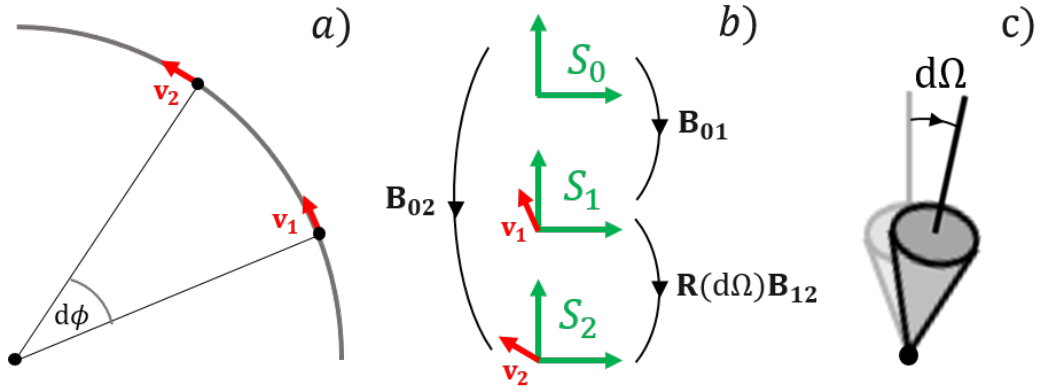
$$S^a = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} M_{\beta\gamma} u_\delta, \quad (\text{A.7})$$

gdje je  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  Levi-Civita tenzor,  $M_{\beta\gamma}$  tenzor angularnog momenta vrtnje zvrka i  $u_\delta$  4-brzina zvrka. U sugibajućem sustavu (sustavu trenutnog mirovanja zvrka), komponente P-L vektora iznose:

$$S^a = (0, \mathbf{L}) \quad (\text{A.8})$$

Odnosno, prostorni dio P-L vektora odgovara 3-vektoru angularnog momenta vrtnje zvrka, dok vremenska komponenta iščezava. Valja naglasiti da prostorne komponente vektora  $S^a$  nemaju interpretaciju 3-vektora angularnog momenta u proizvoljnom sustavu, već samo u sustavu mirovanja zvrka. Ovo svojstvo P-L vektora bit će korisno u daljnjoj analizi.

Kružna putanja zvrka ilustrirana je na slici A.1a. Istaknuta su dva infinitezimalno bliska trenutka  $t_1$  i  $t_2$ , u kojima 3-brzina zvrka respektivno iznosi  $\mathbf{v}_1$  i  $\mathbf{v}_2$ . Definiramo tri inercijska sustava:  $S_0$  predstavlja sustav promatrača (koji miruje u odnosu na centar kružne putanje zvrka), dok  $S_1$  i  $S_2$  predstavljaju inercijske sustave koji su sugibajući zvrku u trenutcima  $t_1$  i  $t_2$  (respektivno). Orijehtaciju prostornih osi sustava  $S_1$  i  $S_2$  biramo tako da koordinatne transformacije između njih i  $S_0$  odgovaraju čistim potiscima  $\mathbf{B}_{01}$  i  $\mathbf{B}_{02}$  (bez rotacije). Valja napomenuti da je ovo samo jedan od mogućih odabira orijentacija. Općenito će ova tri sustava biti međusobno povezana generalnim Lorentzovim transformacijama  $\mathbf{\Lambda}_{01}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{12}$  i  $\mathbf{\Lambda}_{02}$ . No, ove transformacije



Slika A.1: (a) Gibanje zvrka po kružnoj putanji iz perspektive sustava  $S_0$ , s naznačenim položajima u trenucima  $t_1$  i  $t_2$ . Kut  $d\phi$  preuveličan je radi jasnoće. (b) Referentni sustavi  $S_0$ ,  $S_1$  i  $S_2$ , s naznačenim koordinatnim transformacijama između sustava. Naznačene prostorne osi sustava nisu fizikalno vjerno nacrtane (prostorne osi sustava  $S_1$  i  $S_2$  iz perspektive  $S_0$  nisu ortogonalne u euklidskom smislu). (c) Smjer precesije osi zvrka u odnosu na osi trenutno sugibajućeg sustava.

nisu nezavisne, i orijentacijom osi moguće je maksimalno dvije od njih pojednostavniti u čiste potiske. Lorentzove transformacije između ovako definiranih sustava prikazane su na slici A.1b. Pomoću njih možemo povezati komponente općenitog 4-vektora  $X^a$  izvrijednjene u sustavima  $S_1$  i  $S_2$ :

$$X^{(2)} = \mathbf{B}_{02} (\mathbf{B}_{01})^{-1} X^{(1)} = \mathbf{R}(d\Omega)\mathbf{B}_{12}X^{(1)}. \quad (\text{A.9})$$

(Notacija  $X^{(i)}$  označava vektor - stupac koji sadrži komponente 4-vektora  $X^a$  izvrijednjene u sustavu  $S_i$ ).

Promotrimo nadalje evoluciju P-L 4-vektora zvrka između trenutaka  $t_1$  i  $t_2$ . Uvodimo pojednostavljenu notaciju  $S^a(t_1) \equiv S$  i  $S^a(t_2) \equiv S'$ . Iako veza  $S$  i  $S'$  još nije poznata, mora postojati neka Lorentzova transformacija  $\Lambda_F$  takva da vrijedi  $S' = \Lambda_F S$ . Konkretni oblik ove transformacije ovisit će o fizici problema. Na primjer, evolucija sustava bit će drugačija ako postoji moment sile koji dodatno dinamički zakreće vektor  $S^a$ . Važno je ovu "fizikalnu" Lorentzovu transformaciju  $S \leftrightarrow S'$  razlikovati od prije spomenutih koordinatnih transformacija  $S^{(1)} \leftrightarrow S^{(2)}$ . Gledano iz sustava  $S_1$ , komponente  $S$  i  $S'$  povezane su relacijom:

$$S'^{(1)} = \Lambda_F S^{(1)} \quad (\text{A.10})$$

Zato što su trenutci  $t_1$  i  $t_2$  infinitezimalno udaljeni, transformacija  $\Lambda_F$  razlikovat će

se od identitete za infinitezimalnu razliku. Kao i svaku Lorentzovu transformaciju,  $\Lambda_F$  je moguće faktorizirati na potisak  $\mathbf{B}_F$  i rotaciju  $\mathbf{R}_F$ . Primijetimo da bi bilo kakva konačna rotacija  $\mathbf{R}_F$  oko neke osi  $\hat{\boldsymbol{o}}$  implicirala da ta os predstavlja dinamički poseban smjer sustava, što nema smisla kada moment sile na zvrk iščezava (sustav ne bi smio "preferirati" neku os evolucije tijekom infinitezimalne transformacije). Dakle, zaključujemo da rotacija  $\mathbf{R}_F$  u odsutnosti momenta sile nužno egzaktno iščezava;  $\Lambda_F$  odgovara čistom potisku. Ovaj zahtjev uobičajeno se naziva *zahtjev minimalne rotacije*. Korištenjem (A.9) i (A.10) dolazimo do veze:

$$S'^{(2)} = \mathbf{R}(d\Omega)\mathbf{B}_{12}S'^{(1)} = \mathbf{R}(d\Omega)\mathbf{B}_{12}\mathbf{B}_FS^{(1)}. \quad (\text{A.11})$$

$S'^{(2)}$  predstavlja komponentni zapis P-L vektora  $S^a(t_2)$  izvrijednjen u sustavu  $S_2$ , koji je sugibajući sa zvrkom u trenutku  $t_2$ . Iz (A.8) zaključujemo da vremenska komponenta  $S'^{(2)}$  nužno iščezava. Ovaj zahtjev mora vrijediti neovisno o smjeru prostornog dijela  $S^{(1)}$  u izrazu (A.11) ( $S^{(1)}$  također zadovoljava oblik (A.8)). Jedini način na koji ovaj uvjet može biti zadovoljen je ako su  $S'^{(2)}$  i  $S^{(1)}$  povezani čistom rotacijom. Odnosno, potisci u (A.11) moraju se međusobno poništiti:

$$\mathbf{B}_F = (\mathbf{B}_{12})^{-1} \rightarrow S'^{(2)} = \mathbf{R}(d\Omega)S^{(1)}. \quad (\text{A.12})$$

Zaključujemo da se os zvrka u odnosu na osi trenutno sugibajućeg sustava zakrenula za kut  $d\Omega$  koji egzaktno odgovara kutu Wignerove rotacije. Napomenimo da ovaj zaključak vrijedi isključivo kada nema dinamičke evolucije. U slučaju kada rotacija  $\mathbf{B}_F$  ne iščezava, ona će se pojaviti u izrazu (A.11), i konačni kut precesije bit će različit od kuta Wignerove rotacije.

Izraz za Thomasovu frekvenciju (3.7) moguće je dobiti iz direktnog matričnog množenja nekolinearnih potisaka. Ova procedura obavljena je u udžbenicima Jackson [8] i Goldstein [17]. Nadalje, fenomen Thomasove precesije moguće je interpretirati kao *paralelni transport* vektora (*Fermi-Walkerov transport*). Opis Thomasove precesije u formalizmu paralelnog transporta prikazan je u referencama [15] i [16].