Euklidska Ramseyeva teorija

Jurić, Leon

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Leon Jurić

EUKLIDSKA RAMSEYEVA TEORIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nina Kamčev

Zagreb, Studeni 2024

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Euklidska Ramseyeva teorija

U Ramseyevoj teoriji, u centru pažnje je sljedeći tip problema. Neka su dani skup S, familija $\mathcal{F}$ podskupova od S te prirodni broj r. Želimo odrediti postoji li, za svaku particiju $S = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_r$ u r podskupova, skup C_i koji sadrži neki skup $F \in \mathcal{F}$. Navedenu tvrdnju, ako je istinita, označavamo s $S \xrightarrow{\text{r}} \mathcal{F}$, a u suprotnom sa $S \overset{\text{r}}{\not\longrightarrow} \mathcal{F}$.

U Euklidskoj Ramseyevoj teoriji, skup S je obično neki Euklidski prostor $\mathbb{E}^N$, a $\mathcal{F}$ familija skupova sa određenim geometrijskim svojstvima. Najčešći predmet promatranja je $\mathcal{F} = Cong(X)$, koji se sastoji od svih kongruentnih kopija neke konačne konfiguracije točaka $X \subset S$. Drugim riječima, $Cong(X) = \{gX | \ g \in SO(N)\}$ gdje je $SO(N)$ grupa izometrija na $\mathbb{E}^N$.
Kažemo da je skup X Ramsey-ev ako, za svaki r, $\mathbb{E}^N \xrightarrow{\text{r}} Cong(X)$ vrijedi za dovoljno velik N i to označavamo s $\mathbb{E}^N \longrightarrow X$.

Vjerojatno najjednostavniji skup X koji ima smisla promatrati u navedenom smislu je skup dvije točke u prostoru s međusobnom Euklidskom udaljenosti 1. Navedeni skup označavamo s X_2. No, kod skupa X_2, prava težina problema nije u određivanju je li on Ramseyev skup jer je odgovor trivijalno potvrdan.

Primjer 1. X_2 je Ramseyev skup. Naime, za fiksan prirodni broj r, promotrimo pravilan r-simpleks duljine brida 1 kao konačan podskup od $\mathbb{E}^r$. On se sastoji od $r + 1$ vrhova takvih da je između svakog para vrhova Euklidska udaljenost jednaka 1. Prema Dirichletovom principu, svaka particija Euklidskog prostora $\mathbb{E}^r$ u r disjunktnih skupova $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_r$ mora imati skup C_i koji sadrži barem dvije točke našeg pravilnog r-simpleksa. Upravo te dvije točke zajedno čine skup X_2, odnosno element familije $Cong(X_2)$, pa slijedi $\mathbb{E}^N \xrightarrow{\text{r}} X_2$ za $N = r$.

Primjer 2. S druge strane, postoji i jednostavan primjer skupa koji nije Ramseyev, a to je skup 3 kolinearne točke x_1, x_2, x_3 takve da je udaljenost između x_1 i x_2 jednaka 1 te udaljenost između x_2 i x_3 jednaka 1 (Vidi sliku 1.1). U nastavku navedeni skup označavamo s X_3. Pokažimo da se $\mathbb{E}^n$, za proizvoljan n, uvijek može obojiti u 4 boje tako da ne postoji monokromatska kopija skupa X_3. Označimo s e jedinični vektor $x_2 - x_1$, pa je tada $x_1 = x_2 - e$, a $x_3 = x_2 + e$. Iz jednakosti paralelograma proizlazi $\|x_2 - e\|^2 + \|x_2 + e\|^2 = 2\|x_2\|^2 + 2$, gdje 2 dolazi od $2\|e\|^2$. Ako moguće boje označimo brojevima iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$, bojenje možemo definirati funkcijom $f : \mathbb{E}^n \to \{0, 1, 2, 3\}$ točkovno kao

$$f(x) = \left\lfloor \|x\|^2 \right\rfloor \pmod 4.$$

No, ako označimo $a = \|x_2 - e\|^2$, $b = \|x_2 + e\|^2$ te $c = \|x_2\|^2$, vrijedit će $a + b = 2c + 2$. S druge strane, kada bi postojao monokromatski X_3, vrijedilo bi $\lfloor a \rfloor \equiv \lfloor b \rfloor \equiv \lfloor c \rfloor \pmod 4$. Međutim, jednostavno se provjeri da tada ne može vrijediti $a + b = 2c + 2$, dakle ne postoji monokromatska kopija skupa X_3 ako $\mathbb{E}^n$ obojamo u 4 boje na opisani način.

Slika 1.1: skica skupa X_3

1.2 Kromatski broj ravnine

Naš primarni fokus će biti na Ramseyevom tipu problema vezanog uz skup X_2. Radi se o konkretnijem problemu koji je, ispostavlja se, znatno teži od samog određivanja je li X_2 Ramseyev, a problem glasi: Za fiksnu dimenziju Euklidskog prostora N, pronađite najmanji prirodan broj r, takav da vrijedi $\mathbb{E}^N \overset{r}{\not\longrightarrow} X_2$.

Drugi način za iskazati problem je sljedeći: Pronađite najmanji prirodni broj r, takav da, bojanjem svake točke prostora $\mathbb{E}^N$ u jednu od r boja, ne postoje dvije točke iste boje međusobno udaljene za 1 (uz fiksnu dimenziju N). Ovdje je svaka particija skupa $\mathbb{E}^N$ implicitno određena bojanjem gdje svaka boja predstavlja jedan skup C_i iz particije. Zbog toga se broj r iz problema naziva kromatski broj prostora $\mathbb{E}^N$ i označava sa $\mathcal{X}(\mathbb{E}^N)$.

Za $N \geq 2$, točna vrijednost broja $\mathcal{X}(\mathbb{E}^N)$ nije poznata, nego su poznate i pokušavaju se zategnuti donja i gornja međa za taj broj. Tako dosadašnji rezultati daju nejednakost $5 \leq \mathcal{X}(\mathbb{E}^2) \leq 7$ za Euklidsku ravninu. No, kompleksnost problema vidimo već kod trodimenzionalnog Euklidskog prostora, gdje najbolje što dosad znamo da vrijedi jest $6 \leq \mathcal{X}(\mathbb{E}^3) \leq 15$, što je poprilično velik raspon mogućih rješenja. Općenito, za prirodan broj N, donju i gornju među $(1.239 + o(1))^N \leq \mathcal{X}(\mathbb{E}^N) \leq (3 + o(1))^N$ dokazali su redom Raigorodskii[11] te Larman i Rodgers[8].

Najčešća metoda dokazivanja donje međe kromatskog broja Euklidskog prostora je konstrukcija konačnog grafa u prostoru s velikim kromatskim brojem. Vrhovi takvog grafa su proizvoljno izabrane točke, a brid spaja dvije točke ako su udaljene točno za 1. Naime, koristeći princip kompaktnosti, Bruijn i Erdös su u [7] pokazali da postoji konačan podgraf beskonačnog grafa s jednakim kromatskim brojem kao i početan graf. Dakle, dovoljno je promatrati konačne grafove u traženju dobre konstrukcije koja bi unaprijedila donju među kromatskog broja prostora.

U ovom radu, promatrat ćemo rezultate za gornju među kromatskog broja Euklidskih prostora nižih dimenzija (u pravilu manjih od 18). Dokazat ćemo sljedeće teoreme.

Teorem 1.2.1. *Vrijedi* $\mathcal{X}(\mathbb{E}^3) \leq 15$.

Ovaj rezultat su prvi put dokazali Radoičić i Toth u [10], a mi ćemo ga dokazati po uzoru na njihov dokaz te objasniti proces nalaženja konstrukcija koje potvrđuju rezultat uz pomoć računala.

Teorem 1.2.2. *Za* $n < 18$*, vrijedi* $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$.

Drugi teorem je pokazan u [1]. Tamo su koristeći rezultate o rešetkama iz [6] dokazali teorem za $n < 39$. Mi ćemo pokazati određena svojstva pojedinih rešetki te povezati svojstva rešetki koju koristimo u konstrukciji sa kromatskim brojem prostora. Definiciju rešetki ćemo iskazati u idućem poglavlju.

Teorem 1.2.3. *Za* $n \in \{2, 4, 6, 8, 24\}$*, vrijedi* $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 7^{\frac{n}{2}}$.

Posljednji bitan rezultat je također u [1]. Dokazat ćemo leme i rezultate iz navedenog rada te dodatno objasniti detalje konstrukcija rešetki koje koristimo u dokazima.

Poglavlje 2

Trodimenzionalni prostor

2.1 Rešetka i Voronoieva ćelija

U ovom odjeljku dokazujemo teorem 1.2.1, no prvo moramo definirati nekoliko potrebnih alata.

Definicija 2.1.1. ***Poligon*** *je dvodimenzionalan lik u ravnini omeđen s konačno mnogo dužina koje se ne sijeku osim eventualno u krajnjim točkama.*

Iz definicije poligona ćemo rekurzivno definirati općeniti politop u n dimenzija. Poligon je dvodimenzionalni politop, dok je politop dimenzije 1 upravo dužina.

Definicija 2.1.2. ***Politop*** *u n dimenzija ili n-politop definiramo kao n-dimenzionalno tijelo omeđeno s konačno* $(n-1)$*-dimenzionalnih strana koje su* $(n-1)$*-politopi te se međusobno ne sijeku osim eventualno u njihovoj zajedničkoj strani koja je* $(n-2)$*-politop.*

Trodimenzionalni politop još nazivamo i poliedar. Iskazat ćemo definicije konveksnog skupa i konveksne ljuske koje će nam kasnije trebati za opis tijela kojima popločavamo prostor u dokazu.

Definicija 2.1.3. *Za skup* $S \subset \mathbb{E}^n$ *kažemo da je* ***konveksan*** *ako, za svaki par točaka sadržan u skupu* S*, dužina koja spaja te dvije točke u prostoru* $\mathbb{E}^n$ *je također u potpunosti sadržana u skupu* S.

Definicija 2.1.4. *Za skup točaka* S *u prostoru* $\mathbb{E}^n$ *definiramo njegovu* ***konveksnu ljusku*** *kao najmanji konveksan skup točaka koji sadrži* S*, odnosno kao presjek svih konveksnih skupova kojima je* S *podskup.*

Nadalje, moramo definirati pojmove rešetke, podrešetke i Voronoieve ćelije. Njih direktno koristimo u konstrukciji dokaza sva tri teorema navedena u uvodu.

Definicija 2.1.5. *Neka je $M = [b_1, b_2, ..., b_n] \in R^{m\times n}$ realna matrica s linearno nezavisnim stupcima.* ***Rešetku*** *Λ generiranu s M definiramo kao*

$$\Lambda = M\mathbb{Z}^n = \{Mx : x \in \mathbb{Z}^n\} = \{\textstyle\sum_{k=1}^n x_i b_i : x_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Dakle, kao skup svih cjelobrojnih linearnih kombinacija stupaca matrice M.

Kako bi pokazali da je skup točaka rešetka, dovoljno je utvrditi da je svaka točka skupa izolirana u nekoj svojoj dovoljno maloj okolini te da je zbroj ili razlika proizvoljna dva elementa iz skupa također u skupu. Ako je matrica M kvadratna matrica punog ranga, reći ćemo da je i rešetka Λ punog ranga. Iskažimo sada definiciju podrešetke

Definicija 2.1.6. *Neka je Λ neka rešetka definirana na Euklidskom prostoru $\mathbb{E}^m$ i M pripadajuća matrica koja ju generira. Λ' je* ***podrešetka*** *od Λ ako postoji cjelobrojna $n \times n$ matrica C takva da MC generira Λ', odnosno $\Lambda' = MC\mathbb{Z}^n$.*

Primijetimo da Λ formira diskretnu aditivnu podgrupu grupe $\mathbb{E}^m$ s operacijom zbrajanja po komponentama. Tada će i Λ' formirati podgrupu od Λ. *Indeks* od Λ' s obzirom na Λ definiramo kao indeks podgrupe Λ' od Λ i označavamo s $|\Lambda/\Lambda'|$ i on će biti jednak $|det\ C|$.

Definicija 2.1.7. ***Voronoieva ćelija*** *rešetke Λ oko ishodišta u Euklidskom prostoru $\mathbb{E}^n$ je skup*

$$V = V(\Lambda) = \{x \in \mathbb{E}^n : |x| \leq |x - z|, \forall z \in \Lambda\}.$$

Dakle, Voronoieva ćelija oko ishodišta je skup svih točaka koje su bliže (ili jednako udaljene) ishodištu nego bilo kojoj drugoj točki rešetke. Analogno, Voronoieva ćelija oko proizvoljne točke rešetke x će bit skup svih točaka bliže x-u nego ostalim točkama rešetke te je taj skup jednak $V + x$, odnosno skup V translatiran za vektor x. Ako je M matrica punog ranga, onda je Voronoieva ćelija $V = V(\Lambda)$ konveksno centralno - simetrično tijelo te $V + \Lambda(\{V + x : x \in \Lambda\})$ popločava prostor $\mathbb{E}^n$.

2.2 Kromatski broj prostora $\mathbb{E}^3$

Prije prelaska na teorem 1.2.1, primijetimo da je, za dokazati gornju među r kromatskog broja euklidskog prostora $\mathbb{E}^n$, dovoljno pronaći bojenje $\mathbb{E}^n$ u r boja takvo da ne postoje dvije točke međusobne udaljenosti d, za bilo koji $d \in \mathbb{R}^+$. Naime, svako bojenje

$f : \mathbb{E}^n \to \{1, 2, ..., r\}$, za koje ne postoje dvije točke udaljenosti d, možemo jednostavno komponirati s funkcijom $g(x) = \frac{1}{d}x$, $\forall x \in \mathbb{E}^n$ te dobiti bojenje bez dviju točaka iste boje s međusobnom udaljenosti 1.

Ukoliko pronađemo zadovoljavajuće bojenje za neki trodimenzionalni prostor V koji je izometričan prostoru $\mathbb{E}^3$ po euklidskoj udaljenosti, gdje je funkcija $f : V \to \mathbb{E}^3$ jedna izometrija prostora V i $\mathbb{E}^3$ (izometrija je funkcija koja čuva udaljenosti), automatski smo pronašli i dobru konstrukciju za prostor E^3 jer naše bojenje možemo jednostavno komponirati s funkcijom f. Zbog toga, radi jednostavnosti generiranja dobrih konstrukcija, konstrukciju rešetke ćemo definirati u trodimenzionalnom potprostoru od $\mathbb{E}^4$ definiranom s $S_3 = \{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$. Lagano se pokazuje izometrija prostora S_3 s prostorom $\mathbb{E}^3$ (komponiranjem rotacije prostora S_3 u prostor $T_3 = \{(x, y, z, 0) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ te trivijalnom izometrijom s T_3 u $\mathbb{E}^3$).

Definicija 2.2.1. *Rešetku definiranu kao skup* $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0; x_1 \equiv x_2 \equiv ... \equiv x_n \pmod{n}\}$ *nazivamo* ***permutoedarskom rešetkom*** *i označavamo s* A_{n-1}.

Primijetimo da je na ovaj način definirana rešetka A_3 u potpunosti sadržana u gore definiranom prostoru S_3 zbog uvjeta $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$. Također, napomenimo da je gornja definicija u skladu s definicijom 2.1.5 ako znamo konstruirati matricu M koja će generirati rešetku A_{n-1}. Naša matrica za A_3 će biti oblika

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

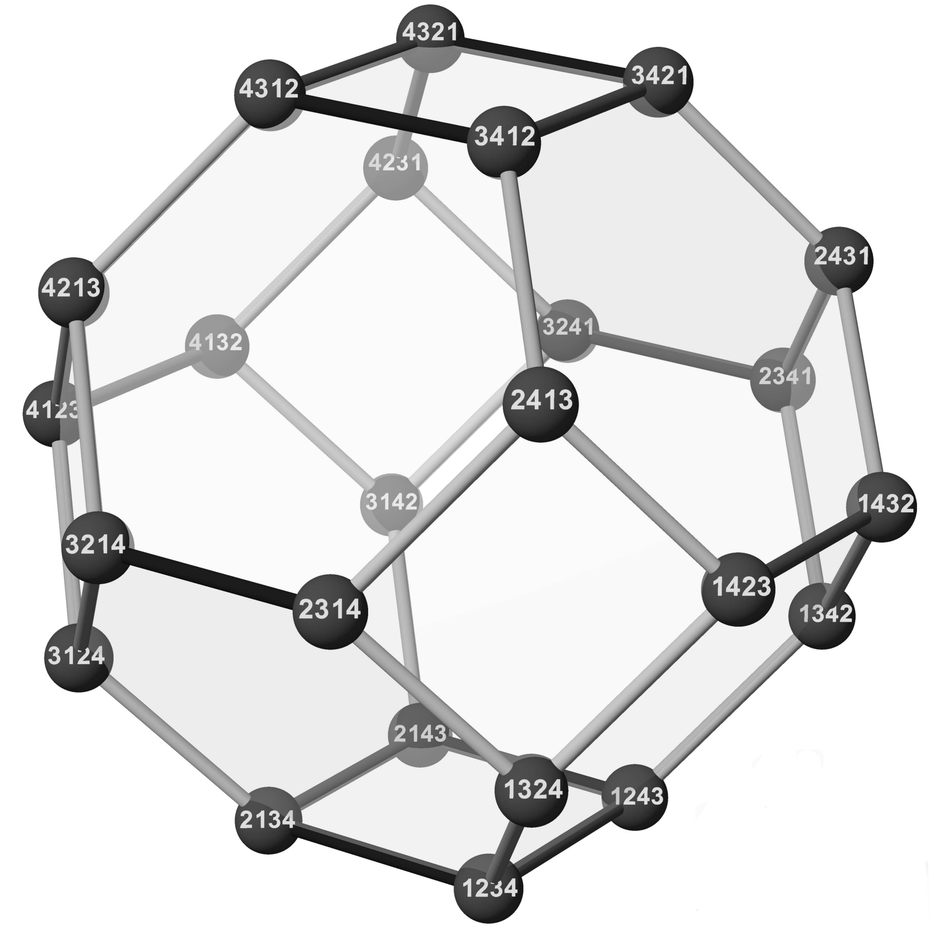
te ćemo kasnije u dokazu označavati njene stupce s $\vec{a} = (-1, 3, -1, -1)$, $\vec{b} = (2, 2, -2, -2)$ i $\vec{c} = (-2, 2, -2, 2)$ redom.

Rešetka A_{n-1} se naziva permutoedarskom jer je Voronoieva ćelija oko svake točke rešetke tijelo koje nazivamo permutoedar. (Preciznije, tijelo kongruentno permutoedru do na skaliranje).

Definicija 2.2.2. ***Permutoedar*** *je* $(n-1)$*-politop u n-dimenzionalnom prostoru* $\mathbb{E}^n$ *definiran kao konveksna ljuska 2.1.4 svih točaka dobivenih permutacijama skupa* $\{1, 2, ..., n\}$.

Budući da su mu vrhovi permutacije kojima je suma komponenata jednaka $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, jasno je da su vrhovi, a zatim i konveksna ljuska vrhova u potpunosti sadržani u $(n-1)$-dimenzionalnom potprostoru od $\mathbb{E}^n$.

Na slici 2.1 gore vidimo skicu tijela koje predstavlja skaliranu i translatiranu Voronoievu ćeliju oko svake točke rešetke. Zbog načina na koji je definirana rešetka A_3,



Slika 2.1: Permutoedar u $\mathbb{E}^4$

skup vrhova Voronoieve ćelije oko ishodišta će biti sve permutacije komponenata vektora $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Bojenje skupa ćemo nazivati *zadovoljavajućim* ako postoji pozitivan realan broj d takav da nijedan par točaka iz skupa s međusobnom udaljenosti d nije obojen u istu boju.

Za gore navedene vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$, definirat ćemo *modularno bojenje* prostora koristeći koeficijente 1, 3 i 5. Označimo najprije točku rešetke dobivenu linearnom kombinacijom $i\overrightarrow{a} + j\overrightarrow{b} + k\overrightarrow{c}$ s $\mathcal{T}_{i,j,k}$ te njoj pripadajuću Voronoievu ćeliju s $V_{i,j,k}$ za neke cijele brojeve i, j i k. Tada bojamo ćeliju $V_{i,j,k}$ u boju $i + 3j + 5k \pmod{15}$ gdje svaki ostatak modulo 15 predstavlja drugu boju. Time smo definirali bojenje prostora S_3 u 15 boja uz iznimku rubova Voronoievih ćelija za koje nije jasno u koju boju od moguće dvije će biti obojeni.

No, umjesto konstrukcije bojanja strana permutoedra za svaku točku rešetke, na kraju ovog poglavlja dokazat ćemo općeniti rezultat iz kojeg će slijediti:

$$\mathcal{X}(S_3) = \mathcal{X}(\bigcup_{i,j,k\in\mathbb{Z}} int(V_{i,j,k})).$$

Dakle, ako postoji zadovoljavajuće bojenje svih unutrašnjosti Voronoievih ćelija rešetke, bez uzimanja u obzir rubova ćelija, tada postoji i zadovoljavajuće bojenje cijelog prostora razapetog s navedenom rešetkom.

U nastavku pokazujemo da je opisano bojenje u 15 boja zadovoljavajuće za skup svih unutrašnjosti Voronoievih ćelija rešetke $(\bigcup_{i,j,k\in\mathbb{Z}} int(V_{i,j,k}))$ za $d = 2\sqrt{5}$.

Propozicija 2.2.3. *Udaljenost bilo koje dvije točke iz unutrašnjosti iste Voronoieve ćelije za rešetku A_3 je manja od $2\sqrt{5}$.*

Dokaz. Voronoieva ćelija svake točke iz A_3 je permutoedar P s centrom u točki rešetke te vrhovima koji su svaki od centra udaljeni za neku permutaciju vektora $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Primijetimo da se svi vrhovi nalaze na trodimenzionalnoj sferi radijusa $\sqrt{5}$, s centrom u točki rešetke, koju ćemo označiti s $\mathcal{B}(\sqrt{5})$. Budući da je sfera konveksan skup koji sadrži vektore permutacije od $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, a permutoedar konveksna ljuska za navedene vektore, vrijedi $P \subset \mathcal{B}(\sqrt{5})$, pa posljedično i $int(P) \subset int(\mathcal{B}(\sqrt{5}))$. Budući da je udaljenost bilo koje dvije točke unutrašnjosti sfere manja od promjera sfere koji je jednak $2\sqrt{5}$, tada i za svake dvije točke iz unutrašnjosti od P vrijedi da im je udaljenost manja od $2\sqrt{5}$. □

Nadalje, kako bismo pokazali da je bojenje zadovoljavajuće, dovoljno je provjeriti, za Voronoievu ćeliju $V_{0,0,0}$ oko točke $\mathcal{T}_{0,0,0} = (0, 0, 0, 0)$, da ne postoji neka druga ćelija $V_{i,j,k}$ iste boje takva da im je najmanja udaljenost točaka iz unutrašnjosti manja od $2\sqrt{5}$ (vidi 2.2.4). Naime, pretpostavimo da postoje Voronoieve ćelije V_{i_1,j_1,k_1} i V_{i_2,j_2,k_2} iste boje takve da im je najmanja udaljenost točaka unutrašnjosti manja od $2\sqrt{5}$. Tada je $i_1 + 3j_1 + 5k_1 \equiv i_2 + 3j_2 + 5k_2 \pmod{15}$ i oduzimanjem dobivamo $(i_2 - i_1) + 3(j_2 - j_1) + 5(k_2 - k_1) \equiv 0 \pmod{15}$. No tada je i Voronoieva ćelija V_{i_3,j_3,k_3}, gdje su $i_3 = i_2 - i_1$, $j_3 = j_2 - j_1$ te $k_3 = k_2 - k_1$, preblizu ćeliji $V_{0,0,0}$ i iste su boje. Odnosno, provjera je dovoljna za ćelije relativno blizu $V_{0,0,0}$ koje su iste boje kao $V_{0,0,0}$.

Propozicija 2.2.4. *Neka je $\mathcal{T}_{i,j,k}$ točka rešetke udaljena od ishodišta $\mathcal{T}_{0,0,0}$ za barem $4\sqrt{5}$. Tada su im i Voronoieve ćelije međusobno udaljene za barem $2\sqrt{5}$.*

Dokaz. Koristeći činjenicu iz dokaza 2.2.3 da je Voronoieva ćelija naše rešetke podskup sfere radijusa $\sqrt{5}$, a sfere oko točaka $\mathcal{T}_{0,0,0}$ i $\mathcal{T}_{i,j,k}$ su međusobno udaljene barem za $2\sqrt{5}$ jer su im centri udaljeni barem za $4\sqrt{5}$, jednostavno dobivamo da su i pripadajuće rešetke udaljene za barem $2\sqrt{5}$. □

Zbog toga, dovoljno je provjeriti Voronoieve ćelije $V_{i,j,k}$ svih točaka rešetke udaljenih od ishodišta za manje od $4\sqrt{5}$ koje zadovoljavaju $i + 3j + 5k \equiv 0 \pmod{15}$ (dakle, iste boje kao $V_{0,0,0}$).

Jedine točke rešetke koje zadovoljavaju oba gornja uvjeta su: $(-7, 1, 1, 5)$, $(-1, -5, 7, -1)$, $(-1, -1, -5, 7)$, $(1, 5, -7, 1)$, $(-5, 7, -1, -1)$, $(1, 1, 5, -7)$,
$(7, -1, -1, -5)$, $(5, -7, 1, 1)$.

Međutim, lako je pokazati da, za svaku Voronoievu ćeliju oko jedne od gore navedenih točaka, možemo između nje i Voronoieve ćelije $V_{0,0,0}$ smjestiti dvije paralelne ravnine (dva dvodimenzionalna potprostora od S_3) međusobne udaljenosti $2\sqrt{5}$ tako da nijedna točka unutrašnjosti ćelija se ne nalazi između ili na jednoj od ravnina.
Dakle, dokazom rezultata o irelevantnosti boja rubova ćelija, dovršili smo dokaz teorema 1.2.1.

Definicija 2.2.5. ***Volumen*** *pravokutnika* $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ *u prostoru* $\mathbb{R}^n$ *definiramo kao umnožak* $i_1 i_2 ... i_n$*, gdje je* i_j *duljina intervala* I_j*, za svaki* $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Gornju definiciju koristimo pri definiranju skupa mjere 0.

Definicija 2.2.6. *Za skup* S *podskup od* $\mathbb{R}^n$ *kažemo da je* ***mjere 0*** *u* $\mathbb{R}^n$ *ako je, za proizvoljan* $\epsilon > 0$*, sadržan u uniji pravokutnika* $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ *u* $\mathbb{R}^n$ *ukupnog volumena manjeg od* ϵ.

Sada možemo iskazati teorem koji zapravo završava dokaz gornje međe za $\mathcal{X}(\mathbb{E}^3)$.

Teorem 2.2.7. *Neka je* A *skup mjere 0 u* $\mathbb{E}^n$*, tada je* $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) = \mathcal{X}(\mathbb{E}^n \setminus A)$.

Dokaz. U suprotnom, pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) > \mathcal{X}(\mathbb{E}^n \setminus A)$. Tada, prema teoremu Bruijna i Erdösa [7], postoji konačan geometrijski graf G s duljinom bridova 1 koji se može ugraditi u prostor $\mathbb{E}^n$, takav da vrijedi $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) = \mathcal{X}(G)$. Fiksiramo neko ugrađivanje vrhova grafa u prostor $\mathbb{E}^n$ i nadalje ga zovemo G. Označimo s c neko zadovoljavajuće bojenje prostora $\mathbb{E}^n \setminus A$ u $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n \setminus A)$ boja. Tada, za svaki $x \in \mathbb{E}^n$, skup točaka $x + G$ (vrhovi od G translatirani za vektor x) sadrži neki element iz skupa A, jer bi inače c bilo zadovoljavajuće bojenje za G, što nije moguće. Posebno, za svaki x koji pripada kugli $\mathcal{B}(1)$ radijusa 1 u prostoru $\mathbb{E}^n$, postoji $v \in G$ takav da je $x+v \in A$, što povlači da vrijedi $x \in (v+\mathcal{B}(1)) \cap A - v$.

Nadalje, iz toga slijedi da je $\mathcal{B}(1) \subset \bigcup_{v \in G} ((v + \mathcal{B}(1)) \cap A) - v$.
Međutim, $\mathcal{B}(1)$ nije skup mjere 0, a skup $\bigcup_{v \in G} ((v + \mathcal{B}(1)) \cap A) - v$ je konačna unija skupova mjere 0, jer je A mjere 0. Time smo došli do kontradikcije jer bi iz gornje relacije slijedilo

da je i $\mathcal{B}(1)$ skup mjere 0. □

Za kraj ovog poglavlja, dokazat ćemo da je unija svih rubova Voronoievih ćelija u općenitom prostoru, koji se može u potpunosti popločati ćelijama rešetke, skup mjere 0.

Propozicija 2.2.8. *Neka je $M \in R^{n\times n}$ matrica punog ranga i $\Lambda = M\mathbb{Z}^n$ rešetka u prostoru $\mathbb{E}^n$. Skup svih rubova Voroievih ćelija oko točki iz Λ je skup mjere 0 u $\mathbb{E}^n$.*

Dokaz. Svaka Voronoieva ćelija je poliedar dimenzije n te sa susjednom ćelijom dijeli zajedničku stranu dimenzije $n-1$. Budući da je svaka strana poliedra ograničena i dimenzije $n-1$, može se pokriti proizvoljno "tankim" slojem n-dimenzionalnih pravokutnika, a kako poliedar ima konačno mnogo strana, cijeli njegov rub se može pokriti pravokutnicima proizvoljno malog volumena. Označimo vektore koji generiraju rešetku s b_1, b_2, ..., b_n i neka $\mathcal{T}_{i_1,\dots,i_n}$ označava točku rešetke $i_1b_1 + i_2b_2 + \dots + i_nb_n$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Budući da se svaki rub Voronoieve ćelije oko točke rešetke može pokriti pravokutnicima proizvoljno malog volumena, za svaku točku rešetke $\mathcal{T}_{i_1,\dots,i_n}$, rub njene rešetke možemo pokriti skupom pravokutnika volumena najviše $\frac{\epsilon}{3^n\cdot 2^{|i_1|}\cdot\ldots\cdot 2^{|i_n|}}$. Tada cijelu uniju rubova Voronoievih ćelija rešetke Λ možemo pokriti pravokutnicima ukupnog volumena najviše

$$\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\sum_{i_2\in\mathbb{Z}}\cdots\sum_{i_n\in\mathbb{Z}}\frac{\epsilon}{3^n\cdot 2^{|i_1|}\cdot\ldots\cdot 2^{|i_n|}} = \frac{\epsilon}{3^n}\cdot\Big(\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{|i_1|}}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\sum_{i_n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2^{|i_n|}}\Big)$$
$$= \frac{\epsilon}{3^n}\cdot\Big(1 + 2\cdot\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^k}\Big)^n = \frac{\epsilon}{3^n}\cdot 3^n = \epsilon.$$

Čime smo dokazali da je unija svih rubova skup mjere 0 jer je ϵ bio proizvoljan. □

Zbog ranije navedene izometrije S_3 s $\mathbb{E}^3$, rezultat se primjenjuje i na rešetku A_3 u potprostoru S_3. Time je dokazana gornja međa $\mathcal{X}(\mathbb{E}^3) \leq 15$.
Napomenimo za kraj, da smo pronašli još 47 načina za modularno bojenje uz korišteni način u dokazu: $i + 3j + 5k \equiv 0 \pmod{15}$. Neke od trojki korištenih koeficijenata su $(4, 5, 6)$, $(8, 9, 12)$, $(14, 6, 10)$. Međutim, lako se pokazuje da su svih 48 bojanja ekvivalentna do na jednu od simetrija permutoedra sa središtem u ishodištu.

Poglavlje 3

Općenito u nižim dimenzijama

3.1 Bojenje podrešetke

Neka je Λ rešetka punog ranga u $\mathbb{E}^n$. **Radius pakiranja** rešetke Λ je najveći realni r takav da je $\Lambda + \mathcal{B}(r)$ disjunktna unija kugli u $\mathbb{E}^n$, tj. kugle $\mathcal{B}(r)$ centrirane u točkama rešetke Λ se mogu "pakirati" u $\mathbb{E}^n$ bez zajedničkih točaka.

Radius pokrivanja Λ je minimum svih realnih brojeva R takvih da je $\Lambda + \mathcal{B}(R) = \mathbb{E}^n$, odnosno kugle $\mathcal{B}(R)$ centrirane u točkama Λ pokrivaju cijeli $\mathbb{E}^n$. Nas će zanimati *omjer pokrivanja i pakiranja* $\frac{R}{r}$ rešetke Λ te kako on utječe na bojenje prostora $\mathbb{E}^n$ particioniranog Voronoievim ćelijama rešetke Λ.

Definicija 3.1.1. ***Shema bojenja podrešetke***. *Neka je Λ rešetka punog ranga u $\mathbb{E}^n$, Λ' podrešetka od Λ, V Voronoieva ćelija od Λ oko ishodišta, a $int(V)$ unutrašnjost V. Bojenje podrešetke $c(\Lambda, \Lambda')$ je bojenje gotovo cijelog $\mathbb{E}^n$ u $|\Lambda/\Lambda'|$ boja pri čemu je svaka točka od $v + int(V)$, gdje je $v \in \Lambda$, obojena prema klasi ekvivalencije v u Λ/Λ'.*

Podsjetimo da $\bigcup_{v\in\Lambda}(v + V)$ popločava $\mathbb{E}^n$, te da je neobojeni skup $\bigcup_{v\in\Lambda}(v + \partial V)$, gdje je ∂V rub od V, Lebesgueove mjere 0 u $\mathbb{E}^n$. Zbog toga, ako definiramo kromatski broj bojenja podrešetke kao

$$\mathcal{X}_s(\mathbb{E}^n, \Lambda, \Lambda', \ell) := \begin{cases} |\Lambda/\Lambda'|, & \text{ako je bojenje zadovoljavajuće za udaljenost } \ell, \\ \infty, & \text{inače,} \end{cases}$$

vrijedit će $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq \mathcal{X}_s(\mathbb{E}^n, \Lambda, \Lambda', \ell)$, za svaki ℓ. Ako su dvije točke obojene u istu boju, reći ćemo da su *monokromatske*. Sada navodimo i dokazujemo ključan teorem za ovo poglavlje.

Teorem 3.1.2. *Neka je Λ rešetka punog ranga u $\mathbb{E}^n$, V Voronoieva ćelija od Λ oko ishodišta i R radijus pokrivanja od Λ. Ako je Λ' podrešetka od Λ takva da za bilo koji $v \in \Lambda' \setminus \{0\}$ vrijedi $dist(V, v + V) \geq 2R$, tada je $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq |\Lambda/\Lambda'|$.*

Dokaz. Treba pokazati da je $\mathcal{X}_s(\mathbb{E}^n, \Lambda, \Lambda', 2R) = |\Lambda/\Lambda'|$. Pretpostavimo suprotno, neka prema bojenju $c(\Lambda, \Lambda')$ postoje monokromatske točke x i y koje su međusobno udaljene $2R$. Za svaki $v \in V$ imamo da je $v + int(V)$ podskup otvorene kugle $v + \mathcal{B}(R)$ promjera $2R$, pa stoga x i y pripadaju $v + int(V)$ i $u + int(V)$ za neke različite $v, u \in \Lambda$. Zatim, prema konstrukciji $c(\Lambda, \Lambda')$, mora vrijediti $v - u \in \Lambda'$. Dolazimo do kontradikcije jer $2R \leq dist(V, v - u + V) = dist(v + V, u + V) < |x - y| = 2R$, gdje je posljednja nejednakost stroga budući da x pripada $v + int(V)$. □

Napomenimo da je modularno bojenje tipa $i + 3j + 5k \equiv 0 \pmod{15}$ korišteno u dokazu 1.2.1 zapravo bojenje podrešetke Λ' generirane s matricom

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

za koju vrijedi $|\Lambda/\Lambda'| = \det C = 15$, čime su zadovoljeni uvjeti teorema 3.1.2. Prije nastavka, napomenimo da su nejednakosti $x \cdot z \leq |z|^2/2$ i $|x| \leq |x - z|$ ekvivalentne, pa Voronoievu ćeliju oko ishodišta možemo iskazati kao $V = \{x \in \mathbb{E}^n : x \cdot z \leq |z|^2/2, \forall z \in \Lambda\}$. Nadalje, koristeći rezultat 3.1.2, iskazujemo i bitnu propoziciju.

Propozicija 3.1.3. *Ako postoji rešetka punog ranga Λ u $\mathbb{E}^n$ s omjerom pokrivanja i pakiranja koji nije veći od 2, tada je $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$.*

Dokaz. Bez smanjena općenitosti, pretpostavimo da je radijus pakiranja Λ jednak 1. Tada je radijus pokrivanja R najviše 2. Neka je V Voronoieva ćelija Λ oko ishodišta. Za svaki $v \in \Lambda \setminus \{0\}$, imamo $2V \subset \{t \in \mathbb{E}^n : t \cdot v/|v| \leq |v|\}$, stoga vrijedi:

$$dist(V, 3v + V) = dist(2V, 3v) \geq 3v \cdot v/|v| - |v| = 2|v| \geq 4 \geq 2R.$$

Sada iz teorema 3.1.2 s $\Lambda' = 3\Lambda$ dobivamo $\chi(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$. □

Zbog propozicije 3.1.3, dovoljno nam je, za prirodan broj n, pronaći rešetku dimenzije n čiji je omjer pokrivanja i pakiranja manji ili jednak 2, pa će iz toga slijediti $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$.

Definicija 3.1.4. *Za proizvoljnu rešetku Λ punog ranga u $\mathbb{E}^n$, definiramo **normu** rešetke Λ kao najkraću udaljenost između dvije različite točke rešetke.*

Primijetimo da je duljina radijusa pakiranja rešetke točno dvostruko manja od norme rešetke. Rekurzivno definiramo **laminirane rešetke** koje su, za relativno male dimenzije n, obično najbolje pronađene rešetke s obzirom na omjer pokrivanja i pakiranja. Počinjemo s $\Lambda_1 = 2\mathbb{Z}$. Općenito, laminiranu rešetku Λ_n dobijemo slaganjem što "gušće" postavljenih redova rešetke Λ_{n-1}, a pri tome čuvajući vrijednost norme koja je jednaka 2. Što "gušće" u ovom slučaju znači da točke rešetke zajedno sa pripadajućim sferama radijusa 1 (radijus pakiranja) zauzimaju što veći volumni udio prostora $\mathbb{E}^n$.

3.2 Omjeri radijusa pokrivanja i pakiranja

Koristeći navedene laminirane rešetke, u radovima [1] i [6] su detaljno pokazane i objašnjene gornje međe za radijuse pokrivanja laminiranih rešetki te dobivena vrijednost omjera pokrivanja i pakiranja rešetki ≤ 2 za dimenzije manje od 39. Mi ćemo pokazati navedeno za dimenzije manje ili jednake 17. Opisat ćemo rešetke koje koristimo za $n \leq 9$ te njihove omjere radijusa pokrivanja i pakiranja. Nakon toga, pomoću propozicije koje ćemo navesti ćemo dobiti rezultat za sve $n \leq 17$.

Propozicija 3.2.1. *Dvodimenzionalna rešetka A_2 (vidi 2.2.1) ima omjer radijusa pokrivanja i pakiranja jednak $\frac{2}{\sqrt{3}}$.*

Dokaz. Oko svake točke rešetke A_2 je dvodimenzionalni permutoedar u trodimenzionalnom prostoru koji ima oblik pravilnog šesterokuta. Radijus pokrivanja će tada biti šesterokutu opisana, a radijus pakiranja upisana kružnica. Budući da se radi o pravilnom šesterokutu, znamo da je traženi omjer radijusa jednak $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547$. □

Budući da je pemutoedar Voronoieva ćelija svake točke rešetke A_{n-1} u n-dimenzionalnom prostoru, radijus pokrivanja će biti upravo udaljenost bilo kojeg vrha permutoedra do njegovog centra zbog načina na koji je permutoedar definiran (kao konveksna ljuska vrhova). Tada i za rešetku A_3 lako dobivamo traženi omjer koji je jednak $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Definicija 3.2.2. *Definiramo rešetku D_4 kao skup $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4 : \sum_{i=1}^{4} x_i \equiv 0 \pmod 2\}$.*

Rešetka D_4 je dobro definirana jer suma i razlika svaka dva elementa rešetke također pripadaju rešetki. Primijetimo da je D_4 zapravo četverodimenzionalna šahovnica. Iskažimo i dokažimo propoziciju koja opisuje njen omjer pokrivanja i pakiranja.

Propozicija 3.2.3. *Rešetka D_4 ima omjer pokrivanja i pakiranja jednak $\sqrt{2}$.*

Dokaz. Budući da su sve točke rešetke cjelobrojne, udaljenost proizvoljne dvije točke mora biti oblika $\sqrt{k}$ za neki prirodni broj k. No, k ne može biti jednak 1, jer to bi značilo da se točke razlikuju u točno jednoj koordinati za točno 1, ali tada im sume koordinata nisu ekvivalentne modulo 2. Dakle, broj k ispod korijena mora biti minimalno 2. Za točke rešetke $(0,0,0,0)$ i $(1,1,0,0)$ se udaljenost $\sqrt{2}$ i postiže te je ona norma rešetke D_4. Tada je radijus pakiranja jednak $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Preostaje pokazati da je radijus pokrivanja jednak 1. Uzmimo proizvoljnu točku $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4$. Promotrimo koordinatu točke x čiji je decimalni dio najbliži vrijednosti $\frac{1}{2}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to koordinata x_1, odnosno da vrijedi $|y_1 - \frac{1}{2}| = min\{|y_1 - \frac{1}{2}|, |y_2 - \frac{1}{2}|, |y_3 - \frac{1}{2}|, |y_4 - \frac{1}{2}|\}$, gdje je $y_i = \{x_i\}$ decimalni dio i-te koordinate. Označimo $min(y_i, 1 - y_i)$ kao z_i za svaki $i \in \{1,2,3,4\}$. Dakle, z_i je upravo razlika koordinate x_i i njoj najbližeg cijelog broja. Sada primijetimo da je točno jedna od točaka $(\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_3 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_4 + \frac{1}{2} \rfloor)$ i $(\lfloor x_1 \rfloor + 1, \lfloor x_2 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_3 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_4 + \frac{1}{2} \rfloor)$ element rešetke D_4 ($\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ zaokružuje x na najbliži cijeli broj). Udaljenost jedne od navedenih točaka do x je jednaka $\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}$, a druge $\sqrt{(1 - z_1)^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}$. Prema definiciji brojeva z_i, imamo nejednakost $z_i \leq \frac{1}{2}$, pa i $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \leq 1$. Nadalje, kako je y_1 najbliži $\frac{1}{2}$, vrijedit će $z_1 \geq z_i$ za $i \in \{2,3,4\}$ (dakle, x_1 je najudaljenija komponenta od svojeg najbližeg cijelog broja). Iz toga, zbog $z_1 \geq 0$ i $z_i \leq \frac{1}{2}$, slijedi

$$\begin{aligned}(1 - z_1)^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 &= 1 - 2z_1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \\ &\leq 1 + z_1(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - 2) \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Dakle, obje od dviju navedenih točaka su udaljene od x za najviše 1, a kako je x bio proizvoljan, radijus pokrivanja je najviše 1. Udaljenost 1 se postiže promatranjem najmanje udaljenosti točke $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ od točaka rešetke, pa smo pokazali da je radijus pokrivanja točno 1 što nam je trebalo. □

Zadovoljavajuću 5-dimenzionalnu rešetku ćemo definirati na analogan način kao u 4 dimenzije, te ćemo za nju dokazati vrijednost omjera jednaku $\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.5811$.

Definicija 3.2.4. *Definiramo rešetku D_5 kao skup* $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{Z}^5 : \sum_{i=1}^{5} x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$.

Komentar zašto je rešetka dobro definirana je ekvivalentan komentaru za D_4, a dokaz sljedeće propozicije će pratiti korake dokaza propozicije 3.2.3.

Propozicija 3.2.5. *Rešetka D_5 ima omjer pokrivanja i pakiranja jednak* $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Dokaz. Kao u dokazu 3.2.3, udaljenost proizvoljne dvije točke rešetke mora biti oblika $\sqrt{k}$ za neki prirodni broj k koji nije 1, odnosno k je minimalno 2. Za točke rešetke

$(0,0,0,0,0)$ i $(1,1,0,0,0)$ se udaljenost $\sqrt{2}$ postiže i one je norma rešetke D_5 te je radijus pakiranja D_5 jednak $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Preostaje pokazati da je radijus pokrivanja jednak $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ponovno uzimamo proizvoljnu točku $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{E}^5$ i bez smanjenja općenitosti pretpostavljamo da za koordinatu x_1 vrijedi $|y_1 - \frac{1}{2}| = min\{|y_1 - \frac{1}{2}|, |y_2 - \frac{1}{2}|, |y_3 - \frac{1}{2}|, |y_4 - \frac{1}{2}|, |y_5 - \frac{1}{2}|\}$, gdje je $y_i = \{x_i\}$ decimalni dio i-te koordinate. Označimo $min(y_i, 1 - y_i)$ kao z_i za svaki $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Kao i u 3.2.3 je točno jedna od točaka $(\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_3 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_4 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_5 + \frac{1}{2} \rfloor)$ i $(\lfloor x_1 \rfloor + 1, \lfloor x_2 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_3 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_4 + \frac{1}{2} \rfloor, \lfloor x_5 + \frac{1}{2} \rfloor)$ element rešetke D_5 te je udaljenost jedne od navedenih točaka do x jednaka $\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2}$, a druge $\sqrt{(1 - z_1)^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2}$. Opet, zbog $z_i \leq \frac{1}{2}$, je $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 \leq \frac{5}{4}$, a dodatno, zbog $z_1 \geq z_i$ za $i \in \{2,3,4,5\}$, vrijedi

$$\begin{aligned}(1 - z_1)^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 &= 1 - 2z_1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 \\ &\leq 1 + z_1(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 - 2) \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Dakle, obje od dviju navedenih točaka su udaljene od x za najviše $\frac{\sqrt{5}}{2}$, a kako je x bio proizvoljan, radijus pokrivanja je najviše $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Udaljenost $\frac{\sqrt{5}}{2}$ se postiže promatranjem najmanje udaljenosti točke $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ od točaka rešetke, pa smo pokazali da je radijus pokrivanja točno $\frac{\sqrt{5}}{2}$, pa onda i traženi omjer točno $\sqrt{\frac{5}{2}}$. □

U nastavku ćemo definirati 8-dimenzionalnu rešetku u prostoru $\mathbb{E}^8$ jer ćemo pomoću nje dobiti rešetke dimenzija 6 i 7 također u prostoru $\mathbb{E}^8$. Navedenu rešetku zvat ćemo E_8, a kasnije ćemo pomoću nje, spomenutim postupkom laminiranja, dobiti rešetku Λ_9 dimenzije 9 sa dobrim omjerom pokrivanja i pakiranja.

Definicija 3.2.6. *Definiramo rešetku E_8 kao skup* $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{Z}^8 : x_1 \equiv x_2 \equiv ... \equiv x_8 \pmod 2, \sum_{i=1}^{8} x_i \equiv 0 \pmod 4\}$.

Navedena definicija dobro definira rešetku jer je zbroj svake dvije točke također element rešetke. U nastavku dokazujemo da je omjer pokrivanja i pakiranja rešetke E_8 jednak $\sqrt{2}$.

Propozicija 3.2.7. *Rešetka E_8 ima omjer pokrivanja i pakiranja jednak $\sqrt{2}$.*

Dokaz. Pokažimo za početak da je radijus pakiranja jednak $\sqrt{2}$. Preciznije želimo dobiti da je najmanja udaljenost proizvoljne dvije točke rešetke $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ i $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$ jednaka $2\sqrt{2}$. Promotrimo prvo najmanju moguću udaljenost između dvije rešetke različitih parnosti komponenata. U tom slučaju je razlika x_i i y_i barem 1 za svaki i između 1 i 8. Pa je udaljenost barem $\sqrt{8 \cdot 1^2} = 2\sqrt{2}$. Ako su pak odabrane dvije točke iste parnosti, ako se razlikuju u samo jednoj komponenti, ta razlika je minimalno 4 zbog $\sum_{i=1}^{8} x_i \equiv \sum_{i=1}^{8} y_i \pmod 4$. S druge strane, ako se razlikuju u barem dvije komponente, svaka razlika je minimalno 2 jer su sve komponente iste parnosti, pa je udaljenost minimalno $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Točke $(0, 0, ..., 0)$ i $(2, 2, 0, ..., 0)$ su obje u rešetki i međusobno udaljene za $2\sqrt{2}$, dakle, norma rešetke jest $2\sqrt{2}$, a radijus pakiranja $\sqrt{2}$. Dokažimo sada da je radijus pokrivanja rešetke jednak 2. Neka je $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ proizvoljna točka iz $\mathbb{E}^8$. Za svaki i, x_i se nalazi između cijelih brojeva $\lfloor x_i \rfloor$ i $\lfloor x_i \rfloor + 1$, od kojih je jedan paran, a drugi neparan. Neka je y_i udaljenost broja x_i do najbližeg parnog, a $1 - y_i$ do najbližeg neparnog broja. Primjećujemo da je $0 \leq y_i \leq 1$ za svaki $i \in \{1, 2, ..., 8\}$. Budući da je $\sum_{i=1}^{8}(y_i + (1 - y_i)) = 8$, možemo pretpostaviti da je $\sum_{i=1}^{8} y_i \leq 4$, u suprotnom samo stavimo da y_i označava udaljenost broja x_i do njemu najbližeg neparnog broja i analogno nastavimo dokaz. Neka su p_1, p_2, ..., p_8 parni brojevi najbliži redom brojevima x_1, x_2, ..., x_8. Razlikujemo dva slučaja.

1° $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ je element rešetke E_8. Tada je udaljenost točke p i x jednaka

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{8} y_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{8} y_i} \leq \sqrt{4} = 2.$$

2° $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$ nije element rešetke E_8. No, svi brojevi p_i su parni, pa jedini uvjet rešetke koji nije zadovoljen jest $\sum_{i=1}^{8} p_i \equiv 0 \pmod 4$. No, zamjenom bilo koje koordinate p_i s $p_i - 2$ ili $p_i + 2$, dobit ćemo točku koja je element rešetke E_8. Uzmimo koordinatu k takvu da je y_k maksimalan među vrijednostima y_1, y_2, ..., y_8. Tada je jedan od parnih brojeva $p_k - 2$ ili $p_k + 2$ udaljen od broja x_k za vrijednost $2 - y_k$. Ako zamijenimo koordinatu p_k s upravo tim parnim brojem, dobiveni vektor će biti element rešetke E_8 i bit će udaljen od x za $\sqrt{\sum_{i=1, i\neq k}^{8}(y_i^2) + (2 - y_k)^2}$. No, primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1, i\neq k}^{8}(y_i^2) + (2 - y_k)^2 &= 4 - 4y_k + \sum_{i=1}^{8} y_i^2 \\ &\leq 4 - 4y_k + y_k(\sum_{i=1}^{8} y_i) \\ &\leq 4 - 4y_k + 4y_k = 4,\end{aligned}$$

redom zbog pretpostavki da je $\sum_{i=1}^{8} y_i \leq 4$ i da je y_k maksimalan. Tada je udaljenost točke x do točke rešetke najviše $\sqrt{4} = 2$, pa je radijus pakiranja najviše 2. Vrijednost 2 se postiže promatranjem udaljenosti točke $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$ od točaka iz E_8. Dakle, traženi omjer je točno

$\sqrt{2}$. □

Napomena. Korištene udaljenosti y_i u prethodnom i nadolazećim dokazima su isključivo pozitivni brojevi (ili jednaki 0). Dakle, kad govorimo o udaljenosti dva realna broja mislimo na apsolutnu vrijednost njihove razlike. Rešetku E_8 ćemo koristiti kako bi opisali rešetke E_7 i E_6 u pripadajućim potprostorima od $\mathbb{E}^8$. Za rešetku E_6 ćemo dokazati točnu vrijednost omjera pokrivanja i pakiranja, a za rešetku E_7 će nam biti dovoljna gornja međa za omjer. U potprostoru $S_7 = \{(x = (x_1, x_2, ..., x_8) \in \mathbb{E}^8 : \sum_{i=1}^{8} x_i = 0\}$ opisujemo rešetku E_7 pomoću naredne definicije.

Definicija 3.2.8. *Definiramo rešetku E_7 kao skup $\{x = (x_1, x_2, ..., x_8) \in E_8 : \sum_{i=1}^{8} x_i = 0\}$.*

Već smo u prethodnom poglavlju objasnili zašto je u redu promatrati, umjesto $\mathbb{E}^n$, neki n-dimenzionalan potprostor prostora $\mathbb{E}^m$ za prirodan broj $m > n$. Dokažimo sada da je gornja međa omjera pokrivanja i pakiranja rešetke E_7 jednaka 2.

Propozicija 3.2.9. *Rešetka E_7 ima omjer pokrivanja i pakiranja manji ili jednak 2.*

Dokaz. Rešetka E_7 je podrešetka rešetke E_8, dakle sve točke koje se nalaze u E_7 se nalaze i u E_8, dakle radijus pakiranja mora biti veći ili jednak radijusu pakiranja rešetke E_8, odnosno barem $\sqrt{2}$. Pokažimo da je radijus pokrivanja rešetke E_7 najviše $2\sqrt{2}$. Neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_8)$ proivoljna točka potprostora S_7. Kao u dokazu 3.2.7 neka su $y_1, y_2, ..., y_8$ redom udaljenosti komponenata $x_1, x_2, ..., x_8$ do najbližeg parnog broja i bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\sum_{i=1}^{8} y_i \leq 4$. Točka $p = (p_1, p_2, ..., p_8)$ sastavljena od redom najbližih parnih brojeva komponentama točke x nije nužno element potprostora S_7. Za početak, ako $p \in S_7$, tada $p \in E_7$, pa je x udaljena od p za najviše $\sqrt{\sum_{i=1}^{8} y_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{8} y_i} \leq 2$. Pretpostavimo da $p \notin S_7$. Tada je suma komponenata točke p paran broj apsolutne vrijednosti manje ili jednake 4 jer je suma razlika $\sum_{i=1}^{8} y_i \leq 4$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je suma komponenata $\sum_{i=1}^{8} p_i$ pozitivan broj te razlikujemo dva slučaja.

1° $\sum_{i=1}^{8} p_i = 2$. Tada postoji indeks k takav da je $p_k > x_k$, pa možemo zamijeniti koordinatu p_k sa $p_k - 2$ te ćemo dobiti element rešetke E_7 koji je od točke x udaljen za najviše $\sqrt{\sum_{i=1,i\neq k}^{8}(y_i^2) + (2-y_k)^2}$. No, zbog pretpostavke $\sum_{i=1}^{8} y_i \leq 4$ vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,i\neq k}^{8}(y_i^2) + (2-y_k)^2 &= 4 - 4y_k + \sum_{i=1}^{8} y_i^2 \\ &\leq 4 + \sum_{i=1}^{8} y_i^2 \\ &\leq 4 + \sum_{i=1}^{8} y_i \leq 8,\end{aligned}$$

pa je udaljenost najviše $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2° $\sum_{i=1}^{8} p_i = 4$. U ovom slučaju mora vrijediti $p_i \geq x_i$ za svaki $i \in \{1, 2, ..., 8\}$. U suprotnom, neka je $p_k < x_k$, za neku komponentu k. Tada bi vrijedilo $\sum_{i=1}^{8} p_i \leq \sum_{i=1,i\neq k}^{8}(x_i + y_i) + x_k - y_k \leq 0 + \sum_{i=1,i\neq k}^{8} y_i - y_k < 4$ zbog $\sum_{i=1}^{8} y_i \leq 4$ i $y_k > 0$, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. Dakle, vrijedi $y_i = p_i - x_i$ za svaki i između 1 i 8. Promotrimo dva najveća broja u skupu $\{y_1, y_2, ..., y_8\}$ te radi jednostavnosti zapisa, pretpostavimo da su to y_1 i y_2 redom. Točka $(p_1 - 2, p_2 - 2, p_3, p_4, ..., p_8)$ će imati sumu komponenata 0 i bit će element rešetke E_7. Njena udaljenost od točke x će biti jednaka $\sqrt{(2-y_1)^2 + (2-y_2)^2 + \sum_{i=3}^{8} y_i^2}$. No, dobivamo nejednakost

$$\begin{aligned}(2-y_1)^2 + (2-y_2)^2 + \sum_{i=3}^{8} y_i^2 &= 8 - 4y_1 - 4y_2 + \sum_{i=1}^{8} y_i^2 \\ &\leq 8 - 4y_1 - 4y_2 + y_1(\sum_{i=1}^{8} y_i) \\ &\leq 8 - 4y_1 - 4y_2 + 4y_1 \leq 8,\end{aligned}$$

čime smo, u oba slučaja, dokazali da je udaljenost najviše $2\sqrt{2}$, dakle traženi omjer je najviše 2. □

Opisat ćemo rešetku E_6^* koja ima omjer radijusa pokrivanja i pakiranja jednak $\sqrt{2}$. No, navedenu tvrdnju nećemo dokazivati, nego se referiramo na rezultate iz [6]. Rešetka E_6 je definirana također u 8-dimenzionalnom Euklidskom prostoru sa svim uvjetima definicije rešetke E_7, uz dodatan uvjet $x_1 = -x_8$, gdje je $x = (x_1, x_2, ..., x_8) \in E_7$. Definirajmo sada pojam dualne rešetke za rešetku L.

Definicija 3.2.10. *Neka je L proizvoljna rešetka s matricom $B = [b_1, b_2, ..., b_n]$ koja ju generira. Definiramo* ***Dualnu rešetku*** *od L kao skup $L^* = \{x \in R^n : x \cdot l \in \mathbb{Z}, \forall l \in L\}$.*

Lako se pokaže da je navedena L^* dobro definirana rešetka. Matrica B^* koja generira dualnu rešetku će imati svojstva

$$\begin{aligned} &1) span(B) = span(B^*) \\ &2) B^T B^* = I, \end{aligned}$$

pa je očito dualna rešetka L^* istog ranga kao i L. Rešetka E_6^* će upravo biti dualna rešetka od E_6 te se može pokazati da je generirana matricom

$$M_{E_6^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Propoziciju 3.2.11 u omjeru pokrivanja i pakiranja rešetke E_6^* navodimo bez dokaza.

Propozicija 3.2.11. *Rešetka E_6^* ima omjer pokrivanja i pakiranja manji ili jednak $\sqrt{2}$.*

Prije prelaska na teorem koji će zaključiti ovo poglavlje, opisat ćemo postupak kreiranja rešetki laminiranjem na konkretnom primjeru konstrukcijom Λ_9 gustim slaganjem redova E_8 u 9-dimenzionalnom Euklidskom prostoru. Započnimo konstrukciju uključivanjem svih točaka oblika $(x, 0)$ gdje je $x \in E_8$ u rešetku Λ_9. Idući "red" želimo postaviti što je bliže moguće početnom redu, a da ne smanjimo normu rešetke koja je jednaka $2\sqrt{2}$ za E_8 (vidi dokaz 3.2.7). U dokazu spomenuta točka $T = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$ postiže najveću moguću udaljenost proizvoljne točke prostora do najbliže točke rešetke E_8. Upravo ćemo točku T iskoristiti za definiranje idućeg retka u Λ_9, naime dodavanjem vektora $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}, 2)$ u rešetku, dobivamo idući red i zapravo cijelu rešetku Λ_9 koja će i dalje imati normu $2\sqrt{2}$, što ćemo i pokazati.

Definicija 3.2.12. *Rešetku Λ_9 definiramo kao uniju $S \cup (S+T)$, gdje je $S = \{(x_1, ..., x_8, 4k) : (x_1, ..., x_8) \in E_8, k \in \mathbb{Z}\}$, a $T = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}, 2)$.*

Primijetimo da je rešetka dobro definirana na taj način, jer je suma dva elementa iz S ponovno u S, suma dva elementa iz $S+T$ je također u S, a suma proizvoljnog elementa iz S i proizvoljnog elementa iz $S+T$ je u skupu $S+T$. Ista tvrdnja vrijedi i za razlike točaka.

Propozicija 3.2.13. *Rešetka Λ_9 ima omjer pokrivanja i pakiranja najviše $\sqrt{\frac{5}{2}}$.*

Dokaz. Za početak, pokažimo da je norma od Λ_9 zaista $2\sqrt{2}$. Skup svih točaka rešetke s istom posljednjom koordinatom ćemo nazivati redom rešetke. Budući da je svaki red rešetke kongruentan rešetki E_8, najmanja udaljenost dvije točke unutar istog reda je $2\sqrt{2}$. Budući da su nesusjedni redovi udaljeni barem za 4, dovoljno je pokazati da je udaljenost dvije točke susjednih redova najmanje $2\sqrt{2}$. Neka je P proizvoljna točka rešetke. Njena projekcija na potprostor susjednog reda je, zbog načina na koji smo definirali rešetku i svojstava rešetke, udaljena od svake točke rešetke susjednog reda za barem 2. Također, P je od svoje projekcije udaljena za točno 2, pa je njena udaljenost od svake točke susjednog reda barem $\sqrt{2^2+2^2}$, odnosno norma je očuvana. Uzmimo proizvoljnu točku $x = (x_1, x_2, ..., x_9)$. Postoji paran broj p takav da je razlika $|p - x_9|$ najviše 1. Neka je x' projekcija točke x na potprostor red rešetke određen s vrijednošću posljednje koordinate p. Budući da se x' razlikuje od x samo u posljednjoj koordinati i to za manje od 1, udaljenost točaka x i x' je najviše 1. Nadalje, x' je u istom 8-dimenzionalnom potprostoru kao i red rešetke određen vrijednošću zadnje koordinate p. Red rešetke jest E_8, pa je udaljenost x' do najbliže točke rešetke najviše 2. Tada je udaljenost točke x do najbliže točke rešetke Λ najviše $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Dakle, omjer pokrivanja i pakiranja je najviše $\sqrt{\frac{5}{2}}$. □

Sada imamo vrijednosti omjera (ili barem gornju među omjera) za rešetke svih dimenzija manjih ili jednakih 9. Neka su Λ_1 i Λ_2 dvije rešetke, redom dimenzija n_1 i n_2, s istim radijusom pakiranja jednakim 1 te radijusima pokrivanja ρ_1 i ρ_2. Primijetimo da jednostavnim konkateniranjem rešetki možemo konstruirati novu rešetku L dimenzije $n_1 + n_2$ tako da vrijedi $(x, y) \in L$ ako i samo ako $x \in \Lambda_1 \wedge y \in \Lambda_2$. Jednostavno je pokazati da će tako konstruirana rešetka imati radijus pakiranja također 1, a radijus pokrivanja jednak $\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}$. Također, napominjemo da je operacija konkatenacije zapravo operacija direktnog produkta grupa Λ_1 i Λ_2. U idućem teoremu ćemo iskoristiti takozvanu $\frac{\pi}{3}$-konkatenaciju koja će nam dati rešetku dimenzije $n_1 + n_2$ s manjim radijusom pokrivanja od jednostavne konkatenacije.

Teorem 3.2.14. *Za $i = 1, 2$ neka je Λ_i rešetka punog ranga u $\mathbb{E}^{n_i}$ s omjerom prekrivanja i pakiranja ρ_i. Ako vrijedi $n_1 \geq n_2$, onda postoji rešetka punog ranga Λ u $\mathbb{E}^{n_1+n_2}$ s omjerom pokrivanja i pakiranja ne većim od*

$$\sqrt{\rho_1^2 + \frac{3}{4}\rho_2^2}.$$

Dokaz. Pišemo $(x, y) \in \mathbb{E}^{n_1+n_2}$ uz $x \in \mathbb{E}^{n_1}$ i $y \in \mathbb{E}^{n_2}$. Definirajmo operaciju podizanja $L : \mathbb{E}^{n_2} \to \mathbb{E}^{n_1}$ kao $L(y) = (y, 0, \ldots, 0)$.

Pretpostavimo da su radijusi pakiranja rešetki Λ_1 i Λ_2 jednaki 1. Neka Λ bude $\frac{\pi}{3}$-konkatenacija rešetki Λ_1 i Λ_2 koju definramo kao

$$\Lambda = \left\{ \left(x + \frac{L(y)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) : x \in \Lambda_1, y \in \Lambda_2 \right\}.$$

Jasno je da je Λ rešetka punog ranga u $\mathbb{E}^{n_1+n_2}$.

Sada ćemo pokazati da je radijus pakiranja Λ jednak 1. Dovoljno je pokazati da bilo koji vektor $v = \left(x + \frac{L(y)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$ iz Λ, različit od nule, ima duljinu barem 2. Imamo

$$|v|^2 = \left| x + \frac{L(y)}{2} \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2} y \right|^2 = |x|^2 + x \cdot L(y) + |y|^2 \geq |x|^2 - |x||y| + |y|^2.$$

Ako je jedan od x ili y nulvektor, tada je jasno $|v|^2 \geq 4$. Ako oba x i y nisu nulvektori, tada $|x| \geq 2$, $|y| \geq 2$, i stoga

$$|v|^2 \geq \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|y|^2 \geq 4.$$

Da bismo procijenili radijus prekrivanja Λ, neka $(\hat{x}, \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y})$ bude proizvoljna točka u $\mathbb{E}^{n_1+n_2}$. Budući da je radijus prekrivanja Λ_2 jednako ρ_2, neka $y \in \Lambda_2$ bude takav da $|\hat{y} - y| \leq \rho_2$. Slično, neka $x \in \Lambda_1$ bude takav da

$$\left| \hat{x} - x - \frac{L(y)}{2} \right| \leq \rho_1.$$

Tada $\left(x + \frac{L(y)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \in \Lambda$ i

$$\left| \left(\hat{x}, \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} \right) - \left(x + \frac{L(y)}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right| \leq \sqrt{\rho_1^2 + \frac{3}{4}\rho_2^2},$$

te je tvrdnja dokazana. □

Za kraj ovog poglavlja, gornji rezultat ćemo primijeniti na rešetke dimenzija $n \leq 9$ koje smo kroz ovo poglavlje opisali i dobiti da u svakoj dimenziji manjoj ili jednakoj 17 postoji rešetka s omjerom pokrivanja i pakiranja najviše 2. S ρ_i označavamo gornju među (ili točnu vrijednost) omjera radijusa pokrivanja i pakiranja rešetke u i-dimenzionalnom prostoru. Za sad imamo $\rho_1 = 1$ (trivijalno), $\rho_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\rho_3 = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $\rho_4 = \sqrt{2}$, $\rho_5 = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $\rho_6 = \sqrt{2}$ (dokaz u [6]), $\rho_7 = 2$, $\rho_8 = \sqrt{2}$ te $\rho_9 = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Koristeći 3.2.14 redom dobivamo rezultate

$$\rho_{10} \leq \sqrt{\rho_8^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_2^2} \leq \sqrt{2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{3} < 2,$$

$$\rho_{11} \leq \sqrt{\rho_8^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_3^2} \leq \sqrt{2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{13}{4}} < 2,$$

$$\rho_{12} \leq \sqrt{\rho_8^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_4^2} \leq \sqrt{2 + \frac{3}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{14}{4}} < 2,$$

$$\rho_{13} \leq \sqrt{\rho_8^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_5^2} \leq \sqrt{2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{31}{8}} < 2,$$

$$\rho_{14} \leq \sqrt{\rho_8^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_6^2} \leq \sqrt{2 + \frac{3}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{14}{4}} < 2,$$

$$\rho_{15} \leq \sqrt{\rho_9^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_6^2} \leq \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot 2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\rho_{16} \leq \sqrt{\rho_8^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_8^2} \leq \sqrt{2 + \frac{3}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{14}{4}} < 2,$$

$$\rho_{17} \leq \sqrt{\rho_9^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho_8^2} \leq \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot 2} = \sqrt{4} = 2.$$

Dakle, za svaki $n \leq 17$, postoji rešetka dimenzije n na koju je propozicija 3.1.3 primijenjiva te slijedi $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$.

U [2] je na jednostavan način dokazano da u svakom konačno-dimenzionalnom prostoru postoji rešetka s omjerom pokrivanja i pakiranja manjim od 3. Tu tvrdnju možemo iskoristiti za dokazati iduću propoziciju.

Propozicija 3.2.15. *Za svaki prirodan broj n, vrijedi* $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 4^n$.

Dokaz. Neka je Λ rešetka s omjerom pokrivanja i pakiranja $\frac{R}{r}$ manjim od 3 u prostoru $\mathbb{E}^n$ za proizvoljnu dimenziju n (postoji prema [2]). Kao u dokazu 3.1.3, za svaki $v \in \Lambda \setminus \{0\}$, imamo $2V \subset \{t \in \mathbb{E}^n : t \cdot v/|v| \leq |v|\}$, pa vrijedi:

$$dist(V, 4v + V) = dist(2V, 4v) \geq 4v \cdot v/|v| - |v| = 3|v| \geq 2R,$$

jer je $R \leq 3r \leq \frac{3}{2}|v|$. Dakle, za podrešetku $\Lambda' = 4\Lambda$ bojenje prema klasama ekvivalencije Λ'/Λ je zadovoljavajuće i vrijedi $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 4^n$. □

Propozicija 3.2.15 općenito daje lošiji rezultat od spomenutog rezultata $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq (3 + o(1))^n$ iz [8], no potencijalno može biti bolji u nižim dimenzijama.

Poglavlje 4

Kompleksne rešetke i Leecheva rešetka

U ovom poglavlju koristimo kompleksne rešetke te prigodne teoreme i propozicije kako bi pokazali jače rezultate za gornju među kromatskog broja pojedinih dimenzija. Prvo ćemo opisati rezultate dobivene samostalnim razmatranjima koje nam daju Gaussove rešetke definirane u nastavku, a kasnije opisujemo rezultate iz [1] dobivene pomoću Eisensteinovih rešetki također definiranih kasnije u poglavlju.

4.1 Gaussove rešetke

Do sada smo razmatrali $\mathbb{Z}$ rešetke u $\mathbb{R}^n$, no ovaj koncept se može generalizirati na bilo koji konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad bilo kojim poljem.

Definicija 4.1.1. *Neka je K polje, neka je V n-dimenzionalni K-vektorski prostor, neka je $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ K-baza za V i neka je R prsten unutar K. Tada je R-rešetka $\mathcal{L}$ u V generirana s B definirana kao:*

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i \,\middle|\, a_i \in R \right\}.$$

Gornju općenitu definiciju ćemo iskoristiti kako bi opisali dvije vrste kompleksnih rešetki koje koristimo za smanjenje gornje međe kromatskog broja pojedinih dimenzija. Započinjemo s definiranjem takozvanih Gaussovih rešetki.

Definicija 4.1.2. *Kompleksni broj oblika $x + yi$ za cijele brojeve x i y nazivamo **Gaussovim cijelim brojem**. Skup Gaussovih cijelih brojeva označavamo s*

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Lako pokazujemo da je skup $\mathbb{Z}[i]$ podprsten od $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Propozicija 4.1.3. *Skup Gaussovih cijelih brojeva,* $\mathbb{Z}[i]$*, podprsten je od* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Dokaz. Budući da $0, 1 \in \mathbb{Z}[i]$, dovoljno je pokazati da je $\mathbb{Z}[i]$ zatvoren pod operacijama zbrajanja i množenja. Razmotrimo:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Kako je $\mathbb{Z}$ zatvoren pod zbrajanjem i množenjem, $\mathbb{Z}[i]$ je također zatvoren. □

Sada, uz dani prsten $\mathbb{Z}[i]$, definiramo Gaussovu rešetku.

Definicija 4.1.4. *Neka je* $\mathcal{G} = \mathbb{Z}[i]$ *skup Gaussovih cijelih brojeva.* ***$\mathcal{G}$-rešetka*** *ili* ***Gaussova rešetka*** *je skup oblika*

$$\{\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}[i]\} \subset \mathbb{C}^n,$$

gdje su $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *neki linearno nezavisni vektori nad* $\mathbb{C}$.

Promotrimo neka dodatna svojstva prstena $\mathbb{Z}[i]$ koja će nam trebati. Naime, lako se provjeri da je $\mathbb{Z}[i]$ komutativna integralna domena s jedinicom. Prisjetimo se da je prsten integralna domena ako je umnožak svaka dva njegova nenul elementa također različit od nula. Ispostavlja se da je $\mathbb{Z}[i]$ također i Euklidska domena.

Definicija 4.1.5. *Neka je* R *komutativna integralna domena s jedinicom. Kažemo da je* R ***Euklidska domena*** *ako postoji norma* $\varphi : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *takva da za sve* $a, b \in R$, $b \neq 0$*, postoje* $q, r \in R$ *takvi da je*

$$a = bq + r \quad \textit{gdje je} \quad \varphi(r) < \varphi(b).$$

Element q nazivamo kvocijent, a r ostatak pri dijeljenju.
Dodatno, želimo pokazati da je $\mathbb{Z}[i]$ Euklidska domena i pronaći pripadajuću normu. Naime, za $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ će red grupe $\mathbb{Z}[i]/\alpha$ biti upravo jednak normi elementa α. Tada vrijedi, uz oznaku $N(\alpha)$ za normu broja α, da je $|\Lambda/\Lambda'| = (N(\alpha))^n$ za $\Lambda' = \alpha\Lambda$ gdje je Λ rešetka kompleksne dimenzije n. Sada iskazujemo bez dokaza propoziciju koja opisuje normu Gaussovih cijelih brojeva.

Propozicija 4.1.6. *Prsten Gaussovih cijelih brojeva,* $\mathbb{Z}[i]$*, je Euklidska domena s normom* $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ *danom s* $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

Dokaz iskazane propozicije i više o Gaussovim cijelim brojevima se može pronaći na web stranici Gaussian integers. Sada prelazimo na inačicu propozicije 3.1.3 primijenjenu na Gaussove rešetke.

Propozicija 4.1.7. *Ako postoji $\mathcal{G}$-rešetka Λ u $\mathbb{C}^n$ s omjerom pokrivanja i pakiranja koji ne prelazi $\sqrt{2}$, onda je $\mathcal{X}(E^{2n}) \leq 8^n$.*

Dokaz. Označimo s R i r redom radijuse pokrivanja i pakiranja rešetke Λ te neka je $\Lambda' = \alpha\Lambda$, gdje je $\alpha = 2 + 2i$. Tada, za proizvoljan vektor rešetke $\mathbf{v} = (a_1 + b_1 i, \cdots, a_n + b_n i)$, vektor $\alpha\mathbf{v} = (2(a_1 - b_1) + 2(a_1 + b_1)i, \cdots, 2(a_n - b_n) + 2(a_n + b_n)i)$ pripada rešetki Λ'. Zbog $(a-b)^2 + (a+b)^2 = 2a^2 + 2b^2$, vektor $\alpha\mathbf{v}$ ima normu na $\mathbb{C}^n$ jednaku $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2} = 2\sqrt{2}|\mathbf{v}|$.
Zbog $\frac{R}{r} \leq \sqrt{2}$ i $r \leq \frac{|\mathbf{v}|}{2}$, vrijedi $R \leq \frac{|\mathbf{v}|}{\sqrt{2}}$, pa je $|\alpha\mathbf{v}| \geq 4R$ za proizvoljan vektor $\mathbf{v}$. Tada su proizvoljna točka Voronoieve ćelije oko ishodišta te proizvoljna točka Voronoieve ćelije oko $\alpha\mathbf{v}$ udaljene barem za $2R$.
Iz toga slijedi da je bojenje prema klasama ekvivalencije Λ/Λ' zadovoljavajuće za udaljenost $2R$.
Norma od α u prstenu $\mathbb{Z}[i]$ je jednaka $2^2 + 2^2 = 8$, pa je $|\Lambda/\Lambda'| = 8^n$ te postoji zadovoljavajuće bojenje $\mathbb{C}^n$, a samim time i $\mathbb{E}^{2n}$ u 8^n boja.□

Dakle, za realne rešetke parne dimenzije $2n$ s omjerom $\frac{R}{r}$ najviše $\sqrt{2}$, dovoljno je pronaći ekvivalentne Gaussove rešetke u kompleksnom prostoru dimenzije n. Za njih će gornja međa kromatskog broja biti smanjena s $3^{2n} = 9^n$ na 8^n. U nastavku opisujemo dvije rešetke na $\mathbb{Z}[i]$ ekvivalentne D_4 (3.2.3) i E_8 (3.2.7) redom.

Propozicija 4.1.8. *Skup $D_4^{\mathcal{G}} = \{(z_1, z_2) : z_1 + z_2 \equiv 0 \pmod{i+1}\}$ je dobro definirana $\mathcal{G}$−rešetka na vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$ ekvivalentna rešetki D_4.*

Dokaz. Za dva vektora $\mathbf{v_1}$ i $\mathbf{v_2}$ iz $D_4^{\mathcal{G}}$ trivijalno vrijedi da su im zbroj i razlika također u $D_4^{\mathcal{G}}$. Nadalje za proizvoljan α iz $Z[i]$ i proizvoljan vektor $\mathbf{v} = (z_1, z_2)$ iz $D_4^{\mathcal{G}}$ vrijedi $\alpha z_1 + \alpha z_2 \equiv \alpha(z_1 + z_2) \equiv 0 \pmod{1+i}$, pa je i $\alpha\mathbf{v}$ element rešetke $D_4^{\mathcal{G}}$. Budući da je uvjet $z_1 + z_2 \equiv 0 \pmod{1+i}$ ekvivalentan uvjetu $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \equiv 0 \pmod 2$ uz oznake $z_1 = x_1 + y_1 i$ te $z_2 = x_2 + y_2 i$, za svaku točku iz $D_4^{\mathcal{G}}$ će u D_4 postojati točka s istim vrijednostima koordinata i obratno, pa su rešetke ekvivalentne. □

Propozicija 4.1.8 nam daje rešetku $D_4^{\mathcal{G}}$ u kompleksnom prostoru s omjerom pokrivanja i pakiranja jednakom $\sqrt{2}$, te prema 4.1.7 vrijedi $\mathcal{X}(\mathbb{E}^4) \leq 64$.

Propozicija 4.1.9. *Skup $E_8^{\mathcal{G}} = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_j \equiv 0 \pmod{1+i}, z_j \equiv z_k \pmod 2$ za $1 \leq j < k \leq 4, \sum_{j=1}^{4} z_j \equiv 0 \pmod{2+2i}\}$ je dobro definirana $\mathcal{G}$−rešetka na vektorskom prostoru $\mathbb{C}^4$ ekvivalentna rešetki E_8.*

Dokaz. Kao i za $D_4^{\mathcal{G}}$, trivijalno vrijedi da su zbroj i razlika dva proizvoljna vektora iz $E_8^{\mathcal{G}}$ također u $E_8^{\mathcal{G}}$. Uzmiajući proizvoljan α iz $\mathbb{Z}[i]$ i proizvoljan $\mathbf{v} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ iz $E_8^{\mathcal{G}}$, poprilično je očito da će komponente vektora $\alpha\mathbf{v}$ zadovoljavati sve gore navedene uvjete pripadnosti rešetki $E_8^{\mathcal{G}}$. Dakle, $E_8^{\mathcal{G}}$ je dobro definirana rešetka na $\mathbb{C}^4$. Lako je i provjeriti da su dani uvjeti ekvivalentni uvjetima u definiciji rešetke 3.2.7 u realnom Euklidskom prostoru. □

Dodatno napomenimo da, matrici $M = X + Yi$ koja generira Gaussovu rešetku u kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$, odgovara realna matrica

$$M_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{bmatrix}$$

koja generira njoj ekvivalentnu rešetku u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{E}^{2n}$.

4.2 Eisensteinove rešetke

U nastavku definiramo drugi tip kompleksnih rešetki zvanih Eisensteinove rešetke nad Eisensteinovim cijelim brojevima. One će nam dati jaču gornju među uz slabiji uvjet omjera pokrivanja i pakiranja za pojedine rešetke.

Definicija 4.2.1. *Kompleksni broj oblika $a + b\omega$ gdje su $a, b \in \mathbb{Z}$, a $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ nazivamo* ***Eisensteinov cijeli broj****. Skup svih Eisensteinovih cijelih brojeva označavamo s*

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Pokazat ćemo da je skup Eisensteinovih cijelih brojeva podprsten prstena $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, a time i sam po sebi prsten.

Propozicija 4.2.2. *Skup Eisensteinovih cijelih brojeva, $\mathbb{Z}[\omega]$, podprsten je od $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.*

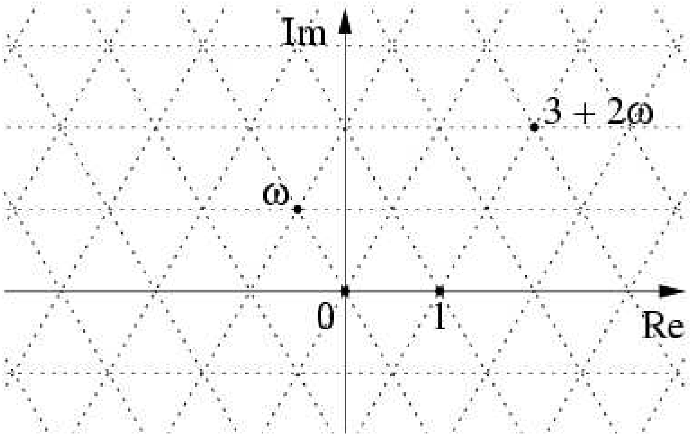
Dokaz. Budući da $0, 1 \in \mathbb{Z}[\omega]$, dovoljno je pokazati da je $\mathbb{Z}[\omega]$ zatvoren pod operacijama zbrajanja i množenja. Razmotrimo:

$$(a + b\omega) + (c + d\omega) = (a + c) + (b + d)\omega$$

$$\begin{aligned}(a + b\omega)(c + d\omega) &= ac + ad\omega + bc\omega + bd\omega^2 \\ &= ac + ad\omega + bc\omega + bd(-1 - \omega) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc - bd)\omega.\end{aligned}$$

Kako je $\mathbb{Z}$ zatvoren pod zbrajanjem i množenjem, $\mathbb{Z}[\omega]$ je također zatvoren. □

U gornjem dokazu smo koristili $\omega^2 = \overline{\omega} = -1 - \omega$, iz čega također vidimo da je $\mathbb{Z}[\omega]$ zatvoren i na konjugiranje.



Slika 4.1: Eisensteinovi cijeli brojevi

Sada smo spremni definirati Eisensteinovu rešetku.

Definicija 4.2.3. *Neka je $\mathcal{E} = \mathbb{Z}[\omega]$ skup Eisensteinovih cijelih brojeva.* ***$\mathcal{E}$-rešetka*** *ili* ***Eisensteinova rešetka*** *je skup oblika*

$$\{\xi_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \xi_n \mathbf{v}_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{Z}[\omega]\} \subset \mathbb{C}^n,$$

gdje su $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ neki linearno nezavisni vektori nad $\mathbb{C}$.

Svaka $\mathcal{E}$-rešetka na prostoru $\mathbb{C}^n$ se može promatrati kao $2n$-dimenzionalna rešetka u prostoru $\mathbb{E}^{2n}$ (vidi 4.1), pa ako pronađemo zadovoljavajuće bojanje $\mathcal{E}$-rešetke u b boja, b je gornja međa za $\mathcal{X}(\mathbb{E}^{2n})$.

Nadalje, bez dokaza (za dokaz vidi [9]) iskazujemo propoziciju koja će opisati normu od $\mathbb{Z}[\omega]$.

Propozicija 4.2.4. *Prsten Eisensteinovih cijelih brojeva, $\mathbb{Z}[\omega]$, je Euklidska domena s normom $N : \mathbb{Z}[\omega] \to \mathbb{N}$ danom s $N(a + b\omega) = a^2 - ab + b^2 = (a + b\omega)\overline{(a + b\omega)}$.*

Sada smo spremni prijeći na glavni teorem ovog poglavlja.

Teorem 4.2.5. *Ako postoji $\mathcal{E}$-rešetka Λ u $\mathbb{C}^n$ s omjerom pokrivanja i pakiranja koji ne prelazi $3/2$, onda je $\mathcal{X}(E^{2n}) \leq 7^n$.*

Dokaz. Neka je $\Lambda' = \alpha\Lambda$, gdje je $\alpha = 3 + \omega$. Neka je V Voronojeva ćelija Λ oko ishodišta. Pretpostavimo da je radijus pakiranja Λ jednak 1 i radijus pokrivanja Λ jednak $R \leq 3/2$. Za bilo koji $v \in \Lambda \setminus \{0\}$, sa skalarnim produktom "$\cdot$" u $\mathbb{C}^n$, imamo

$$\operatorname{dist}(K, \alpha v + K) = \operatorname{dist}(2K, \alpha v) \geq \frac{\alpha v \cdot v}{|v|} - |v| = |v|\left(\frac{\alpha v}{|v|} \cdot \frac{v}{|v|} - 1\right) \geq \frac{3}{2}|v| \geq 3 \geq 2R.$$

Budući da $\alpha = 3 + \omega$ ima normu $3^2 - 3 + 1 = 7$ u $\mathbb{Z}[\omega]$, imamo $|\Lambda/\Lambda'| = 7^n$, i $\chi(E^{2n}) \leq |\Lambda/\Lambda'| = 7^n$ prema teoremu 3.1.2. $\square$

U prošlom poglavlju, pronašli smo nekoliko rešetki parnih dimenzija koje zadovoljavaju gornju među omjera pokrivanja i pakiranja vrijednosti $\frac{3}{2}$. Definirali smo rešetke A_2, D_4, E_6^* te E_8 u Euklidskom prostoru. U [6] su opisane njima ekvivalentne Eisensteinove rešetke i mi ćemo ih ukratko opisati na kraju poglavlja. One će imati iste omjere kao u realnom prostoru i zadovoljavati traženi omjer, pa će se moći na njih primijeniti teorem 1.2.3. No, zanimljivo je da navedeni omjer zadovoljava još jedna rešetka, i to dimenzije 24. U nastavku definiramo takozvanu **Leechevu rešetku** i iskazujemo bitne rezultate vezane za njen radijus pokrivanja i pakiranja.

4.3 Leech rešetka i dodatne dimenzije

Definicija 4.3.1. *Definiramo* ***produženi binarni Golayev kod*** *kao skup svih 24-bitnih binarnih riječi oblika aM, gdje je a neka binarna riječ od 12 bitova, a M matrica oblika*

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0
\end{bmatrix}$$

te je množenje definirano modulo 2. Za 12-bitnu riječ x kažemo da ima Golay-ev kod y ako vrijedi xM = y.

Matrica M je specifična po tome što se, za proizvoljne 12-bitne riječi a i b, riječi aM i bM razlikuju za barem 8 bitova. Još jedno bitno svojstvo koda je da se svake dvije točke razlikuju u $4k$ bita za neki nenegativan cijeli broj k. Kažemo da matrica M *generira* produženi Golayev kod. Navedeni kod je osmišljen u svrhu ispravljanja grešaka u digitalnoj komunikaciji (više o tome na web stranici Golay codes), ali nama će koristiti u definiranju Leecheve rešetke Λ_{24}.

Definicija 4.3.2. *Leecheva rešetka može se eksplicitno konstruirati kao skup vektora oblika* $2^{-\frac{3}{2}}(a_1, a_2, \ldots, a_{24})$ *gdje su* a_i *cijeli brojevi za koje vrijedi*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{24} \equiv 4a_1 \equiv 4a_2 \equiv \cdots \equiv 4a_{24} \pmod 8$$

i za svaki fiksni ostatak modulo 4, 24-bitna binarna riječ, čije jedinice odgovaraju koordinatama i takvima da a_i *pripada toj klasi ostataka, je riječ u produženom binarnom Golayjevom kodu.*

Time smo naveli jednu od 23 konstrukcije Leecheve rešetke opisane u [5]. Dokažimo da je radijus pakiranja Λ_{24} jednak 1.

Propozicija 4.3.3. *Leecheva rešetka* Λ_{24} *definirana u 4.3.2 ima normu 2, odnosno radijus pakiranja 1.*

Dokaz. Pokažimo prvo da su proizvoljne dvije točke rešetke udaljene barem za 2. Neka su $x = 2^{-\frac{3}{2}}(x_1, x_2, \ldots, x_{24})$ i $y = 2^{-\frac{3}{2}}(y_1, y_2, \ldots, y_{24})$ proizvoljne točke rešetke. Razlikujemo dva slučaja.

1°. x_i i y_j su iste parnosti za sve moguće koordinate i i j. Ovdje ponovno imamo dvije opcije. Prva je da svaki Golayev kod koji odgovara točki x, odgovara i točki y, tada je ili $x_i \equiv y_i$ ili $x_i \not\equiv y_i$ modulo 4 za svaki i. Ako je $x_i \not\equiv y_i \pmod 4$, udaljenost je očito veća od 2. Ako je pak $x_i \equiv y_i \pmod 4$ za svaki i, zbog uvjeta $x_1 + x_2 + \cdots + x_{24} \equiv 4x_1 \equiv 4y_1 \equiv y_1 + y_2 + \cdots + y_{24} \pmod 8$ se x i y razlikuju ili u barem dvije koordinate za barem 4 ili u jednoj koordinati za barem 8, pa je opet udaljenost najmanje $2^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} = 2$. Druga opcija je da x i y imaju različite Golayeve kodove. Tada se razlikuju u najmanje 8 koordinata zbog svojstava Golayevog koda, no iste su parnosti, pa je udaljenost minimalno $2^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{8 \cdot 2^2} = 2$.

2°. x_i i y_j različite su parnosti za sve koordinate i i j. Tada je razlika $x_i - y_i$ neparan broj za svaki i od 1 do 24. Dovoljno je dokazati da postoji koordinata u kojoj se komponente od x i y razlikuju barem za 3, jer je tada udaljenost najmanje $2^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{23 \cdot 1 + 3^2} = 2$. Pretpostavimo suprotno, dakle $x_i - y_i = 1$ ili $x_i - y_i = -1$, za svaki i. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da x ima samo neparne, a y samo parne koordinate. Označimo pripadajuće Golayeve kodove na način da je jedinica na i-tom mjestu koda od x

samo ako je $x_i \equiv 3 \pmod 4$ i analogno za kod od y gdje je $y_i \equiv 2 \pmod 4$. Sada će razlika $x_i - y_i$ bit jednaka -1 isključivo na koordinatama gdje se Golayevi kodovi razlikuju, što mora biti na $4k$ mjesta za neki nenegativan cijeli k (očito je $k \leq 6$). Tada je $x_1 + x_2 + \cdots + x_{24} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{24} + 4 \cdot (6 - k) - 4k = y_1 + y_2 + \cdots + y_{24} + 24 - 8k$. No, iz toga je $4x_1 \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_{24} \equiv y_1 + y_2 + \cdots + y_{24} \equiv 4y_1 \pmod 8$ što je nemoguće jer su x_1 i y_1 različite parnosti. Zaključujemo da nisu sve razlike 1 ili -1. □

Sada iskazujemo bez dokaza teorem dokazan u [4], čime dovršavamo pronalazak omjera pokrivanja i pakiranja Leecheve rešetke.

Propozicija 4.3.4. *Leecheva rešetka Λ_{24} definirana u 4.3.2 ima radijus pokrivanja jednak $\sqrt{2}$.*

U nastavku opisujemo potrebne $\mathcal{E}$-rešetke, no nećemo detaljno pokazivati da su ekvivalentne odgovarajućim rešetkama nad prstenom cijelih brojeva. Naime, samo ćemo istaknuti da matrici $M = X + Yi$ koja generira Eisensteinovu rešetku u kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$, odgovara realna matrica

$$M_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} X & Y \\ \frac{1}{2}(X + \sqrt{3}Y) & \frac{1}{2}(Y - \sqrt{3}X) \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Pomoću te informacije, lako se provjeri ekvivalentnost s odgovarajućom rešetkom u euklidskom vektorskom prostoru.

Tvrdnja 1. Rešetka A_2 je ekvivalentna samom prstenu Eisensteinovih brojeva. Dakle, matrica koja generira A_2 u kompleksnom prostoru je 1×1 matrica s brojem 1.
Bojenje kompleksne ravnine prema teoremu 4.2.5 je zapravo poznata *šesterokutna konstrukcija* koja je i dalje najbolje bojenje Euklidske ravnina bez monokromatskih točaka udaljenih za 1 s obzirom na broj boja. Vidi sliku 4.2.

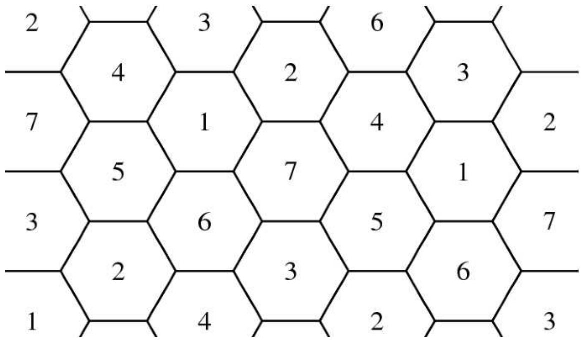
U nastavku ćemo koristiti broj $\theta = \sqrt{-3} = 1 + 2\omega$ radi jednostavnijih zapisa matrica koje generiraju tražene rešetke.

Tvrdnja 2. Rešetka D_4 je ekvivalentna Eisensteinovoj rešetki koju generira matrica

$$M_{D_4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \theta \end{bmatrix}.$$

Tvrdnja 3. Rešetka E_6^* je ekvivalentna Eisensteinovoj rešetki koju generira matrica

$$M_{E_6^*} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$



Slika 4.2: Bojenje pomoću šesterokuta u 7 boja

Prije nastavka, napomenimo da je proizvoljan Eisensteinov cijeli broj ekvivalentan -1, 0 ili 1 modulo θ. Sada definirajmo tetrakod koji će nam koristiti u konstrukciji $E_8^{\mathcal{E}}$.

Definicija 4.3.5. ***Tetrakod*** *$\mathbb{T}$ definiramo kao 2-dimenzionalni potprostor 4-dimenzionalnog vektorskog prostora $\mathbb{F}_3^4$ nad poljem $\mathbb{F}_3$ oblika $\{(a, b, a+b, a-b) : a, b \in \mathbb{F}_3\}$.*

Tvrdnja 4. Eisensteinovu rešetku $E_8^{\mathcal{E}}$ ekvivalentnu E_8 možemo definirati kao

$$E_8^{\mathcal{E}} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \mathbb{Z}[\omega], (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{T}\, uz\, a_i = x_i \pmod{\theta}\}.$$

Definiciju Eisensteinove rešetke ekvivalentne Λ_{24} dobivamo pomoću *ternarnog Golayevog koda* i možemo ju pronaći u 7. poglavlju knjige [6]. Opis i više o ternarnom Golayevom kodu pronalazimo također u knjizi [6] u poglavlju 5 i na stranici wikipedije Ternary Golay code.
Prijelazom s Eisensteinove rešetke na realnu pomoću 4.1, može se pokazati da su sve navedene Eisensteinove rešetke ekvivalentne odgovarajućim rešetkama realnog Euklidskog prostora. Kao što smo već pokazali, sve one imaju omjer pokrivanja i pakiranja manji ili jednak $\sqrt{2}$ i zadovoljavaju uvjete teorema 4.2.5. Time je dobiven traženi rezultat 1.2.3.

Za kraj ovog poglavlja ćemo iskoristiti omjer $\frac{R}{r}$ Leecheve rešetke u kombinaciji s teoremom 3.2.14 kako bi ostvarili gornju među kromatskog broja 3^n za još neke dimenzije n. U prethodnom poglavlju smo pronašli rešetke omjera pokrivanja i pakiranja manjih ili jednakih $\sqrt{\frac{8}{3}}$ za dimenzije od 1 do 6 te 8 i 9. U [6] je također opisana dualna rešetka E_7^* rešetke E_7 s omjerom $\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ (vidi 4. poglavlje).

Propozicija 4.3.6. *Vrijedi $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$ za $25 \leq n \leq 33$ i $n = 48$.*

Dokaz. Koristeći 3.2.14, za svaki $j \in \{1, 2, ..., 9\}$ postoji rešetka u prostoru $\mathbb{E}^{24+j}$ omjera pokrivanja i pakiranja $\rho = \sqrt{\rho_{24}^2 + \frac{3}{4}\rho_j^2} \leq \sqrt{2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}} = 2$, gdje je ρ_{24} omjer $\frac{R}{r}$ Leecheve

rešetke, a ρ_j omjer $\frac{R}{r}$ odgovarajuće rešetke dimenzije j.
Analogno, postupkom iz dokaza 3.2.14 dobivamo rešetku dimenzije 48 omjera pokrivanja i pakiranja jednakog $\rho = \sqrt{\rho_{24}^2 + \frac{3}{4}\rho_{24}^2} \leq \sqrt{\frac{15}{4}} < 2$.
Sada na dobivene rešetke možemo primijeniti propoziciju 3.1.3 čime smo dokazali što želimo. □

Poglavlje 5

Otvoreni problemi

Na početku ovog rada ukratko smo neka pitanja Euklidske Ramseyeve teorije, no glavna tema je bila problem kromatskog broja Euklidskog prostora. Fokusirali smo se na načine konstruiranja zadovoljavajućih bojanja čime je cilj bio smanjiti gornju među kromatskog broja Euklidskog prostora $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n)$. Objasnili smo pojmove rešetke, podrešetke i Voronoieve ćelije te konstruirali različite rešetke u pojedinim dimenzijama i pokazivali njihova svojstva. Povezali smo omjer pokrivanja i pakiranja rešetke s kromatskim brojem prostora u pojedinim dimenzijama, a i općenito te na taj način dobili manje gornje međe u nižim dimenzijama od rezultata za proizvoljnu dimenziju.

Za kraj navodimo neka otvorena pitanja vezana za područje obrađeno u ovom radu i moguće načine poboljšavanja gornjih međa za kromatski broj Euklidskih prostora.

Pitanje 1*. Postoje li rešetka Λ i njena podrešetka Λ' generirana matricom C za neku cjelobrojnu $n \times n$ matricu C, takve da je bojenje shemom podrešetke zadovoljavajuće i time dobivena niža gornja međa od trenutne za prirodni broj n?*

U radu [1] su konstrukcijama matrice C pronađena zadovoljavajuća bojanja u dimenzijama 5, 7 i 9 te su time dobivene gornje međe $\mathcal{X}^5 \leq 140$, $\mathcal{X}^7 \leq 1372$ i $\mathcal{X}^9 \leq 17253$. Mogu li se navedene nejednakosti dodatno poboljšati i možemo li u drugim dimenzijama pronaći odgovarajuće matrice C koje će na taj način poboljšavati gornju među?

Pitanje 2*. Postoje li Eisensteinove rešetke u drugim dimenzijama osim navedenih u 1.2.3 koje zadovoljavaju omjer pokrivanja i pakiranja manji jednak $\frac{3}{2}$ na koje bi mogli primijeniti teorem 4.2.5?*

Za mnoge rešetke se znalo još u 19. stoljeću. S druge strane, Leechevu rešetku je otkrio i objavio John Leech tek 60ih godina 20.stoljeća (neki tvrde da su je otkrili i ranije). Moguće da postoje i konstrukcije rešetki u višim dimenzijama s jako niskim omjerom pokrivanja i pakiranja koje bi nam također bile korisne za gornje međe kromatskih brojeva.

Pitanje 3. *U kojim sve dimenzijama postoje rešetke s omjerom pokrivanja i pakiranja manjim ili jednakim 2?*

U 6. poglavlju posvećenom laminiranim rešetkama u knjizi [6] opisane rešetke nam daju traženi omjer za $n \leq 24$, te uz propoziciju 3.2.14 dobivamo takve rešetke za sve $n \leq 38$ i $n = 48, 49$ što je i utvrđeno u [1]. Može li se navedeno utvrditi za još neke dimenzije ili čak za općeniti n? Naime, u [3], G.J. Butler je pokazao da je asimptotska gornja međa za omjer pokrivanja i pakiranja jednaka $(2 + o(1))$. Može li se taj rezultat dodatno poboljšati?

Pitanje 4. *Možemo li na sličan način iskoristiti neki drugi prsten koji ima svojstva kao Eisensteinovi ili Gaussovi cijeli brojevi pomoću kojeg bi definirali rešetku? (npr. Hurwitzovi kvaternionski cijeli brojevi. Vidi Hurwitz quaternion)*

Pitanje 5. *Postoje li rasporedi točaka koji nisu rešetke, a imaju dobar omjer pokrivanja i pakiranja? Možemo li pronaći zadovoljavajuće bojenje Voronoievih ćelija takvog skupa u manji broj boja od dosadašnjeg najboljeg?*

Napomenimo da se u svakoj dimenziji može pronaći raspored točaka koji nije rešetka, ali ima omjer pokrivanja i pakiranja manji ili jednak 2.

Pitanje 6. *Mogu li se pronaći neke nove tehnike bojenja prostora nevezane uz rešetke i Voronoieve ćelije koje bi davale, općenito ili samo za neke dimenzije, poboljšane rezultate?*

Bibliografija

[1] Andrii Arman, Andriy V. Bondarenko, Andriy Prymak i Danylo Radchenko, *Upper bounds on chromatic number of* $\mathbb{E}^n$ *in low dimensions*, the electronic journal of combinatorics 31 (2022), `https://arxiv.org/abs/2112.13438`.

[2] W. Banaszczyk, *On the lattice packing–covering ratio of finite-dimensional normed spaces*, Colloquium Mathematicum **59** (1990), br. 1, 31–33 (ENG).

[3] G. J. Butler, *Simultaneous Packing and Covering in Euclidean Space†*, Proceedings of the London Mathematical Society **s3-25** (1972), br. 4, 721–735, ISSN 0024-6115, `https://doi.org/10.1112/plms/s3-25.4.721`.

[4] J. H. Conway, *Covering radius of the Leech lattice*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 380 (1982).

[5] J. H. Conway i N. J. A. Sloane, *Twenty-Three Constructions for the Leech Lattice.*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 381, no. 1781 (1982).

[6] J. H. Conway i N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups, 3rd ed.*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] (1999).

[7] de Ng Dick Bruijn i Paul Erdös, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A, mathematical sciences (1951).

[8] D. G. Larman i C. A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika 19 (1972), 1–24.

[9] Simon Löfgren, *The Eisenstein integers and cubic reciprocity*, Magistarska radnja, Upsala University, 2022.

[10] R. Radoičić i G. Toth, *Note on the chromatic number of the space*, Discrete and computational geometry, Algorithms Combin., vol. 25 (2003), 695 – 698.

[11] A. M. Raigorodskii, *On the chromatic number of a space*, Russ. Math. Surv. 55 (2000).

Sažetak

U ovom radu ukratko smo opisali Euklidsku Ramseyevu teoriju i problem kromatskog broja prostora. Preciznije, bavili smo se smanjivanjem gornje međe kromatskog broja Euklidskih prostora nižih dimenzija. Uveli smo pojmove rešetke, podrešetke i Voronoieve ćelije koje smo koristili za postizanje "zadovoljavajućih" bojenja pojedinih prostora koristeći manje boja od dosad poznatih rezultata. Tako smo pokazali da je $\chi(\mathbb{E}^3) \leq 15$ koristeći modularni tip bojenja. Zatim smo povezali svojstvo omjera pokrivanja i pakiranja rešetke s kromatskim brojem pripadajućeg n-dimenzionalnog prostora. Na taj način smo dobili gornju među za kromatski broj $\chi(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$ za $n \leq 17$, a kasnije i za $24 \leq n \leq 33$ te $n = 48$. Poopćili smo definiciju rešetke i podrešetke na kompleksne prostore. Tako smo uz pomoć komplesnih Gaussovih rešetki postigli smanjenje gornje međe za nekoliko različitih parnih dimenzija Euklidskog prostora s 3^n na $\sqrt{8}^n$, a kasnije uz pomoć Eisensteinovih rešetki na $\sqrt{7}^n$. U radu smo iskazali definicije svih korištenih rešetki i pokazali većinu bitnih svojstava koja smo koristili. Za kraj smo napisali otvorenja pitanja i rezultate koje smatramo da bi se mogla dodatno poboljšati.

Summary

This paper provides an overview of Euclidean Ramsey theory and the challenges associated with determining the chromatic number of space. We concentrated on lowering the upper bounds of chromatic numbers for Euclidean spaces of lower dimensions. We introduced and utilized concepts such as lattices, sublattices, and Voronoi cells, which helped us achieve colorings omitting distance 1 of particular spaces using fewer colors than previously documented. Specifically, we established that $\mathcal{X}(\mathbb{E}^3) \leq 15$ by applying modular coloring techniques. Moreover, we established the relationship between the lattice's covering and packing ratios and the chromatic number of the associated n-dimensional space. This approach allowed us to determine that for $n \leq 17$, the chromatic number satisfies $\mathcal{X}(\mathbb{E}^n) \leq 3^n$, with further findings extending this to $24 \leq n \leq 33$ and $n = 48$. Additionally, we expanded the definitions of lattices and sublattices to complex spaces. Through the application of complex Gaussian lattices, we decreased the upper bound from 3^n to $\sqrt{8}^n$ for several even-dimensional Euclidean spaces and further reduced it to $\sqrt{7}^n$ using Eisenstein lattices. The paper outlines definitions for all utilized lattices and highlights the principal properties that were leveraged. We conclude by discussing unresolved questions and potential areas for further research.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu 12 travnja 2000. godine. Osnovnu školu sam pohađao u Osnovnoj školi Malešnica. Nakon toga sam upisao matematički smjer u gimnaziji Lucijana Vranjanina. Tokom pohađanja srednje škole sam bio sudionik državnih natjecanja iz matematike i natjecateljskog programiranja. Godine 2019./20. upisujem inženjerski smjer matematike na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Tokom razdoblja studiranja sam nastavio sa natjecateljskim programiranjem te osvojio prvo mjesto na nekoliko studentskih natjecanja u Zagrebu i u sklopu tročlanog tima izborio plasman na Srednjeeuropsko natjecanje u programiranju (CERC) tri godine zaredom. Također sam osvojio prvu nagradu na međunarodnom matematičkom natjecanju IMC 2021. Krajem ljeta 2022. započinjem studentski rad kao programer u tvrtki Stype CS i upisujem diplomski studij Računarstva i matematike. U svrhu završavanja navedenog studija pišem ovaj diplomski rad.