Slučajne šetnje na beskonačnim grafovima

Bajramović, Lovro

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lovro Bajramović

SLUČAJNE ŠETNJE NA BESKONAČNIM GRAFOVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Prirodno je za slučajne procese s diskretnim vremenom, posebno za slučajne šetnje, prostor stanja te prijelazne vjerojatnosti prikazati kao graf kako bismo mogli dobiti intuiciju te mogli vizualizirati naizgled apstraktnu strukturu. U ovom radu naš će kut gledanja biti promijenjen. Ono što ćemo promatrati i od čega ćemo krenuti jest graf te ćemo istražiti „međudjelovanje" ponašanja slučajne šetnje na grafu (u vidu povratnosti/prolaznosti) i svojstava samog grafa kao temeljne (pozadinske) strukture.

Povijesno gledajući, ovakav pristup teoriji slučajnih šetnji na beskonačnim grafovima potječe iz Pólyina rada *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz*[1] [5] iz 1921. u kojem Pólya pokazuje da je jednostavna slučajna šetnja u dvodimenzionalnoj Euklidskoj rešetki povratna, dok je za više dimenzije prolazna. Ovakva promjena ponašanja između prostora (stanja) i dimenzije bila je inspiracija za mnoge daljnje radove u ovom i srodnim područjima, od kojih je jedan od najznačajnih onaj Nash-Williamsa *Random walk and electric currents in networks* [4]. Naime, u njemu autor prvi spaja povratnost i strukturalna svojstva mrežā, tj. reverzibilnih Markovljevih lanaca.

[1] U slobodnom prijevodu: *O vježbi iz teorije vjerojatnosti o slučajnoj šetnji na cestovnoj mreži.*

Poglavlje 1

Teorija grafova i Markovljevi lanci

U ovom ćemo poglavlju definicijama i osnovnim svojstvima dati uvod u teoriju grafova prema [3] i teoriju Markovljevih lanaca, koji su jednostavni i najvažniji primjeri slučajnih procesa, prema [7]. Na kraju poglavlja uvest ćemo pojam slučajne šetnje na stablu. U radu ćemo, kako bude bilo potrebno, navoditi nove definicije i svojstva. Prije nego što započnemo s formalnim definicijama i razvijanjem teorije potrebne za ovaj rad, razmotrimo klasični, fundamentalni primjer.

Primjer 1.0.1. Slučajne šetnje u $\mathbb{Z}^d$
d-dimenzionalna mreža, $\mathbb{Z}^d$, graf je čiji su vrhovi cjelobrojne točke u d dimenziji i dvije su točke spojene bridom ako su na udaljenosti 1. Šetač nasumično luta po mreži od točke do točke. Na svakom „raskršću", tj. u svakoj točki odabire, s jednakom vjerojatnosti, jednu od mogućih $2d$ susjednih točaka kao svoj idući korak. Postavlja se pitanje hoće li se šetač ikada vratiti u točku iz koje je krenuo. Pretpostavimo da šetač kreće iz ishodišta. Promatrat ćemo kolika je vjerojatnost da se šetač vrati u ishodište u m koraka, $p^{(m)}(0,0)$. To je broj zatvorenih putova duljine m sa startom u 0, podijeljeno s $(2d)^m$. Ako je $m = 2n + 1$ *za* $n \in \mathbb{N}_0$, tada je $p^{(m)}(0,0) = 0$, odnosno nemoguće je vratiti se u početak u neparnom broju koraka. Promatrat ćemo, dakle, $p^{(2n)}(0,0)$. Za manje dimenzije rješenje se može dobiti kombinatorno.
d = 1.
Od $2n$ koraka, šetač mora napraviti n koraka ulijevo te n koraka udesno. Zbog toga je, nakon kraćeg raspisivanja,

$$p^{(2n)}(0,0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = C_1 n^{-1/2}, \tag{1.1}$$

gdje približna jednakost slijedi iz Stirlingove formule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n} = 1. \quad \text{Pisat ćemo} \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n.$$

d = 2.
Kao što smo već rekli, vjerojatnost svakog zatvorenog puta duljine $2n$ koji kreće iz ishodišta jest $(\frac{1}{4})^{2n}$. Broj takvih putova koji imaju $2k$ horizontalnih koraka (dakle, $2(n-k)$ vertikalnih) je

$$\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}.$$

Slijedi

$$p^{(2n)}(0,0) = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!},$$

što je nakon kraćeg raspisivanja te korištenja kombinatornog identiteta $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ jednako

$$\left(\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right)^2.$$

Opet koristeći se Stirlingovom formulom, dobivamo

$$p^{(2n)}(0,0) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n} = C_2 n^{-1}. \tag{1.2}$$

d = 3.
Slično kao za slučaj $d = 2$ zaključujemo da vrijedi

$$p^{(2n)}(0,0) = \frac{1}{6^{2n}} \sum_{j,k=0}^{n} \frac{(2n)!}{j!j!k!k!(n-j-k)!(n-j-k)!} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \sum_{j,k=0}^{n} \left(\frac{1}{3^n}\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}\right)^2.$$

Primijetimo da je

$$\sum_{j,k=0}^{n} \frac{1}{3^n}\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = 1$$

kao vjerojatnost sigurnog događaja u polinomijalnoj shemi s tri ishoda, svaki vjerojatnosti $\frac{1}{3}$. Također, minimum se funkcije $(x,y,z) \mapsto x!y!z!$ za $x,y,z \geq 0$ uz $x+y+z=n$ postiže za $x = y = z = \frac{n}{3}$, za $n = 3l$, za $l \in \mathbf{N}$. Koristeći se prethodnim dvjema tvrdnjama te Stirlingovom formulom dobivamo [7, Primjer 6.13]:

$$p^{(2n)}(0,0) \leq \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\frac{1}{3^n}\frac{n!}{(n/3)!^3} \sim C_3 n^{-3/2}. \tag{1.3}$$

Zaista, za proizvoljnu dimenziju d postoje razni načini za pokazati da je

$$p^{(2n)}(0,0) \sim C_d n^{-d/2}. \tag{1.4}$$

U izvornom radu [5] Pólya dolazi do (1.4) koristeći se karakterističnim funkcijama.

Nakon što razvijemo potrebnu teoriju, za slučajnu je šetnju koja počinje u ishodištu

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(2n)}(0,0)$$

očekivani broj posjeta ishodištu, a za šetnju ćemo reći da je povratna ako je

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) = \infty.$$

U suprotnom ćemo reći da je slučajna šetnja prolazna. Dakle, za $d = 1, 2$ očekujemo da se šetač beskonačno mnogo puta vraća u ishodište. Drugim riječima, šetnja je povratna. Za $d \geq 3$ slučajna je šetnja prolazna te postoji mogućnost da se šetač nikada ne vrati u ishodište. Na ovaj se rezultat matematičar Shizuo Kakutani osvrnuo šaljivim citatom: „Pijan će čovjek pronaći put kući, ali pijana ptica može se zauvijek izgubiti."

1.1 Grafovi i stabla

Definicija 1.1.1. Graf *je uređen par G = (V, E), gdje je V skup* vrhova *(konačan ili prebrojiv), a E skup dvočlanih podskupova od V koje zovemo* bridovi.

Za vrhove $x, y \in V$ kažemo da su *susjedni* i pišemo $x \sim y$ ako je $\{x, y\} \in E$, a u suprotnom pišemo $x \nsim y$.

Napomena 1.1.2. Nekada definiciju grafa proširujemo tako da dopustimo *petlje* (bridove koje spajaju vrh sa samim sobom) i *usmjerene bridove* (bridovi koji imaju orijentaciju od jednog vrha prema drugom; tada je brid uređeni par, a ne 2-podskup).

Napomena 1.1.3. Također, u središtu interesa bit će težinski grafovi (V, E, t), gdje je $t : E \to [0, \infty\rangle$ funkcija koju nazivamo *težinska funkcija*.

Definicija 1.1.4. Šetnja *u grafu je niz* $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$*, gdje su* $x_{i-1} \sim x_i$ *susjedni za svaki* $i = 1, \dots, n$*. Šetnja je zatvorena ako je* $x_0 = x_n$*.* Put *je šetnja u kojoj su svi vrhovi različiti, osim eventualno prvog i zadnjeg. Zatvoreni put zovemo* ciklus.

Definiranjem relacije ekvivalencije na skupu vrhova $V : x \equiv y$, ako postoji put od x do y, dobivamo particiju skupa V na komponente povezanosti inducirane klasama ekvivalencije. Kažemo da je graf *povezan* ako postoji samo jedna komponenta povezanosti, odnosno za svaka dva vrha postoji put od x do y. Na kraju, dana je definicija stabla.

Definicija 1.1.5. Stablo *je povezan graf bez ciklusa.*

Jednostavno se vidi da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.1.6. *Graf je stablo ako i samo ako za svaka dva vrha x i y postoji jedinstveni put od x do y.*

1.2 Markovljevi lanci

Definicija 1.2.1. *Neka je S skup. Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na S.* Slučajan proces *s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = (X_n : n \geq 0)$ slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Za svaki je $n \geq 0$, $X_n : \Omega \to S$ slučajna varijabla.*

Definicija 1.2.2. *Neka je S prebrojiv skup. Slučajni proces $X = (X_n : n \geq 0)$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S je* Markovljev lanac *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{1.5}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Svojstvo u relaciji (1.5) naziva se Markovljevim svojstvom koje nam govori da su (neposredna) budućnost i prošlost uvjetno nezavisne uz danu sadašnjost.

Nas će zanimati samo *homogeni Markovljevi lanci*. To su oni za koje desna strana u (1.5) *ne ovisi o n*. Distribucija na S je vektor $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ takav da je $\lambda_i \geq 0$, za svaki $i \in S$ te vrijedi $\sum_{i \in S} \lambda_i = 1$.

Definicija 1.2.3. *Matrica $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ naziva se* stohastičkom *matricom ako je $p_{ij} \geq 0$ za svaki $i, j \in S$ te*

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad \textit{za svaki } i \in S.$$

Napomena 1.2.4. Ako je skup stanja S beskonačan skup, tada će P biti beskonačna matrica.

Definicija 1.2.5. *Neka je $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ distribucija na S te neka je $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica. Slučajni proces $X = (X_n)_{n \geq 0}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s prostorom stanja S je homogen (λ, P)-Markovljev lanac s početnom distribucijom λ i prijelaznom matricom P ako vrijedi*

(i) $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$ *za sve* $i \in S$

(ii)

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij} \tag{1.6}$$

za svaki $n \geq 0$ i za sve $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$.

Napomena 1.2.6. Iako nije odmah jasno da za svaki (λ, P)-Markovljev lanac vrijedi (1.5), koristeći se sljedećim teoremom to se lako pokazuje.

Teorem 1.2.7. *Neka je X (λ, P)-Markovljev lanac. Tada za sve $n \geq 0$ i za sva stanja $i_0, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}. \tag{1.7}$$

Obratno, pretpostavimo da je $X = (X_n)_{n \geq 0}$ slučajni proces koji zadovoljava (1.7)*, gdje je λ neka distribucija na S, a P neka stohastička matrica na S. Tada je X (λ, P)-Markovljev lanac.*

U slučaju da za neki $i \in S$ vrijedi $\mathbb{P}(X_0 = i) > 0$ možemo definirati uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_i(A) := \mathbb{P}(A | X_0 = i)$, $A \in \mathcal{F}$. Očekivanje vezano uz vjerojatnost $\mathbb{P}_i$ označavat ćemo s $\mathbb{E}_i$. Od posebne važnosti bit će nam distribucija koncentrirana u nekom stanju $i \in S$ (tako da $\mathbb{P}(X_0 = i) = 1$). Označavamo je s $\delta^i = (\delta_{ij} : j \in S)$.

Teorem 1.2.8. *Neka je $X = (X_n)_{n \geq 0}$ $(\lambda,\ P)$-Markovljev lanac na S. Tada je uvjetno na $X_m = i$ slučajni proces $X = (X_{m+n})_{n \geq 0}$ $(\delta^i,\ P)$-Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_m$.*

Koristeći se teoremom 1.2.7, dobije se formula koja govori da ako Markovljev lanac kreće iz stanja *i*, tada je vjerojatnost da u *n* koraka bude u stanju *j* jednaka *(i,j)*-tom elementu *n-te* potencije prijelazne matrice *P*

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j). \tag{1.8}$$

Nulta potencija matrice P jednaka je identiteti na S, $P^0 = I$, dok vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)}$ nazivamo *n-koračne* prijelazne vjerojatnosti. Bit će nam od koristi rezultat poznat pod nazivom *Chapman-Kolmogorovljeva jednakost:*

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}. \tag{1.9}$$

Povratnost i prolaznost

Kako bismo bolje razumjeli razvoj Markovljeva lanca, važno je znati putove u prostoru stanja, odnosno do kojih sve stanja možemo doći iz nekog zadanog stanja.

Za $j \in S$ prvo vrijeme pogađanja skupa $\{j\}$ jest

$$s^j = \min\{n \geq 0 : X_n = j\}, \quad \text{uz} \quad \min \emptyset = \infty. \tag{1.10}$$

Definicija 1.2.9. *Za stanja $i, j \in S$ kažemo da je j* dostižno *iz i, u oznaci $i \longrightarrow j$, ako*

$$p_{ij}^{(n)} > 0$$

za neki $n \geq 0$.

Nije teško pokazati da za $i, j \in S, i \longrightarrow j$ ako i samo ako $\mathbb{P}_i(s^j < \infty) > 0$. Za detalje pogledati [7, Propozicija 3.2]. Ako definiramo relaciju komuniciranja $i \longleftrightarrow j$, ako $i \longrightarrow j$ te $j \longrightarrow i$, nije teško pokazati da je to relacija ekvivalencije na $S \times S$. Relacija komuniciranja inducira particiju prostora stanja na klase komuniciranja.

Jedna od osnovnih pretpostavki u ovom radu bit će *ireducibilnost*.

Definicija 1.2.10. *Markovljev lanac $(X_n)_{n\geq 0}$* ireducibilan *je ako za sve $i, j \in S$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $p_{ij}^{(n)} > 0$, odnosno postoji samo jedna klasa komuniciranja.*

Napomena 1.2.11. Iz definicija povezanosti i ireducibilnosti vidimo da će za Markovljev lanac na grafu vrijediti da je povezanost grafa ekvivalentna ireducibilnosti.

Za $j \in S$ prvo vrijeme povratka u $\{j\}$ jest

$$t^j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}, \quad \text{uz} \quad \min \emptyset = \infty. \tag{1.11}$$

Usporedimo li definicije (1.10) i (1.11), može se uočiti da je $s^j \neq t^j$ ako i samo ako je $X_0 = j$. Vremena s^j i t^j bit će nam od važnosti, a spadaju u tzv. *vremena zaustavljanja*.

Definicija 1.2.12. *Slučajna varijabla $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ zove se* vrijeme zaustavljanja *za slučajni proces $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ako je za sve $n \geq 0$*

$$\{T \leq n\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

ili ekvivalentno

$$\{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n).$$

Zbog

$$\{s^j = n\} = \{X_0 \neq j, X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n),$$

$$\{t^j = n\} = \{X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\} \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

slijedi da su s^j i t^j vremena zaustavljanja.

Za vrijeme zaustavljanja $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ definiramo slučajnu varijablu X_T formulom

$$X_T(\omega) := X_n(\omega), \quad \text{ako je} \quad T(\omega) = n.$$

X_T definirana je samo na događaju $\{T < \infty\}$.

Sljedeći važan teorem, koji se često naziva i *jako Markovljevo svojstvo*, analogon teorema 1.2.8 govori nam da Markovljevo svojstvo vrijedi i za neka slučajna vremena, upravo za *vremena zaustavljanja*.

Teorem 1.2.13. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ (λ, P)-Markovljev lanac na S te neka je T vrijeme zaustavljanja. Tada je uvjetno na $\{X_T = i, T < \infty\}$ slučajni proces $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ (δ^i, P)-Markovljev lanac nezavisan od slučajnih varijabli $X_0, X_1, \ldots, X_T$.*

Za prijelazne vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(X_n = j)$ i vremena $s^j = \min\{n \geq 0 : X_n = j\}$, $t^j = \min\{n \geq 1 : X_n = j\}$ definiramo redove potencija:

$$G_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n, \tag{1.12}$$

$$F_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n, \quad \text{gdje je } f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(s^j = n), \tag{1.13}$$

$$U_{ii}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(t^i = n) z^n. \tag{1.14}$$

Od koristi će nam biti sljedeća lema.

Lema 1.2.14. *Vrijede sljedeće jednakosti:*

(a)
$$G_{ii}(z) = \frac{1}{1 - U_{ii}(z)},$$

(b)
$$G_{ij}(z) = F_{ij}(z) G_{jj}(z),$$

(c)
$$U_{ii}(z) = \sum_{j\in S} p_{ij} z F_{ji}(z),$$

(d)
$$F_{ij}(z) = \sum_{k\in S} p_{ik} z F_{kj}(z).$$

Dokaz. (a) Ako je $X_n = i$, tada je $t^i = k$ za neki $k \leq n$. Zato je

$$\begin{aligned}
p_{ii}^{(n)} &= \mathbb{P}_i(X_n = i) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_i(X_n = i, t^i = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_i(t^i = k, X_{t^i+n-k} = i) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_i(t^i = k)\mathbb{P}_i(X_{n-k} = i) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_i(t^i = k) p_{ii}^{(n-k)},
\end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili jako Markovljevo svojstvo (teorem 1.2.13) uz $p_{ii}^{(0)} = 1$ te $\mathbb{P}_i(t^i = 0) = 0$. Za detalje pogledati [7]. Tvrdnja leme slijedi nakon računanja

$$\begin{aligned}
G_{ii}(z) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(t^i = k) p_{ii}^{(n-k)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_i(t^i = k) p_{ii}^{(n-k)} z^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} z^{n-k} \right) \mathbb{P}_i(t^i = k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} G_{ii}(z) \mathbb{P}_i(t^i = k) z^k = G_{ii}(z) U_{ii}(z),
\end{aligned}$$

gdje smo u trećoj jednakosti iskoristili $\mathbb{P}_i(t^i = 0) = 0$, a četvrta jednakost slijedi zamjenom poretka sumacije. Tvrdnja pod (b) dokazuje se analogno kao (a) uvjetovanjem uzimajući u obzir s^j.

(c) Zbog $\mathbb{P}_i(t^i = 0) = 0$ slijedi $U_{ii}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(t^i = n) z^n$. Za n fiksan je zbog Markovljeva svojstva

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(t^i = n) &= \sum_{j \in S} \mathbb{P}_i(t^i = n | \, X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_1 = j) = [\text{teorem } 1.2.8] \\
&= \sum_{j \in S} \mathbb{P}_j(t^i = n - 1) p_{ij} = \sum_{j \in S} \mathbb{P}_j(s^i = n - 1) p_{ij}.
\end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{aligned}
U_{ii}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(t^i = n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in S} \mathbb{P}_j(s^i = n - 1) p_{ij} \right) z^n = \sum_{j \in S} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_j(s^i = n - 1) p_{ij} z^n \\
&= \sum_{j \in S} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ji}^{(n-1)} z^n = \sum_{j \in S} p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} f_{ji}^{(m)} z^{m+1} = \sum_{j \in S} p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} z f_{ji}^{(m)} z^m = \sum_{j \in S} p_{ij} z F_{ji}(z).
\end{aligned}$$

Tvrdnja u (d) dokazuje se analogno kao (c). □

Definirajmo *broj posjeta* stanju $j \in S$

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}}. \tag{1.15}$$

Slijedi

$$\mathbb{E}_i N_j = \mathbb{E}_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_i 1_{\{X_n = j\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Druga jednakost slijedi iz teorema o monotonoj konvergenciji.

Pisat ćemo G_{ij} za $G_{ij}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ što je očekivani broj posjeta stanju j uz početno stanje i. Također, F_{ij} za $F_{ij}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(t^j = n) = \mathbb{P}_i(t^j < \infty)$, što je vjerojatnost dolaska u j ako krećemo iz i te $U_{ii} = U_{ii}(1) = \mathbb{P}_i(t^i < \infty)$, što je vjerojatnost povratka u stanje i.

Definicija 1.2.15. *Za ireducibilan Markovljev lanac $(X_n)_{n\geq 0}$ sa skupom stanja S kažemo da je* povratan *ako je $G_{ij} = \infty$ za neke (ekvivalentno sve) $i, j \in S$ ili ekvivalentno $U_{ii} = 1$ za neki (ekvivalentno svaki) $i \in S$. U suprotnom kažemo da je Markovljev lanac* prolazan.

Povratan je Markovljev lanac *pozitivno povratan* ako $\mathbb{E}_i[t^i] < \infty$ te *nul-povratan* ako $\mathbb{E}_i[t^i] = \infty$. Koristeći se ireducibilnošću i Chapman-Kolmogorovljevom jednakošću (1.9), pokazujemo da konvergencija reda $G_{xy}(z)$ za realni broj z ne ovisi o x, y.

Lema 1.2.16. *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilan Markovljev lanac s prostorom stanja S te neka je $G_{xy}(z)$ definiran kao u (1.12). Za realni broj $z > 0$, red $G_{xy}(z)$ ili konvergira ili divergira istovremeno za sve $x, y \in S$.*

Dokaz. Za proizvoljne $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ po ireducibilnosti postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $p_{x_1 x_2}^{(k)} > 0$ i $p_{y_1 y_2}^{(l)} > 0$. Zbog (1.9) vrijedi

$$p_{x_1 y_1}^{(k+n+l)} \geq p_{x_1 x_2}^{(k)} p_{x_2 y_2}^{(n)} p_{y_2 y_1}^{(l)}$$

te za $z > 0$

$$G_{x_1 y_1}(z) \geq p_{x_1 x_2}^{(k)} p_{y_2 y_1}^{(l)} z^{k+l} G_{x_2 y_2}(z),$$

iz čega zbog proizvoljnosti x_1, x_2, y_1, y_2 slijedi tvrdnja. □

Za posljedicu svi $G_{xy}(z)$ gdje je $x, y \in S$ imaju isti radijus konvergencije

$$r(P) = \frac{1}{\rho(P)} \quad \text{uz} \quad \rho(P) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_{xy}^{(n)}} \in \langle 0, 1].$$

Broj $\rho(P)$ često se naziva *spektralni radijus* matrice prijelaza P. Ako je $\rho(P) < 1$ lanac je prolazan. Obrat ne vrijedi.

1.3 Slučajna šetnja na grafu

Prisjetimo se kratko definicije grafa kao konačnog ili prebrojivog skupa vrhova V sa simetričnom relacijom susjedstva te puta od x do y kao niza $\pi = [x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = y]$ gdje su $x_{i-1} \sim x_i$ za svaki $i = 1, \dots, n$ te svi x_i različiti osim eventualno prvog i zadnjeg. Broj $n \geq 0$ duljina je puta. U ovom će radu uvijek biti pretpostavljeno da su grafovi *beskonačni* i *povezani*. Iz toga slijedi da na V postoji cjelobrojna *metrika* $d(x, y)$ – minimum duljina svih putova između x i y. Za put se kaže da je *geodetski* ako mu je duljina upravo $d(x, y)$. *Stupanj* $deg(x)$ vrha x broj je susjeda. Ako svaki vrh ima isti stupanj, kaže se da je graf *regularan*, odnosno *M-regularan* pod uvjetom da svaki vrh ima stupanj M. Ovdje će, uz nekoliko iznimki, grafovi biti *lokalno konačni*, što znači da svaki vrh ima konačan stupanj.

Jednostavna slučajna šetnja na lokalno konačnom grafu G Markovljev je lanac s prostorom stanja V i prijelaznim vjerojatnostima:

$$p_{xy} = \begin{cases} 1/deg(x), & \text{ako} \quad x \sim y \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za graf se kaže da je povratan/prolazan ako jednostavna slučajna šetnja na grafu ima to svojstvo. Jednostavna slučajna šetnja osnovni je primjer Markovljeva lanca prilagođenog temeljnoj (pozadinskoj) strukturi. U nastavku razmatramo razna *svojstva prilagođenosti* prijelazne matrice P Markovljeva lanca strukturi, odnosno *geometriji grafa* na skupu stanja. Za prijelaznu matricu P kažemo da je matrica *najbližeg susjeda* ako $p_{xy} > 0$ samo ako je $d(x, y) \leq 1$.

Kažemo da P ima *ograničen doseg* ako

$$\sup\{d(x, y) : x, y \in V, p_{xy} > 0\} < \infty.$$

Slučajna je šetnja *uniformno ireducibilna* ako postoje $\varepsilon_0 > 0$ i $K < \infty$ takvi da

$$x \sim y \quad \text{implicira} \quad p_{xy}^{(k)} \geq \varepsilon_0 \quad \text{za neki } k \leq K.$$

Primijetimo da iz ovoga slijedi $deg(x) \leq (K + 1)/\varepsilon_0$ za svaki $x \in V$. Zaista,

$$K + 1 = \sum_{k=0}^{K} \sum_{y \in V} p_{xy}^{(k)} = \sum_{y \in V} \sum_{k=0}^{K} p_{xy}^{(k)} \geq deg(x)\varepsilon_0.$$

Stabla

Slučajne šetnje najbližeg susjeda na stablima te posebno jednostavne slučajne šetnje na homogenim (regularnim) stablima, uz Pólyinu šetnju, osnovni su primjeri prilagođenosti *geometriji* grafa. Karakteristika stabla dana u teoremu 1.1.6 ta je da za svaki par vrhova x, y postoji jedinstveni geodetski put $\pi(x, y)$ duljine upravo $d(x, y)$.

Neka je sada P prijelazna matrica *najbližeg susjeda ireducibilne* šetnje na stablu T. Sljedeće *fundamentalno* svojstvo povezuje strukturu stabla i slučajnu šetnju.

Lema 1.3.1. *Ako je $w \in \pi(x, y)$, tada $F_{xy}(z) = F_{xw}(z)F_{wy}(z)$.*

Dokaz. Zbog strukture stabla slučajna šetnja mora proći kroz w na putu od x do y. Zbog toga za prva vremena pogađanja vrijedi $s^y \geq s^w$. Budući da je s^w vrijeme zaustavljanja, X_{s^w} je već definirana na str. 9 kao

$$X_{s^w} := X_k.$$

Za $k \leq n$ zbog $s^y \in \sigma(X_{s^w}, X_{s^w+1}, \dots)$

$$\begin{aligned} f_{xy}^{(n)} &= \mathbb{P}(s^y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(s^y = n, s^w = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_x(s^y = n | s^w = k)\mathbb{P}_x(s^w = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_x(s^y = n | X_{s^w} = w, s^w = k)\mathbb{P}_x(s^w = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_w(s^y = n - k)\mathbb{P}_x(s^w = k) = \sum_{k=0}^{n} f_{xw}^{(k)} f_{wy}^{(n-k)}, \end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost slijedi zbog jakog Markovljeva svojstva, teorema 1.2.13. Računamo

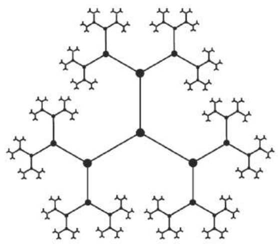
$$\begin{aligned} F_{xy}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{xy}^{(n)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_{xw}^{(k)} f_{wy}^{(n-k)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{wy}^{(n-k)} z^{n-k} \right) f_{xw}^{(k)} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} f_{wy}^{(n-k)} z^{n-k} \right) f_{xw}^{(k)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} F_{wy}(z) f_{xw}^{(k)} z^k = F_{xw}(z)F_{wy}(z), \end{aligned}$$

gdje četvrta jednakost slijedi zamjenom poretka sumacije. □

Kao sljedeći tipičan primjer gledamo slučajnu šetnju na (homogenom) M-regularnom stablu $\mathbb{T}_M$. Stablo $\mathbb{T}_2$ izomorfno je $\mathbb{Z}$. Za $\mathbb{T}_3$ vidi sliku 1.1.

Lema 1.3.2. *Za jednostavnu slučajnu šetnju na $\mathbb{T}_M$ vrijedi*

$$G_{xy}(z) = \frac{2(M-1)}{M - 2 + \sqrt{M^2 - 4(M-1)z^2}} \left(\frac{M - \sqrt{M^2 - 4(M-1)z^2}}{2(M-1)z} \right)^{d(x,y)}.$$



Slika 1.1: 3-regularno stablo $\mathbb{T}_3$

Dokaz. $F_{xy}(z)$ jednaka je za svaki par susjeda x, y, pa ćemo staviti $F_{xy}(z) = F(z)$. Primjenjujući lemu 1.3.1 na sve vrhove puta $\pi(v, w)$, dobivamo $F_{vw}(z) = F(z)^{d(v,w)}$. Služeći se definicijom slučajne šetnje i tvrdnjom (d) leme 1.2.14, za dva susjedna vrha x, y vrijedi

$$F(z) = F_{xy}(z) = \sum_{w\sim x} p_{xw} z F_{wy}(z) = \sum_{w\sim x} \frac{1}{M} z F(z)^{d(y,w)}.$$

U sumi postoji $M = deg(x)$ sumanada, a zbog $x \sim y$ te $w \sim x$ je $d(y, w) = 2$, stoga slijedi

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{M} z F(z)^{d(y,y)} + \frac{M-1}{M} z F(z)^{d(y,w)} \\ &= \frac{1}{M} z + \frac{M-1}{M} z F(z)^2. \end{aligned}$$

Ova jednadžba drugog reda ima dva rješenja. Budući da je

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{2(M-1)z} \left(M + \sqrt{M^2 - 4(M-1)z^2} \right) = +\infty,$$

dok je $F(0) = 0$, to rješenje (po neprekidnosti) otpada, pa je točno rješenje

$$F(z) = \frac{1}{2(M-1)z} \left(M - \sqrt{M^2 - 4(M-1)z^2} \right).$$

U ovom koraku koristeći se tvrdnjama $(c), (a)$ i (b) leme 1.2.14, računamo

$$U_{xx}(z) = \sum_{y\sim x} p_{xy} z F_{yx}(z) = M \frac{1}{M} z F(z) = z F(z), \quad G_{xx}(z) = \frac{1}{1 - zF(z)}$$

$$\begin{aligned} G_{xy}(z) &= F_{xy}(z) \frac{1}{1 - zF(z)} = \frac{F(z)^{d(x,y)}}{1 - zF(z)} = \frac{F(z)^{d(x,y)}}{\frac{2(M-1) - (M - \sqrt{M^2 - 4(M-1)z^2})}{2(M-1)}} \\ &= \frac{2(M-1)}{M - 2 + \sqrt{M^2 - 4(M-1)z^2}} \left(\frac{M - \sqrt{M^2 - 4(M-1)z^2}}{2(M-1)z} \right)^{d(x,y)}. \end{aligned}$$

□

$G_{xx}(z)$ red je potencija s nenegativnim koeficijentima, pa je prema Vivanti–Pringsheim-ovu teoremu iz kompleksne analize (vidi Hille [2], str. 133) radijus konvergencije jednak najmanjem pozitivnom singularitetu. Dakle, moramo izračunati $z > 0$ gdje je izraz pod korijenom jednak 0. Slijedi

$$\rho(P) = \frac{2\sqrt{M-1}}{M}.$$

Budući da je šetnja prolazna za $\rho(P) < 1$, slijedi da je *jednostavna slučajna šetnja na* $\mathbb{T}_M$ *prolazna za* $M \geq 3$.

Poglavlje 2

Povratnost i prolaznost beskonačne mreže

U ovom poglavlju promatrat će se razni kriteriji povratnosti reverzibilnih, a kasnije i ne-reverzibilnih Markovljevih lanaca. Kao što smo vidjeli u prvom poglavlju, Markovljevi su lanci zadani skupom stanja S te matricom prijelaza P. Naravno, još preostaje zadati i početnu distribuciju, no često će to biti izostavljeno i umjesto $(X_n)_{n\geq 1}$ za Markovljeve lance na grafu pisat će se (V, P) gdje je V skup vrhova (stanja).

2.1 Reverzibilni Markovljevi lanci

Definicija 2.1.1. *Neka je V najviše prebrojiv skup i neka je P matrica, ne nužno konačna. P djeluje na funkcijama $f : V \to \mathbb{R}$ po*

$$Pf(x) = \sum_y p_{xy} f(y).$$

Definicija 2.1.2. *P djeluje na nenegativnim mjerama ν na V po*

$$\nu P(y) = \sum_x \nu(x) p_{xy}.$$

Pretpostavljamo da je νP konačno. Kažemo da je ν *ekscesivna* ako je $\nu P \leq \nu$ po točkama te da je ν *invarijantna* ako je $\nu P = \nu$.

Prisjetimo se da uvijek pretpostavljamo ireducibilnost (v. definiciju 1.2.10). Neka je V beskonačan, prebrojiv skup, ne nužno opskrbljen sa strukturom lokalne konačnosti grafa.

Definicija 2.1.3. *Neka je V beskonačan, prebrojiv skup. Markovljev lanac (V, P)* reverzibilan *je ako postoji mjera $m : V \to \langle 0, +\infty \rangle$ takva da je*

$$m(x) p_{xy} = m(y) p_{yx}, \quad \text{za sve } x, y \in V. \tag{2.1}$$

U ovom slučaju $a(x,y) = m(x)p_{xy} = a(y,x)$ naziva se *provodljivost* između x i y, dok je $m(x)$ *ukupna provodljivost* u x. S druge strane, ako je $a : V \times V \to [0, \infty\rangle$ simetrična funkcija takva da je $m(x) = \sum_y a(x,y)$ pozitivan i konačan za svaki x, tada $p_{xy} = a(x,y)/m(x)$ definira reverzibilan Markovljev lanac (slučajnu šetnju). Uočimo da je m invarijantna mjera za P:

$$mP(y) = \sum_x m(x)p_{xy} = \sum_x m(y)p_{yx} = m(y)\sum_x p_{yx} = m(y).$$

Bit će prikladno opskrbiti skup V skupom bridova $E = E(P)$ tako da je za rezultirajući graf matrica P tipa najbližeg susjeda: $[x,y] \in E(P)$ ako i samo ako je $a(x,y) > 0$. Uočimo da je (V,E) povezan, ali ne nužno i lokalno konačan. Osim toga, za svaki, *a priori* neorijentirani, brid $e \in E(P)$ navodimo koji je od njegova dva vrha početni e^-, a koji je krajnji e^+. Na skupu bridova E promatrat ćemo funkcije koje shvaćamo kao tokove. Pozitivni ili negativni znak označava kretanje toka od e^- do e^+ ili obrnuto.

Definiramo *otpor* brida $e \in E$ kao $r(e) = 1/a(e^-,e^+)$. Trojka $\mathcal{N} = (V,E,r)$ naziva se *mreža*. Mreža $\mathcal{N}$ može se shvatiti kao beskonačna električna mreža u kojoj je svaki brid e žica s otporom *r(e)* i nekoliko je žica povezano na svaki čvor (vrh). Također, ona se može shvatiti kao o sustav cijevi s poprečnim presjekom 1 i dužinom *r(e)* spojenih u vrhovima. Kažemo da je mreža $\mathcal{N}$ povratna ili prolazna ako Markovljev lanac (V,P) ima respektivna svojstva. Kasnije će skup V imati strukturu lokalno konačnog grafa. U tom slučaju jednostavna slučajna šetnja proizaći će iz mreže $\mathcal{N} = (V,E,r)$, za koju je $a(x,y) = 1$ ako $x \sim y$ te $a(x,y) = 0$ u suprotnom, definiranjem m i $p(x,y)$ na prethodno opisan način.

Napomena 2.1.4. Naglašavamo da općenito $E(P)$ ne mora biti jednak skupu bridova $E(V)$, kao što je to slučaj kada je P matrica najbližeg susjeda. Naime, uzimat ćemo u obzir i druge matrice P koje nisu nužno matrice najbližeg susjeda, odnosno promatrati „prilagođene” reverzibilne slučajne šetnje na V.

U ovom trenutku posljednju napomenu zanemarujemo i promatramo graf mreže (V,E) za koji je $E = E(P)$. Nadalje, bit će korisno uvesti standardne pojmove i definicije iz teorije potencijala. Promotrimo realne Hilbertove prostore $l^2(V,m)$ i $l^2(E,r)$ sa skalarnim produktima

$$(f,g) = \sum_{x\in V} f(x)g(x)m(x) \quad \text{te} \quad \langle u,v\rangle = \sum_{e\in E} u(e)v(e)r(e)$$

respektivno. Uvodimo operator razlike

$$\nabla : l^2(V,m) \to l^2(E,r), \quad \nabla f(e) = \frac{f(e^+) - f(e^-)}{r(e)}.$$

Za operator ∇ definiramo *operatorsku normu*, u oznaci $||\nabla||_{op}$ kao

$$\begin{aligned}||\nabla||_{op} &= \inf\{M : ||\nabla f||_{l^2(E,r)} \le M||f||_{l^2(V,m)},\ f \in l^2(V,m)\}\\ &= \sup\{||\nabla f||_{l^2(E,r)} : f \in l^2(V,m),\ ||f||_{l^2(V,m)} = 1\}.\end{aligned}$$

Koristeći se definicijom normi na $l^2(V, m)$ i $l^2(E, r)$ pomoću skalarnog produkta, lako se vidi da je $\|\nabla\|_{op} \leq \sqrt{2}$. Drugim riječima, operator ∇ ograničen je. Njegov adjungirani operator dan je s

$$\nabla^* u(x) = \frac{1}{m(x)} \left(\sum_{e:e^+=x} u(e) - \sum_{e:e^-=x} u(e) \right).$$

Ako razmišljamo o u kao o toku u mreži, onda je $\sum_{e:e^+=x} u(e)$ količina koja utječe u čvor x, dok je $\sum_{e:e^-=x} u(e)$ količina koja istječe iz čvora. Tada je $m(x)\nabla^* u(x)$ „gubitak" u čvoru x. Laplaceov operator dan je s

$$\mathcal{L} = -\nabla^* \nabla = P - I, \tag{2.2}$$

gdje je I identiteta na V te P matrica prijelaza dane slučajne šetnje, obje gledane kao operatori na funcijama $V \to \mathbb{R}$ u smislu definicije 2.1.1. Promotrimo sada prostor $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ svih funkcija f na V (ne nužno iz $l^2(V, m)$) takvih da je $\nabla f \in l^2(E, r)$. Ako je f takva funkcija, onda je njezina *Dirichletova suma* (*Dirichletova norma*)

$$\begin{aligned} D(f) = \langle \nabla f, \nabla f \rangle &= \sum_{e \in E} \frac{(f(e^+) - f(e^-))^2}{r(e)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (f(x) - f(y))^2 \, m(x) p_{xy}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dirichletova je suma polunorma te za funkcije iz $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ vrijedi $D(f) < \infty$. Ovdje će se Dirichletova suma označavati s $D_{\mathcal{N}}(\cdot)$ ili $D_P(\cdot)$. Prostor $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ može se opskrbiti skalarnim produktom ako odaberemo *ishodište*, odnosno referentnu točku $o \in V$:

$$(f, g)_D = (f, g)_{D,o} = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f(o)g(o).$$

Prikupimo nekoliko standardnih činjenica iskazanih u sljedećoj lemi.

Lema 2.1.5. *Vrijedi sljedeće:*

(a) $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ je Hilbertov prostor.

(b) Odabirom druge referentne točke o dobivamo ekvivalentnu normu na Hilbertovu prostoru.

(c) Konvergencija u $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ povlači konvergenciju po točkama.

(d) Ako je $f \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$, tada je $\nabla^*(\nabla f) = -\mathcal{L} f$.

Dokaz. Neka je $x \in V, x \neq o$. Zbog povezanosti grafa (V, E) postoje $o = x_0, x_1, \ldots, x_k = x \in V$ takvi da $e_i = [x_{i-1}, x_i] \in E$. Neka je $C_1(x) = \sum_{i=1}^{k} r(e_i)$. Tada je za $f \in \mathcal{D}(\mathcal{N})$, koristeći se Cauchy-Schwarzovom nejednakošću,

$$(f(x) - f(o))^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\sqrt{r(e_i)}} \sqrt{r(e_i)} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \nabla f r(e) \right)^2 = (\langle \nabla f, 1 \rangle)^2 \leq C_1(x) D(f).$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} f(x)^2 = ((f(x) - f(o)) + f(o))^2 &\leq 2(f(x) - f(o))^2 + 2f(o)^2 \\ &\leq 2C_1(x)D(f) + 2(f, f)_{D,o} \\ &\leq 2C_1(x)(f, f)_{D,o} + 2(f, f)_{D,o}. \end{aligned}$$

Stavljajući $C_2(x) = 2 \max\{1, C_1(x)\}$, dobiva se

$$f(x)^2 \leq C_2(x)(f, f)_{D,o}.$$

Iz zadnje nejednakosti te zbog $\langle \nabla f, \nabla f \rangle \leq (f, f)_{D,o}$ slijedi

$$(f, f)_{D,x} \leq C_3(x)(f, f)_{D,o}, \quad \text{gdje je} \quad C_3(x) = C_2(x) + 1.$$

Zamjenom x i o dobivamo analognu nejednakost iz koje slijedi tvrdnja (b). Neka je sada $(f_n)_n$ Cauchyjev niz u $\mathcal{D}(\mathcal{N})$. Zbog $f(x)^2 \leq C_2(x)(f, f)_{D,o}$ slijedi da je za svaki $x \in V$, $(f_n(x))_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$ pa konvergira k nekom $f(x)$, odnosno niz (f_n) konvergira k funkciji f po točkama. S druge strane, kako je operator ∇ ograničen, slijedi da je (∇f_n) Cauchyjev niz u $l^2(E, r)$. Stoga postoji neki $w \in l^2(E, r)$ takav da $(\nabla f_n)_n$ konvergira k w u Hilbertovu prostoru $l^2(E, r)$. Gledamo li $\|\nabla f - w\|_{l^2(E,r)}$ te uz prethodno primijenimo Fatouovu lemu, dobiva se $w = \nabla f$, što dokazuje (a). Neka je sada $(f_n)_n$ niz koji je konvergentan, posebno Cauchyjev u $\mathcal{D}(\mathcal{N})$. Prema gore navedenom slijedi da $(f_n)_n$ konvergira k funkciji f po točkama, odnosno vrijedi tvrdnja (c).

Za svaki je $x \in V$, čak kada (V, P) nije lokalno konačan, suma $\frac{1}{m(x)} \sum_{[y,x] \in E} |f(x) - f(y)| a(x, y)$ konačna:

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{[y,x] \in E} |f(x) - f(y)| a(x, y) \leq \frac{1}{m(x)} D(f) < \infty.$$

Zbog toga suma ne ovisi o poretku članova, pa se članovi reda

$$\nabla^*(\nabla f)(x) = \frac{1}{m(x)} \left(\sum_{e: e^+ = x} \frac{f(x) - f(e^-)}{r(e)} + \sum_{e: e^- = x} \frac{f(x) - f(e^+)}{r(e)} \right)$$

mogu permutirati. Koristeći se reverzibilnošću te permutacijom u prvoj sumi po svim bridovima kojima je x početni vrh, $x = e^-$, dobivamo $(I - P)f(x)$. $\square$

Nadalje, s $l_0(V)$ označavamo vektorski prostor svih funkcija na V koje imaju konačni nosač $\mathrm{supp}(f) = \{x \in V : f(x) \neq 0\}$. Zatvarač od $l_0(V)$ u prostoru $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ označavat ćemo s $\mathcal{D}_0(\mathcal{N})$.

Na kraju odjeljka donose se preliminarne definicije i tvrdnje koje će se upotrijebiti za najvažnije rezultate ovog poglavlja. Napominjemo da ćemo ponekad elemente prijelazne matrice p_{xy} označavati s $p(x, y)$.

Definicija 2.1.6. *Neka je A podskup od V, onda s P_A označavamo* restrikciju *prijelazne matrice P na skup A:*

$$p_A(x, y) = p(x, y), \quad \text{ako } x, y \in A \text{ te } p(x, y) = 0, \text{ inače}. \tag{2.4}$$

Obično se smatra da je matrica P_A matrica na cijelom skupu V, no upotrebljavat ćemo istu notaciju za odrezanu matricu samo na skupu A. Na isti način kao gore definiramo restrikciju identitete I_A. Element na mjestu (i, j) matrice potencija P_A^n je $p_A^{(n)}(i, j) = \mathbb{P}_i[V_n = j, Z_k \in A(0 \leq k \leq n)]$. Posebno $P_A^0 = I_A$. Za pridruženu Greenovu funkciju pisat će se

$$G_A(i, j|z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_A^{(n)}(i, j)z^n, \quad G_A(i, j) = G_A(i, j|1).$$

Napomena 2.1.7. $G_A(i, j|z)$ nije restrikcija prethodno uvedene Greenove funkcije na skup A, podskup od V.

Kada je skup A konačan, onda je poznato i lako se pokaže da je red G_A konačan. Često ćemo se koristiti i matričnom, odnosno operatorskom notacijom:

$$(I_A - P_A)G_A = I_A. \tag{2.5}$$

Lema 2.1.8. *Neka je $A \subset V$ konačan, $x \in A$ te $f \in l_0(V)$ takva da je* $\mathrm{supp} f \subset A$. *Tada vrijedi*

$$\langle \nabla f, \nabla G_A(\cdot, x) \rangle = m(x) f(x).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, \nabla G_A(\cdot, x) \rangle &= (f, \nabla^* \nabla G_A(\cdot, x)) = (f, (I - P)G_A(\cdot, x)) \\ &= (f, (I_A - P_A)G_A(\cdot, x)) = (f, \delta_x) = m(x) f(x), \end{aligned}$$

gdje druga jednakost vrijedi zbog (2.2), treća zbog pretpostavke (funkcije su 0 izvan skupa A), četvrta zbog (2.5), a zadnja jednakost vrijedi zbog definicije skalarnog produkta na $l^2(V, m)$. □

Lema 2.1.9. *Ako je Markovljev lanac (V, P) prolazan, tada $G(\cdot, x) \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$ za svaki $x \in V$.*

Dokaz. Neka je $x \in V$ proizvoljan. Neka su $A \subset B$ konačni podskupovi od V koji sadrže x. Primjenjujući lemu 2.1.8 na skupove A, B te na $f = G_B(\cdot, x)$, $f = G_A(\cdot, x)$ respektivno, dobivamo

$$\begin{aligned} D(G_B(\cdot, x) - G_A(\cdot, x)) &= \langle \nabla G_B(\cdot, x), \nabla G_B(\cdot, x)\rangle - 2\langle \nabla G_A(\cdot, x), \nabla G_B(\cdot, x)\rangle \\ &+ \langle \nabla G_A(\cdot, x), \nabla G_A(\cdot, x)\rangle \\ &= m(x)(G_B(x, x) - G_A(x, x)) < \infty. \end{aligned}$$

Prisjetimo se da je za $x \in A$

$$\begin{aligned} p_A^n(x, x) &= \sum_{z_1 \in A} \cdots \sum_{z_{n-1} \in A} p_A(x, z_1) p_A(z_1, z_2) \cdots p_A(z_{n-1}, x) \\ &= \sum_{z_1 \in A} \cdots \sum_{z_{n-1} \in A} p(x, z_1) p(z_1, z_2) \cdots p(z_{n-1}, x). \end{aligned}$$

Neka je sada $(A_m)_m$ rastući niz konačnih skupova, podskupova od V, koji sadrže x te u uniji daju čitav V. Zbog $A_m \subset A_{m+1}$ slijedi $G_{A_m}(x, x) \leq G_{A_{m+1}}(x, x)$. Po teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi da je

$$\lim_{m\to\infty} G_{A_m}(x, x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{A_m}^{(n)}(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} p_{A_m}^{(n)}(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x, x) = G(x, x).$$

Iz gornjih računa vidljivo da je $(G_{A_m}(\cdot, x))_{m\geq 1}$ Cauchyjev niz u $\mathcal{D}(\mathcal{N})$. Po lemi 2.1.5 konvergira k svojem limesu po točkama, a to je $G(\cdot, x)$. Budući da smo našli niz funkcija u $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ s konačnim nosačem, kojem je $G(\cdot, x)$ limes, po karakterizaciji zatvarača u metričkim prostorima slijedi da je $G(\cdot, x) \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$. □

2.2 Tok, kapacitet i Nash-Williamsov kriterij

U ovom odjeljku formalno definiramo tok mreže kao funkciju u $l^2(E, r)$ te donosimo nužne i dovoljne uvjete prolaznosti mreže $\mathcal{N}$ kao i metodu *kratkog spajanja*. Naš je cilj Nash-Williamsov kriterij povratnosti koji će kao korolar proizaći iz teorema koji govori da ako za mrežu kratkog spoja dobivenu iz reverzibilna Markovljeva lanca vrijedi da je povratna, onda to mora vrijediti i za inicijalni Markovljev lanac.

Definicija 2.2.1. *Za dani vrh* $x_0 \in V$ *i realni broj* i_0 konačan tok energije od x do ∞ s ulazom i_0 *na mreži* $\mathcal{N}$ *funkcija je* $u \in l^2(E, r)$ *takva da*

$$\nabla^* u(y) = -\frac{i_0}{m(x)} \delta_x(y) \quad \textit{za svaki } y \in V.$$

Energija toka *je* $\langle u, u\rangle$.

Stoga mrežu možemo zamisliti kao sustav cijevi ispunjen tekućinom (koja se ne može sabiti), a na *izvoru* x_0 pumpa se tekućina konstantnom brzinom od i_0 litara u sekundi. Zahtjev da to bude moguće s konačnom energijom $\langle u, u\rangle$ nerazuman je ako je mreža konačna (osim ako je $i_0 = 0$), a pokazat će se da postojanje takvih tokova karakterizira prolazne mreže. U tom smislu, povratne mreže više odgovaraju našoj intuiciji „stvarnog svijeta".

Definicija 2.2.2. Kapacitet *skupa* $A \subset V$ *je*

$$\mathrm{cap}(A) = \inf\{\mathcal{D}(f) : f \in l_0(V), f \equiv 1 \text{ na } A\}. \tag{2.6}$$

Napomena 2.2.3.

(a) Uočimo da je
$$\mathrm{cap}(A) = \min\{\mathcal{D}(f) : f \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N}), f \equiv 1 \text{ na } A\}. \tag{2.7}$$
Nije teško provjeriti da je skup $\{f \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N}), f \equiv 1 \text{ na } A\}$ konveksan. Također, taj je skup zatvarač skupa $\{f \in l_0(V), f \equiv 1 \text{ na } A\}$ u $\mathcal{D}(\mathcal{N})$. Po standardnom teoremu iz teorije Hilbertovih prostora [6, teorem 4.10], postoji jedinstveni element skupa u kojem se norma minimizira.

(b) Pisat ćemo $\mathrm{cap}(x)$ za $\mathrm{cap}(\{x\})$.

Sada možemo formulirati sljedeće korisne, nužne i dovoljne kriterije prolaznosti mreže $\mathcal{N}$ definirane u odjeljku 2.1.

Teorem 2.2.4. *Neka je* (V, P) *reverzibilan Markovljev lanac s pridruženom mrežom* $\mathcal{N}$*. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne.*

(a) Mreža je prolazna.

(b) Za neki (za svaki) $x \in V$ *postoji konačni tok energije od* x *do* ∞ *s netrivijalnim ulazom.*

(c) Za neki (za svaki) $x \in V, \mathrm{cap}(x) > 0$.

(d) Konstantna funkcija $\mathbf{1}$ *ne pripada skupu* $\mathcal{D}_0(\mathcal{N})$.

Dokaz. (a) povlači (b).
Pretpostavimo da je mreža $\mathcal{N}$ prolazna. Tada je po lemi 2.1.9 $G(\cdot, x) \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$ za svaki $x \in V$. Budući da je $\mathcal{D}_0(\mathcal{N})$ podskup $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ po definiciji, ovako definirana funkcija $u = -\frac{i_0}{m(x)}\nabla G(\cdot, x) \in l^2(E(P), r)$ te

$$\nabla^* u = -\frac{i_0}{m(x)}\nabla^*\nabla G(\cdot, x) = \frac{i_0}{m(x)}\mathcal{L}G(\cdot, x) = -\frac{i_0}{m(x)}\delta_x,$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti upotrijebili lemu 2.1.5.
(b) povlači (c).
Neka je $x \in V$ proizvoljan. Pretpostavimo da postoji konačan tok energije u iz x do ∞ s ulazom $i_0 \neq 0$. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $i_0 = -1$. Neka je sada $f \in l_0(V)$ takva da je $f(x) = 1$. Tada je

$$\langle \nabla f, u \rangle = (f, \nabla^* u) = \left(f, \frac{1}{m(x)} \delta_x \right) = f(x) = 1.$$

Stoga zbog Cauchy-Schwarzove nejednakosti vrijedi $1 = |\langle \nabla f, u \rangle|^2 \leq \mathcal{D}(f) \langle u, u \rangle$. Dobivamo $\mathrm{cap}(x) \geq \frac{1}{\langle u,u \rangle} > 0$.
(c) ekvivalentno (d).
Izravno iz (2.7) slijedi da je $\mathrm{cap}(x) = 0$ ako i samo ako postoji funkcija $f \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$ takva da je $f(x) = 1$ i $\mathcal{D}(f) = 0$, odnosno $f \equiv 1$.
(c) povlači (a).
Neka je $A \subset V$ konačan takav da je $x \in A$. Stavimo $f = \frac{G_A(\cdot,x)}{G_A(x,x)}$. Tada je po lemi 2.1.9 $f \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$ te $f(x) = 1$. Zbog toga je

$$\mathrm{cap}(x) \leq \mathcal{D}(f) = \frac{1}{G_A(x,x)} \langle \nabla G_A(\cdot, x), \nabla G_A(\cdot, x) \rangle = \frac{m(x)}{G_A(x,x)},$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili lemu 2.1.8. Dobivamo $G_A(x,x) \leq \frac{m(x)}{\mathrm{cap}(x)}$ za svaki konačni $A \subset V$ koji sadrži x. Uzmimo sada rastući niz $(A_n)_{n \geq 1}$ takvih skupova koji u uniji daju čitav skup V: $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$. Na isti način kao u lemi 2.1.9 prelaskom na limes, korištenjem teorema o monotonoj konvergenciji slijedi $G(x,x) \leq m(x)/\mathrm{cap}(x)$. Budući da je desna strana nejednakosti konačna po definiciji od m i $\mathrm{cap}(x)$, zaključujemo da je lanac (V, P) prolazan po definiciji 1.2.15. □

Iz prethodnog teorema odmah slijedi korisna činjenica da povratnost, odnosno prolaznost mreže $\mathcal{N}$ ovisi samo o Dirichletovoj normi $\mathcal{D}(\cdot)$ povezanoj s matricom P prema (2.3).

Korolar 2.2.5. *Neka su P_1 i P_2 prijelazne matrice dva reverzibilna Markovljeva lanca na V s pridruženim Dirichletovim normama $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ respektivno. Pretpostavimo da postoji $\varepsilon_1 > 0$ takav da je*

$$\mathcal{D}_2 \geq \varepsilon_1 \mathcal{D}_1 \quad \text{za sve } f \in l_0(V).$$

Tada prolaznost (V, P_1) povlači prolaznost (V, P_2). Ovo posebno vrijedi kada pridružene provodljivosti zadovoljavaju $a_2(x,y) \geq \varepsilon_1 a_1(x,y)$, za sve $x, y \in V$, gdje je $\varepsilon_1 > 0$.

Dokaz. Lako se vidi da vrijedi tvrdnja koristeći se formulom (2.3) te ekvivalencijom tvrdnji (a) i (c) iz prethodnog teorema. □

Kao što je prirodno za grafove promatrati njihove podgrafe, tako ćemo za mrežu $\mathcal{N}$ promatrati njezinu *podmrežu*. *Podmreža* $\mathcal{N}'$ od $\mathcal{N}$ povezan je podgraf od (V, E), zajedno s restrikcijom funkcije otpora na podskup bridova. Konačan tok energije na mreži $\mathcal{N}'$ također je konačan tok energije i na mreži $\mathcal{N}$. Lako se vidi da vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 2.2.6. *Neka je $\mathcal{N}$ mreža s podmrežom $\mathcal{N}'$. Tada prolaznost podmreže povlači prolaznost mreže $\mathcal{N}$.*

Promotrimo sljedeći ilustrativan primjer.

Primjer 2.2.7. Slučajna šetnja najbližeg susjeda na $\mathbb{N}_0$
Skup prirodnih brojeva s nulom gledan kao graf zamišljamo kao polupravac, odnosno kao jednosmjerni beskonačni put na kojem su susjedne točke udaljene za jedan. Bridovi su dakle $e_k = [k-1, k], k \geq 1$. Za ireducibilnu slučajnu šetnju najbližeg susjeda (graf je povezan) potrebno je definirati prijelazne vjerojatnosti $p_{k-1k} > 0, p_{kk-1} > 0$ za $k \geq 1$ te $p_{kk} \geq 0$ za $k \geq 0$. Slučajna šetnja reverzibilna je uz mjeru m danu s

$$m(k) = \frac{p_{k-1k}p_{k-2k-1}\cdots p_{12}p_{01}}{p_{kk-1}p_{k-1k-2}\cdots p_{21}p_{10}},$$

i otpor na bridovima dan s

$$r(e_k) = \frac{p_{k-1k-2}p_{k-2k-3}\cdots p_{21}p_{10}}{p_{k-1k}p_{k-2k-1}\cdots p_{12}p_{01}}.$$

Promotrimo tok od 0 do ∞ s ulazom $i_0 = 1$. U vidu definicije adjungiranog operatora ∇^* te definicije konačnog toka energije 2.2.1 dolazimo do zaključka da je jedini takav tok jedinični tok $u \equiv 1$. Njegova je energija $\langle u, u\rangle = \sum_{e\in E} u(e)u(e)r(e) = \sum r(e_k)$. Zbog teorema 2.2.4 slučajna je šetnja

$$\text{prolazna ako i samo ako} \sum_{k=1}^{\infty} r(e_k) < \infty, \text{ a povratna ako i samo ako} \sum_{k=1}^{\infty} r(e_k) = \infty.$$

Na temelju zaključka iz prethodnog primjera uočavamo da ako u proizvoljnoj mreži možemo pronaći podmrežu u obliku jednosmjernog beskonačnog puta duž kojeg je zbroj otpora bridova konačan, tada je mreža prolazna. Doista, jedinični tok duž tog puta (s ulazom 1 u početnoj točki) ima konačnu energiju. Drugim riječima, u prolaznom sustavu potrebno je samo svladati konačni otpor da bi se iz bilo koje točke stiglo u beskonačnost. U povratnom sustavu otpor od bilo koje točke do beskonačnosti jest beskonačan. Ovaj odjeljak završavamo s takozvanom metodom *kratkog spajanja*.

Definicija 2.2.8. *Neka je (V, P) reverzibilan Markovljev lanac s pridruženom mrežom $\mathcal{N}$. Pretpostavimo da postoji particija od V:*

$$V = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} V_i, \quad \text{takva da je } \mathbf{1}_{V_i} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N}) \text{ za svaki } i \in \mathcal{I}. \tag{2.8}$$

Tada možemo definirati mrežu kratkog spoja *$\mathcal{N}'$ sa skupom vrhova $\mathcal{I}$ i funkcijom provodljivosti*

$$a'(i,j) = \begin{cases} \sum_{x \in V_i, y \in V_j} a(x,y), & \text{ako} \quad j \neq i, \\ 0, & \text{ako} \quad j = i. \end{cases} \tag{2.9}$$

Uočimo da je $m'(i) = \sum_j a'(i,j) = D(\mathbf{1}_{V_i}) < \infty$ za svaki i. Na ovaj način iz mreže kratkog spoja proizlazi reverzibilan Markovljev lanac (I, P') s prijelaznim vjerojatnostima

$$p'(i,j) = \frac{a'(i,j)}{m'(i)}.$$

Napomena 2.2.9. Posljednji uvjet $\mathbf{1}_{V_i} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$ za svaki $i \in \mathcal{I}$ iz (2.8) jest ključan. To posebno vrijedi ako je $\sum_{x \in V_i} m(x) < \infty$.

Teorem 2.2.10. *Neka je (V, P) reverzibilan Markovljev lanac. Neka je (I, P') Markovljev lanac dobiven iz (V, P) metodom kraćenja. Ako je (I, P') prolazan, onda je i (V, P) prolazan.*

Dokaz. Za funkciju $f \in \mathcal{D}(\mathcal{N})'$ stavimo $\overline{f}(x) = f(i)$ za $x \in V_i$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} D_{\mathcal{N}}(\overline{f}) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \left(\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right)^2 a(x,y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{I}} \sum_{x \in V_i, y \in V_j} (f(i) - f(j))^2 a(x,y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{I}} (f(i) - f(j))^2 a'(i,j) = D_{\mathcal{N}'}(f). \end{aligned}$$

Sljedeće se koristimo pretpostavkom da je $\mathbf{1}_{V_i} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$: ako je $f \in l_0(\mathcal{I})$, tada je

$$\overline{f} = \sum_{i \in \mathcal{I}} f(i) \mathbf{1}_{V_i} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N}).$$

Ako je $\mathcal{N}'$ povratna, tada je po (d) dijelu teorema 2.2.4 $\mathbf{1}_{V_i} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N}')$. Po karakterizaciji zatvarača u metričkim prostorima pomoću nizova, slijedi da postoji niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_0(\mathcal{I})$ takav da $f_n \to \mathbf{1}$. Iz toga slijedi da $D_{\mathcal{N}'}(f_n - \mathbf{1}) \to 0$. Posljedično, zbog gore navedenog, slijedi da je $(\overline{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{D}_0(\mathcal{N})$ takav da je $D_{\mathcal{N}}(\overline{f}_n - \mathbf{1}) \to 0$. Ponovno po karakterizaciji zatvarača dobivamo $\mathbf{1} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{N})$. Koristeći se (d) dijelom teorema 2.2.4, slijedi da je $\mathcal{N}$ povratna. □

Kombinirajući zaključke iz primjera 2.2.7 i prethodnog teorema, nije teško vidjeti da kao posljedicu dobivamo Nash-Williamsov kriterij povratnosti:

Korolar 2.2.11. *Neka je (V, P) reverzibilan Markovljev lanac. Pretpostavimo da vrijede (2.8) i (2.9) iz definicije 2.2.8. Dodatno pretpostavimo da je $\mathcal{I} = \mathbb{N}_0$ i da je $a'(i, j) = 0$, ako $|i - j| \geq 2$. Ako je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a'(i-1, i)} = \infty,$$

tada je (V, P) povratan.

Pomoću tog kriterija pokazat ćemo još jedan način na koji se može vidjeti da je jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^2$ povratna. Neka je d metrika grafa $\mathbb{Z}^2$. Stavimo

$$V_i = \{x \in \mathbb{Z}^2 : d(x, 0) = i\} = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 : |k| + |l| = i\}, i \geq 0.$$

Prisjetimo se da svi bridovi imaju provodljivost 1. Zato će nam po (2.9) $a'(i - 1, i)$ biti jednak broju bridova između V_{i-1} i V_i. Za svaki je V_i broj točaka u pojedinom kvadrantu koje nisu na koordinatnim osima $(k, l \neq i)$ jednak $(i - 1)$. Broj bridova iz svake takve točke do točaka iz V_{i-1} jednak je 2. Pogledajmo prvi kvadrant. Do točke iz V_{i-1} možemo doći na dva načina smanjivanjem svake koordinate za jedan, ali ne istovremeno jer razlika zbroja baš jednaka jedan. Zbog simetrije mreže $\mathbb{Z}^2$ takvih je bridova $4 \times 2(i-1)$. Još nam preostaje dodati točno 4 brida između točaka na osima, onih točakama kojima je jedna od koordinata baš jednaka i. Ukupan broj bridova između V_i i V_{i-1} je $4 \times 2(i-1) + 4 = 8i - 4$. Koristeći se korolarom 2.2.11, dobivamo da je jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^2$ povratna.

Za kraj ovog razmatranja donosimo primjer koji pokazuje da *vrlo prirodni* podgrafi prolaznih grafova nisu nužno prolazni.

Primjer 2.2.12. Češljasta rešetka u $\mathbb{Z}^d$
Češljastu rešetku u $\mathbb{Z}^d$ definiramo kao razapinjuće stablo od grafa $\mathbb{Z}^d$ tako da je

$$(k_1, \dots, k_{j-1}, k_j, 0, \dots, 0) \sim (k_1, \dots, k_{j-1}, k_j + 1, 0, \dots, 0), \quad \text{za svaki } j = 1, \dots, d,$$

gdje je $k_i \in \mathbb{Z}$ za $1 \leq i \leq j$. Označavamo ju s $\mathbf{C}_d$. Tako je, na primjer, $\mathbf{C}_1 = \mathbb{Z}$, dok se $\mathbf{C}_d$ iz $\mathbf{C}_{d-1}$ dobiva tako da se u svakoj točki pričvrsti kopija od $\mathbb{Z}$ kao beskonačni pravac. Pokažimo indukcijom da je jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbf{C}_d$ povratna. Tada po teoremu 2.2.4 postoji konačan tok energije u u $\mathbf{C}_d$ od ishodišta do ∞ s netrivijalnim ulazom i_0. No taj tok mora biti nula duž svih bridova pravaca koji su bili dodani $\mathbf{C}_{d-1}$ kako bismo dobili $\mathbf{C}_d$. Inače bi, jer je tih pravaca beskonačno mnogo, energija $\langle u, u\rangle$ bila beskonačna. Prema tome, u je konačan tok energije u $\mathbf{C}_{d-1}$ od ishodišta do beskonačno. To je opet po teoremu 2.2.4 u kontradikciji s povratnosti od $\mathbf{C}_{d-1}$.

2.3 Usporedba s nereverzibilnim Markovljevim lancima

Znamo da nam je za promatranje prolaznosti i povratnosti važna Greenova funkcija. Kao nastavak na rezultate u ovom poglavlju dat će se uvjeti pod kojima možemo usporediti Greenovu funkciju proizvoljne prijelazne matrice P, za koju dani lanac neće biti nužno reverzibilan, s Greenovom funkcijom reverzibilna Markovljeva lanca na V.

Neka je P proizvoljna (ireducibilna) prijelazna matrica na V te neka je ν ekscesivna mjera za P. Neka je $(\cdot,\cdot)_\nu$ skalarni produkt na $l^2(V,\nu)$. Tada je

$$\begin{aligned}(Pf,f)_\nu &= \sum_{x\in V}\sum_{y\in V} p(x,y)f(y)f(x)\nu(x)\\ &\le \sum_{x\in V}\sum_{y\in V} p(x,y)\nu(x)\left(\frac{f(x)^2}{2}+\frac{f(y)^2}{2}\right)\\ &\le \frac{1}{2}\sum_{x\in V}\nu(x)f(x)^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in V}\nu(y)f(y)^2 = (f,f)_\nu, \end{aligned} \tag{2.10}$$

gdje smo u zadnjem retku iskoristili stohastičnost matrice P te ekscesivnost mjere ν u odnosu na P. Također, za adjungiranu matricu P^* od P na $l^2(V,\nu)$, danu s $p^*(x,y) = \nu(y)p(x,y)/\nu(x)$, vrijedi da je substohastička te vrijedi $\nu(P^*P) \le \nu$. Analognim argumentom kao gore možemo dobiti $(P^*Pf,f)_\nu \le (f,f)_\nu$ što nam onda zbog $\|P^*P\| = \|P\|^2$ daje da je P kontrakcija na $l^2(V,\nu)$ [1, Propozicija. 2.2.14].

Lema 2.3.1. *Neka je $\mathcal{H}$ realan Hilbertov prostor sa skalarnim produktom $(\cdot,\cdot)$. Neka su T_1, T_2 dva invertibilna linearna operatora na $\mathcal{H}$ takva da*

(i) T_1 je hermitski operator,

(ii) $(T_2 f,f) \ge (T_1 f,f) \ge 0$ za svaku $f \in \mathcal{H}$.

Tada je $(T_1^{-1}f,f) \ge (T_2^{-1}f,f)$ za svaku $f \in \mathcal{H}$.

Dokaz. Budući da je T_1 hermitski operator takav da je $(T_1 f,f) \ge 0$ za svaku $f \in \mathcal{H}$, možemo definirati pozitivnu semidefinitnu kvadratnu formu $[f,g] = (T_1 f,g)$. Primjenjujući Cauchy-Schwarzovu nejednakost za pozitivnu semidefinitnu kvadratnu formu definiranu s T_1 na $T_2^{-1}f$ i $T_1^{-1}f$ te pretpostavku leme dobivamo

$$\begin{aligned}(T_2^{-1}f,f)^2 &= (T_2^{-1}f, T_1T_1^{-1}f)^2 \le (T_2^{-1}f, T_1T_2^{-1}f)(T_1^{-1}f, T_1T_1^{-1}f)\\ &\le (T_2^{-1}f, T_2T_2^{-1}f)(T_1^{-1}f, T_1T_1^{-1}f) = (T_2^{-1}f,f)(T_1^{-1}f,f).\end{aligned}$$

□

Teorem 2.3.2. *Neka je P ireducibilna prijelazna matrica s ekscesivnom mjerom ν te neka je Q reverzibilna s ukupnom provodljivosti m. Pretpostavimo da je*

(i) $\sup_V m(x)/\nu(x) < \infty$,

(ii) postoji $\varepsilon_0 > 0$ takav da je $P \geq \varepsilon_0 Q$ po elementima.

Tada povratnost od (V, P) povlači povratnost od (V, Q).

Dokaz. Stavimo $u(x) = m(x)/\nu(x)$ i tada je $u(x) \leq C$ za neki $C > 0$. Definiramo dva nova prijelazna operatora $\overline{P} = \frac{1}{2}(I + P)$ i $\overline{Q} = (1 - \frac{1}{2C}u)I + \frac{1}{2C}uQ$, odnosno

$$\overline{q}(x, y) = \left(1 - \frac{1}{2C}u(x)\right)\delta_x(y) + \frac{1}{2C}u(x)q(x, y).$$

Lako se provjeri da je ν ekscesivna i za matricu $\overline{P}$ te, koristeći se reverzibilnošću od Q u odnosu na mjeru m, da je $\overline{Q}$ reverzibilna s ukupnom provodljivosti ν. Zbog toga je ν invarijantna, stoga posebno i ekscesivna za $\overline{Q}$. Zbog (2.10) $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ kontrakcije su na $l^2(V, \nu)$. Također, uz $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_0, 1/2\}$ vrijedi $\overline{P} \geq \varepsilon_1\overline{Q}$. Dobivamo da je $\frac{1}{1-\varepsilon_1}(\overline{P} - \varepsilon_1\overline{Q})$ također stohastička prijelazna matrica (operator) s ekscesivnom mjerom ν, pa po 2.10 slijedi

$$((\overline{P} - \varepsilon_1\overline{Q})f, f)_\nu \leq (1 - \varepsilon_1)(f, f)_\nu \quad \text{za svaku } f \in l^2(V, \nu).$$

Gledajući razliku $((I - z\overline{P})f, f)_\nu - \varepsilon_1((I - z\overline{Q})f, f)_\nu$ i koristeći se prethodnim za $0 < z \leq 1$, dobivamo

$$((I - z\overline{P})f, f)_\nu \geq \varepsilon_1((I - z\overline{Q})f, f)_\nu \geq 0.$$

Nadalje, zbog reverzibilnosti od $\overline{Q}$ slijedi da je $\overline{Q}$ hermitski. Stoga operatori $T_1 = \varepsilon_1(I - z\overline{Q})$ i $T_2 = I - z\overline{P}$ zadovoljavaju pretpostavke leme 2.3.1. Kako je $G_{\overline{P}}(x, y|z)(I - z\overline{P}) = I$, po definiciji 2.1.1 slijedi

$$(I - z\overline{P})^{-1}f(x) = \sum_y G_{\overline{P}}(x, y|z)f(y).$$

Analogno dobijemo za $\overline{Q}$. Primijenimo li lemu 2.3.1 na operatore T_1 i T_2 uz $f = \delta_x$, dobivamo

$$G_{\overline{P}}(x, x|z) \leq \frac{1}{\varepsilon_1}G_{\overline{Q}}(x, x|z) \quad \text{za } z \in \langle 0, 1\rangle.$$

Po [8, (9.2) Lemma] je

$$G_{\overline{P}}(x, x|z) = \frac{2}{2 - z}G_P\left(x, x|\frac{z}{2 - z}\right) \quad \text{za } z \in \langle 0, 1\rangle.$$

Puštajući $z \to 1$ odozdo, dobivamo $G_P(x, x|z) \leq \frac{2}{\varepsilon_1} G_{\overline{Q}}(x, x|z)$, odnosno povratnost od (V, P) povlači povratnost $(V, \overline{Q})$. Sada za $f \in l_0(V)$ vrijedi

$$\begin{aligned} D_{\overline{Q}}(f) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} (f(x) - f(y))^2 \nu(x) \overline{q}(x, y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} (f(x) - f(y))^2 \nu(x) \frac{u(x)}{2C} q(x, y) = \frac{1}{2C} D_Q(f), \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti iskoristili gornju definiciju $\overline{Q}$. Po korolaru 2.2.5 slijedi da povratnost $(V, \overline{Q})$ povlači povratnost (V, Q). $\square$

Zajedno s teoremom 2.2.4 i njegovim korolarima posljednji će teorem biti od koristi kako bismo pokazali da na grafu s *ograničenom geometrijom* povratnost bilo koje slučajne šetnje, koja ima neko od svojstava prilagođenosti (ograničen doseg, uniformna ireducibilnost), implicira povratnost jednostavne slučajne šetnje.

Poglavlje 3

Slučajne šetnje i beskonačna stabla

Ovo poglavlje započet će se primjenom rezultata iz prethodnog poglavlja na slučajne šetnje na lokalno konačnim grafovima.

3.1 Usporedba slučajnih šetnji

Za graf kažemo da ima *ograničenu geometriju* ako je povezan i ako postoji konstanta C takva da svaki vrh ima stupanj manji od C. Upravo će nam to biti pretpostavka za graf u ovom odjeljku. Usporedit ćemo različite reverzibilne slučajne šetnje koje neće nužno biti šetnje najbližeg susjeda. Vidjet ćemo uz koje pretpostavke povratnost općenite slučajne šetnje implicira povratnost jednostavne slučajne šetnje i obrnuto. Naglašavamo da ćemo za *Dirichletovu normu* povezanu s jednostavnom slučajnom šetnjom pisati $D(\cdot)$ (bez indeksa) ili $D_V(\cdot)$. Isto će se tako za operator razlike za jednostavnu slučajnu šetnju pisati ∇_V. Budući da se radi o jednostavnoj slučajnoj šetnji za koju je $a(x, y) = 1$ za svaki $x, y \in V$, onda je

$$\nabla_V f(e) = f(e^+) - f(e^-) \quad \text{za svaki brid grafa } V.$$

Pritom podsjećamo na definicije iz odjeljka 1.3.

Lema 3.1.1. *$D_{P^k}(f) \leq k^2 D_P(f)$ za svaku $f \in l_0(V)$.*

Dokaz. Po formuli (2.3) za Dirichletovu normu matrice P^k, uz oznaku $x_0 = x, x_k = y$, je

$$\begin{aligned}
D_{P^k}(f) &= \frac{1}{2}\sum_{x,y}(f(x)-f(y))^2 m(x)p^{(k)}(x,y)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{x_0,x_1,\dots,x_k}(f(x_k)-f(x_0))^2 m(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{k-1},x_k)\\
&\le \frac{1}{2}\sum_{x_0,x_1,\dots,x_k} k\sum_{i=1}^{k}(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2 m(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{k-1},x_k)\\
&= \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{x_{i-1},x_i}(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2 m(x_{i-1})p(x_{i-1},x_i) = k^2 D_P(f),
\end{aligned}$$

gdje smo u trećem retku iskoristili Cauchy-Schwarzovu nejednakost, a u zadnjem retku reverzibilnost. □

Teorem 3.1.2. *Neka je V graf s ograničenom geometrijom. Neka je P prijelazna matrica uniformno ireducibilne slučajne šetnje na V s ekscesivnom mjerom ν za koju vrijedi* $\inf_V \nu(x) > 0$. *Tada povratnost od* (V, P) *povlači povratnost jednostavne slučajne šetnje na V. Ako je, dodatno, P reverzibilna s ukupnom provodljivosti* $m = \nu$*, tada postoji* $\varepsilon_1 > 0$ *takav da* $D_P(f) \ge \varepsilon_1 D(f)$ *za svaku* $f \in l_0(V)$.

Dokaz. Neka su ε_0 i K kao u definiciji uniformne ireducibilnosti za P. Neka je $\overline{P} = \frac{1}{2}(I+P)$ i $\hat{P} = \overline{P}^K$. Tada je za $0 < z \le 1$

$$G_{\overline{P}}(x,x|z) = \frac{2}{2-z}G_P\left(x,x|\frac{z}{2-z}\right),$$

tako da je P povratan ako i samo ako je $\overline{P}$ povratan. Nadalje, ako je $\overline{P}$ povratan, slijedi da je barem jedan od redova

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{p}^{(nK+r)}(x,x)$$

za $1 \le r \le K$ divergentan. U suprotnom bismo imali

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{p}^{(n)}(x,x) = \sum_{r=1}^{K}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{p}^{(nK+r)}(x,x) < \infty,$$

što je u kontradikciji s $\overline{P}$ povratan. Kako je $\overline{P} \ge \frac{1}{2}I$, dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{p}^{(n)}(x,x) \ge \sum_{n=0}^{\infty}\overline{p}^{(nK)}(x,x) \ge \sum_{n=0}^{\infty}\overline{p}^{(nK+r)}(x,x)\overline{p}^{(K-r)}(x,x) \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{K-r}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{p}^{(nK+r)}(x,x).$$

Posljedično, $\hat{P}$ je povratan ako i samo ako je P povratan. Mjera ν također je ekscesivna za $\hat{P}$. Zbog uniformne ireducibilnosti i povezanosti, ako je $x \sim y$, onda je

$$\hat{p}(x,y) = \overline{p}^{(K)}(x,y) \geq \frac{\varepsilon_0}{2^K} \geq \frac{\varepsilon_0}{2^K}\frac{1}{deg(x)}.$$

Primijenimo li teorem 2.3.2 na $\hat{P}$ umjesto P i na jednostavnu slučajnu šetnju umjesto Q (pretpostavke su zadovoljene zbog $m(x) = deg(x)$, što je ograničeno odozgo te zbog prethodne nejednakosti), dobivamo prvu tvrdnju teorema. Dokažimo sada drugu tvrdnju. Neka je P reverzibilna s ukupnom provodljivosti $m = \nu$. Tada su i prethodne definirane matrice $\overline{P}$ i $\hat{P}$ reverzibilne uz mjeru ν. Koristeći se prethodnom lemom 3.1.1, za svaku $f \in l_0(V)$ vrijedi

$$D_{\hat{P}}(f) \leq K^2 D_{\overline{P}}(f) = \frac{K^2}{2} D_P(f).$$

Ako je $x \sim y$, tada je

$$\nu(x)\hat{p}(x,y) \geq \frac{\varepsilon_0}{2^K} \inf_V \nu(x) = \overline{\varepsilon} > 0.$$

Prisjetimo se da za jednostavnu slučajnu šetnju svaki brid ima provodljivost jednaku 1. Stavljajući $\varepsilon_1 = 2\overline{\varepsilon}/K^2$, dobivamo

$$\begin{aligned} D_P(f) \geq \frac{2}{K^2} D_{\hat{P}}(f) &= \frac{1}{2}\sum_{x,y}(f(x) - f(y))^2 \frac{2}{K^2}\nu(x)\hat{p}(x,y) \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{x,y}(f(x) - f(y))^2 \frac{2}{K^2}\overline{\varepsilon} = \varepsilon_1 D(f). \end{aligned}$$

□

Promotrimo sada uz koje se uvjete druga tvrdnja prethodnog teorema može obrnuti.

Teorem 3.1.3. *Neka je V graf s ograničenom geometrijom. Neka je P prijelazna matrica reverzibilne šetnje ograničenog dosega čija ukupna provodljivost zadovoljava* $\sup_V m(x) < \infty$. *Tada postoji* $\varepsilon_2 > 0$ *takav da je* $D(f) \geq \varepsilon_2 D_P(f)$ *za svaku* $f \in l_0(V)$. *Specijalno, povratnost jednostavne slučajne šetnje na V povlači povratnost* (V, P).

Dokaz. Neka je E skup svih bridova grafa V. Neka je $\Pi(x,y)$ skup svih geodetskih putova od x do y; duljina je takvih putova baš jednaka $d(x,y)$. Označimo s $\Pi_e(x,y)$ sve putove u $\Pi(x,y)$ koji sadrže e. Neka je π put od x do y. Razliku $f(x) - f(y)$ možemo napisati kao $\sum_{e\in\pi} \nabla_V f(e)$. Koristeći se Cauchy-Schwarzovom nejednakošću, dobiva se

$$(f(x) - f(y))^2 = \frac{1}{|\Pi(x,y)|}\sum_{\pi\in\Pi(x,y)}\left(\sum_{e\in\pi}\nabla_V f(e)\right)^2 \leq \frac{1}{|\Pi(x,y)|}\sum_{\pi\in\Pi(x,y)}\sum_{e\in\pi}(\nabla_V f(e))^2 d(x,y).$$

Stoga je za $f \in l_0(V)$

$$\begin{aligned} D_P(f) &\leq \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} a(x,y)\frac{1}{|\Pi(x,y)|}\sum_{\pi\in\Pi(x,y)}\sum_{e\in\pi}(\nabla_V f(e))^2 d(x,y) \\ &= \sum_{e\in\pi}(\nabla_V f(e))^2\phi(e), \end{aligned}$$

gdje je

$$\phi(e) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} m(x)p(x,y)d(x,y)\frac{|\Pi_e(x,y)|}{|\Pi(x,y)|}. \tag{3.1}$$

Dobivamo $D_P(f) \leq \sup_E \phi(e)D(f)$, gdje je $D(f)$ Dirichletova norma za jednostavnu slučajnu šetnju. Još trebamo pokazati da je ϕ ograničen odozgo. Neka je $M \geq 2$ gornja međa za stupnjeve vrhova u V te neka je R gornja međa za doseg od P. Uzmimo proizvoljne $e \in E, x, y \in V$. Ako su x i y takvi da $d(x,y) \leq R$ i $\Pi_e(x,y) \neq \emptyset$, tada oba vrha x, y moraju biti na udaljenosti najviše $R-1$ od njima bližeg krajnjeg vrha od e. Budući da svaki vrh ima stupanj najviše M, tada je najviše $M + M^2 + \ldots + M^{R-1}$ točaka udaljenih od jednog krajnjeg vrha od e. Zadnja suma omeđena je odozgo s M^R. Zbog toga što vrh brida e možemo odabrati na dva načina, ovakvih je parova vrhova (x,y) najviše $2M^{2R}$. Stoga je

$$\phi(e) \leq \frac{R}{2}\left(\sup_V m(x)\right)\sum_{x,y\in V:d(x,y)\leq R}\frac{|\Pi_e(x,y)|}{|\Pi(x,y)|} \leq RM^{2R}\sup_V m(x) < \infty.$$

□

Posljednja nas dva teorema navode na definiciju *jako reverzibilna* Markovljeva lanca.

Definicija 3.1.4. *Za reverzibilan Markovljev lanac (V, P) kažemo da je* jako reverzibilan *ako postoji konstanta $C \in \langle 0, \infty\rangle$ takva da je*

$$C^{-1} \leq m(x) \leq C \quad \textit{za svaki } x \in V. \tag{3.2}$$

Korolar 3.1.5. *Neka je V graf s ograničenom geometrijom. Ako je neka jako reverzibilna, uniformno ireducibilna slučajna šetnja s ograničenim dosegom na V povratna, tada je svaka slučajna šetnja s ta tri svojstva povratna.*

Dokaz. Neka je P_1 prijelazna matrica povratne slučajne šetnje koja zadovoljava pretpostavke korolara. Neka je P_2 prijalezna matrica neke druge slučajne šetnje koja zadovoljava pretpostavke korolara koja nije nužno povratna. Neka je mjera ν ekscesivna za P_1 i neka je m iz definicije jake reverzibilnosti jednaka ν. Tada po teoremu 3.1.2 povratnost (V, P_1) povlači povratnost jednostavne slučajne šetnje na V, što po teoremu 3.1.3 povlači povratnost (V, P_2). □

Definicija 3.1.6. *Za cijeli je broj $k \geq 1$ k-ta* potencija grafa *V graf $V^{(k)}$ koji ima isti skup vrhova kao i V, no čiji su vrhovi susjedni ako i samo ako $1 \leq d(x, y) \leq k$.*

Uzimajući u obzir strukturu grafa V, odnosno pretpostavku da je V graf ograničene geometrije, jednostavno vidimo da vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 3.1.7. *Postoji $\varepsilon_2 > 0$ takav da*

$$D_{V^{(k)}}(f) \geq D_V(f) \geq \varepsilon_2 D_{V^{(k)}}(f) \quad \text{za svaku } f \in l_0(V).$$

Posebno, V je povratan ako i samo ako je $V^{(k)}$ povratan.

Dokaz. Lijeva nejednakost slijedi direktno iz definicije Dirichletove norme (2.3) i činjenice da definicijom k-te potencije grafa V uz postojeće nadodajemo još (mnogo) bridova. Desna nejednakost slijedi odmah iz teorema 3.1.3 primijenjenog na jednostavnu slučajnu šetnju na $V^{(k)}$. □

Iako se čini neintuitivno za utvrđivanje svojstva neke strukture promatrati njemu kompliciraniju strukturu, prava će svrha uvođenja k-te potencije grafa doći do izražaja u nadolazećem teoremu koji će nam omogućiti usporedbu različitih grafova što upravo jest naš sljedeći zadatak. Promatrat ćemo grafove kao metričke prostore s prirodnom metrikom $d(x, y)$. Naprije promotrimo općenitu definiciju.

Definicija 3.1.8. *Neka su (Y, d) i (Y', d') dva metrička prostora.* Gruba izometrija *preslikavanje je $\varphi : Y \to Y'$ takvo da*

$$A^{-1}d(x, y) - A^{-1}B \leq d'(\varphi x, \varphi y) \leq Ad(x, y) + B$$

za sve $x, y \in Y$, i

$$d'(x', \varphi Y) \leq B$$

za svaki $x' \in Y'$, gdje su $A \geq 1$ i $B \geq 0$. Nekada ćemo φ nazivati (A, B)-gruba izometrija.

Za dva ćemo prostora reći da su *grubo izometrična* ako između njih postoji prethodno definirano preslikavanje. Možemo konstruirati *grubi inverz* $\overline{\varphi}$ od φ na sljedeći način: za $x' \in Y'$ odaberemo $x \in Y$ takav da je $d'(x', \varphi Y) \leq B$ i stavimo $\overline{\varphi} x' = x$. Nije teško zaključiti da je $\overline{\varphi}$ (A', B')-gruba izometrija uz $A' = A$ i $B' = (2A + 1)B$. Nije teško provjeriti da je biti grubo izometričan relacija ekvivalencije između metričkih prostora.

Kako bismo dobili intuiciju za grube izometrije među grafovima, donosimo primjer te nakon njega teorem koji je glavna veza između grubih izometrija i slučajnih šetnji.

Primjer 3.1.9. *Neka je V graf bez petlji s ograničenom geometrijom te neka je $deg(x) \geq 3$ za svaki vrh x. Tada možemo konstruirati graf V' koji je 3-regularan i grubo izometričan grafu V.*

Dokaz. Opisujemo kako modificirati V lokalno u svakom vrhu kako bismo dobili V'. Neka je $x \in Y$, $deg(x) = k$ i neka je $E(x) = \{e_0(x), e_1(x), \dots, e_{k-1}(x)\}$ enumeracija skupa bridova incidentnih s x. Ako je $k = 3$, nije potrebno ništa učiniti – pišemo $x^{(1)}$ za vrh u V' koji odgovara vrhu x. Ako je $k \geq 4$, onda zamjenjujemo vrh x s novim vrhovima $x^{(1)}, \dots, x^{(k-2)}$ i radimo nove bridove $e^{(i)} = [x^{(i)}, x^{(i+1)}], i = 1, \dots, k-3$. U novom modificiranom grafu bridovi (njihove kopije) $e_0(x)$ i $e_1(x)$ incidentni su s $x^{(1)}$, a bridovi (kopije) $e_{k-2}(x)$ i $e_{k-1}(x)$ incidentni su s $x^{(k-2)}$ te ako je $k > 4$, onda su bridovi (kopije) $e_i(x)$ incidentni s $x^{(i)}, i = 2, \dots, k-3$. Ovakvu modifikaciju radimo u svakom vrhu grafa V. Prema tome, svaki smo vrh grafa V za koji je $deg(x) > 3$ zamijenili s putom duljine $deg(x) - 3$ te tako dobili 3-regularan graf. Sada definiramo $\varphi x = x^{(1)}$. Jasno je da se udaljenosti ne smanjuju djelovanjem φ:

$$d(x, y) \leq d'(x^{(1)}, y^{(1)}) = d'(\varphi x, \varphi y).$$

Neka je $d(x, y) = n$ i neka je $\pi = [x = x_0, x_1, \dots, x_n = y]$ put u V od x do y, dok su $e_i = [x_{i-1}, x_i]$ njegovi bridovi. Razmišljajući o e_i kao o bridu u V', e_i ne povezuje nužno $\varphi x_{i-1} = x_{i-1}^{(1)}$ s $\varphi x_i = x_i^{(1)}$, ali povezuje $x_{i-1}^{(j)}$ s $x_i^{(k)}$ za neke j, k. Kako je

$$d'(x^{(1)}, x^{(j)}) \leq M - 3$$

za svaki $x^{(j)} \in V'$, gdje je M gornja međa za stupnjeve vrhova u V, slijedi da je

$$\begin{aligned} d'(\varphi x_{i-1}, \varphi x_i) = d'(\varphi x_{i-1}^{(1)}, \varphi x_i^{(1)}) &\leq d'(x_{i-1}^{(1)}, x_{i-1}^{(j)}) + d'(x_{i-1}^{(j)}, x_i^{(k)}) + d'(x_i^{(k)}, x_i^{(1)}) \\ &\leq M - 3 + 1 + M - 3 \end{aligned}$$

te je

$$d'(\varphi x, \varphi y) \leq (2M - 5) d(x, y).$$

Stoga je φ $(2M - 5, M - 3)$-gruba izometrija. Napominjemo da je prirodni odabir za grubi inverz dan s $\varphi x^{(j)} = x$. Također napominjemo da ovakva konstrukcija čuva struktuu stabla, odnosno kada je V stablo, onda to vrijedi i za V'. Drugim riječima, *svako stablo s ograničenom geometrijom čiji svaki vrh ima stupanj najmanje 3, grubo je izometrično s homogenim 3-regularnim stablom* $\mathbb{T}_3$. □

Teorem 3.1.10. *Neka su V, V' grafovi s ograničenom geometrijom te neka je $\varphi : V \to V'$ gruba izometrija. Tada postoji konstanta $\varepsilon' > 0$ takva da*

$$D_{V'}(f) \geq \varepsilon' D_V(f \circ \varphi) \quad \textit{za sve } f \in l_0(V').$$

Posebno, V je povratan ako i samo ako je V' povratan.

Dokaz. Neka je φ (A, B)-gruba izometrija. Prvo, primijetimo da je $f \circ \varphi \in l_0(V)$ za svaku $f \in l_0(V')$. Neka je $\varphi^{\leftarrow}\{x'\} = \{x \in V : \varphi(x) = x'\}$ praslika po φ od $x' \in V'$. Definirajući dijametar skupa S u metričkom prostoru kao diam $(S) = \sup_{a,b \in S} d(a, b)$, vidimo da zbog definicije 3.1.8 grube izometrije φ za $a, b \in \varphi^{\leftarrow}\{x'\}$ vrijedi

$$A^{-1}d(a, b) - A^{-1}B \leq d'(\varphi a, \varphi b) = 0$$

$$d(a, b) \leq B,$$

odnosno diam $(\varphi^{\leftarrow}\{x'\}) \leq B$. Fiksirajmo sada $a \in \varphi^{\leftarrow}\{x'\}$. Broj točaka iz $\varphi^{\leftarrow}\{x'\}$ koje su udaljene od a za najviše B je najviše $M + M^2 + \ldots + M^B$, gdje je M gornja međa za stupnjeve vrhova u V. Slijedi da je $|\varphi^{\leftarrow}\{x'\}| \leq M^{B+1} < \infty$. Razmotrimo sada strukturu grafa na φV induciranu s φ: dvije točke $x', y' \in \varphi V$ susjedne su u φV ako postoje susjedne $x, y \in V$ takve da je $\varphi x = x'$ i $\varphi y = y'$. Neka je $a'(x', y')$ broj svih takvih bridova $[x, y]$ u V. Ovako je $d'(x', y') \leq Ad(x, y) + B = A + B$. Ako stavimo $k = A + B$, dobivamo da je φV podgraf od $V'^{(k)}$. Primjenjujući definiciju Dirichletove norme i korolar 3.1.7 slijedi da je

$$D_{\varphi V}(f) \leq D_{V'^{(k)}}(f) \leq \frac{1}{\varepsilon_2} D_{V'}(f) \quad \text{za svaku } f \in l_0(V'),$$

gdje je $\varepsilon_2 > 0$. Ako uzmemo u obzir mrežu $\mathcal{N}$ pridruženu jednostavnoj slučajnoj šetnji (V, P) te napravimo particiju od V na $V_i = \{x \in V : \varphi(x) = i\} = \varphi^{\leftarrow}\{i\}$, dobivamo mrežu kratkog spoja $\mathcal{N}'$ sa skupom vrhova $\mathcal{I} = \varphi V$ i funkcijom provodljivosti $a'(\cdot, \cdot)$. Uvjet iz (2.8) zadovoljen je po napomeni 2.2.9. Budući da je $|\varphi^{\leftarrow}\{x'\}| \leq M^{B+1}$, iz definicije od $a'(\cdot, \cdot)$ slijedi da je $a'(\cdot, \cdot) \leq M^{B+2}$. Slično kao u dokazu teorema 2.2.10 za $f \in \mathcal{D}(\mathcal{N}')$ stavimo $(f \circ \varphi)(x) = f(i)$ za $x \in V_i$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
D_V(f \circ \varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} (f \circ \varphi(x) - f \circ \varphi(y))^2 \, a(x, y) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{I}} \sum_{x \in V_i, y \in V_j} (f(i) - f(j))^2 \, a(x, y) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{I}} (f(i) - f(j))^2 a'(i, j) \\
&\leq M^{B+2} \frac{1}{2} \sum_{i,j \in \mathcal{I}} (f(i) - f(j))^2 = D_{\varphi V}(f).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$D_V(f \circ \varphi) \leq M^{B+2} D_{\varphi V}(f) \quad \text{za svaku } f \in l_0(V').$$

Spajajući dvije nejednakosti, dobivamo nejednakost iz tvrdnje teorema. Primjenjujući isti argument na grubi inverz od φ, dobivamo analognu nejednakost u suprotnom smjeru. Koristeći se teoremom 2.2.4 (c) ili (d), vidimo da je povratnost od V ekvivalentna povratnosti od V'. □

Korolar 3.1.11. *Svako je stablo s ograničenom geometrijom čiji svaki vrh ima stupanj barem 3 prolazno.*

3.2 Povratnost stabala

U završnom ćemo odjeljku za početak predstaviti jednostavan koncept koji će biti dovoljan kako bismo zaključili povratnost lokalno konačnih, povezanih grafova. Kasnije ćemo se fokusirati na stabla kao užu klasu i vidjeti da ćemo uvođenjem dodatne potrebne teorije dobiti jače rezultate. Neka je V lokalno konačan, povezan graf. Na grafu V promatramo reverzibilan Markovljev lanac (V, P), takav da mu je prijelazna matrica P matrica najbližeg susjeda te da za invarijantnu mjeru m vrijedi $\inf_V m(x) > 0$.

Definicija 3.2.1. *Za $x \in V$ i $n \geq 0$,* n-kugla *sa središtem u x je skup*

$$B(x, n) = \{y \in X : d(y, x) \leq n\}.$$

Definicija 3.2.2. Funkcija rasta od (V, P) u x *je* $R_P(x, n) = m(B(x, n))$.

Stavimo

$$R_P(n) = \inf_V R_P(x, n) \quad \text{i} \quad \overline{R}_P(n) = \sup_V R_P(x, n). \tag{3.3}$$

U slučaju jednostavne slučajne šetnje, gdje je $m(x)$ proporcionalno $deg(x)$, iz prethodno definiranog izostavljamo P i pišemo $R(\cdot)$.

Definicija 3.2.3. *Kažemo da graf V ima* eksponencijalni rast *ako je $R(n) \geq Cr^n$ za neke $C > 0$ i $r > 1$ te da graf V ima* polinomijalni rast *ako je $\overline{R}(n) \leq C(n + 1)^d$ za neke $C, d > 0$.*

Uobičajeno koristimo $m(x) = deg(x)$ za jednostavnu slučajnu šetnju, a u slučaju kada je V regularan, preferirat ćemo brojeću mjeru za koju je $m(x) = 1$. U svakom slučaju, eksponencijalni i polinomijalni rast ne ovise o odabranoj normalizaciji. Pokažimo odmah odnos između rasta i povratnosti.

Lema 3.2.4. *Ako je* $\liminf_n \left(R_P(x, n)/n^2\right) < \infty$ *za neki (ekvivalentno za svaki) $x \in V$, tada je (V, P) povratan.*

Dokaz. Upotrijebit ćemo Nash-Williamsov kriterij na particiju grafa V na skupove V_n, induciranu s udaljenosti $d(\cdot, \cdot)$. Odnosno metodom kratkog spajanja kratimo svaki od skupova $V_n = S(x, n) = \{y : d(y, x) = n\}, n \geq 0$ u jednu točku. Tako dobivamo mrežu kratkog spoja sa skupom vrhova $\mathcal{I} = \mathbb{N}_0$. U oznakama formule (2.9) $a'(n, n + 1)$ suma je provodljivosti bridova između $S(x, n)$ i $S(x, n + 1)$. Budući da je $S(x, n + 1) = B(x, n + 1) \setminus B(x, n)$, slijedi da je $m(S(x, n+1)) = R_P(x, n+1) - R_P(x, n)$. Posebno, $a'(n, n+1) \leq R_P(x, n+1) - R_P(x, n)$. Za konveksnu funkciju φ, uz sve težine λ_k jednake $\frac{1}{n}$, vrijedi Jensenova nejednakost

$$\varphi\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k).$$

Za $x > 0$ funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ je konveksna. Zbog toga je uz korištenje Jensenove nejednakosti i pretpostavke

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{a'(k-1,k)} \geq \frac{n^2}{\sum_{k=n+1}^{2n} a'(k-1,k)} \geq \frac{n^2}{R_P(x,2n)} > 0.$$

Po nužnom uvjetu konvergencije reda slijedi da red $\sum_n a'(n-1,n)^{-1}$ divergira, pa po korolaru (2.2.11) slijedi da je (V, P) povratan. □

Ovime nam je još lakše razumjeti zašto je jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}^2$ povratna. Napomenimo da se uvjet iz prethodne leme općenito ne može zamijeniti s

$$\liminf_n \left(R_P(n)/n^2\right) < \infty$$

jer postoje prolazna stabla za koja je $R(n) = 4n + 2$, za $n \geq 2$. Takvo je, na primjer, binarno stablo kojem u korijenu dodamo polupravac s početkom u korijenu. S druge strane, uvjet iz prethodne leme nije nužan za povratnost jer nije teško konstruirati povratna stabla koja imaju eksponencijalni rast, odnosno za koja vrijedi $R(x, n) \geq 2^n$. Konkretan ćemo primjer dati kasnije.

Za kraj, predstavit će se kriterij povratnosti za slučajne šetnje najbližeg susjeda na stablima koji uključuje *granicu u beskonačnosti* i pojam *logaritamskog kapaciteta*.

Definicija 3.2.5. *Neka je (M, θ) kompaktan metrički prostor takav da je $\theta(x, y) \leq 1$ za svaki $x, y \in M$ i neka je ν Borelova mjera na M.* Logaritamski potencijal *od ν funkcija je na M definirana s*

$$\phi_\theta(x|\nu) = \int_M -\log\theta(x,y)d\nu(y).$$

Logaritamska energija *od ν je*

$$I_\theta(\nu) = \int_M \phi_\theta(x|\nu)d\nu(x).$$

Logaritamski kapacitet *Borelova skupa $B \subset M$ je*

$$\mathrm{Cap}_\theta(B) = \sup\{\nu(B) : \nu \textit{ je nenegativna Borelova mjera takva da } I_\theta(\nu) \leq 1\}.$$

Napomena 3.2.6. Zbog $\theta(x,y) \leq 1$ za svaki $x, y \in M$ je $-\log\theta(x,y) \in [0,\infty]$ pa su prethodno definirani integrali nenegativni.

Lema 3.2.7. $\mathrm{Cap}_\theta(B) > 0$ *ako i samo ako postoji vjerojatnosna mjera ν s konačnom logaritamskom energijom takva da je $\nu(M \setminus B) = 0$.*

Dokaz. Neka je $\mathrm{Cap}_\theta(B) > 0$. To po definiciji znači da postoji Borelova mjera ν s $I_\theta(\nu) \leq 1$, takva da je $\nu(B) > 0$. Definiramo restrikciju od ν na B i normaliziramo:

$$\nu_B(A) := \frac{\nu(A \cap B)}{\nu(B)}.$$

Tada je ν_B vjerojatnosna mjera i vrijedi $\nu_B(M \setminus B) = 0$. Pridružena logaritamska energija je

$$\begin{aligned} I_\theta(\nu_B) &= \int_M \int_M -\log\theta(x,y)d\nu_B(y)d\nu_B(x) \\ &= \frac{1}{\nu(B)^2}\int_B \int_B -\log\theta(x,y)d\nu(y)d\nu(x) \\ &\leq \frac{1}{\nu(B)^2}\int_M \int_M -\log\theta(x,y)d\nu(y)d\nu(x) \\ &= \frac{1}{\nu(B)^2} I_\theta(\nu) < \infty, \end{aligned}$$

gdje nejednakost slijedi zbog prethodne napomene. Obrnuto, neka je ν vjerojatnosna mjera, $I_\theta(\nu) < \infty$ i $\nu(M \setminus B) = 0$. Tada je $\nu(B) > 0$ jer je u suprotnom $\nu \equiv 0$. Definiramo

$$\tilde{\nu}(A) := \frac{\nu(A)}{\sqrt{I_\theta(\nu)}}.$$

U tom je slučaju $I_\theta(\tilde{\nu}) = \left(\frac{1}{\sqrt{I_\theta(\nu)}}\right)^2 I_\theta(\nu) = 1$ i vrijedi $\tilde{\nu}(B) > 0$. Iz definicije logaritamskog kapaciteta slijedi da je $\mathrm{Cap}_\theta(B) \geq \tilde{\nu}(B) > 0$. □

Neka je sada T beskonačno, lokalno konačno stablo. Definiramo *(geodetsku) zraku* u T kao beskonačni put $\pi = [x_0, x_1, x_2, \dots]$ bez ponovljenih vrhova. Zraku možemo shvatiti i kao niz bridova. Za dvije zrake π, π' kažemo da su ekvivalentne ako je njihova simetrična razlika konačan skup. *Kraj* od T klasa je ekvivalencije zraka. *Granica* od T skup je svih krajeva od T, a označavamo ga s ϑT. Stavimo $\widehat{T} = T \cup \vartheta T$. Ako je $x \in T$ vrh i $\xi \in \vartheta T$, tada ξ kao klasa ekvivalencije ima jedinstvenog predstavnika, zraku koja počinje u x, u oznaci $\pi(x,\xi)$. Ako su x, y dva različita vrha od T, tada definiramo *granu* $T_{x,y}$, njezin zatvarač $\widehat{T}_{x,y}$ i rub $\vartheta T_{x,y}$ kao

$$\widehat{T}_{x,y} = \{w \in \widehat{T} : y \in \pi(x,w)\}, \quad T_{x,y} = T \cap \widehat{T}_{x,y} \quad i \quad \vartheta T_{x,y} = \vartheta T \cap \widehat{T}_{x,y}. \tag{3.4}$$

Definicija 3.2.8. *Neka je M neprazan skup.* Ultrametrika *na skupu M preslikavanje je $d : M \times M \to \mathbb{R}$ koje za svaki $x, y, z \in M$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

Posljednje se svojstvo nekad naziva i jaka nejednakost trokuta.

Nadalje, fiksirajmo korijen o. Za $v \in \widehat{T}$ pišemo $|v| = d(v, o)$. Za $v, w \in \widehat{T}$ njihova *konfluencija* $v \wedge w$ zadnji je zajednički vrh na zrakama $\pi(o, v)$ i $\pi(o, w)$. To je vrh od T, osim ako je $v = w \in \vartheta T$. U tom je slučaju $v \wedge w = v$. Sada definiramo ultrametriku

$$\theta(v, w) = \begin{cases} 0, & v = w, \\ \exp(-|v \wedge w|), & v \neq w, \end{cases} \tag{3.5}$$

koja inducira topologiju na $\widehat{T}$. Pokažimo najprije da je preslikavanje θ zaista ultrametrika. Prva su dva svojstva očita iz definicije od θ, dok se zbog simetričnosti konfluencije lako vidi da vrijedi i treće. Pokažimo da vrijedi i posljednje svojstvo iz definicije ultrametrike. Neka su $t, v, w \in \widehat{T}$. Želimo pokazati $\exp(-d(v \wedge w, o)) \leq \max\{\exp(-d(v \wedge t, o)), \exp(-d(t \wedge w, o))\}$. Budući da je T stablo s korijenom o, tada za proizvoljne $v, w \in \widehat{T}$ konfluencija $v \wedge w \neq o$ mora biti zadnji vrh zajedničkog konačnog puta s početkom u o na zrakama $\pi(o, v)$ i $\pi(o, w)$. U suprotnom bismo imali ciklus, što je u kontradikciji s definicijom stabla 1.1.5. Analogno tomu, udaljenosti $d(v \wedge t, o))$ i $d(t \wedge w, o))$ ne mogu istovremeno biti veće od $d(v \wedge w, o))$ jer bi vrhovi $v \wedge w, v \wedge t, t \wedge w$ činili vrhove ciklusa. Dakle, prethodno je definirano preslikavanje θ ultrametrika. Također, vidimo da vrijedi $\theta(v, w) \leq 1$ za svaki $v, w \in \widehat{T}$.

Nadalje, za svaki od bridova $e \in E(T)$ odabiremo orijentaciju tako da krajnji vrh brida koji je bliži korijenu stabla o označimo s e^-. Mjere ν na ϑT su u korespondenciji jedan na jedan s tokovima u od o do ∞ preko

$$u(e) = \nu(\vartheta T_{o,e^+}). \tag{3.6}$$

Ulaz u korijenu o je $\nu(\vartheta T)$. Ako se prisjetimo definicije 2.2.1, onda to što je u tok znači da je

$$\sum_{e^+ = x} u(e) - \sum_{e^- = x} u(e) = -\nu(\vartheta T)\delta_o(x).$$

Neka je sada P prijelazna matrica najbližeg susjeda slučajne šetnje na T. Analogno primjeru 2.2.7 definiramo mjeru za $x \in T$

$$m(x) = \begin{cases} 1, & x = o, \\ \prod_{e \in \pi(o,x)} \frac{p(e^-, e^+)}{p(e^+, e^-)}, & x \neq o. \end{cases} \tag{3.7}$$

Uz ovako je definiranu mjeru matrica P reverzibilna. Neka je $r : E(T) \to \langle 0, \infty \rangle$ pridružena funkcija otpora. Zamislimo r kao element duljine koji inducira novu funkciju udaljenosti d_r na T pomoću

$$d_r(x, y) = \sum_{e \in \pi(x,y)} r(e), \quad \text{za } x \neq y.$$

Pišemo $|v|_r = d_r(v, o)$. Kao u (3.5) možemo iskoristiti tu metriku kako bismo definirali novu ultrametriku θ_r na T.

Teorem 3.2.9. *Neka je T beskonačno, lokalno konačno stablo. Slučajna šetnja najbližeg susjeda na T prolazna je ako i samo ako je $Cap_{\theta_r}(\vartheta T) > 0$.*

Dokaz. Neka je ν Borelova mjera na ϑT te neka je u pridruženi tok od o do ∞ prema (3.6). Neka je θ_r ultrametrika definirana kao u (3.5). Pišemo $\phi_r = \phi_{\theta_r}$ i tvrdimo da za svaki $\xi \in \vartheta T$ vrijedi

$$\phi_r(\xi|\nu) = \sum_{e \in E(T)} r(e) u(e) \mathbf{1}_{\vartheta T_{o,e^+}}(\xi). \tag{3.8}$$

Neka je korijen o fiksan i neka je $e_n, n \geq 1$ niz uzastopnih bridova na zraci $\pi(o, \xi)$ tako da je $e_1^- = o$ te $e_n^+ = e_{n+1}^- = x_n$. Iz definicije 3.2.5 je

$$\begin{aligned}\phi_r(\xi|\nu) &= \int_{\vartheta T} -\log \theta_r(\xi, \eta) d\nu(\eta) \\ &= \int_{\vartheta T} |\xi \wedge \eta|_r d\nu(\eta).\end{aligned}$$

Iz definicije konfluencije $\xi \wedge \eta$, a naknadno korištenjem metode teleskopiranja, slijedi

$$\begin{aligned}\int_{\vartheta T} |\xi \wedge \eta|_r d\nu(\eta) &= |\xi|_r \int_{\vartheta T} d\nu(\xi) + \int_{\vartheta T; \xi \neq \eta} |\xi \wedge \eta|_r d\nu(\eta) \\ &= |\xi|_r \nu(\{\xi\}) + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \nu(\vartheta T_{o,x_n} \setminus \vartheta T_{o,x_{n+1}}) \\ &= |\xi|_r \nu(\{\xi\}) + \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} r(e_n) \nu(\vartheta T_{o,x_n}) - |x_N| \nu(\vartheta T_{o,x_{N+1}}) \right) \\ &= |\xi|_r \nu(\{\xi\}) + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} r(e_n) \left(\nu(\vartheta T_{o,x_n}) - \nu(\vartheta T_{o,x_{N+1}}) \right),\end{aligned}$$

uz $|x_N|_r = \sum_{n=1}^{N} r(e_n)$. Stavimo $f_N(n) = r(e_n) \max\{0, \nu(\vartheta T_{o,x_n}) - \nu(\vartheta T_{o,x_{N+1}})\}$. To je neopadajući niz po N čiji je limes po točkama $f(n) = r(e_n) \left(\nu(\vartheta T_{o,x_n}) - \nu(\{\xi\}) \right)$. Koristeći se teoremom o monotonoj konvergenciji i (3.6), dobivamo

$$\phi_r(\xi|\nu) = |\xi|_r \nu(\{\xi\}) + \sum_{n=1}^{\infty} r(e_n) \left(u(e_n) - \nu(\{\xi\}) \right).$$

Uz korištenje $0 \cdot \infty = 0$ kao i inače promatramo zadnju jednakost i uspoređujemo s (3.8). Ako je $\nu(\{\xi\}) = 0$, tada vidimo da dobivamo (3.8). Ako je $\nu(\{\xi\}) > 0$ i $|\xi|_r < \infty$, tada se zbog $|\xi|_r = d_r(\xi, o) = \sum_{e \in \pi(\xi,o)} r(e)$ izrazi $|\xi|_r \nu(\{\xi\})$ i $\sum_n r(e_n)\nu(\{\xi\})$ poništavaju i opet dobivamo (3.8). Konačno, ako je $\nu(\{\xi\}) > 0$ i $|\xi|_r = \infty$, tada su obje strane u (3.8) jednake $+\infty$. Integrirajući obje strane u (3.8), dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{\vartheta T} \phi_r(\xi|\nu) d\nu(\xi) &= \int_{\vartheta T} \left(\sum_{e \in E(T)} r(e) u(e) \mathbf{1}_{\vartheta T_{o,e^+}}(\xi) \right) d\nu(\xi) \\
&= \sum_{e \in E(T)} r(e) u(e) \int_{\vartheta T} \mathbf{1}_{\vartheta T_{o,e^+}}(\xi) d\nu(\xi) \\
&= \sum_{e \in E(T)} r(e) u(e) u(e),
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (3.6). Vidimo da je $I_{\theta_r}(\nu) = \langle u, u \rangle$, što je energija toka s obzirom na $l^2(E(T), r)$. Posljedično, postoji konačan tok energije s ulazom $i_0 = 1 = \nu(\vartheta T)$ od o do ∞ ako i samo ako postoji vjerojatnosna mjera ν na ϑT takva da je $I_{\theta_r}(\nu) < \infty$, to jest, po lemi 3.2.7, ako i samo ako je $\mathrm{Cap}_{\theta_r}(\vartheta T) > 0$. Tvrdnja slijedi iz teorema 2.2.4. □

Kao direktnu posljedicu prethodnog teorema dobivamo sljedeći korolar pomoću kojeg možemo objasniti povratnost češljaste rešetke iz primjera 2.2.12 iz općenitijeg gledišta.

Korolar 3.2.10. *Ako je ϑT prebrojiv i $|\xi|_r = \infty$ za svaki $\xi \in \vartheta T$, tada je slučajna šetnja najbližeg susjeda na T povratna.*

Dokaz. Ako je ν vjerojatnosna mjera na ϑT, onda mora postojati $\xi \in \vartheta T$ takav da je $\nu(\{\xi\}) > 0$. No tada je zbog pretpostavke

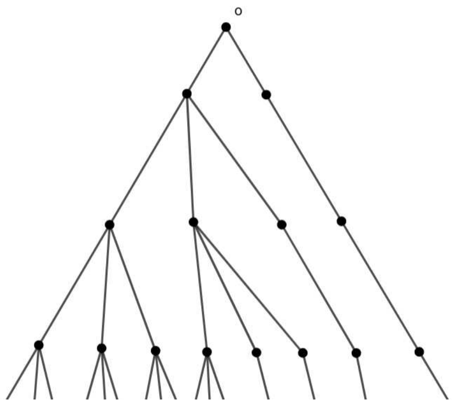
$$I_{\theta_r}(\nu) = \sum_{e \in E(T)} r(e) u(e)^2 = \sum_{e \in E(T)} r(e) \nu(\vartheta T_{o,e^+})^2 \geq |\xi|_r \nu(\{\xi\})^2 = \infty.$$

Po lemi 3.2.7 je $\mathrm{Cap}_{\theta_r}(\vartheta T) = 0$, pa je po prethodnom teoremu slučajna šetnja povratna. □

Ovo se posebno može primijeniti na jednostavnu slučajnu šetnju na stablu s prebrojivo mnogo krajeva i također na sve slučajne šetnje najbližeg susjeda na stablima za koja je $\inf_{E(T)} r(e) > 0$. Završnim primjerom pokazujemo da i uz eksponencijalni rast stablo može biti povratno, odnosno uvjet u lemi 3.2.4 nije nužan za povratnost.

Primjer 3.2.11. Povratno stablo s eksponencijalnim rastom oko svake točke
Neka je T stablo s korijenom o koje konstruiramo na sljedeći način: o ima dva „potomka”. Za $n \geq 1$ sfera $S(o, n) = \{x \in T : d(x, o) = n\}$ ima 2^n elemenata koje označavamo $x_{i,n}$ za $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. Svaki od tih vrhova ima svoga „pretka” u $S(o, n-1)$. Za $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$

vrhovi $x_{i,n}$ imaju tri „potomka" $x_{3i-2,n+1}, x_{3i-1,n+1}, x_{3i,n+1}$, dok vrhovi $x_{2^{n-1}+i,n}$ imaju samo jednog „potomka" $x_{3\cdot 2^{n-1}+i,n}$. Ako gledamo jednostavnu slučajnu šetnju na stablu i koristimo se tvrdnjom da je $m(x)$ brojeća mjera, onda je zbog definicije 3.2.2 $R(o,n) = m(B(o,n)) = m\left(\bigcup_{i=o}^{n} S(o,i)\right) = 2^{n+1} - 1$. Osim najljevije zrake $[o, x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, \dots]$, svaka geodetska zraka s početkom u o ima najviše konačno mnogo vrhova s tri „potomka". Posebno, ϑT je prebrojiv i jednostavna je slučajna šetnja na T povratna.



Slika 3.1: Povratno stablo

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, Bilješke s predavanja, PMF-MO, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/np/NP_21_22.pdf`, pristupljeno u rujnu 2024.

[2] E. Hille, *Analytic function theory*, sv. 2, American Mathematical Soc., 2002.

[3] I. Nakić, *Diskretna matematika, skripta*, PMF-MO, Zagreb, `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf`, pristupljeno u lipnju 2024.

[4] C. St J. A. Nash-Williams, *Random walk and electric currents in networks*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, sv. 55, Cambridge University Press, 1959, str. 181–194.

[5] G. Pólya, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz*, Mathematische Annalen **84** (1921), br. 1, 149–160.

[6] W. Rudin, *Real and complex analysis, 3rd ed.*, McGraw-Hill, Inc., USA, 1987, ISBN 0070542341.

[7] Z. Vondraček, *Markovljevi lanci*, PMF-MO skripta, Zagreb, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml12-predavanja.html`, pristupljeno u lipnju 2024.

[8] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, br. 138, Cambridge university press, 2000.

Sažetak

U ovom radu glavni je cilj proučiti prolaznost i povratnost slučajnih šetnji na beskonačnim grafovima ovisno o geometriji grafa. Na početku rada dane su definicije pojmova iz teorije grafova i teorije Markovljevih lanaca te su obrađeni osnovni, ali i drugi važni rezultati vezani uz Markovljeve lance. Uvodi se pojam slučajne šetnje na grafu te se definiraju njezina svojstva poput ograničenog dosega i uniformne ireducibilnosti.

Promatranjem skupova vrhova i bridova grafa kao Hilbertovih prostora s mjerom, uvođenjem pojmova iz teorije potencijala kao što su provodljivost, otpor, tok i energija te pridruživanjem pojma mreže Markovljevu lancu obrađeni su razni nužni i dovoljni uvjeti prolaznosti reverzibilnih i nereverzibilnih Markovljevih lanaca, jedan od kojih je postojanje konačnog toka energije. Također, definiranjem mreže kratkog spoja pokazan je Nash-Williamsov kriterij povratnosti.

Primjenom dobivenih rezultata napravljena je usporedba, u vidu svojstva povratnosti, različitih slučajnih šetnji na grafu s ograničenom geometrijom, a zatim i usporedba različitih grafova.

Naposljetku, dodatno se proučava povratnost slučajne šetnje na beskonačnim stablima koristeći se funkcijom rasta slučajne šetnje te promatrajući beskonačne putove i logaritamski kapacitet.

Summary

In this thesis, the main goal is to study transience and recurrence of random walks on infinite graphs depending on the geometry of the graph. At the beginning of the thesis, definitions of terms from the theory of graphs and the theory of Markov chains are given, and basic and other important results related to Markov chains are discussed. The concept of a random walk on a graph is introduced and its properties such as bounded range and uniform irreducibility are defined.

By observing the sets of vertices and edges of the graph as Hilbert spaces with measure, by introducing terms from potential theory such as conductivity, resistance, flow and energy, and by associating the term network to the Markov chain, various necessary and sufficient conditions for transience of reversible and non-reversible Markov chains have been studied, one of which is the existence of a finite flow of energy. Also, by defining the shorted network, the Nash-Williams recurrence criterion was demonstrated.

By applying the obtained results, a comparison was made, in terms of the recurrence property, of different random walks on a graph with bounded geometry, and then a comparison of different graphs.

Finally, the return of the random walk on infinite trees is further studied using the growth function of the random walk and looking at infinite paths and logarithmic capacity.

Životopis

Rođen sam 4. 11. 1997. u Zagrebu, gdje sam završio osnovnu školu i XV. gimnaziju. Upisao sam preddiplomksi studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. Tijekom studija sudjelovao sam na Sveučilišnim natjecanjima Grada Zagreba kao član studentske futsal ekipe PMF-a s kojom sam ostvario dobre rezultate.