Rytzova konstrukcija i geometrija dekompozicije singularnim vrijednostima

Matacun, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Matacun

RYTZOVA KONSTRUKCIJA I GEOMETRIJA DEKOMPOZICIJE SINGULARNIM VRIJEDNOSTIMA

Diplomski rad

Zagreb, studeni, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Matacun

RYTZOVA KONSTRUKCIJA I GEOMETRIJA DEKOMPOZICIJE SINGULARNIM VRIJEDNOSTIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, studeni, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________________ , predsjednik
2. __________________________________ , član
3. __________________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ___________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _________________________
2. _________________________
3. _________________________

Veliko hvala mentoru, prof. dr. sc. Juraju Šiftaru, na ukazanoj prilici, pruženoj pomoći, strpljenju i toleranciji tijekom pisanja ovoga rada. Hvala na svim detaljnim uputama, uloženom vremenu i trudu, te prenesenom stručnom znanju. Posebno hvala na ugodnoj komunikaciji zbog koje je bilo lakše izraditi diplomski rad.

Puno hvala mojim roditeljima koji su mi od prvoga dana bezuvjetna potpora i glas razuma. Što su moja motivacija i snaga u svim trenutcima, te što su mi omogućili sve što me napravilo osobom koja sam danas.

Hvala mojoj sestri Mariji i bratu Ivanu što su vjerovali u mene i bili mi emocionalna potpora, te teti Tatjani koja je uz moje roditelje omogućila da završim studij. Hvala prijateljicama koje su mi olakšale sve dane dugogodišnjeg obrazovanja, a posebno Sari, cjeloživotnoj prijateljici.

Hvala vam svima jer sam zbog vas takva kakva jesam!

Sadržaj

Uvod

Čovjek je od davnih dana imao potrebu za korištenjem matematike iako je nije oduvijek tako zvao. Javljala se potreba za mjerenjem zemljišta, volumena smočnica ili samih posuda te je tako nastajala geometrija. Danas kao grana matematike, geometrija, proučava položaj, oblik i svojstva geometrijskih likova i tijela u prostoru te u kakvome sve odnosu oni mogu biti. Često se isprepliće s drugim disciplinama kao što su linearna algebra, matematička analiza, topologija, diferencijalne jednadžbe i slično. Time geometrija postaje apstraktnija.

Geometriju prostora, u našem slučaju euklidskog prostora i posebno ravnine, povezat ćemo s linearnom algebrom koja proučava vektorske prostore, sustave linearnih jednadžbi i linearne operatore.

Na studiju matematike upoznali smo se s različitim oblicima povezanosti geometrije s algebrom, naročito kroz kolegije *Analitička geometrija, Linearna algebra, Euklidski prostori, Vektorski prostori* i *Algebarske strukture*. Kroz konstruktivnu geometriju upoznali smo se s konstrukcijom elipse i njezinim svojstvima, nakon čega smo je povezali s kružnicom pri afinom preslikavanju, s kojim smo se detaljno susreli na kolegijima *Konstruktivne metode u geometriji* i *Euklidskim prostorima*. Naime, kružnica se pri perspektivno afinom preslikavanju preslikava u krivulju drugoga stupnja. Ovisno o tome ima li kružnica 0, 1 ili 2 zajedničke točke s praslikom beskonačno dalekog pravca, slika kružnice će biti elipsa, parabola ili hiperbola, redom. Konstrukcijom elipse bavili smo se i velikim dijelom na *Nacrtnoj geometriji* u kojoj smo se, između ostalog, upoznali s Rytzovom[1] konstrukcijom elipse pomoću para konjugiranih promjera. Osim toga, upoznati smo s načinima projiciranja sfere na ravninu. Znamo da projekcija sfere na ravninu može biti kružnica, u slučaju ortogonalne aksonometrije, te elipsa, pri kosoj aksonometriji.

[1]David Rytz von Brugg (1801.-1868.) bio je švicarski matematičar i profesor. Studirao je matematiku u Göttingenu i Leipzigu.

Rytzova konstrukcija će nam pomoći pri konstruktivnom određivanju singularnih vrijednosti matrice/operatora. S dekompozicijom singularnih vrijednosti (kraće SVD) upoznat ćemo se ovim radom jer nije bila obuhvaćena programima studija matematike. Rad djelomično slijedi prezentaciju *From Rytz to the Covariance Ellipsoid* profesora H. Stachela ([8]) no uključeni su i vlastiti primjeri i razmatranja koja nisu obuhvaćena tom prezentacijom.

Prvo poglavlje donosi definiciju elipse i rezultate vezane uz nju kao uvid u izgled slike projekcije kružnice, odnosno sfere na ravninu pri afinom preslikavanju, odnosno kosoj aksonometriji. Pri tome su objašnjeni pojmovi „afino preslikavanje“ i „kosa aksonometrija“ uz koje su dani Rytzova konstrukcija i Pohlkeov[2] teorem kao jedni od važniji rezultata vezani uz ovaj rad.

U drugom su poglavlju dani važniji teoremi vezani uz linearnu algebru kako bi lakše mogli pratiti temu rada. Zapisane su definicije i teoremi vezani uz dijagonalizaciju, hermitske operatore/matrice, svojstvene vrijednosti i vektore, simetrične, nenegativne operatore/matrice.

U trećem poglavlju navest ćemo primjere u kojima je prikazana veza linearne algebre i afinog projiciranja kružnice i kose aksonometrije sfere na ravninu koji ilustriraju geometrijski smisao dekompozicije po singularnim vrijednostima. Kroz primjere ćemo uočiti kako nacrtana i konstruktivna geometrija mogu pomoći pri konstruktivnom određivanju singularnih vrijednosti matrice/operatora.

Četvrto poglavlje, ujedno i zadnje, sastoji se u objašnjenju dekompozicije po singularnim vrijednostima općenito, nakon što smo se s osnovnim idejama upoznali kroz geometrijsku motivaciju.

[2] Karl Wilhelm Pohlke (1810. – 1876.) bio je njemački slikar koji je postavio temeljnu tvrdnju aksonometrijske projekcije, danas znanu kao Pohlkeov teorem. Time je 1860. godine postavljen za profesora Deskriptivne geometrije i Perspektive

Poglavlje 1

Uvod iz geometrije elipse

Geometrijske pojmove i tvrdnje u radu promatramo u okviru euklidske ravnine E^2 i euklidskog prostora E^3, s pripadnim unitarnim prostorom $\mathbb{R}^2$, odnosno $\mathbb{R}^3$.

Afine transformacije zadane su kao kompozicije linearnog operatora i translacije.

Linearni operatori prikazani su matrično, u pravilu, u ortonormiranoj bazi ili paru ortonormiranih baza. Kartezijev koordinatni sustav $(O; e_1, e_2, \dots, e_n)$ sastoji se od izabrane točke O euklidskog prostora kao ishodišta i ortonormirane baze $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ unitarnog prostora $\mathbb{R}^n$.

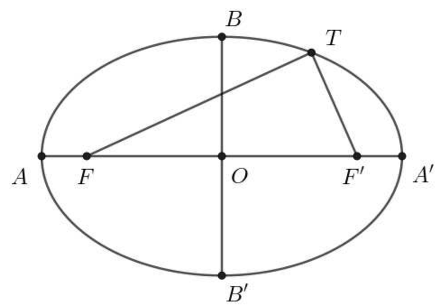
1.1 Definicija i svojstva elipse

Definicija 1.1.1 *Dane su točke F i F' i duljina $2a$ takva da je $|FF'| < 2a$. Skup svih točaka T takvih da vrijedi*

$$|F\,T| + |F'T| = 2a$$

nazivamo elipsa sa žarištima (fokusima) F i F' te velikom poluosi a. Dužine $\overline{FT}$ i $\overline{F'T}$ nazivaju se radijvektori točke T. ([11], Poglavlje 5)

Točku T nazivamo *vanjska* točka elipse ako vrijedi da je zbroj udaljenosti $|F\,T| + |F'T|$ veći od $2a$, a točku za koju je taj zbroj manji od $2a$ nazivamo *unutrašnja* točka elipse.



Slika 1.1.1 Elipsa

Elipsa je centralno simetrična s obzirom na polovište O dužine $\overline{FF'}$, što slijedi iz same definicije elipse. Stoga, točku O nazivamo središtem elipse. Također, elipsa je očito simetrična s obzirom na pravac FF'i simetralu dužine $\overline{FF'}$ koje redom nazivamo glavnom i sporednom osi elipse.

Udaljenost $e = |OF| = |OF'|$ nazivamo linearnim ekscentricitetom.

Budući da je $|FF'| < 2a$, onda na glavnoj osi izvan dužine $\overline{FF'}$ postoje dvije točke A i A' simetrične s obzirom na središte O koje leže na elipsi. Točke A i A' nazivaju se glavnim tjemenima elipse te je njihova udaljenost od ishodišta O jednaka a i naziva se velikom poluosi, što slijedi iz definicije elipse.

Na sporednoj osi nalaze se točke B i B' simetrične s obzirom na središte O i nazivaju se sporednim tjemenima elipse, te je duljina točaka od ishodišta jednaka $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ i nazivamo je mala poluos elipse jer je $b < a$.

Jednadžba elipse

U pravokutnom koordinatnom sustavu možemo odabrati točke F i F' tako da one leže na x osi, te da je polovište O dužine $\overline{FF'}$ ishodište koordinatnog sustava. Tada koordinate žarišta iznose $F = (-e, 0)$ i $F' = (e, 0)$. Neka je $T = (x, y)$ proizvoljna točka elipse. Udaljenost od žarišta F i F' do točke T označimo $|F\,T| = d$ i $|F'\,T| = d''$. Tada vrijedi $d = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$, $d' = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$.

Budući da točka T leži na elipsi, po definiciji vrijedi $d + d' = 2a$. Nakon uvrštavanja i kratkog računa dobivamo središnju jednadžbu elipse:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1. \tag{1.1}$$

Jednadžbu elipse možemo pisati i u obliku

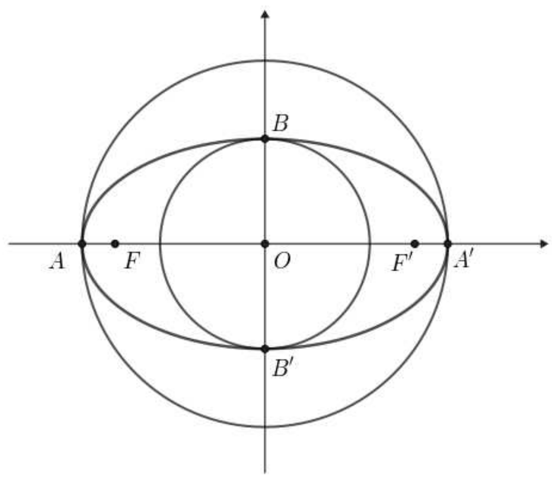
$$b^2x^2 + y^2a^2 = a^2b^2. \tag{1.2}$$

Ako središte elipse nije u ishodištu koordinatnog sustava već je elipsa translatirana duž osi x za dužinu p, te isto tako duž osi y za dužinu q onda jednadžba elipse glasi

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1. \tag{1.3}$$

Tjemene kružnice elipse

Tjemene kružnice elipse su, kako sam naziv kaže, kružnice koje prolaze parom glavnih, odnosno sporednih tjemena a središte mi je središte elipse. Tjemena kružnica koja prolazi parom glavnih tjemena naziva se *glavnom kružnicom elipse,* dok se tjemena kružnica koja prolazi sporednim tjemenima naziva *središnja kružnica elipse.*



Slika 1.1.2. Tjemene kružnice elipse

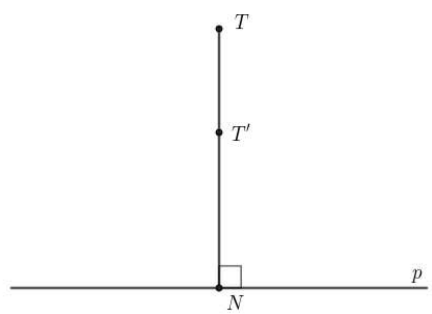
U slučaju da se glavna i središnja kružnica elipse preklapaju tada je elipsa zapravo kružnica. Odnosno, ako je $a = b$ onda je središnja kružnica polumjera a i tada kružnicu možemo promatrati kao poseban slučaj elipse kojoj su duljine poluosi jednake. Zbog $e^2 = a^2 - b^2$ možemo reći da je kružnica elipsa linearnog ekscentriciteta $e = 0$.

Sada elipsu možemo promatrati kao kontrakciju kružnice.

1.2 Elipsa kao kontrakcija kružnice

Prije nego pokažemo da je slika kružnice kontrakcija elipse, reći ćemo što je to kontrakcija.

Neka je $0 < k < 1$ realan broj te neka je p proizvoljan pravac ravnine. Iz bilo koje točke T ravnine spustimo okomicu na pravac p i nožište označimo s N. Neka je odabrana točka T' na dužini $\overline{TN}$ takva da vrijedi $|T'N| = k \cdot |TN|$. Takvo preslikavanje ravnine na samu sebe nazivamo *kontrakcijom prema pravcu* p. Realan broj k nazivamo *koeficijentom kontrakcije*, a pravac p *osi kontrakcije.*([3], str. 379.)



Slika 1.2.1 Kontrakcija točke

Svaka kontrakcija je bijekcija, a točke pravca p su fiksne točke kontrakcije. Tako se svaki pravac okomit na os kontrakcije preslika u samog sebe i fiksan je, ali ne točku po točku kao što je slučaj s osi kontrakcije.

Prikažimo kontrakciju u koordinatnom sustavu. Neka je os x os kontrakcije te neka je točka $T = (x, y)$ proizvoljna točka ravnine, k neka je koeficijent kontrakcije i $T' = (x', y')$ slika od T. Očito je veza između koordinata točaka dana s

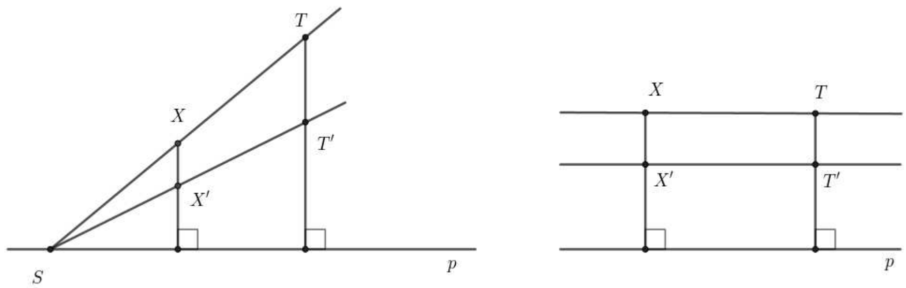
$$x' = x, \quad y' = ky. \tag{1.4}$$

Odnosno,

$$x = x', \; y = \frac{1}{k} y'. \tag{1.5}$$

Pokažimo da kontrakcija preslikava pravac u pravac. Neka točka $T = (x, y)$ leži na pravcu $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$, onda zbog (1.5) vrijedi $Ax' + \frac{B}{k} y' + C = 0$. Dakle, slika $T' = (x', y')$ točke $T = (x, y)$ leži na pravcu $Akx' + By' + Ck = 0$ što je uistinu pravac jer $A^2k^2 + B^2 \neq 0$.

Nadalje, presjek pravca s osi kontrakcije je također i presjek njegove slike s tom osi. U slučaju da je pravac paralelan s osi kontrakcije, tada je i njegova slika paralelna s osi.



Slika 1.2.2 Kontrakcija dužine

Osim što je kontrakcija određena s osi i koeficijentom kontrakcije, ona je određena i s osi kontrakcije i parom pridruženih točaka T i T'. Naime, neka je zadana os kontrakcije p i par pridruženih točaka T i T'. Povučemo li pravac XT gdje je X proizvoljna točka ravnine i njegov presjek s osi p označimo sa S tada je slika pravca XT pravac ST' pa slika X' točke X mora ležati na tom pravcu. Osim toga, X' mora ležati na okomici iz točke X na pravac p stoga je točka X' presjek pravca ST' i okomice iz točke X na pravac p.

Propozicija 1.2.1 *Kontraktibilna slika kružnice polumjera a, kojoj je os na osi kontrakcije, elipsa je, kojoj je središte u središtu kružnice s velikom poluosi a i malom poluosi $b = ka$, gdje je k koeficijent kontrakcije.* ([3], str. 381)

Dokaz. Neka je os kontrakcije os x, k koeficijent kontrakcije a središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava. Jednadžba kružnice glasi $x^2 + y^2 = a^2$, a jednadžba njene slike $(x')^2 + \frac{(y')^2}{k^2} = a^2$, tj. $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{k^2a^2} = 1$ što je jednadžba elipse s poluosima a i $b = ka$.

∎

Kontrakcija je poseban slučaj perspektive afinosti.

1.3 Perspektivna afinost

Definicija 1.3.1 *Perspektivna afinost u ravnini je bijekcija skupa točaka i skupa pravaca na sebe koja zadovoljava ova svojstva:*

1) *Čuva incidenciju, tj. ako točka A pripada pravcu* p *tada slika* A' *točke A pripada slici* p' *pravca* p*;*
2) *Spojnice pridruženih točaka su međusobno paralelne. Te spojnice pridruženih točaka nazivamo zrakama afinosti.*
3) *Postoji točno jedan pravac o u ravnini kojega je svaka točka pridružena sama sebi, tj. pravac* o *je fiksan po točkama. Pravac* o *nazivamo os perspektivne afinosti.*

([5])

Za bolje razumijevanje, potrebno je navesti nekoliko teorema koji se mogu pronaći u knjizi *Palman, Nacrtna geometrija* ([5]) vezanih uz perspektivnu afinost . Teoremi se lako dokazuju korištenjem definicije perspektivne afinosti.

Teorem 1.3.1 *Perspektivna afinost je jednoznačno određena, ako je zadana njezina os* o *i jedan par pridruženih točaka* A, A'*, s tim da ni jedna točka tog para ne leži na osi* o*, niti je njihova spojnica paralelna sa osi* o*.*

Perspektivnu afinost zadajemo njenom osi o i parom pridruženih točaka A, A' i označavamo $(o\colon A, A')$

Teorem 1.3.2 *Paru paralelnih pravaca* a *i* b *u perspektivnoj afinosti pridružen je par paralelnih pravaca.*

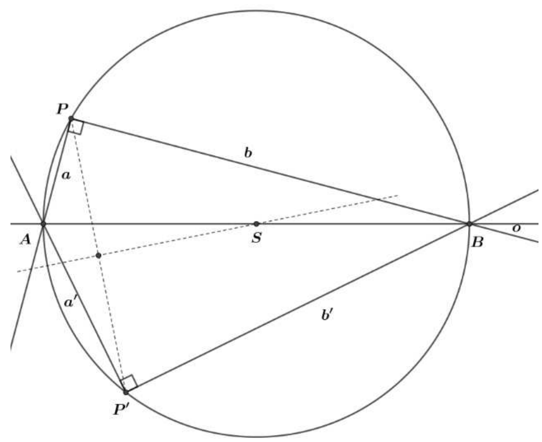
Teorem 1.3.3 *Djelišni omjer što ga tvori bilo koji par pridruženih točaka* X *i* X' *sa sjecištem K zrake afinosti* XX' *s osi* o *je konstantan.*

Korolar 1.3.1 *Polovište dužine preslikava se u polovište slike te dužine.*

Teorem 1.3.4 *U danom skupu pravih kutova s vrhom u točki $P, P \notin o$, postoji uvijek jedan pravi kut koji se danom perspektivnom afinošću preslikava u pravi kut.*

Dokaz:

Analiza: Neka je P' slika točke P. Pretpostavimo da da su a, b zrake pravoga kuta koji se preslikava u pravi kut $\measuredangle a'P'b'$. Prema tome, pravci a i a', te b i b' sijeku u točkama A i B na osi o. Obrat Talesovog teorema o obodnom kutu nad premjerom nam govori da su točke P, P', A i B točke na kružnici promjera $\overline{AB}$. Označimo središte spomenute kružnice sa S, tada je točka S simetrala dužine $\overline{PP'}$.



Slika 1.3.1 Afina slika pravog kuta

Konstrukcija: Konstruiramo afinu sliku točke P, točku P', te konstruiramo simetralu novonastale dužine $\overline{PP'}$. Presjek te simetrale i osi o je točka S. Opišemo kružnicu radijusa $|SP|$ sa središtem u točki S. Presjek kružnice i osi o su točke A i B, a traženi pravi kut kojemu je slika pravi kut je $\measuredangle APB$.

Rasprava: Konstrukcija je uvijek izvediva osim u slučaju kada su zrake afinosti okomite na os afinosti. No, tada je jedan krak pravih kutova paralelan s osi, a drugi je okomit na os.

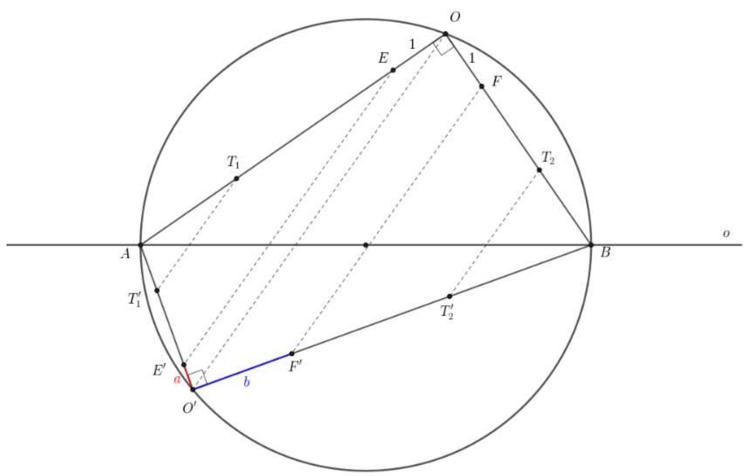
■

Kontrakcija je perspektivna afinost kojoj su zrake afinosti okomite na os afinosti i vrijedi $|T'N| = k \cdot |TN|$ gdje je T proizvoljna točka, N nožište okomice iz T na os afinosti te je $0 < k < 1$ realan broj.

Kao što smo pokazali da je elipsa kontrakcija kružnice tako možemo pokazati da je elipsa perspektivno afina slika kružnice.

Teorem 1.3.5 *Perspektivno afina slika kružnice je elipsa.*

Dokaz. Neka je zadana perspektivna afinost s osi o i parom točaka O i O'. Prema teoremu 5 postoje okomiti pravci OA i OB, gdje su točke A i B točke na osi o, koji se preslikavaju u međusobno okomite pravce $O'A$, $O'B$. Neka su OA, OB osi koordinatnog sustava s ishodištem u točki O te neka su točke E, F jedinične toče na osima, tada se te točke pri afinom preslikavanju preslikaju u točke E', F' na pravcima $O'A$, $O'B$. Budući da afino preslikavanje ne čuva udaljenosti, neka je $|O'E'| = a, |O'F'| = b$.



Slika 1.3.2 Perspektivno afina slika kružnice je elipsa

Odaberimo točke T_1, T_2 koje leže na osima OA, OB. Njihove koordinate su $T_1 = (x, 0)$, $T_2 = (0, y)$. Perspektivna afinost čuva omjere stoga su koordinate njihovih slika $T_1' = (x', 0) = (ax, 0)$, $T_2' = (0, y') = (0, by)$. Odnosno, bilo koja točka $T = (x, y)$ preslika se u točku $T' = (ax, by)$.

Tako će se kružnica s jednadžbom $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ preslikati u krivulju s jednadžbom

$$\left(\frac{x'}{a} - \frac{p'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b} - \frac{q'}{b}\right)^2 = r^2.$$

Središte kružnice (p, q) pri perspektivnoj afinosti preslika se u središte krivulje $(p', q') = (ap, bq)$. Sređivanje dobivene jednadžbe krivulje daje sljedeće

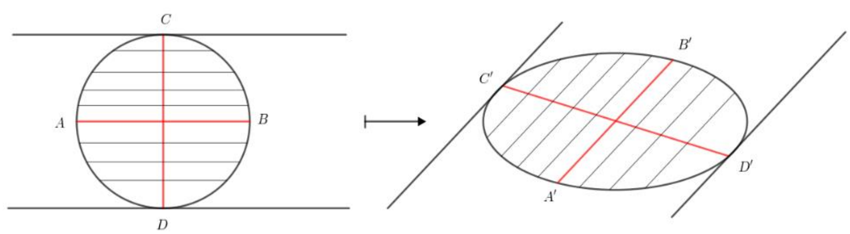
$$\frac{(x' - p')^2}{(ar)^2} + \frac{(y' - q')^2}{(br)^2} = 1.$$

Odnosno, krivulja je elipsa.

■

Pri perspektivnoj afinosti svaki se promjer, tangenta, diralište tangente i polovišta tetiva kružnice preslikavaju u promjer, tangentu, diralište tangente i polovišta tetiva elipse. Neka je S središte kružnice te neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ međusobno okomiti promjeri. Promjer $\overline{CD}$ raspolavlja sve tetive paralelne s AB i prolazi diralištima obiju tangenata paralelnih s promjerom $\overline{AB}$. Afinim se preslikavanjem tada središte kružnice S preslikava u središte elipse S', promjer $\overline{AB}$ u promjer $\overline{A'B'}$, promjer $\overline{CD}$ u promjer $\overline{C'D'}$ koji također raspolavlja sve tetive paralelne s $A'B'$ i prolazi diralištima obiju tangenata paralelnih s promjerom $\overline{A'B'}$.

Promjere $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ nazivamo *konjugiranim promjerima* elipse koji općenito nisu okomiti. Naime, kut između para konjugiranih promjera je šiljasti kut osim u slučaju kada su ti promjeri velika i mala os elipse kada je kut među njima pravi.



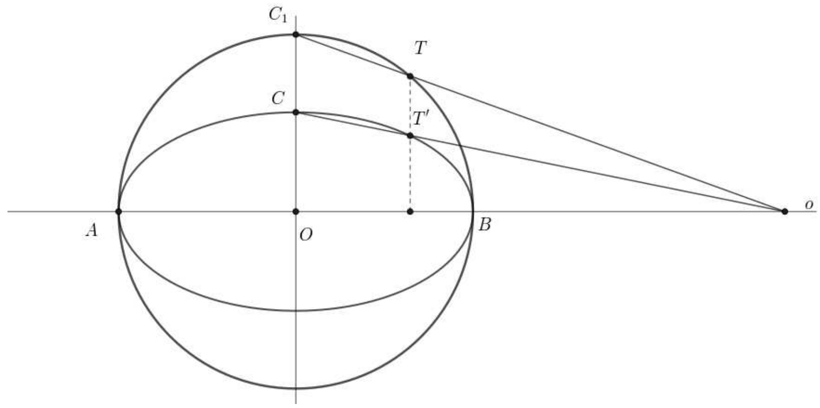
Slika 1.3.3 Konjugirani promjeri

Sada se lako može provesti konstrukcija elipse.

Konstrukcija elipse pomoću jedne tjemene kružnice

Neka je zadana perspektivna afinost s osi afinosti o i parom točaka C, C_1 pri čemu je pravac CC_1 okomit na os o te je točka O presjek pravca CC_1i osi afinosti o. Zadana je kružnica k koja prolazi kroz C_1 i ima središte u točki O.

Promotrimo koordinatni sustav u kojem su osi koordinatnog sustava pravci o i CC_1 . Neka su koordinate točaka $C(0, b)$ i $C_1(0, a)$, $a > b$. Perspektivno afina slika $T'(x', y')$ točke $T(x, y)$ koja se nalazi na kružnici dobivena je kao presjek zrake afinosti kroz T i pravca koji prolazi točkom C i fiksnom točkom pravca C_1T.



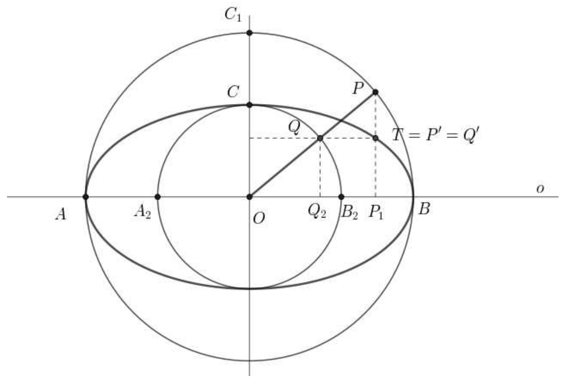
Slika 1.3.4 Konstrukcija elipse pomoću jedne tjemene kružnice

Afinost čuva omjere pa vrijedi $y' : y = b : a$, odnosno $y = \frac{a}{b}y'$.Isto tako vrijedi da je $x = x'$. Budući da točka $T(x, y)$ pripada kružnici, njene koordinate zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 = a^2$. Nakon uvrštavanja $y = \frac{a}{b}y'$ i $x = x'$ u $x^2 + y^2 = a^2$ lako je vidjeti da točka T' pripada elipsi kojoj je velika poluos polumjer kružnice , a mala poluos dužnica $\overline{CO}$, tj. $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$.

Time je elipsa dobivena kao afina slika tjemene kružnice. Također, elipsa se može dobiti kao afina slika male tjemene kružnice, tada bi os afinosti bio pravac CC_1, a par pridruženih točaka A, B.

Konstrukcija elipse pomoću dvije tjemene kružnice

Neka je zadana velika tjemena kružnica $k(O, |OC_1| = a)$ koja se afinošću s osi AO i parom točaka C, C_1 preslikava u elipsu, te neka je zadana mala tjemena kružnica $k(O, |OA_2| = b)$ koja se afinošću s osi CO i parom točaka A, A_2 preslikava u istu tu elipsu. Polupravac povučen iz središta O siječe veliku i malu kružnicu u točkama P, Q. Točka $P(x_P, y_P)$ se prvom afinošću preslikava u točku $P'\left(x_P, \frac{b}{a}y_P\right)$, dok se točka $Q\left(x_Q, y_Q\right)$ drugom afinošću preslikava u $Q'\left(\frac{a}{b}x_Q, y_Q\right)$. Potrebno je pokazati da su točke P' i Q' jednake.



Slika 1.3.5 Konstrukcija elipse pomoću dvije tjemene kružnice

Trokuti ΔOQQ_1 i ΔOPP_1 su slični pa vrijedi $\frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{|OQ_1|}{|OP_1|}$, tj. $\frac{b}{a} = \frac{x_Q}{x_P}$ iz čega se da zaključiti da su prve koordinate promatranih točaka jednake. Odnosno, $x_P = \frac{a}{b} x_Q$.

Nadalje, $\frac{|OQ|}{|OP|} = \frac{|QQ_1|}{|PP_1|}$, tj. $\frac{b}{a} = \frac{y_Q}{y_P}$ pa je $y_Q = \frac{b}{a} y_P$. Točke imaju jednake obje koordinate pa vrijedi $P' = Q' = T$. Budući da zbog prve afinosti točka T pripada zraci afinosti kroz P, odnosno zbog druge afinosti pripada zraci afinosti kroz točku Q, točka T se može dobiti kao presjek okomica kroz točke P i Q.

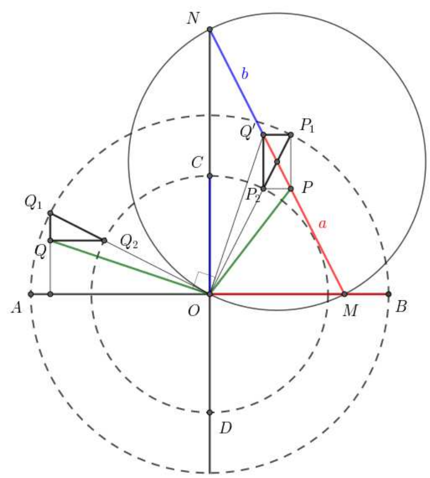
Pomoću tjemenih kružnica lako je pokazati da se mogu odrediti glavne osi elipse u slučaju kada je zadan par konjugiranih promjera elipse. Takva konstrukcija naziva se Rytzova konstrukcija elipse.

1.4 Rytzova konstrukcija elipse

Neka su zadani konjugirani polumjeri elipse $\overline{OP}$ i $\overline{OQ}$. Rotacijom polumjera $\overline{OQ}$ za 90° dobiva se dužina $\overline{OQ'}$. Konstruira se polovište R dužine $\overline{PQ'}$ te opiše kružnica $k(R, |OR|)$ koja siječe pravac PQ' u točkama M i N. Tada se glavne osi nalaze na pravcima OM, ON i njihove duljine iznose $|MQ'|$ i $|NQ'|$.

Dokaz 1

Neka se rotacijom pravokutnog trokuta ΔQ_1QQ_2 za 90° točka Q_1 preslikava se u točku P_1. Tada se trokut ΔQ_1QQ_2 pri spomenutoj rotaciji preslikava u trokut $\Delta P_1Q'P_2$. Trokuti ΔQ_1QQ_2 i ΔP_1PP_2 su sukladni trokuti jer su im šiljasti kutovi, kutovi s okomitim kracima te je $|P_1P_2| = |Q_1Q_2|$. Također, vrijedi i sukladnost $\Delta Q_1QQ_2 \cong \Delta P_1PP_2 \cong \Delta P_1Q'P_2$. Prema tome, četverokut $PP_1Q'P_2$ je pravokutnik čije su stranice paralelne s osima elipse. Označimo s R presjek dijagonala tog pravokutnika te neka pravac PQ' siječe veliku i malu os u točkama M i N.



Slika 1.4.1 Rytzova konstrukcija

Potrebno je dokazati da vrijedi $|MQ'| = a$ i $|\mathrm{NQ'}| = \mathrm{b}$. Trokut ΔP_2RP je jednakokračan jer je R središte pravokutnika $PP_1Q'P_2$. Vrijedi $|RQ'| = |RP_1| = |RP|$. Zbog sličnosti trokuta $\Delta P_2RP \cong \Delta ORM$, trokut ΔORM je jednakokračan s osnovicom $\overline{OM}$. Iz navedenog slijedi,

$$a = |OP_1| = |OR| + |RP_1| = |MR| + |RQ'| = |MQ'|.$$

Analogno, ΔNOR je jednakokračan trokut iz kojeg dobivamo

$$b = |OP_2| = |OR| - |RP_2| = |NR| - |Q'R| = |NQ'|.$$

Možemo zaključiti da točke M, N i O leže na kružnici sa središtem u točki R i radijusom $|MN|$ jer vrijedi $|OR| = |RM| = |RN|$.

■

Rytzova konstrukcija može se dokazati koristeći analitičku geometriju.

Dokaz 2

Potrebno je dokazati da točke M i N leže na kružnici sa središtem u točki R, radijusa $|RO|$ gdje je O središte elipse te da vrijedi $|MQ'| = a$ i $|NQ'| = b$.

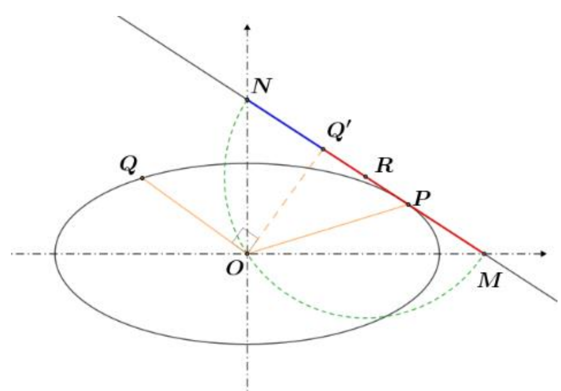
Elipsa se može prikazati polarnim koordinatama

$$c(t) = (a\,cost, b\,sint).$$

Dvije točke elipse $c(t_1), c(t_2)$ leže na konjugiranim polumjerima ako vrijedi $t_2 - t_1 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Neka su točke P i Q točke na konjugiranim promjerima.

$$P = (a\,cost, b\,sint)$$
$$Q = \left(a\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), b\,sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-a\,sint, b\,cost)$$



Slika 1.4.2. Rytzova konstrukcija

Točka Q' je rotacija točke Q za 90°, pa su joj koordinate jednake $Q' = (b\,cost, a\,sint)$.

Potrebno je odrediti koordinate polovišta R dužine $\overline{Q'P}$. Budući da su koordinate točaka Q' i P poznate lako je odrediti koordinate točke $R = \left(\frac{a+b}{2}cost, \frac{a+b}{2}\,sint\right)$.

Nadalje, točke M i N su presjeci pravca $Q'P$ s osima elipse. Uvrstimo li koordinate točaka Q', P u jednadžbu pravca kroz dvije točke dobivamo

$$x\ sint + y\ cost = (a+b)costsint.$$

Presjeci tog pravca i osi elipse su točke $N = (0, (a+b)sint), M = \big((a+b)cost, 0\big)$.

Jednostavnim računom dobiva se

$$|NR| = \sqrt{\left(-\frac{a+b}{2}cost\right)^2 + \left((a+b)sint - \frac{a+b}{2}sint\right)^2} = \cdots = \frac{a+b}{2}$$

Analogno, $|MR| = \frac{a+b}{2}, |OR| = \frac{a+b}{2}$.

Zbog $|MR| = |NR| = |OR|$ točke M, N, O leže na kružnici sa središtem u točki R, radijusa $|OR|$.

Potrebno je pokazati još $|MQ'| = a, |NQ'| = b$.

$$|MQ'| = \sqrt{((a+b)cost - bsint)^2 + (-asint)^2} = \sqrt{a^2cost^2 + a^2sint^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a$$

$$|NQ'| = \sqrt{(-bcost)^2 + ((a+b)sint - asint)^2 +} = \sqrt{b^2cost^2 + b^2sint^2} = \sqrt{b^2} = |b| = b$$

Time je dokaz gotov.

■

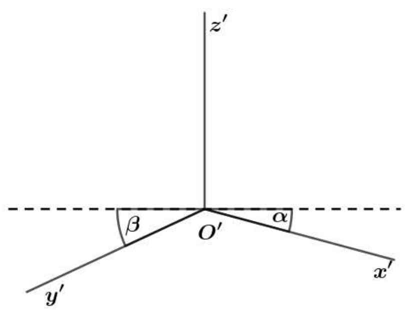
1.5 Kosa aksonometrija

Ukoliko želimo preslikati trodimenzionalni objekt u ravninu možemo koristiti jednu od metoda deskriptivne geometrije. Aksonometrija omogućuje prikazivanje tijela vezanih uz prostorni koordinatni sustav pomoću paralelne projekcije na ravninu slike. Navest ćemo nekoliko aksonometrijskih metoda s obzirom na smjer projiciranja i položaj koordinatnih osi prema ravnini slike.

U ortogonalnoj aksonometriji zrake projiciranja su okomite na ravninu slike, a kutovi u projekciji su jednakog odnosa kao što su bili i u prostoru. Aksonometrija kojom ćemo se u nastavku baviti bit će kosa aksonometrija, odnosno postupak projiciranja u kojemu su zrake projekcije paralelne i kose prema ravnini slike, a projicirani kutovi su smanjeni ili povećani u odnosu na one u prostoru. Poseban slučaj kose aksonometrije je kosa projekcija.

Jasno je da se jedinične dužine, pri kosoj aksonometriji, općenito ne projiciraju u pravoj veličini. Kako bi znali projicirati neko tijelo u ravninu potrebne su nam prikrate, odnosno omjeri duljina projekcije dužina i njihove duljine.

Osim prikrata, potrebne su nam i aksonometrijske projekcije koordinatnih osi koje uobičajeno postavljamo na sljedeći način: os z' je vertikalno , a osi x' i y' sa horizontalom zatvaraju kutove α i β, gdje je $\alpha \in [10°, 15°]$, a $\beta \in [20°, 30°]$ što nije pravilo ali se najčešće uzima radi oku ugodne slike.



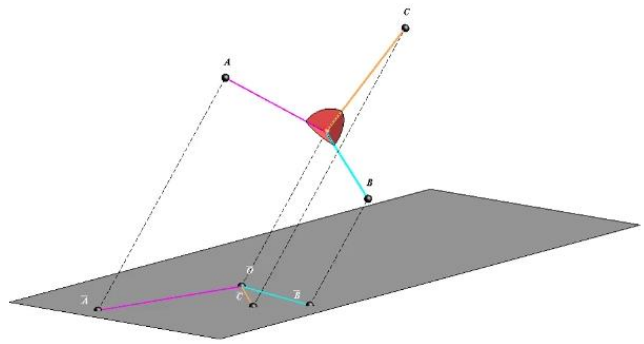
Slika 1.5.1 Projekcija koordinatnih osi

Kao i kod afinog preslikavanja, kosa projekcija čuva paralelnost.

Nas će zanimati projekcija sfere na ravninu. Pri ortogonalnoj aksonometriji sfera se, jasno, projicira u kružnicu dok se kod ostalih aksonometrija rub sfere projicira u elipsu.

Navest ćemo jedan od važnijih teorema aksonometrije, bez dokaza, koji nam omogućuje da u ravnini projekcije odaberemo bilo koji trobrid a da smo pritom sigurni da postoji paralelna projekcija koja ortonormirani trobrid u prostoru projicira u spomenuti trobrid u ravnini.

Teorem 1.5.1 (Pohlkeov teorem) *Tri dužine $\overline{O'A'}, \overline{O'B}, \overline{O'C'}$ u ravnini koje ne leže na jednom pravcu, mogu se uvijek smatrati paralelnom projekcijom triju jednakih međusobno okomitih dužina $\overline{OA}, \overline{OB}$ i $\overline{OC}$ u prostoru.* ([5], Pohlkeov teorem)



Slika 1.5.2 Pohlkeov teorem [3]

[3] S. Gorjanc, *Koso paralelno projiciranje na jednu ravninu,* Deskriptivna geometrija i Perspektiva: Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2012.

Poglavlje 2

Uvod iz linearne algebre

Kako bi bolje razumjeli ovaj rad, potrebno je navesti određene pojmove i rezultate iz linearne algebre. Pritom, podrazumijevamo poznavanje osnovnih pojmova i činjenica o vektorskim prostorima, linearnim operatorima i matricama koji su obuhvaćeni programom studija matematike. Definicije napisane u nastavku mogu se pronaći u ([11] i [15]), a neki od navedenih rezultata bit će dokazani radi boljeg razumijevanja.

Promatrat ćemo konačnodimenzionalne vektorske prostore, posebno, unitarne nad realnim poljem sa standardnim skalarnim produktom te normom induciranom skalarnim množenjem.

2.1 Pojmovi i rezultati vezani uz operatore i matrice

Definicija 2.1.1 *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Svojstvena vrijednost linearnog operatora A je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$, ako postoji $x \in V, x \neq 0$ takav da vrijedi*

$$Ax = \lambda x.$$

Vektor x nazivamo svojstveni vektor linearnog operatora A (pridružen svojstvenoj vrijednosti λ). Spektar linearnog operatora A je skup svih svojstvenih vrijednosti od A i označavamo ga sa $\sigma(A)$.

Često ćemo, radi jednostavnosti, poistovjetiti linearni operator A s matricom tog operatora $[A]_{(f,e)}$ u određenom paru baza.

Propozicija 2.1.1 *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te $A \in L(V)$. Ako su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ međusobno različite svojstvene vrijednosti od A, te $x_1, \dots, x_k$ pridruženi svojstveni vektori, redom, tada je $\{x_1, \dots, x_k\}$ linearno nezavisan skup.* ([11], Propozicija 6.13)

Definicija 2.1.2 *Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor. Linearni operator $A \in L(V)$ može se dijagonalizirati ako postoji baza $(f) = (f_1, \dots, f_n)$ za V u kojoj je matrični zapis $A(f)$ dijagonalna matrica.*

Pretpostavimo da je $A \in L(V)$ i da postoji baza $(f) = (f_1, \dots, f_n)$ za V takva da je

$$A(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Iz definicije matričnog zapisa linearnog operatora u bazi slijedi da je $Af_i = \lambda_i f_i$ za svaki $i = 1, \dots, n$, stoga je baza (f) nužno sastavljena od svojstvenih vektora za A, dok su na dijagonali matričnog zapisa svojstvene vrijednosti od A. Tako se problem dijagonalizacije svodi na problem postojanja i pronalaženja svojstvenih vektora. Odnosno, $A \in L(V)$ se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza za V sastavljena od svojstvenih vektora. ([11])

Korolar 2.1.1 *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te $A \in L(V)$. Ako A ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada se A može dijagonalizirati.*([11], Korolar 6.14)

Definicija 2.1.3 *Kažemo da se matrica A može dijagonalizirati, odnosno da je dijagonalizabilna, ako postoji regularna matrica $S \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $S^{-1}AS$ dijagonalna matrica.*

2.2 Neki rezultati o operatorima na unitarnom prostoru

Definicija 2.2.1 *Vektorski prostor V na kojem je zadan skalarni produkt nazivamo unitarni prostor.*

Definicija 2.2.2 *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V,W)$. Tada postoji jedinstveni operator $A^* \in L(W,V)$ sa svojstvom $\langle Av|w\rangle = \langle v|A^*w\rangle$ za svaki vektor $v \in V, w \in W$ i naziva se hermitski adjungirani operator operatora A.*

Definicija 2.2.3 *Matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je simetrična ako vrijedi $A = A^t$.*

Definicija 2.2.4 *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$, gdje je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Kažemo da je $A^* = [b_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{F})$ hermitski adjungirana matrica matrice A ako vrijedi $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Imamo*

$$A^* = (\bar{A})^t = \overline{A^t}.$$

Definicija 2.2.5 *Matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je hermitska ako je $A^* = A$. Ukoliko je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tada je hermitska matrica simetrična, pa vrijedi $A^* = A^t$.*

Definicija 2.2.6 *Ako je V unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$, tada je A hermitski simetrični ako je $A^* = A$, odnosno ako je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \forall x, y \in V$.*

Radi jednostavnosti hermitski simetrični operator kraće ćemo nazivati hermitskim operatorom, dok ćemo simetričnim operatorom nazivati hermitski simetričan operator u slučaju realnog prostora.

Definicija 2.2.7 *Neka je V unitarni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Konačan skup $(e_1, \dots, e_k)$ u V je ortonormiran ako je to ortogonalan skup i svi njegovi članovi su jedinični vektori, to jest, ako vrijedi $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij};\ i,j = 1, \dots, k$. Ortonormirana baza za V je ortonormiran skup koji je ujedno i baza za V.*

Propozicija 2.2.1 *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori takvi da je $dimV = dimW = n$ i neka je $A \in L(V,W)$ unitarni operator. Tada je A izomorfizam. Ako je $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ortonormirana baza prostora V operator A preslikava je u ortonormiranu bazu $(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n)$ prostora W.* ([15], Korolar 6.9.3)

Propozicija 2.2.2 *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i neka je $A \in L(V,W)$ linearni operator. Ako A barem jednu ortonormiranu bazu prostora V preslika u ortonormiranu bazu prostora W tada je A unitarni operator te svaku ortonormiranu bazu prostora V preslika u ortonormiranu bazu prostora W.* ([15], Propozicija 6.9.4)

Propozicija 2.2.3 *Neka je A simetrični ili hermitski operator na unitarnom prostoru V. Tada ako su $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ različite svojstvene vrijednosti, a v_1, v_2 pripadni svojstveni vektori, tada su v_1 i v_2 ortogonalni vektori. Odatle slijedi da su svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.* ([15], Propozicija 6.9.13)

Dokaz. Ako su λ_1, λ_2 različite svojstvene vrijednosti i v_1, v_2 pridruženi svojstveni vektori onda imamo $\langle Av_1|v_2\rangle = \langle v_1|Av_2\rangle$ pa vrijedi $\langle \lambda_1 v_1|v_2\rangle = \langle v_1|\lambda_2 v_2\rangle$. Odatle slijedi, $\lambda_1\langle v_1|v_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle v_1|v_2\rangle = \lambda_2\langle v_1|v_2\rangle$ s obzirom na to da su $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Kada bi vrijedilo da $\langle v_1|v_2\rangle \neq 0$ onda bi bilo $\lambda_1 = \lambda_2$, što je suprotno pretpostavci da su svojstvene vrijednosti različite.

■

Teorem 2.2.1 (Spektralni teorem za realne unitarne prostore)
Neka je V konačnodimenzionalni realni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Postoji ortonormirana baza za V u kojoj se A dijagonalizira ako i samo ako je A hermitski operator.([11],Teorem 8.44)

Propozicija 2.2.4 *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori nad $\mathbb{F}$ i $A \in L(V, W)$. Ako je $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ortonormirana baza za V i $(f) = (f_1, \dots, f_m)$ ortonormirana baza za W, tada je $A^*(e, f) = \left(A(f, e)\right)^*$.*

Korolar 2.2.1 *Svaka simetrična matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je ortogonalno slična nekoj dijagonalnoj matrici $D \in M_n(\mathbb{R})$, to jest, postoji $Q \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonalna matrica i $D \in M_n(\mathbb{R})$ dijagonalna matrica tako da je $A = QDQ^t$* .([11], Korolar 8.45)

Dokaz. Operator $L_A : M_{n1}(\mathbb{R}) \to M_{n1}(\mathbb{R}), L_A(X) = AX$ je hermitski operator na realnom unitarnom prostoru, pa prema prethodnom teoremu postoji ortonormirana baza (f) za $M_{n1}(\mathbb{R})$ takva da je $L_A(f) = D$, gdje je $D \in M_n(\mathbb{R})$ dijagonalna matrica. Ako je (e) kanonska baza za $M_{n1}(\mathbb{R})$tada je

$$A = L_A(e) = I(e, f)L_A(f)I(f, e) = I(e, f)DI(f, e).$$

Još samo treba uočiti da je $Q = I(e, f)$ unitarna matrica i da pripada $M_n(\mathbb{R})$, dakle ortogonalna je i zato je $I(f, e) = Q^t$.

■

Definicija 2.2.8 *Matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je unitarna ako je $AA^* = A^*A = I$. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tada češće koristimo pojam ortogonalna matrica, a definicija se svodi na $A^tA = AA^t = I$.*

U nastavku ćemo dati nekoliko svojstva koja vrijede za matricu $A^tA \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Propozicija 2.2.5 *Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ tada matrice A^tA i A imaju jednak rang.*

*Dokaz. A*ko dokažemo da su defekti jednaki, onda su i rangovi jednaki po Teoremu o rangu i defektu.
Ako je $Ax = 0$, trivijalno je $A^tAx = 0$ pa je $d(A) \leq d(A^tA)$.
Obrnuto, neka je $A^tAx = 0$. Pomnožimo skalarno $\langle x \mid A^tAx\rangle = \langle Ax \mid Ax\rangle = 0$, dakle $\|Ax\| = 0$ i $Ax = 0$. Stoga je $d(A) \geq d(A^tA)$, pa su defekti matrica A^tA i A jednaki.

■

Isto vrijedi i općenito za matrice A^*A i A.

Definicija 2.2.9 *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kažemo da je operator A pozitivan (ili pozitivno semidefinitan) ako je A hermitski i $\langle Ax|x\rangle \geq 0$ za svaki $x \in V$. Pišemo $A \geq 0$. Ako pritom $\langle Ax|x\rangle = 0$ za svaki $x \in V$ povlači da je $x = \mathbf{0}$, za A kažemo da je strogo pozitivan (ili pozitivno definitan) i pišemo $A > 0$.*

Lema 2.2.1 *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$ pozitivan operator. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada je $\lambda \geq 0$.* ([11], Lema 8.48.)

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ i x pridruženi svojstveni vektor. Tada je $x \neq 0$ i vrijedi $Ax = \lambda x$, dakle $\langle Ax|x\rangle = \lambda\langle x|x\rangle \geq 0$. S obzirom da je $\langle x|x\rangle > 0$, slijedi $\lambda \geq 0$.

■

Napomena 2.2.1 *Uočimo da skalarno množenje možemo pisati pomoću množenja matrica, što će često biti praktično, u sljedećem smislu: Neka je $\mathbb{R}^n$ unitarni prostor s euklidskim standardnim skalarnim produktom takav da $x = (x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ onda vrijedi*

$$\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = [x_1 \ldots x_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = X^tY.$$

Lema 2.2.2 *Matrica $A^tA \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ je pozitivno semidefinitna pa su $\lambda \in \sigma(A^tA)$ nenegativni.*

Dokaz. Prema lemi 2.2.1 vrijedi da su $\lambda \in \sigma(A^tA)$ nenegativni ako vrijedi $\langle A^tAx|x\rangle \geq 0$, $\forall x \in A^tA$. Lako se pokaže da tvrdnja vrijedi

$$\langle A^tAx|x\rangle = (A^tAX)^tX = X^tA^tAX = \langle Ax|Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0.$$

■

Propozicija 2.2.6 *Neka su V, W, Z konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V,W), B \in L(W,Z)$ hermitski adjungirani operatori. Tada vrijedi:*

(1) $(A^*)^* = A$
(2) $(BA)^* = A^*B^*$

([11], Propozicija 8.6)

Propozicija 2.2.7 *Neka je operator $A \in L(V,W)$ gdje su V, W konačnodimenzionalni unitarni prostori. Za svaku operator $A^*A \in L(V)$ i $AA^* \in L(W)$ vrijedi da je hermitski simetrični.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji i definiciji hermitski simetričnog operatora vrijedi $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$. Analogno se pokaže za AA^*.

■

Analogno vrijedi da je A^tA simetričan operator/matrica.

Propozicija 2.2.8 *Neka je zadana matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ i neka su x i y ortogonalni svojstveni vektori matrice A^tA, tada su vektori Ax i Ay također ortogonalni.*

Dokaz. Ako je zadana matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ tada prema napomeni 2.2.1 vrijedi

$$\langle Ax|Ay\rangle = (AX)^tAY = X^tA^tAY = \langle x|A^tAy\rangle.$$

Ako je y svojstveni vektor za A^tA, onda je $A^tA = \lambda y$ i slijedi $\langle x|A^tAy\rangle = \langle x|\lambda y\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$. Dakle, ako su x i y međusobno ortogonalni, odnosno $\langle x|y\rangle = 0$ onda je i $\langle Ax|Ay\rangle = 0$. Ako su x, y međusobno ortogonalni i takvi da su $Ax, Ay \neq 0$, bit će da su Ax i Ay međusobno ortogonalni.

■

Propozicija 2.2.9 *Neka je zadana matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ i neka je λ svojstvena vrijednost matrice A^tA, tada je duljina vektora Ax jednaka korijenu svojstvene vrijednosti λ.*

Dokaz. Za normu $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ vrijedi

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax|Ax\rangle = \|x\|^2 = \langle x|A^tAx\rangle = \lambda\|x\|^2$$

ako je x svojstveni vektor za A^tA onda je $A^tAx = \lambda x$ i slijedi $\|Ax\|^2 = |\lambda|\,\|x\|^2$, dakle $\|Ax\| = \sqrt{\lambda}\,\|x\|$. Za primjerice, $\|x\| = 1$ slijedi $\|Ax\| = \sqrt{\lambda}$. Pritom je $\lambda \geq 0$ jer je A^tA simetrična matrica i u njezinom spektru su $\lambda \geq 0$.

■

Poglavlje 3

Geometrijski primjeri

3.1 Elipsa kao slika kružnice pri preslikavanju u ravnini

Do sada smo već primijetili da se prilikom afinog preslikavanja kružnica preslikava u elipsu te ćemo na primjeru u nastavku pokazat kako možemo preslikati kružnicu koristeći račun linearne algebre. U primjeru će se koristiti rastav matrice, odnosno dekompozicija po singularnim vrijednostima o kojoj će više riječi biti u sljedećem poglavlju. Radi boljeg razumijevanja, uvest ćemo oznake koje će se koristiti u primjeru.

Ako nam je zadana matrica A, prvo računamo svojstvene vektore i vrijednosti za matricu $A^t A$.

Označimo jedinične svojstvene vektore v_1, v_2, a svojstvene vrijednosti odmah kao kvadrate kako bi izbjegli pisanje kvadratnih korijena pri zapisu singularnih vrijednosti koje ćemo označiti s_1, s_2.

Imamo $Av_1 = s_1 v_1 \; i \; Av_2 = \; s_1 v_2$.

Baze koje ćemo koristiti tijekom rješavanja primjera su baze od $\mathbb{R}^2$. Osnovna ortonormirana baza neka je (e_1, e_2), a iskoristit ćemo i ortonormiranu bazu (v_1, v_2). (Av_1, Av_2) je ortogonalna baza, ali nije normirana, nego je baza $(\frac{1}{s_1}\, Av_1, \frac{1}{s_2}\, Av_2)$ ortonormirana.

Kao što se obično koristi oznaka $M(f, e)$ za matricu operatora u paru baza (e) za domenu i (f) za kodomenu tako ćemo se istim oznakama služiti u nastavku.

Ovdje je matrica A matrica $A(e, e)$ ali radi rastava koristit ćemo već spomenute ortonormirane baze $(v) = (v_1, v_2)$ i $(v') = \left(\frac{1}{s_1}\, Av_1, \frac{1}{s_2}\, Av_2\right)$.

Sada, u paru baza (v) i (v') A ima jednostavnu, dijagonalnu matricu $\begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$ jer vrijedi $Av_1 = s_1 \frac{1}{s_1}\, Av_1$ i $Av_2 = s_2 \frac{1}{s_2}\, Av_2$. Označimo tu matricu s E.

Možemo onda napisati matricu operatora A u paru baza (e) za domenu, $(v\,')$ za kodomenu.

$$A(v\,',e) \; = \; A(v\,',v)\, I\, (v,e)$$

gdje je $I(v,e)$ matrica prijelaza, odnosno $T^{-1} = T^t$ (jer je ortogonalna) pri čemu je $T \; = \; I(e,v)$ matrica čiji stupci su zapravo vektori v_1 i v_2.

Sad imamo $A(v\,',e) = A(v',v)\, T^t = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} T^t \; = \; ET^t$

Kako bismo dovršili rastav A, trebamo još prijeći iz baze $(v\,')$ u (e). Za to nam treba $I(e,v\,')$, a to je upravo ortogonalna matrica čiji su stupci $\frac{1}{s_1}\; Av_1, \frac{1}{s_2}\; Av_2$.

Ovo množenje možemo napisati i kao umnožak matrice S čiji su stupci (Av_1, Av_2) i $E^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_2} \end{bmatrix}$.

Onda imamo $A \; = \; S\, E^{-1}\, E\, T^t$ i to je traženi rastav.

Radi ljepšeg zapisa možemo uvesti oznaku $P \; = \; S\, E^{-1}$ i to je ortogonalna matrica pa je onda konačno $A \; = \; P\, E\, T^t$. Pri tome matrica A je rastavljena na umnožak triju matrica od kojih je prva ortogonalna, druga dijagonalna i treća također ortogonalna. Na dijagonali druge matrice su singularne vrijednosti matrice A.

Geometrijski, A je prikazan kao kompozicija tri operatora - prvo djeluje ortogonalna matrica T^t koja predstavlja rotaciju ili kompoziciju rotacije i zrcaljenja, zatim E kao skaliranje duž smjerova vektora v_1 i v_2 pa napokon P kao još jedna ortogonalna matrica koja predstavlja rotaciju ili kompoziciju rotacije i zrcaljenja.

Sljedeći primjer spaja račun linearne algebre i Rytzovu konstrukciju.

Primjer 3.1.1 *Neka je* $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*preslikavanje koje kružnicu* $x^2 + y^2 = 1$ *preslikava u elipsu. Ako je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

onda preslikavanje $\mathcal{A}$ *preslikava točku* $(1, 0)$ *u točku* $(2, 0)$*, te* $(0, 1)$ *u* $(-3, 2)$*. Općenito, točku* (x, y) $\mathcal{A}$ *preslika u* $(x', y') = (2x - 3y, 2y)$.

Konjugirani promjeri elipse određeni su polumjerima $\overline{OP}$ *i* $\overline{OQ}$*, pri čemu je* $P(2{,}0)$*i* $Q(-3{,}2)$. *Druge krajnje točke promjera su, jasno,* $(-2{,}0)$ *i* $(3, -2)$.

Možemo izračunati sliku kružnice

$$x^2 \; + \; y^2 \; = \; 1. \tag{3.1}$$

Izrazimo x, y pomoću x', y', što možemo pomoću inverzne matrice

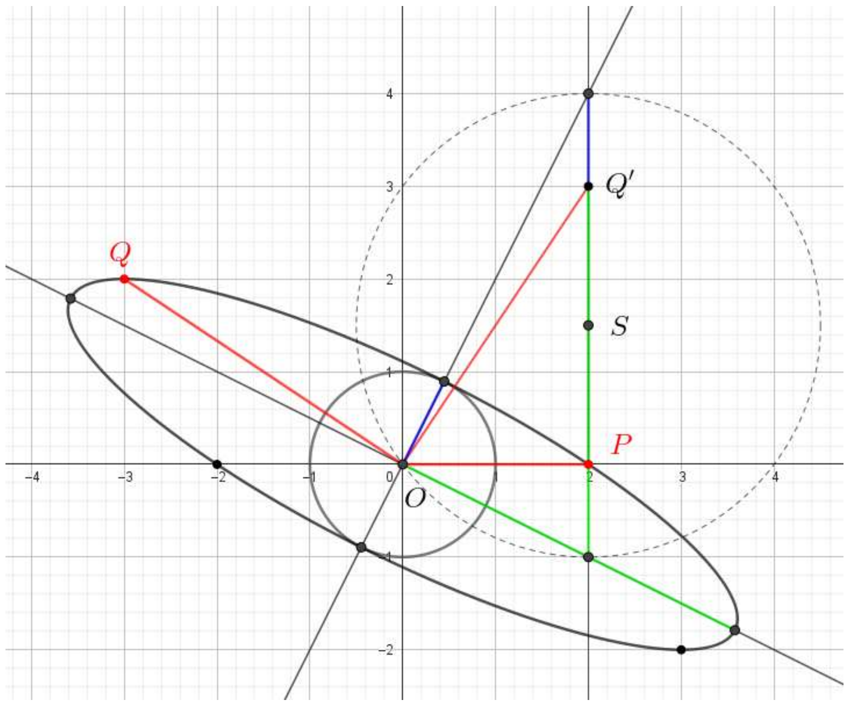
$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tada $x = \frac{x'}{2} + \frac{3y'}{4}, \quad y = \frac{y'}{2}$.
Kad dobiveno uvrstimo u (3.1) *i sredimo, tada jednadžbu možemo napisati u obliku*
$x'^2 + 3\,x'y' + \frac{13}{4}\,y'^2 = 4$ *ili* $4\,x'^2 + 12\,x'\,y' + 13y'^2 = 16$.
Izračunamo sada svojstvene vrijednosti i vektore za matricu A^tA *koja je svakako simetrična*

$$A^tA = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}.$$

Standardnim računom dobivamo spektar $\sigma(A) = \{1, 16\}$ *te lako možemo odrediti singularne vrijednosti* $s_1 = 4$ *i* $s_2 = 1$, *što će ujedno biti duljine poluosi elipse.*
Za svojstvenu vrijednost 1 *svojstveni vektor je, primjerice* $(2, 1)$, *a za svojstvenu vrijednost* 16 *to je* $(1, -2)$. *Primijetimo da su ti vektori ortogonalni, što je općenito tako za simetrične matrice prema Propoziciji 2.2.3.*
Povoljno je i normirati te vektore pa se A^tA *dijagonalizira u ortonormiranoj bazi. Norma oba navedena vektora je* $\sqrt{5}$. *Za dijagonalnu matricu* D *uzet ćemo prvo veću svojstvenu vrijednost na dijagonali, dakle prvo 16 pa 1. Zato će pripadni normirani svojstveni vektori biti prvo* $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, *pa zatim* $v_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ *te će poluosi elipse biti* $Av_1 = \left(\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ *i* $Av_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. *Duljine su* 4 *i* 1, *naravno.*
Vratimo se na dijagonalizaciju matrice A^tA. *Matrica prijelaza je* $T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. *Kako je to ortogonalna matrica vrijedi* $T^{-1} = T^t$. *Zato je* $D = T^t\,(A^tA)\,T$, *odnosno* $A^tA = T\,D\,T^t$.
Za matricu D postoji "kvadratni korijen matrice", a to je matrica $E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prije nego dovršimo rastav matrice A, vratimo se na vezu s Rytzovom konstrukcijom. Po linearnoj algebri znamo smjerove glavnih osi elipse i njihove duljine.
Uočimo da imamo 8 točaka na elipsi, 4 tjemena i 4 krajnje točke para konjugiranih promjera. Točku Q *rotiramo oko ishodišta u smjeru kazaljke na satu (negativnom) za pravi kut čime dobijemo točku* Q'. *Zatim odredimo polovište* S *dužine* $\overline{Q'P}$. *Iz* S *kao središta konstruiramo kružnicu polumjera jednakog udaljenosti* S *od središta* O *elipse (ishodišta koordinatnog sustava). Sjecišta te kružnice s pravcem* $P'Q$ *trebaju pripadati pravcima s vektorima smjera* $(2, -1)$ *i* $(1, 2)$. *To su pravci* $y = -\frac{x}{2}$ *i* $y = 2x$.



Slika 3.1.1 Rytzova konstrukcija

Budući da je točka $Q(-3,2)$ *na pravcu* $y = -\frac{2x}{3}$, *točka* Q' *je na pravcu* $y = \frac{3x}{2}$. *Udaljenost* O *i* Q *je* $\sqrt{13}$ *pa je* Q' *točka* $(2,3)$. *Polovište* S *dužine* $\overline{Q'P}$ *je točka* $\left(2,\frac{3}{2}\right)$. *Njezina udaljenost od* O *je* $\sqrt{4+\frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$. *Dakle, kružnicu* $(x-2)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ *trebamo presjeći pravcem* $x = 2$ *(to je spojnica* M *i* P'*).*
Imamo $y - \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2}$, *odakle dobivamo točke* $(2,4)$ *i* $(2,-1)$. *One jesu na navedenim pravcima.*
Udaljenost od Q' $(2,3)$ *do* $(2,-1)$ *je* 4, *a od* Q' *do* $(2,4)$ *udaljenost je* 1, *što se podudara s očekivanim rezultatom o duljinama poluosi.*

Vratimo se sada na odrađivanje preostalih matrica. Kako je opisano prije Primjera 3.1.1, matricu A rastavljamo na umnožak matrica

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{\,t} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

koje smo već izračunali.
Provjerimo dobivamo li zbilja matricu A množenjem matrica

$$PET^{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

Lako je uočiti, da matrica E sadrži duljine poluosi elipse, a stupci matrice P određuju poluosi.

Dakle, u ovom primjeru rezultat Rytzove konstrukcije podudara se s onim što se dobiva pomoću matrice A i $A^{t}A$*, na način kako je to opisano.*

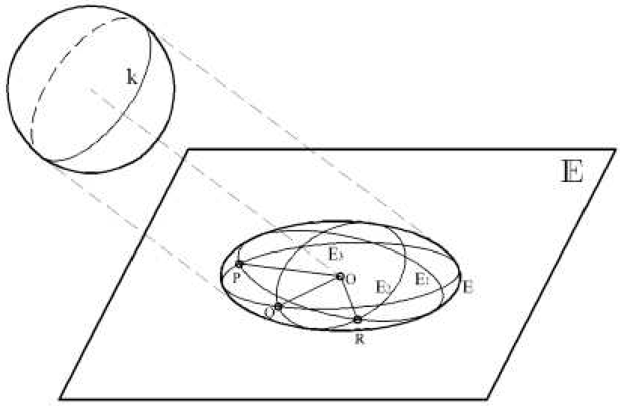
3.2 Elipsa kao projekcija sfere u kosoj aksonometriji

U nacrtnoj geometriji pri određivanju projekcije krivulje drugog reda (konike) odnosno ploha drugog reda, posebno kružnice odnosno sfere, postavlja se problem konstrukcije glavnih osi krivulje koja je rezultat projiciranja. Međusobno ortogonalni promjeri originalne figure paralelnom projekcijom preslikavaju se u konjugirane promjere krivulje u slici.
Važno je postojanje takvog para ortogonalnih promjera čije su projekcije također međusobno ortogonalne. Općenito, to se pitanje odnosi i na druga afina preslikavanja.
U teoremu 1.3.4 pokazali smo konstrukciju okomitog para pravaca koji se u perspektivnoj afinosti preslikavaju u također okomiti par pravaca. Po propoziciji 2.2.8 proizlazi da pri bilo kojem afinom preslikavanju n-dimenzionalnog prostora na njegov m-dimenzionalni potprostor postoje ortogonalni smjerovi čije su slike također ortogonalne, ako je $m \geq 2$.

Tipični primjer imamo u kosoj aksonometriji kao jednoj od najvažnijih metoda nacrtne geometrije. To je paralelna projekcija 3-dimenzionlanog prostora na ravninu, pri čemu je zadana projekcija jednog Kartezijevog koordinatnog sustava u prostoru.
Prema Pohlkeovom teoremu za bilo koje tri dužine (segmenta) u ravnini na koju se projicira, uzimajući zajedničko ishodište tih segmenata, postoji kocka u prostoru čija se tri brida sa zajedničkim vrhom projicira u zadana tri segmenta u ravnini.
U terminima linearne algebre, postoje ortogonalna baza (e) prostora $\mathbb{R}^3$, sastavljena od vektora jednake norme i vektor v takvi da se paralelnim projiciranjem u smjeru v baza (e) preslika u unaprijed zadana tri komplanarna, ali nekolinearna vektora.
Drugačije rečeno, svako afino preslikavanje prostora $\mathbb{R}^3$ na neki njegov dvodimenzionalni potprostor može se prikazati kao kompozicija paralelne projekcije i sličnosti.

Uočimo da je riječ o linearnom operatoru A ranga 2 pa je traženi smjer projiciranja zadan bilo kojim vektorom $v \neq \mathbf{0}$ iz jezgre, dakle jednodimenzionalnog potprostora $\operatorname{Ker} A$.
Općenito je potrebno skaliranje nekim faktorom, stoga primjena sličnosti, jer baza o kojoj govori tvrdnja ne mora biti ortonormirana, kad su unaprijed zadane slike vektora baze. Praktično, možemo pretpostaviti da je (e) ortonormirana baza, a skalirati zadane slike vektora baze (e).

Ako se promatra slika sfere u kosoj aksonometriji, njezina slika bit će elipsa. Stvarna kontura sfere je kružnica, a prividna kontura je općenito elipsa. Zrake projiciranja su izvodnice cilindrične plohe koja dodiruje sferu duž jedne glavne kružnice, u ravnini okomitoj na smjer projiciranja. Ta glavna kružnica je stvarna kontura sfere.



Slika 3.2.1 Paralelna projekcija sfere na ravninu [4]

U sljedećem primjeru pokazat ćemo postupak u kojem se rezultati iz linearne algebre primjenjuju za određivanje slike sfere u kosoj aksonometriji.

Primjer 3.2.1 *Uzmimo da je S jedinična sfera u euklidskom prostoru E^3 te da je $e = (e_1, e_2, e_3)$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$. Ishodište O Kartezijevog koordinatnog sustava podudara se sa središtem sfere.*

Zadana je kosa projekcija Φ slikom $(O';\, \Phi(e_1), \Phi(e_2), \Phi(e_3))$ koordinatnog sustava $(O;\, e_1, e_2, e_3)$. Želimo odrediti elipsu $\Phi(S)$, prividnu konturu sfere, jer to je kosa projekcija stvarne konture.

Linearni operator pridružen afinom preslikavanju Φ označit ćemo s A.

Neka je $v_3 \in \mathbb{R}^3$ jedinični vektor smjera projiciranja, a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ takvi vektori da (v_1, v_2, v_3) bude ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$. Postoji izometrični linearni operator (kompozicija dvije rotacije) koji preslikava (e_1, e_2, e_3) u (v_1, v_2, v_3). Ta izometrija preslikava sferu S samu u sebe. Izaberemo pritom vektore v_1 i v_2 tako da $A(v_1)$ i $A(v_2)$ budu međusobno ortogonalni a to je moguće s obzirom na Propozicije 2.2.3 i 2.2.8.

---

[4] T. L. Toulias, G. E. Lefkaditis, *Parallel Projected Sphere on a Plane: A New Plane – Geometric Investigation*, International Electronic Journal of Geometry, April 10(1) 58-80 2017

Smjerovi $A(v_1)$, $A(v_2)$ *bit će smjerovi glavnih osi elipse* $\Phi(S)$. *No, duljine poluosi te elipse općenito neće biti jednake duljinama vektora* $A(v_1)$ *i* $A(v_2)$, *dakle vrijednostima* $\|A(v_1)\|$ *i* $\|A(v_2)\|$. *Naime, operator koji zadane ortonormirane vektore preslikava u međusobno okomite vektore općenito ne čuva normu.*

Imamo stoga $\|Ax\| = \sqrt{\lambda}\|x\|$, *pri čemu je* $\lambda \in \sigma(A^t A)$. *Duljine poluosi elipse* $\Phi(S)$ *bit će* $\sqrt{\lambda_1}$ *i* $\sqrt{\lambda_2}$ *pri čemu su* $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A^t A)$, *različiti od* 0.

Slika one glavne kružnice C *sfere* S *čiji su okomiti polumjeri zadani s* e_1 *i* e_2 *dobiva se iz konjugiranih promjera, smjerova zadanih vektorima* $A(e_1)$ *i* $A(e_2)$ *(s ishodištem u točki* $0'$*). Elipsa* $\Phi(C)$ *dodiruje elipsu* $\Phi(S)$ *u dvjema točkama.*

Krenimo od ravnine $2x - 3y + 6z = 0$ *na koju se projicira sfera. Smjer projiciranja sfere na spomenutu ravninu je* $(3,4,-5)$,*a normala ravnine je očito* $(2,-3,6)$. *Odredimo kut aksonometrije s obzirom na ravninu na sljedeći način: kosinus kuta jednak je omjeru skalarnog produkta* $\langle(3,4,-5)|(2,-3,6)\rangle = -36$ *i umnoška normi*
$\|(3,4,-5)\| \cdot \|(2,-3,6)\| = 35\sqrt{2}$. *Rezultat je* $arc\cos(-0.727) = -43.36°$. *Negativni predznak znači da promjenom orijentacije jednog od vektora kut je 43.36 stupnjeva smjera projekcije prema normali. Kut tog smjera prema ravnini je* $90° - 43.36° = 46.64°$.
Za određivanje matrice A uzimamo standardnu bazu za $\mathbb{R}^3$, *a za ortonormiranu bazu potprostora jedinične vektore za ortogonalne vektore* $(27,-16,-17)$ *i* $(3,4,1)$.

Kako bi se odredila kosa projekcija nekog vektora x na zadani potprostor treba x *prikazati kao linearnu kombinaciju vektora baze potprostora i vektora iz* $[(3,4,-5)]$. *Projekcija* x *je onda dio njegovog prikaza bez treće komponente. Računom dobivamo matricu A uz zaokruživanje njezinih elemenata.*

Neka je sada početna matrica A određena kosom aksonometrijom. Odnosno,

$$A = \begin{bmatrix} 0.90 & -0.68 & 0 \\ 0.80 & 0.47 & 0.85 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$A^t A = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.80 \\ -0.68 & 0.47 \\ 0 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.90 & -0.68 & 0 \\ 0.80 & 0.47 & 0.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.45 & -0.24 & 0.68 \\ -0.24 & 0.68 & 0.40 \\ 0.68 & 0.40 & 0.72 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice $A^t A$ *je*

$$k_{A^t A}(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2.85\lambda + 1.84) \tag{3.1}$$

te iz njega lako možemo izračunati svojstvene vrijednosti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. *Svojstvena vrijednost* λ_0 *jednaka je nula, dok preostale dvije iznose* $\lambda_1 \approx 1.86, \lambda_2 \approx 0.99$.

Možemo uočiti, koristeći Vietove formule, da vrijedi

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2.85, \tag{3.2}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1.84 \tag{3.3}$$

što će nam biti korisno u daljnjem računu.

Nadalje, potrebno je odrediti jezgru matrice $A^t A$ no zbog jednostavnosti računa odredit ćemo jezgru matrice A budući da su jezgre spomenutih matrica jednake.

Ako je $AX = \mathbf{0}$ pri čemu je $X = [(x,\ y,\ z)]^t$, onda vrijedi $x = t,\ y = 1.32t,$ $z = 1.67t$ iz čega slijedi

$$\text{Ker } A = \text{Ker } (A^t A) = [(3,4,-5\ )],$$

time smo dobili očekivani približni rezultat, jer je smjer projiciranja $(3, 4, -5)$ zadan unaprijed, samo je zbog zaokruživanja došlo do malih odstupanja.

Sljedeće je potrebno odrediti svojstvene vektore na način da riješimo sustav

$$(A^t A - \lambda I)X = \mathbf{0}.$$

Pri tome dobivamo

$$\begin{aligned} (1.45-\lambda)x - 0.24y + 0.68z &= 0 \\ -0.24x + (0.68-\lambda)y + 0.40z &= 0 \\ 0.68x + 0.40y + (0.72-\lambda)z &= 0 \end{aligned}$$

Budući da je rang matrice $A^t A$ jednak 2, dovoljno je promatrati prve dvije jednadžbe

$$\begin{bmatrix} 1.45-\lambda & -0.24 \\ -0.24 & 0.68-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.68 \\ -0.40 \end{bmatrix} z.$$

Sada sustav možemo riješiti pomoću Cramerovog pravila.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1.45-\lambda & -0.24 \\ -0.24 & 0.68-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2.13\lambda + 0.93 \tag{3.4}$$

Iz (3.1) *i* (3.4) *slijedi*

$$\Delta = \ 0.72\lambda - 0.91$$

pa je $\Delta \neq 0$ jer su $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1.26$.

Daljnjim računom dobivamo

$$x = (0.68\lambda - 0.56)\frac{z}{\Delta},$$

$$y = (0.4\lambda - 0.74)\frac{z}{\Delta}.$$

Tada su svojstveni vektori određeni na sljedeći način

$$(0.68\lambda - 0.56, \qquad 0.4\lambda - 0.74, \qquad 0.72\lambda - 0.91\,).$$

Potrebno je provjeriti ortogonalnost vektora

$$v_1 = (0.68\lambda_1 - 0.56, \qquad 0.4\lambda_1 - 0.74, \qquad 0.72\lambda_1 - 0.91\,)$$
$$v_2 = (0.68\lambda_2 - 0.56, \qquad 0.4\lambda_2 - 0.74, \qquad 0.72\lambda_2 - 0.91\,)$$
$$v_3 = (3{,}4, -5\,)$$

Računom u kojem međusobno skalarno množimo svojstvene vektore i pri tome koristimo izraze (3.2) *i* (3.3) *dobivamo* $\langle v_1|v_3\rangle = \langle v_2|v_3\rangle = \langle v_1|v_2\rangle = 0$. *Time smo provjerili da su izračunati vektori međusobno ortogonalni i čine ortogonalnu bazu* (v_1, v_2, v_3) *u kojoj je treći vektor iz jezgre matrice* A^tA.

Konačno, normiranjem vektora $v_1 = (1.66, 0.02, 1)$ *i* $v_2 = (-0.58, -1.75, 1)$ *dobivamo* $\|v_1\| = 1.94, \|v_2\| = 2.10$.

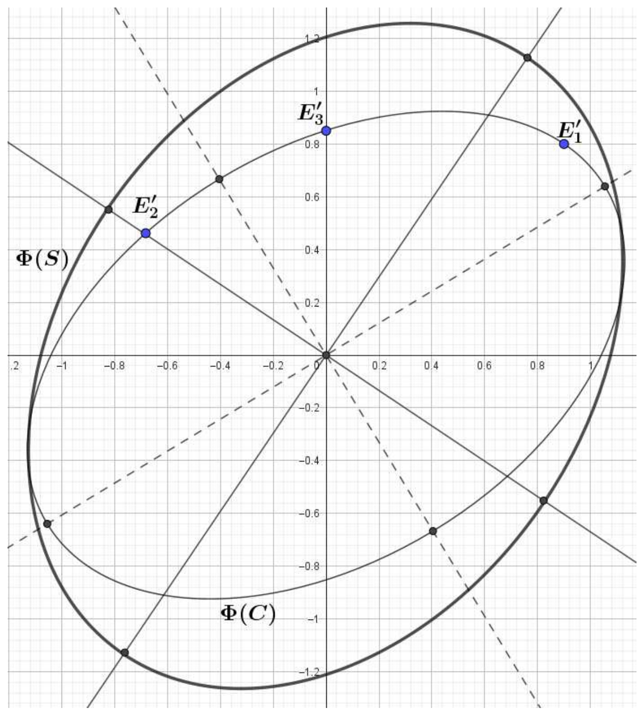
Izračunamo $s_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1.36, s_2 = \sqrt{\lambda_2} = 0.99$ *što će nam po već opisanom biti duljine poluosi elipse.*

Kako bi odredili smjerove poluosi, potrebno je odrediti $A(v_1), A(v_2)$, *te* $\|A(v_1)\|, \|A(v_2)\|$. *Jednostavnim računom dobivamo* $A(v_1) = (1.48, 2.19)$, $A(v_2) = (0.67, -0.45)$, *te* $\|A(v_1)\| = 2.64$, $\|A(v_2)\| = 0.81$.

Izračunamo još $\frac{s_1}{\|A(v_1)\|} = \frac{1.36}{2.64} = 0.52, \frac{s_2}{\|A(v_2)\|} = \frac{0.99}{0.81} = 1.23$ *kako bi odredili poluosi dobivene elipse.*

Prva poluos je $0.52\,(1.48, 2.19) = (0{,}77, 1.14)$, *duljine* $s_1 = 1.36$, *dok je druga poluos* $1.23\,(0.67, -0.45) = (0.82, -0.55)$, *duljine* $s_2 = 0.99$.

Slike e_1, e_2 *i* e_3 *su redom stupci matrice* A**.** *Svaki par tih vektora (stupaca) određuje par konjugiranih promjera tri elipse. Mi ćemo crtati samo jednu, određenu slikama vektora* e_1, e_2.



Slika 3.2.2 Kontura sfere i slika glavne kružnice sfere

Primjer 3.2.2 *Neka je, sada, zadana kosa projekcija s prikratama* $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ *i* 1, *te kutovima* $30°$ *i* $45°$, *redom.*

Tada vektori projekcije iznose $\Phi(e_1) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{3}\right), \Phi(e_2) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}, -\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$ *i* $\Phi(e_3) = (0,1)$, *a njihov matrični prikaz je matrica*

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\sqrt{2}}{8} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

Kao u primjeru 3.2.1, račun se provodi analogno. Tada je

$$A^tA = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3\sqrt{2}}{8} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\sqrt{2}}{8} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{8} & -\frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{8} & \frac{9}{16} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice A^tA *je*

$$k_{A^tA}(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{289}{144}\lambda + \frac{71+6\sqrt{3}}{96}\right)$$

te iz njega dobijemo svojstvene vrijednosti koje iznose $\lambda_0 = 0, \lambda_1 \approx 1.39, \lambda_2 \approx 0.61$.

Daljnjim računom, poznatim iz primjera 3.2.1, lako možemo odrediti svojstvene vektore koji su, jasno, ortogonalni i čine ortogonalnu bazu (v_1, v_2, v_3) *u kojoj je treći vektor iz jezgre matrice* A^tA. *Oni iznose*

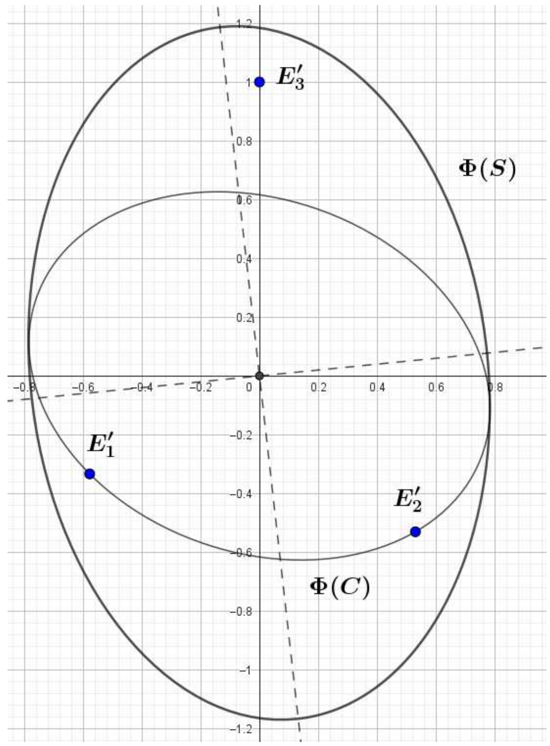
$$v_1 = (-0.21, -0.47, 0.79),$$

$$v_2 = (0.05, -0.04, -0.01),$$

$$v_3 = (3, 3.27, 2.73).$$

Kako bi odredili smjerove poluosi elipse trebamo odrediti $A(v_1), A(v_2)$, *te* $\|A(v_1)\|, \|A(v_2)\|$. *Konkretno, potrebno je odrediti* $\frac{s_1}{\|A(v_1)\|}A(v_1)$, $\frac{s_2}{\|A(v_2)\|}A(v_2)$ *pri čemu su* s_1 *i* s_2 *korijeni svojstvenih vrijednosti* λ_1, λ_2. *Računom dobivamo da je prva poluos* $\frac{s_1}{\|A(v_1)\|}A(v_1) = (-0.14, 1.18)$, *duljine* $s_1 = 1.18$, *dok je druga poluos* $\frac{s_2}{\|A(v_2)\|}A(v_2) = (-0.76, -0.15)$ *duljine* $s_2 = 0.78$.

Slike e_1, e_2 i e_3 su, također, redom stupci matrice A te svaki par slika tih vektora određuje par konjugiranih promjera tri elipse.



Slika 3.2.3 Kontura sfere i slika kružnice sfere određene slikama vektora e_1, e_2

Poglavlje 4

Dekompozicija po singularnim vrijednostima

U linearnoj algebri jedna od važnih tema je prikaz linearnog operatora u što jednostavnijem matričnom obliku. To obuhvaća i dekompoziciju operatora na operatore s nekim posebnim svojstvima, koji često imaju jasan geometrijski smisao poput rotacije, zrcaljenja, dilatacije. Na konačnodimenzionalnim prostorima bitnu ulogu obično ima prikladan izbor jedne ili više baza domene odnosno kodomene operatora. U matričnom prikazu riječ je o faktorizaciji na matrice posebnih oblika i tipova.

Najčešće se spominju dijagonalizacija, Jordanova forma, polarna forma, a primjeri iz prethodnog odjeljka mogu poslužiti kao geometrijska motivacija i ilustracija dekompozicije po takozvanim singularnim vrijednostima linearnog operatora. Iz tih, razmjerno jednostavnih primjera u „malim“ dimenzijama 2 i 3 vidi se ideja i izvedba dekompozicije. Poopćenje na bilo koje dimenzije onda nije teško opisati.

Radi jednostavnosti i geometrijskog konteksta koji nam je ovdje najbliži pretpostavit ćemo da je prostor unitarni realni $\mathbb{R}^n$ sa standardnim skalarnim množenjem i pripadnom euklidskom normom, za različite vrijednosti dimenzije n. Tvrdnje se uglavnom mogu poopćiti na kompleksne prostore odgovarajućim modifikacijama.

Također radi jednostavnosti primarno ćemo pisati o matricama, podrazumijevajući povezanost s linearnim operatorima na uobičajeni način i ističući operatore kad je to primjereno. Dakle, matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ možemo smatrati matričnim prikazom operatora $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zadanim s $L_A(X) = AX$, pri čemu je $X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ zapis vektora $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ u kanonskoj bazi. Tada je $AX \in M_{m1}(\mathbb{R})$ zapis vektora $L_A(x)$ u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^m$. Umjesto kanonskih baza može to biti neki drugi par baza odgovarajućih prostora.

U dekompoziciji po singularnim vrijednostima (skraćeno: SVD) matrica A tipa (m, n) i ranga r faktorizira se kao umnožak jedne ortogonalne matrice reda m, matrice E tipa (m, n) te još jedne ortogonalne matrice, reda n, pri čemu matrica E na pozicijama $(1,1), (2,2), \dots, (r, r)$ ima nenegativne realne brojeve $s_1, \dots, s_r$, a svi ostali elementi matrice jednaki su 0. Ključnu ulogu ima simetrična, pozitivno semidefinitna matrica A^tA reda n i njezina dijagonalizacija u ortonormiranoj bazi. Spektar joj se sastoji od pozitivnih, ne nužno različitih svojstvenih vrijednosti jednakih kvadratima brojeva $s_1, \dots, s_r$ te svojstvene vrijednosti 0 s odgovarajućom kratnosti $n - r$.

Definicija 4.0.1 *Singularna vrijednost matrice* $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ *je svaki nenegativni realni broj* s *takav da je* s^2 *svojstvena vrijednost matrice* $A^t A$.

S obzirom da se spektar simetrične, pozitivno semidefinitne matrice $A^t A$ sastoji od nenegativnih realnih brojeva, možemo reći da su singularne vrijednosti matrice A kvadratni korijeni svojstvenih vrijednosti matrice $A^t A$.

Rezultat o SVD iskazat ćemo najprije u posebnom slučaju kada je A kvadratna, nesingularna matrica. Bit će to poopćenje dekompozicije kakvu smo dobili u Primjeru 3.1.1 za bijektivnu afinu transformaciju euklidske ravnine.

Propozicija 4.0.1 *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *kvadratna matrica punog ranga* n, $n \geq 2$. *Tada postoji dijagonalna matrica* E *i ortogonalne matrice* T *i* U *takve da vrijedi* $A = UET$, *pri čemu se na dijagonali matrice* E *nalaze singularne vrijednosti matrice* A.

Dokaz. Neka je dijagonalizacija matrice $A^t A$ izražena ovako:

$$D = P^t A^t A \, P,$$

odakle imamo $A^t A = PDP^t$.

Ovdje je P ortogonalna matrica čiji stupci predstavljaju svojstvene vektore matrice $A^t A$. Zbog prethodno istaknutih svojstava matrice $A^t A$ postoji dijagonalna matrica E takva da je $E^2 = D$. Očito je E matrica koja na dijagonali ima kvadratne korijene svojstvenih vrijednosti matrice $A^t A$ (i među njima nema 0 jer je A regularna).

E je invertibilna matrica. Uvedimo matricu $U = APE^{-1}$. To je svakako regularna matrica, uz to ortogonalna. Provjerimo ortogonalnost:

$$U\,U^t = APE^{-1}E^{-1}P^tA^t = APD^{-1}P^tA^t = AP\,(P^t\,A^t\,A\,P)^{-1}\,P^t\,A^t =$$
$$APP^{-1}A^{-1}(A^t)^{-1}PP^tA^t = AA^{-1}(A^t)^{-1}A^t = I.$$

Ovdje smo primijenili da vrijedi $P^{-1} = P^t$ i $E^t = E$.

Sada iz $U = APE^{-1}$ slijedi $A = UEP^t$ što je tražena dekompozicija.

∎

Vidimo da je matrica T iz iskaza propozicije zapravo matrica čiji retci predstavljaju svojstvene vektore matrice $A^t A$. U drugačijem obliku zapisa SVD piše se $A = UEP^t$ (ili neke druge oznake za matrice U i P) tako da u ortogonalnoj matrici na desnoj strani istaknuta bude P, čiji stupci predstavljaju vektore ortonormirane baze u kojoj se $A^t A$ dijagonalizira.

Matrica D obično se bira tako da elementi na dijagonali čine nerastući slijed $s_1 \geq \cdots \geq s_n$. Uz takav dogovor D je jednoznačno određena, dok U i T općenito nisu jedinstvene. Redoslijed singularnih vrijednosti na dijagonali bira se tako i kad je A singularna, pa se na zadnjih $n-r$ pozicija nalazi 0.

Napomenimo da čak i u slučaju kad je A dijagonalizabilna, faktorizacija po njezinim svojstvenim vrijednostima (spektralna dekompozicija) općenito se ne podudara s njezinom faktorizacijom po singularnim vrijednostima.

Malo drugačiji opis dekompozicije dobivamo tako da se poslužimo trima ortonormiranim bazama prostora. Neka je (e) početna baza, $(v) = (v_1, \dots, v_n)$ baza u kojoj se dijagonalizira matrica A^tA, te (v') baza dobivena normiranjem ortogonalne baze koju čine vektori $A(v_i)$, $i = 1,2,\dots,n.$ Tada je $v_i' = \frac{1}{s_i} A(v_i)$, jer $\|A(v_i)\| = s_i$.

Matricu $A(e)$ možemo zapisati kao umnožak $I(e,v')\, A(v',v)\, I(v,e)$. Vrijedi $I(v,e) = P\hat{}t$ uz prijašnju oznaku za matricu prijelaza P, dok je $A(v',v)$ dijagonalna matrica koja po dijagonali ima singularne vrijednosti matrice A. To je matrica prethodno označena s E. Matrica $I(e,v')$ svakako je ortogonalna i možemo ju označiti s U. Njezini stupci predstavljaju jednu ortonorniranu bazu slike transformacije A, što je u ovom slučaju cijeli prostor.

U svrhu geometrijskog tumačenja Propozicije 4.0.1 poslužimo se Primjerom 3.1.1. Zadana je bijektivna afina transformacija A te je cilj odrediti smjerove i duljine glavnih osi elipse u koju A transformira (jediničnu) kružnicu. Traženi međusobno ortogonalni smjerovi upravo su smjerovi slika svojstvenih vektora matrice A^tA, a duljine poluosi elipse su singularne vrijednosti matrice A. Dekompozicija započinje tako da se početna ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^2$ najprije izometrijom (rotacijom ili kompozicijom zrcaljenja i rotacije) preslika u onu ortonormiranu bazu u kojoj se dijagonalizira A^tA. Slijedi djelovanje A na elemente spomenute baze i to djelovanje čuva ortogonalnost, no uključuje i „skaliranje“ u smjeru svakog vektora baze pripadnom singularnom vrijednosti. Završni treći korak je još jedna izometrija, dakle rotacija ili kompozicija zrcaljenja i rotacije. Tipovi ovih izometrija povezani su s vrijednosti $\det A$ na očiti način, budući da je $\det D > 0$ pa su $\det P$ i $\det U$ jednakog predznaka ako je det $A > 0$, odnosno suprotnih predznaka za $\det A < 0$.

Uočimo da u slučaju bijektivne afine transformacije A euklidske ravnine Rytzova konstrukcija poluosi elipse pruža mogućnost efektivne geometrijske konstrukcije slika $A(v)$ svojstvenih vektora v transformacije A^tA pa time i singularnih vrijednosti od A.

Prelazimo na slučaj matrice koja nije nužno kvadratna. Promatrat ćemo $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ uz pretpostavku $m \leq n$, jer u obrnutom slučaju možemo dekompoziciju primijeniti na transponiranu matricu. Rang matrice A tada je r, $r \leq m$.

Veza s linearnim operatorima uspostavlja se na uobičajeni način, tako da je A matrični prikaz operatora u paru baza (e) prostora $\mathbb{R}^n$ kao domene i (f) prostora $\mathbb{R}^m$ kao kodomene. Možemo pretpostaviti da su baze ortonormirane.

Teorem 4.0.1 *Neka je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ pri čemu je $m \leq n$. Tada postoji faktorizacija $A = UET$, pri čemu je U ortogonalna matrica reda m, T ortogonalna reda n, a $E \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ matrica čijih prvih m stupaca čini dijagonalnu podmatricu koja na dijagonali ima singularne vrijednosti matrice A.*

Dokaz. U skladu s prethodno napisanim matricu A smatramo matričnim prikazom linearnog operatora $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ u paru ortonormiranih baza, (e) za domenu i (f) za kodomenu. Primjenjujemo dekompoziciju $I(f, v')\, A(v', v)\, I(v, e)$ pri čemu će razlika od slučaja kvadratne matrice punog ranga biti u formiranju baze (v') kodomene. Matrica $A(v', v)$ imat će ulogu matrice E opisane u iskazu teorema. Prvih r vektora baze (v) neka su oni svojstveni vektori iz dijagonalizacije matrice $A^t A$ čije su pripadne svojstvene vrijednosti različite od 0, a preostalih $n - r$ svojstvenih vektora onda čine bazu jezgre Ker A.
Ortonormirana baza (v') treba se sastojati od r jediničnih vektora $\frac{1}{s_1} A(v_i)$ za $i = 1,2, \dots, r$ i neke dopune do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^m$ u slučaju kad je $r < m$. Uz takav izbor, očito je matrica $A(v', v) = E$.
Stavimo $I(f, v') = U$ i time je dobivena tražena faktorizacija matrice A, odnosno dekompozicija pripadnog linearnog operatora L_A.
Uočimo da se matrica U može opisati i na sljedeći način. Služeći se upravo pokazanom SVD matrice A, imamo $AA^t = UET(UET)^t = UEE^tU^t$.
Budući da je $EE^t \in M_m(\mathbb{R})$ dijagonalna matrica te vrijedi $EE^t = U^t(AA^t)U$, vidimo da je U matrica koja se dobiva dijagonalizacijom pozitivno semidefinitne matrice AA^t .

■

Kao numerički primjer možemo napisati SVD za matricu kose aksonometrije iz Primjera 3.2.2. gdje je dobivena matrica

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{3\sqrt{2}}{8} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{3\sqrt{2}}{8} & 1 \end{bmatrix}.$$

Matricu A možemo zapisati kao umnožak matrica U, E, P^t. Stupci matrice P su vektori $\frac{v_i}{\|v_i\|}$ za $i = 1,2,3$, a stupci matrice U su vektori $\frac{Av_i}{\|Av_i\|}$ za $i = 1,2$.

Odnosno, pišući radi jednostavnosti vektore pomoću približnih decimalnih vrijednosti, imamo

$\frac{v_1}{\|v_1\|} = (-0.23, -0.5, 0.84)$, $\frac{v_2}{\|v_2\|} = (0.78, -0.61, -0.15)$, $\frac{v_3}{\|v_3\|} = (0.58, 0.63, 0.52)$,

$\frac{Av_1}{\|Av_1\|} = (-0.12, 0.99)$, $\frac{Av_2}{\|Av_2\|} = (-0.98, -0.11)$.

Za kraj, matrica E sadrži korijene $s_1 = 1.18, s_2 = 0.78$ svojstvenih vrijednosti matrice AA^t.

$$UEP^t = \begin{bmatrix} -0.12 & -0.98 \\ 0.99 & -0.11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.18 & 0 & 0 \\ 0 & 0.78 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.23 & -0.5 & 0.84 \\ 0.78 & -0.61 & -0.15 \\ 0.58 & 0.63 & 0.52 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.14 & -0.76 & 0 \\ 1.17 & -0.09 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.23 & -0.5 & 0.84 \\ 0.78 & -0.61 & -0.15 \\ 0.58 & 0.63 & 0.52 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.57 & -0.53 & 0 \\ -0.33 & -0.53 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Jasno je da se iz SVD matrice odnosno linearnog operatora mogu lako odrediti rang matrice, baze jezgre i slike operatora, a također i pseudoinverz (poopćenje inverzne matrice).

Dekompozicija po singularnim vrijednostima ima različite primjene, kako u linearnoj algebri i numeričkoj linearnoj algebri tako i u statistici, optimizaciji, procesiranju signala i drugdje ([1],[6],[8]).

Na kraju navedimo još dvije geometrijske napomene. Primjenom SVD lako se vidi da svaka bijektivna afina transformacija ravnine preslikava kružnicu u kružnicu ili elipsu. Naime, dvije izometrije u dekompoziciji ne utječu na oblik krivulje, a skaliranjem duž osi očito se iz kružnice dobiva elipsa.
Nadalje, u aksonometriji, prividna kontura sfere bit će kružnica ako i samo ako je to ortogonalna aksonometrija ili njezina kompozicija s nekom sličnosti. To se događa ako i samo ako su singularne vrijednosti (različite od 0) međusobno jednake.

Bibliografija

[1] A. Novak, D. Pavlović, *Dekompozicija matrice na singularne vrijednosti i primjene*, Math-e, 24(2013) https://e.math.hr/br24/NovakEtAl

[2] *Aksonometrija*, Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. https://www.enciklopedija.hr/clanak/aksonometrija

[3] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, 1995.

[4] D. Bakić, *Linearna algebra i primjene*, Školska knjiga, Zagreb, 2. izdanje, 2021.

[5] D. Palman, *Nacrtna geometrija*, Element, Zagreb, 2001.

[6] C.D. Martin, M.A. Porter, *The Extraordinary SVD*, Amer. Math. Monthly, 119:10 (2012), 838-851.

[7] *Geometrija,* Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. – 2024. https://enciklopedija.hr/clanak/geometrija

[8] H. Stachel, *From Rytz to the Covariance Ellipsoid*, Conference on Geometry: Theory and Applications, Vorau, June 3-8, 2007 https://www.dmg.tuwien.ac.at/stachel/vorau_07.pdf

[9] J. Sedlar, *Analitička geometrija i linearna algebra,* Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, Split, 2016.

[10] K. Horvatić, *Linearna algebra,* Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[11] Lj. Arambašić, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2022.

[12] S. Gorjanc, *Koso paralelno projiciranje na jednu ravninu,* Deskriptivna geometrija i Perspektiva: Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2012. https://www.grad.hr/geometrija/udzbenik/2/2-3-1.html

[13] T. L. Toulias, G. E. Lefkaditis, *Parallel Projected Sphere on a Plane: A New Plane – Geometric Investigation*, International Electronic Journal of Geometry, April 10(1) 58-80 2017 https://www.researchgate.net/publication/316088264_Parallel_Projected_Sphere_on_a_Plane_A_New_Plane-Geometric_Investigation

[14] V. Volenec, *Konstruktivne metode u geometriji*, PMF – Matematički odsjek, Zagreb, 2020.

[15] Z. Franušić, J. Šiftar, *Linearna algebra,* Prirodoslovno matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2022.

Sažetak

U radu promatramo geometriju dekompozicije matrice odnosno linearnog operatora po singularnim vrijednostima (skraćeno SVD).
Singularne vrijednosti matrice A su kvadratni korijeni svojstvenih vrijednosti hermitski simetrične, pozitivno definitne matrice A^tA. Ključna je činjenica da se A^tA dijagonalizira u ortonormiranoj bazi te da djelovanje A na svojstvene vektore od A^tA čuva ortogonalnost. U SVD matrica A tipa (m, n) faktorizira se kao umnožak tri matrice, od kojih su one vanjske ortogonalne/unitarne, a srednja je jednakog tipa kao A te sadrži dijagonalnu podmatricu sa singularnim vrijednostima na dijagonali. Geometrijski ta faktorizacija znači kompoziciju, redom, izometrije kojom se prelazi u ortonormiranu bazu svojstvenih vektora od A^tA, zatim skaliranja po smjerovima tih vektora te završno još jedne izometrije.

U euklidskoj ravnini SVD se primjenjuje na bijektivnu afinu transformaciju A i njezino djelovanje na jediničnu kružnicu. Slika je elipsa, određena bilo kojim parom konjugiranih promjera kao slikom para ortogonalnih promjera kružnice. Rytzovom konstrukcijom dobivaju se glavne osi elipse, a duljine poluosi elipse jednake su singularnim vrijednostima operatora A.
Druga geometrijska primjena SVD odnosi se na kosu aksonometriju, to jest paralelnu projekciju euklidskog prostora na ravninu, u kojoj je zadana slika jedne ortonormirane baze prostora. Postupkom analognim prethodnom konstruiraju se projekcije prividne i stvarne konture jedinične sfere.

Summary

In this thesis we examine the geometry of the singular values decomposition (SVD) of a matrix or a linear operator. The singular values of the matrix A are the square roots of the eigenvalues of the Hermitian symmetric, positive definite matrix A^tA. The key fact is that A^tA is diagonalized in an orthonormal basis and the action of A on the eigenvectors of A^tA preserves orthogonality. In SVD, matrix A of type (m, n) is factorized as a product of three matrices, of which the outer one are orthogonal/unitary, and the middle one is of the same type as A and contains a diagonal submatrix with singular values on the diagonal. Geometrically, this factorization means the composition, respectively, of an isometry, which is used for transition to the orthonormalized base of eigenvectors of A^tA, then scaling along the directions of these vectors, and finally another isometry.

In the Euclidean plane, SVD is applied to the bijective affine transformation A and its action on the unit circle. The image is an ellipse, defined by any pair of conjugate diameters as the image of a pair of orthogonal diameters of a circle. The main axes of the ellipse are obtained by the Rytz construction, and the lengths of the semi-axes of the ellipse are equal to the singular values of the operator A. Another geometric application of SVD refers to oblique axonometry, that is, the parallel projection of Euclidean space onto a plane, in which the image of an orthonormal base of space is given. Using a similar procedure, projections of the apparent and real contours of the unit sphere are constructed.

Životopis

Rođena sam 19. travnja 1998. godine u Zagrebu gdje sam završila osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. Osnovnu školu Vjenceslava Novaka pohađala sam od 2004. do 2012. godine, te sam iste godine upisala XII. gimnaziju koju sam završila 2016. godine. Odmah nakon toga započela sam studij na Fakultetu za matematiku u Rijeci kojega sam prekinula 2019. godine. Svoj studentski put nastavila sam u Zagrebu, iste godine, kada sam upisala prijediplomski studij Matematika; smjer nastavnički na PMF-u koji je završen 2022. godine. Zatim sam upisala diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički, također na PMF-u u Zagrebu. Od rujna 2024. godine radim u osnovnoj školi Markuševec.