Izometrije u euklidskom prostoru

Bačić, Paula

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Paula Bačić

IZOMETRIJE U EUKLIDSKOM PROSTORU

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, studeni 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima, čija su mi bezgranična ljubav, podrška i vjerovanje omogućili da prevladam sve prepreke na svom putu. Oni su moj temelj, moj oslonac, i bez njih ovaj put ne bi bio moguć. Hvala mojoj sestri i braći, koji su uvijek bili uz mene te su svojim prisustvom i ohrabrenjem činili svaki trenutak ljepšim. Posvećujem ga i ostatku obitelji, obiteljskim prijateljima i kumovima, čija su mudrost i prisutnost moj put činili lakšim i omogućili da ostvarim svoje ciljeve. Veliku zahvalnost dugujem svojim prijateljima, kako onima s fakulteta, tako i onima izvan njega, koji su dijelili sa mnom sve radosne i teške trenutke, uvijek pružajući ruku pomoći i podrške. Posebnu zahvalnost izražavam svom mentoru, čije su stručno vodstvo, savjeti i strpljenje značajno obogatili ovaj rad. Na kraju, zahvaljujem Bogu na snazi, mudrosti i svim blagoslovima koji su me vodili kroz ovaj put, omogućujući mi da ostanem odlučna, da nikada ne odustanem i da na kraju ovaj rad posvetim i sebi, kao potvrdu vlastite ustrajnosti i truda. Bake, sad će kapa i Ruža!

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo unitarne prostore i izometrije euklidskog prostora.

U prvom poglavlju definiramo vektorski prostor, nakon čega uvodimo pojam skalarnog produkta te navodimo neka njegova osnovna svojstva. Zatim definiramo normirane i metričke prostore, nakon čega analiziramo neprekidne funkcije između metričkih prostora. Posebna pažnja posvećena je ispitivanju neprekidnosti specifičnih funkcija u normiranim prostorima. Na kraju ovog poglavlja dokazujemo da je norma inducirana skalarnim produktom ako i samo ako zadovoljava jednakost paralelograma.

U drugom poglavlju bavimo se izometrijama metričkih prostora, s posebnim naglaskom na izometrije euklidskog prostora. Prvo definiramo izometriju između dva metrička prostora, a zatim proučavamo pojmove baza vektorskih prostora i linearnih operatora. Analiziramo neka dodatna svojstva linearne nezavisnosti vektora te definiramo ortonormirane baze kao specifične vrste baza. Na kraju dokazujemo da je svaka izometrija euklidskog prostora izomorfizam odgovarajućeg vektorskog prostora ”do na translaciju”. Osim toga, pokazujemo da je svaka izometrija euklidskog prostora bijekcija.

Poglavlje 1

Unitarni prostori

1.1 Vektorski prostori

Neka je G neprazan skup.

Za svaku funkciju kojoj je domena $G \times G$, a kodomena G kažemo da je binarna operacija na G.

Pretpostavimo da je $\cdot$ binarna operacija na skupu G. Dakle, $\cdot : G \times G \to G$. Za $x, y \in G$ umjesto $\cdot(x, y)$ pišemo $x \cdot y$. Dakle, $\forall x, y \in G$ imamo $x \cdot y \in G$.

Neka je G skup te $\cdot$ binarna operacija na G. Tada za uređeni par $(G, \cdot)$ kažemo da je grupoid.

Za binarnu operaciju $\cdot$ na skupu G kažemo da je asocijativna ako za sve x, y, $z \in G$ vrijedi $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Neka je $(G, \cdot)$ grupoid te neka je $e \in G$. Kažemo da je e neutralni element u $(G, \cdot)$ (ili neutralni element za binarnu operaciju $\cdot$) ako $\forall x \in G$ vrijedi $e \cdot x = x \cdot e = x$.

Napomena 1.1.1. *Pretpostavimo da je $(G, \cdot)$ grupid te da su e_1 i e_2 neutralni elementi u $(G, \cdot)$. Tada je $e_1 = e_2$. Budući da je e_1 neutralni element, vrijedi $e_1 \cdot e_2 = e_2$. S druge strane, budući da je e_2 neutralni elenent vrijedi $e_1 \cdot e_2 = e_1$. Iz toga slijedi $e_2 = e_1$.*

Pretpostavimo da je $(G, \cdot)$ grupoid koji ima neutralni element. Tada za $(G, \cdot)$ kažemo da je monoid.

Neka je $(G, \cdot)$ monoid te neka je $x \in G$. Za $y \in G$ kažemo da je inverzni element od x ako vrijedi $x \cdot y = y \cdot x = e$, pri čemu je e neutralni element u $(G, \cdot)$.

Napomena 1.1.2. *Pretpostavimo da je $(G, \cdot)$ monoid te da su $x, y_1, y_2 \in G$ takvi da su y_1 i y_2 inverzni elementi od x u $(G, \cdot)$. Tada je $y_1 = y_2$.*

Naime, budući da je y_1 inverzni element od x vrijedi da je $x \cdot y_1 = e$. Slijedi $y_2 \cdot (x \cdot y_1) = y_2 \cdot e$ pa iz činjenice da je e neutralni element te da je $\cdot$ asocijativna binarna operacija *dobivamo da je* $(y_2 \cdot x) \cdot y_1 = y_2$. *Budući da je* y_2 *inverzni element od* x, *imamo* $e \cdot y_1 = y_2$. *Stoga je* $y_1 = y_2$.

Neka je $(G, \cdot)$ monoid. Kažemo da je $(G, \cdot)$ grupa ako svaki element od G ima inverzni element u $(G, \cdot)$.

Napomena 1.1.3. *Neka je* $(G, \cdot)$ *grupa. Tada za svaki* $x \in G$ *postoji jedinstveni inverzni element od* x *u* $(G, \cdot)$ *(to slijedi iz definicije grupe i napomene 1.1.2). Ako je* $x \in G$ *onda ćemo s* x^{-1} *označavati inverzni element od* x. *Dakle, za svaki* $x \in G$ *vrijedi* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Za binarnu operaciju $\cdot$ na skupu G kažemo da je komutativna ako za sve $x, y \in G$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$.

Ako je $(G, \cdot)$ grupa takva da je binama operacija $\cdot$ komutativna, onda za $(G, \cdot)$ kažemo da je komutativna ili Abelova grupa.

Napomena 1.1.4. *Ako je* $(V, +)$ *Abelova grupa, onda ćemo obično neutralni element u* $(V, +)$ *označavati s* 0, *a za* $x \in V$ *inverzni element od* x *ćemo označavati s* $-x$. *Dakle, za svaki* $x \in V$ *vrijedi* $x + 0 = 0 + x = x$ *i* $x + (-x) = -x + x = 0$.

Neka je $(V, +)$ Abelova grupa. Pretpostavimo da je $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ funkcija koja ima sljedeća svojstva (pri čemu ćemo za $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x \in V$ umjesto $\cdot(\lambda, x)$ pisati $\lambda \cdot x$) :

1. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V$
2. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
3. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
4. $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in V$

Tada za uređenu trojku $(V, +, \cdot)$ kažemo da je (realni) vektorski prostor.

Primjer 1.1.5. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $+$ *binarna operacija na* $\mathbb{R}^n$ *definirana s*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,, \text{ za sve}$$

$$(x_1, \ldots, x_n)\,, (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots, x_n)\,, y = (y_1 \ldots, y_n)\,, z = (z_1 \ldots, z_n)$.

$$\text{Vrijedi } (x + y) + z = ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \text{ i}$$

$$x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1)\,, \cdots, x_n + (y_n + z_n))\,.$$

Tada je očito da vrijedi $(x + y) + z = x + (y + z)$. *Prema tome binarna opracija* $+$ *je asocijativna.*

Očito je n-torka $(0, \dots, 0)$ *neutralni element za binarnu operaciju* $+$. *Nju ćemo kraće označavati s* 0. *Dakle,* $0 = (0, \dots, 0)$ *i vrijedi* $x + 0 = 0 + x = x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}^n$.

Neka je $x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n)$. *Definirajmo* $y = (-x_1, \dots, -x_n)$. *Očito je* $x + y = y + x = 0$. *Prema tome,* y *je inverzni element od* x *u monoidu* $(\mathbb{R}^n, +)$.

Stoga je $(\mathbb{R}^n, +)$ *grupa.*

Očito je $+$ *komutativna binarna operacija pa je* $(\mathbb{R}^n, +)$ *Abelova grupa.*

Definirajmo funkciju

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ s } \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. *Neka je* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tada je

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot (x + y) =& \lambda \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\
=& (\lambda (x_1 + y_1), \dots, \lambda (x_n + y_n)) \\
=& (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\
=& (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \\
=& \lambda (x_1, \dots, x_n) + \lambda (y_1, \dots y_n) = \lambda x + \lambda y.
\end{aligned}$$

Dakle, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Slično vidimo da za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *i* $x \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi*

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x \text{ te } \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x\,.$$

Očito je $1 \cdot x = x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}^n$.

Prema tome $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *je realni vektorski prostor.*

Napomena 1.1.6. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor. Neutralni element za binarnu operaciju* $+$ *nazivamo nulvektor u* $(V, +, \cdot)$ *i označavamo ga s* 0.

Primjer 1.1.7. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor. Neka je* $y \in V$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Vrijedi*

$$\lambda \cdot (-y) = -\lambda \cdot y.$$

Prije svega uočimo da je

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot 0 =& \lambda \cdot (0 + 0) \\
=& \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0, \text{ gdje je } 0 \text{ nulvektor.}
\end{aligned}$$

Sada iz $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$ *slijedi da je* $\lambda \cdot 0 = 0$.

Imamo

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (-y) + \lambda \cdot y =& \lambda \cdot (-y + y)\\ =& \lambda \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

pa je stoga $\lambda \cdot (-y) = -\lambda \cdot y$.

1.2 Skalarni produkt

Neka je $(V, +, \cdot)$ realni vektorski prostor.

Pretpostavimo da je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ funkcija (čiju vrijednost na $(x, y) \in V \times V$ označavamo s $\langle x \mid y \rangle$) koja ima sljedeća svojstva:

1. $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$ za sve $x, y, z \in V$
2. $\langle \lambda x \mid y \rangle = \lambda \langle x \mid y \rangle$ za sve $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in V$
3. $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ za sve $x, y \in V$
4. $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ za svaki $x \in V$
5. $\langle x \mid x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ za svaki $x \in V$

Tada za $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ kažemo da je skalarni produkt na $(V, +, \cdot)$.

Uređenu četvorku $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ nazivamo unitarni prostor.

Primjer 1.2.1. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $(R^n, +, \cdot)$ *vektorski prostor iz primjera 1.1.5. Neka je* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s:*

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) \mid (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \text{ za sve } (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Tvrdimo da je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *skalarni produkt na* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1 \ldots, x_n)$, $y = (y_1 \ldots, y_n)$, $z = (z_1 \ldots, z_n)$.

Vrijedi

$$\begin{aligned}\langle x + y \mid z \rangle =& (x_1 + y_1) \cdot z_1 + \ldots + (x_n + y_n) \cdot z_n\\ =& x_1 z_1 + y_1 z_1 + \ldots + x_n z_n + y_n z_n\\ =& (x_1 z_1 + \ldots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n)\\ =& \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle.\end{aligned}$$

Dakle, $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$.

Analogno vidimo da vrijede i ostala svojstva (2)-(5) iz definicije skalarnog produkta. Prema tome $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *jest skalarni produkt na* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Za $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *kažemo da je euklidski skalarni produkt na* $\mathbb{R}^n$.

Napomena 1.2.2. *Neka je $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Tada za svaki $x \in V$ vrijedi $\langle x \mid 0 \rangle = 0$ (gdje je na lijevoj strani ove jednakosti 0 nulvektor, a na desnoj je realan broj).*

Naime, ako je $x \in V$, imamo

$$\langle x \mid 0 \rangle = \langle x \mid 0 + 0 \rangle = \langle x \mid 0 \rangle + \langle x \mid 0 \rangle,$$

dakle $\langle x \mid 0 \rangle = \langle x \mid 0 \rangle + \langle x \mid 0 \rangle$ pa je očito $\langle x \mid 0 \rangle = 0$.

Neka je $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Za $x \in V$ definiramo realan broj $\|x\|$ na sljedeći način: $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Uočimo da je ova definicija dobra zbog svojstva (4) iz definicije skalarnog produkta. Očito je $\|x\| \geq 0$ za svaki $x \in V$.

Nadalje, iz svojstva (5) iz definicije skalarnog produkta slijedi $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Propozicija 1.2.3. *(Nejednakost C-S-B) Neka je $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Za sve $x, y \in V$ vrijedi*

$$* : |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{1.1}$$

Dokaz. Neka su $x, y \in V$.

Ako je $y = 0$, onda $*$ slijedi iz napomene 1.2.2.

Pretpostavimo da je $y \neq 0$.

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s

$$f(t) = \langle x + ty \mid x + ty \rangle \text{ za } t \in \mathbb{R}.$$

Prema 4. svojstvu iz definicije skalarnog produkta vrijedi da je $f(t) \geq 0$, za svaki $t \in \mathbb{R}$.

Za svaki $t \in \mathbb{R}$ koristeći svojstva skalarnog produkta dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \langle x + ty \mid x + ty \rangle \\
&= \langle x \mid x + ty \rangle + \langle ty \mid x + ty \rangle \\
&= \langle x + ty \mid x \rangle + \langle x + ty \mid ty \rangle \\
&= \langle x \mid x \rangle + \langle ty \mid x \rangle + \langle x \mid ty \rangle + \langle ty \mid ty \rangle \\
&= \|x\|^2 + t\langle y \mid x \rangle + \langle ty \mid x \rangle + t\langle y \mid ty \rangle \\
&= \|x\|^2 + t\langle y \mid x \rangle + t\langle y \mid x \rangle + t\langle ty \mid y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2t\langle y|x \rangle + t^2\langle y \mid y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2t\langle x \mid y \rangle + t^2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$f(t) = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x \mid y \rangle t + \|x\|^2, \text{ za svaki } t \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da je f kvadratna funkcija. Neka je D_f diskriminanta kvadratne funkcije f. Zbog $f(t) \geq 0$, za svaki $t \in \mathbb{R}$, slijedi da je $D_f \leqslant 0$.

1z toga slijedi da je

$$4\langle x \mid y\rangle^2 - 4 \cdot \|y\|^2\|x\|^2 \leqslant 0.$$

Imamo

$$4\langle x|y\rangle^2 \leqslant 4\|y\|^2 \cdot \|x\|^2 \text{ pa je}$$
$$\langle x \mid y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2,$$

što povlači da je

$$|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

.

□

Propozicija 1.2.4. *Neka je $(V, +, \cdot, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ unitaran prostor. Za sve $x, y \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $\|x\| \geq 0$

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Dokaz. Već smo ranije vidjeli da tvrdnje 1. i 2. vrijede.
Dokažimo 3. Neka su $x \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.
Imamo

$$\|\lambda \cdot x\| = \sqrt{\langle\lambda \cdot x \mid \lambda \cdot x\rangle} = \sqrt{\lambda \cdot \langle x \mid \lambda \cdot x\rangle}$$
$$= \sqrt{\lambda^2\langle x \mid x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Dakle, tvrdnja 3. vrijedi. Dokažimo tvrdnju 4. Neka su $x, y \in V$.
Očito je $\langle x \mid y\rangle \leq |\langle x|y\rangle|$ pa prema propoziciji 1.2.3 vrijedi

$$\langle x \mid y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Koristeći ovu nejednakost dobivamo da je

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 =& \langle x + y \mid x + y\rangle \\
=& \langle x \mid x + y\rangle + \langle y \mid x + y\rangle = \langle x + y \mid x\rangle + \langle x + y \mid y\rangle \\
=& \langle x \mid x\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2 \\
\leqslant& \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Dakle $\|x + y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$ pa slijedi $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
Time je tvrdnja 4. dokazana.

□

1.3 Normirani i metrički prostor

Definicija 1.3.1. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor i neka je* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *funkcija (čiju vrijednost za* $x \in V$ *označavamo s* $\|x\|$*) takva da za sve* $x, y \in V$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi sljedeće:*

1. $\|x\| \geq 0$,

2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Tada za $\|\cdot\|$ *kažemo da je norma na* $(V, +, \cdot)$*, a za uređenu četvorku* $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *kažemo da je normirani prostor.*

Napomena 1.3.2. *Neka je* $(V, +, \cdot, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *unitaran prostor.*

Funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *definirana s* $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$*, za svaki* $x \in V$*, je norma na* $(V, +, \cdot)$ *prema propoziciji 1.2.4.*

Za $\|\cdot\|$ *kažemo da je norma inducirana skalarnim produktom* $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$*.*

Primjer 1.3.3. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *vektorski prostor iz primjera 1.1.5. Definirajmo funkciju*

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ s } \|(x_1, \ldots, x_n)\| = |x_1| + \ldots + |x_n| .$$

Tvrdimo da je $\|\cdot\|$ *norma na* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*.*

Očito je da za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi* $\|x\| \geq 0$ *i* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*.*

Neka su $x \in \mathbb{R}^n$ *,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Imamo

$$\begin{aligned}
\|\lambda \cdot x\| &= \|\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n)\| \\
&= \|(\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)\| \\
&= |\lambda \cdot x_1| + |\lambda \cdot x_2| + \ldots + |\lambda \cdot x_n| \\
&= |\lambda| \cdot |x_1| + \ldots + |\lambda| \cdot |x_n| \\
&= |\lambda| \cdot (|x_1| + \ldots + |x_n|) \\
&= |\lambda| \cdot \|x\|.
\end{aligned}$$

Dakle, $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$*.*

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$*,* $x = (x_1, \ldots, x_n)$*,* $y = (y_1, \ldots, y_n)$*.*

Slijedi

$$\begin{aligned}
\|x+y\| =& \|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\| \\
=& \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\| \\
=& |x_1 + y_1| + \dots + |x_n + y_n| \\
\leqslant& |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n| \\
=& (|x_1| + \dots + |x_n|) + (|y_1| + \dots + |y_n|) \\
=& \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Dakle, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
Zaključak: $\|\cdot\|$ *je norma na* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Primjer 1.3.4. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *vektorski prostor iz primjera 1.1.5. Neka je* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ *euklidski skalarni produkt na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je* $\|\cdot\|$ *norma inducirana tim skalarnim produktom. Za* $\|\cdot\|$ *kažemo da je euklidska norma na* $\mathbb{R}^n$. *Za bilo koje* $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\begin{aligned}
\|(x_1, \dots, x_n)\| &= \sqrt{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n)} \\
&= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \tag{1.2}$$

Definicija 1.3.5. *Neka je* X *neprazan skup te neka je* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *funkcija koja ima svojstvo da za sve* $x, y, z \in X$ *vrijedi sljedeće:*

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada za d *kažemo da je metrika na* X, *a za uređeni par* (X, d) *kažemo da je metrički prostor.*

Primjer 1.3.6. *Neka je* $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *normirani prostor. Definirajmo funkciju*

$$d : V \times V \to \mathbb{R} \text{ s}$$

$$d(x, y) = \|x - y\|, \text{ za sve } x, y \in V.$$

Tvrdimo da je d *metrika na* V.

Prema svojstvu 1. iz definicije norme slijedi da je $d(x,y) \geq 0$ *za sve* $x,y \in V$.
Neka su $x,y \in V$. *Tada vrijedi*

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Dakle, $d(x,y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$.
Za sve $x,y \in V$ *vrijedi (prema primjeru 1.1.7)*

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = d(y,x),$$

to jest $d(x,y) = d(y,x)$.
Neka su $x,y,z \in V$. *Imamo*

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y),$$

to jest $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.
Prema tome d je metrika na V.
Za d kažemo da je metrika inducirana normom $\|\cdot\|$.

Primjer 1.3.7. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *vektorski prostor iz primjera 1.1.5. Neka je* $\|\cdot\|$ *euklidska norma na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je d metrika inducirana tom normom. Za d kažemo da je euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$.
Neka su $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.
Vrijedi

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n\|, \end{aligned}$$

pa iz (1.2) slijedi $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$.

Primjer 1.3.8. *Neka je X neprazan skup. Neka je* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \neq y \\ 0, & \text{ako je } x = y \end{cases}.$$

Tada je d metrika na X.
Dokažimo to. Jasno je da za funkciju d vrijede svojstva (1)-(3) iz definicije metrike.
Neka su $x,y,z \in X$. *Želimo dokazati da je* $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.
Očito je da ta nejednakost ne vrijedi samo u slučaju kada je $d(x,y) = 1$, *a* $d(x,z) = 0$ *i* $d(z,y) = 0$.
No, ako je $d(x,z) = d(z,y) = 0$ *tada vrijedi da je* $x = z$ *i* $z = y$ *pa je i* $x = y$, *a onda ne može vrijediti da je* $d(x,y) = 1$.
Prema tome d je metrika na X. Za d kažemo da je diskretna metrika na X.

Primjer 1.3.9. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor takav da* V *nije jednočlan skup. Tada je* V *beskonačan skup.*

Naime, odaberimo neki $x \in V$ *takav da je* $x \neq 0$. *Pretpostavimo da je* $\lambda \cdot x = 0$ *za neki* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. *Tada je* $\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0$, *to jest* $(\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot x = 0$ *(prema primjeru 1.1.7) pa je* $1 \cdot x = 0$. *Slijedi* $x = 0$, *što je u kontradikciji s odabirom vektora* x. *Dakle,* $\lambda \cdot x \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Promotrimo funkciju $f : \mathbb{N} \to V$ *definiranu s* $f(n) = n \cdot x$. *Neka su* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $n_1 \neq n_2$. *Kada bi vrijedilo* $f(n_1) = f(n_2)$, *imali bismo* $n_1 \cdot x = n_2 \cdot x$, *to jest* $(n_1 - n_2) \cdot x = 0$, *što je nemoguće prema dokazanom jer je* $n_1 \neq n_2$. *Dakle,* $f(n_1) \neq f(n_2)$. *To znači da je* f *injekcija. Prema tome,* V *je beskonačan skup.*

Primjer 1.3.10. *Neka je* X *konačan skup koji ima barem dva elementa. Neka je* d *diskretna metrika na* X. *Tada ne postoje* $+$ *i* $\cdot$ *takve da je* $(X, +, \cdot)$ *vektorski prostor sa svojstvom da postoji norma na tom vektorskom prostoru koja inducira metriku* d.

Naime, prema prethodnom primjeru, ne postoje $+$ *i* $\cdot$ *takve da je* $(X, +, \cdot)$ *vektorski prostor.*

Definicija 1.3.11. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $A \subseteq X$. *Kažemo da je* A *gust skup u* (X, d) *ako za svaki* $x \in X$ *i svaki* $r > 0$ *postoji* $a \in A$ *takav da je* $d(x, a) < r$.

Primjer 1.3.12. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Za sve* $x, y \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|,$$

$$\text{dakle } d(x, y) = |x - y|.$$

Tvrdimo da je $\mathbb{Q}$ *gust skup u* $(\mathbb{R}, d)$.

Neka su $x \in \mathbb{R}$ *i* $r > 0$.

Očito je $x < x + r$ *pa postoji* $q \in \mathbb{Q}$ *takav da je* $x < q < x + r$.

Slijedi da je $0 < q - x < r$. *Stoga je* $d(q, x) = |q - x| = q - x < r$.

Prema tome $d(q, x) < r$. *Dakle,* $\mathbb{Q}$ *je gust skup u* $(\mathbb{R}, d)$.

1.4 Neprekidne funkcije

Definicija 1.4.1. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *dva metrička prostora. Neka je* $f : X \to Y$ *funkcija te neka je* $x_0 \in X$. *Kažemo da je funkcija* f *neprekidna u točki* x_0 *(s obzirom na metrike* d *i* d'*) ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $x \in X$ *vrijedi implikacija:*

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

.

Definicija 1.4.2. *Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija. Kažemo da je f neprekidna (s obzirom na metrike d i d') ako je f neprekidna u x_0 (s obzirom na metrike d i d') za svaki $x_0 \in X$.*

Primjer 1.4.3. *Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori. Odaberimo $y_0 \in Y$. Definirajmo funkciju $f : X \to Y$ s $f(x) = y_0$ za svaki $x \in X$. Tvrdimo da je f neprekidna s obzirom na metrike d i d'.*

Neka je $x_0 \in X$ i neka je $\varepsilon > 0$.

Tada za bilo koji $\delta > 0$ i za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija:

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \text{ jer za svaki } x \in X \text{ vrijedi}$$

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ (jer je } d'(f(x), f(x_0)) = d'(y_0, y_0) = 0).$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in X$.

Primjer 1.4.4. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je $f : X \to X$ identiteta na X, to jest funkcija definirana s $f(x) = x$ za svaki $x \in X$. Tvrdimo da je f neprekidna (s obzirom na metrike d i d).*

Neka su $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$.

Definirajmo $\delta = \varepsilon$. Za svaki $x \in X$ očito vrijedi implikacija:

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(x,x_0) < \varepsilon, \text{ to jest implikacija:}$$

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u x_0 za svaki $x_0 \in X$.

Propozicija 1.4.5. *Neka su (X,d) i (Y,d') metrički prostori te neka su $f, g : X \to Y$ neprekidne funkcije. Pretpostavimo da je A skup gust u (X,d) te takav da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in A$. Tada je $f = g$.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in X$.

Neka je $x \in X$. Pretpostavimo da je $f(x) \neq g(x)$.

Tada je $d'(f(x), g(x)) > 0$ prema definiciji metrike.

Označimo $\varepsilon = d'(f(x), g(x))$. Imamo dakle da je $\varepsilon > 0$ pa je i $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ te stoga neprekidnost funkcije f u točki x povlači da postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $z \in X$ vrijedi:

$$d(z,x) < \delta_1 \Rightarrow d'(f(z), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Isto tako, neprekidnost funkcije g u točki x povlači da postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $z \in X$ vrijedi:

$$d(z,x) < \delta_2 \Rightarrow d'(g(z), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.4}$$

Definirajmo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Budući da je A gust skup u (X, d) postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \delta$.
Iz definicije broja δ je očito da $\delta \leqslant \delta_1$ i $\delta \leqslant \delta_2$ pa slijedi da je

$$d(x, a) < \delta_1 \text{ i}$$

$$d(x, a) < \delta_2.$$

Iz (1.3) i (1.4) slijedi da je

$$d'(f(a), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i}$$

$$d'(g(a), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prema pretpostavci propizicije vrijedi da je $f(a) = g(a)$.
Koristeći ovo te nejednakost trokuta dobivamo:

$$\begin{aligned}\varepsilon =& d'(f(x), g(x)) \leqslant d'(f(x), f(a)) + d'(f(a), g(x)) \\ =& d'(f(x), f(a)) + d'(g(a), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Dakle, $\varepsilon < \varepsilon$, kontradikcija. Stoga je $f(x) = g(x)$.
Time je tvrdnja propizicije dokazana.

□

Definicija 1.4.6. *Neka je X skup te neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcije. Tada definiramo funkcije $f + g : X \to \mathbb{R}$ i $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ s*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ i}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ za svaki } x \in X.$$

Propozicija 1.4.7. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in X$ te neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u točki x_0 (s obzirom na metrike d i d'). Tada su i funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ neprekidne u točki x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$.

Iz činjenice da je f neprekidna u x_0 slijedi da postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.5}$$

Isto tako, postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1 \delta_2\}$.
Očito je $\delta > 0$. Pretpostavimo da je $x \in X$ takav da je $d(x, x_0) < \delta$.
Tada je $d(x, x_0) < \delta_1$ i $d(x, x_0) < \delta_2$ pa iz (1.5) i (1.6) slijedi da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \\ &= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon$.
Time smo dokazali da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| < \varepsilon.$$

Zaključak: funkcija $f + g$ je neprekidna u točki x_0.
Dokažimo da je funkcija $f \cdot g$ neprekidna u točki x_0.
Neka je $\varepsilon > 0$.
Tada, zbog neprekidnosti od f u x_0, postoji $\delta_1 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|g(x_0) + 1)}\right\}. \tag{1.7}$$

Nadalje, zbog neprekidnosti od g u x_0, postoji $\delta_2 > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|f(x_0) + 1)}. \tag{1.8}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pretpostavimo da je $x \in X$ takav da je $d(x, x_0) < \delta$.
Tada je $d(x, x_0) < \delta_1$ i $d(x, x_0) < \delta_2$ pa iz (1.7) i (1.8) slijedi da je

$$|f(x) - f(x_0)| < 1\ , \tag{1.9}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|g(x_0) + 1)} \tag{1.10}$$

i

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|f(x_0) + 1)} \ . \tag{1.11}$$

Koristeći (1.9) dobivamo da je

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \\ &\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \\ &\leqslant 1 + |f(x_0)| \ , \end{aligned}$$

dakle $|f(x)| \leqslant 1 + |f(x_0)|$.
Koristeći zadnju nejednakost te (1.10) i (1.11) dobivamo

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)| \\ &\leqslant |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &< (1 + |f(x_0)|) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|f(x_0)| + 1)} + |g(x_0)| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (|g(x_0)| + 1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|g(x_0)|}{|g(x_0)| + 1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dakle, $|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| < \varepsilon$.
Zaključak: za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| < \varepsilon \ .$$

Prema tome, funkcija $f \cdot g$ je neprekidna u točki x_0.

□

Korolar 1.4.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka su funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ neprekidne s obzirom na metrike d i d'. Tada su i funkcije $f + g : X \to \mathbb{R}$ i $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ neprekidne.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz prethodne propozicije.

□

Propozicija 1.4.9. *Neka su (X, d), (Y, d') i (Z, d'') metrički prostori te neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcije. Pretpostavimo da je $x_0 \in X$ takav da je f neprekidna u x_0 te da je g neprekidna u $f(x_0)$. Tada je funkcija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna u x_0.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$.

Budući da je g neprekidna u $f(x_0)$ postoji $\mu > 0$ takav da za svaki $y \in Y$ vrijedi implikacija

$$d'(y, f(x_0)) < \mu \Rightarrow d''(g(y), g(f(x_0)) < \varepsilon\,. \tag{1.12}$$

Nadalje, budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \mu\,. \tag{1.13}$$

Pretpostavimo da je $x \in X$ takav da je $d(x, x_0) < \delta$.

Tada iz (1.13) slijedi da je $d'(f(x), f(x_0)) < \mu$ pa iz (1.12) slijedi $d''(g(f(x)), g(f(x_0)) < \varepsilon$.

Time smo dokazali da za svaki $x \in X$ vrijedi implikacija

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d''((g \circ f)(x), (g \circ f)(x_0)) < \varepsilon\,.$$

Prema tome, funkcija $g \circ f$ je neprekidna u x_0.

□

Korolar 1.4.10. *Neka su (X, d), (Y, d') i (Z, d'') metrički prostori. Pretpostavimo da su $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidne funkcije. Tada je $g \circ f : X \to Z$ neprekidna funkcija.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz prethodne propozicije.

□

1.5 Neprekidnost u normiranom prostoru

Lema 1.5.1. *Neka je $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je d' metrika na V inducirana normom $\|\cdot\|$. Neka je $x \in V$. Definirajmo funkciju*

$$\rho : \mathbb{R} \to V \text{ s } \rho(\lambda) = \lambda \cdot x \text{ za svaki } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tada je ρ neprekidna s obzirom na metrike d i d'.

Dokaz. Neka je $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Neka je $\varepsilon > 0$.

Definirajmo $\delta = \frac{\varepsilon}{\|x\|+1}$. Očito je $\delta > 0$.

Pretpostavimo da je $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $d(\lambda, \lambda_0) < \delta$. Dakle,

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x\| + 1}.$$

Koristeći posljednju nejednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
d'(\rho(\lambda),\rho(\lambda_0)) &= \|\rho(\lambda)-\rho(\lambda_0)\| \\
&= \|\lambda\cdot x-\lambda_0\cdot x\| \\
&= \|(\lambda-\lambda_0)\cdot x\| \\
&= |\lambda-\lambda_0|\cdot\|x\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{\|x\|+1}\cdot\|x\| \\
&= \varepsilon\cdot\frac{\|x\|}{\|x\|+1} \\
&< \varepsilon\cdot 1=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $d'(\rho(\lambda),\rho(\lambda_0))<\varepsilon$.
Prema tome, za svaki $\lambda\in\mathbb{R}$ vrijedi implikacija

$$d(\lambda,\lambda_0)<\delta\Rightarrow d'(\rho(\lambda),\rho(\lambda_0))<\varepsilon\ .$$

Zaključujemo da je funkcija ρ neprekidna u λ_0.
Budući da je λ_0 bio proizvoljan, imamo da je ρ neprekidna funkcija.

□

Lema 1.5.2. *Neka su (X,d), (Y,d') metrički prostori i $f:X\to Y$ funkcija takva da za sve $x_1,x_2\in X$ vrijedi*

$$d'(f(x_1),f(x_2))\leqslant d(x_1,x_2).$$

Tada je f neprekidna s obzirom na d i d'.

Dokaz. Neka je $x_0\in X$. Dokažimo da je f neprekidna u x_0.
Neka je $\varepsilon>0$. Uzmimo $\delta=\varepsilon$. Neka je $x\in X$ takav da je $d(x,x_0)<\delta$.
Tada je $d(x,x_0)<\varepsilon$, a iz pretpostavke leme slijedi da je

$$d'(f(x),f(x_0))\leqslant d(x,x_0).$$

Iz toga slijedi da je $d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.
Time smo dokazali da za svaki $x\in X$ vrijedi implikacija

$$d(x,x_0)<\delta\Rightarrow d'(f(x),f(x_0))<\varepsilon\ .$$

Dakle, f je neprekidna funkcija u x_0 s obzirom na d i d' pa je time tvrdnja leme dokazana.

□

Lema 1.5.3. *Neka je* $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *normirani prostor te neka je* d *metrika inducirana normom* $\|\cdot\|$. *Neka je* $y \in V$. *Neka je* $f : V \to V$ *funkcija definirana s*

$$f(z) = z + y, \text{ za svaki } z \in V.$$

Tada je f *neprekidna funkcija s obzirom na metrike* d *i* d.

Dokaz. Neka su $z_1, z_2 \in V$. Imamo

$$\begin{aligned} d(f(z_1), f(z_2)) &= \|f(z_1) - f(z_2)\| \\ &= \|(z_1 + y) - (z_2 + y)\| \\ &= \|z_1 - z_2\| \\ &= d(z_1, z_2) \, . \end{aligned}$$

Dakle, $d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2)$.

Iz ovoga i prethodne leme slijedi neprekidnost funkcije f s obzirom na metrike d i d.

□

Lema 1.5.4. *Neka je* $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *normirani prostor te neka su* $x, y \in V$. *Tada vrijedi*

$$|(\|x\| - \|y\|)| \leqslant \|x - y\|.$$

Dokaz. Imamo

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|, \text{ to jest}$$

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|.$$

Iz toga slijedi

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

Isto tako vrijedi

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\|.$$

Ovo znači da su $\|x\| - \|y\|$ i njegov suprotni broj $\|y\| - \|x\|$ manji ili jednaki od $\|x - y\|$.

Stoga je apsolutna vrijednost od $\|x\| - \|y\|$ manja ili jednaka od $\|x - y\|$, a to je tvrdnja leme.

□

Lema 1.5.5. *Neka je* $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *normirani prostor. Neka je* d *metrika inducirana normom* $\|\cdot\|$ *i* d' *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Neka je* $f : V \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana s*

$$f(x) = \|x\|.$$

Tada je f *neprekidna s obzirom na* d *i* d'.

Dokaz. Neka su $x_1, x_2 \in V$.

Prema prethodnoj lemi vrijedi

$$|(||x_1|| - ||x_2||)| \leqslant ||x_1 - x_2||, \text{ to jest}$$

$$|f(x_1) - f(x_2| \leqslant ||x_1 - x_2||.$$

Dakle,

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant d(x_1, x_2).$$

Prema lemi 1.5.2 f je neprekidna s obzirom na d i d'.

□

1.6 Jednakost paralelograma

U sljedećem teoremu pokazat ćemo da je norma inducirana skalarnim produktom ako i samo ako je zadovoljena takozvana jednakost paralelograma (to jest jednakost (1.14)).

Teorem 1.6.1. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor. Neka je* $|| \cdot ||$ *norma na* $(V, +, \cdot)$. *Tada postoji skalarni produkt na* $(V, +, \cdot)$ *koji inducira tu normu ako i samo ako za sve* $x, y \in V$ *vrijedi*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2 \cdot (||x||^2 + ||y||^2). \tag{1.14}$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji skalarni produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ takav da je $|| \cdot ||$ norma inducirana sa $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

To znači da za svaki $x \in V$ vrijedi

$$||x|| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}.$$

Dakle, za svaki $x \in V$ vrijedi

$$||x||^2 = \langle x \mid x \rangle.$$

Neka su $x, y \in V$. Tada je

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= \langle x + y \mid x + y \rangle \\ &= \langle x \mid x + y \rangle + \langle y \mid x + y \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle + \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle \\ &= ||x||^2 + 2 \cdot \langle x \mid y \rangle + ||y||^2. \end{aligned}$$

Dakle,

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2 \cdot \langle x \mid y \rangle + ||y||^2. \tag{1.15}$$

Isto tako je

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 =& \langle x-y \mid x-y\rangle \\ =& \langle x \mid x-y\rangle + \langle -y \mid x-y\rangle \\ =& \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid -y\rangle + \langle -y \mid x\rangle + \langle -y \mid -y\rangle \\ =& \|x\|^2 - 2\cdot\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Prema tome,

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\cdot\langle x \mid y\rangle + \|y\|^2. \tag{1.16}$$

Zbrajanjem jednakosti (1.15) i (1.16) dobivamo da vrijedi (1.14).
Obratno, pretpostavimo da za sve $x, y \in V$ vrijedi (1.14).
Definirajmo funkciju $\langle\cdot \mid \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ s

$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}\cdot\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\cdot\|x-y\|^2,\ \forall x, y \in V.$$

Tvrdimo da je $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ skalarni produkt na $(V, +, \cdot)$.
Neka je $x \in V$. Imamo

$$\begin{aligned}\langle x \mid x\rangle =& \frac{1}{4}\cdot\|x+x\|^2 - \frac{1}{4}\cdot\|x-x\|^2 \\ =& \frac{1}{4}\cdot\|2\cdot x\|^2 - \frac{1}{4}\cdot\|0\|^2 \\ =& \|x\|^2.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\langle x \mid x\rangle = \|x\|^2. \tag{1.17}$$

Iz ovoga slijedi da je

$$\langle x \mid x\rangle \geq 0 \text{ za svaki } x \in V.$$

Nadalje, također zaključujemo

$$\langle x \mid x\rangle = 0 \text{ ako i samo ako je } x = 0.$$

Neka su $x, y \in V$. Imamo

$$\begin{aligned}\langle y \mid x\rangle =& \frac{1}{4}\cdot\|y+x\|^2 - \frac{1}{4}\cdot\|y-x\|^2 \\ =& \frac{1}{4}\cdot\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\cdot\|(-1)\cdot(x-y)\|^2 \\ =& \frac{1}{4}\cdot\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\cdot|(-1)|\cdot\|x-y\|^2 \\ =& \frac{1}{4}\cdot\|x+y\|^2 - \frac{1}{4}\cdot\|x-y\|^2 \\ =& \langle x \mid y\rangle.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\langle x \mid y\rangle = \langle y \mid x\rangle.$$

Neka su $x, y, z \in V$. Prema (1.14) imamo

$$\|(x+z)+y\|^2 + \|(x+z)-y\|^2 = 2\cdot(\|x+z\|^2 + \|y\|^2) \text{ i} \tag{1.18}$$

$$\|(x-z)+y\|^2 + \|(x-z)-y\|^2 = 2\cdot(\|x-z\|^2 + \|y\|^2). \tag{1.19}$$

Oduzmemo (1.19) od (1.18) i imamo:

$$\|(x+z)+y\|^2 - \|(x-z)+y\|^2 + \|(x+z)-y\|^2 - \|(x-z)-y\|^2 =$$

$$2\cdot(\|x+z\|^2 + \|y\|^2) - 2\cdot(\|x-z\|^2 + \|y\|^2).$$

Slijedi

$$(\|(x+y)+z\|^2 - \|(x+y)-z\|^2) + (\|(x-y)+z\|^2 - \|(x-y)-z\|^2) =$$

$$2\cdot\|x+z\|^2 - 2\cdot\|x-z\|^2.$$

Prema definiciji funkcije $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ imamo

$$4\cdot\langle x+y \mid z\rangle + 4\cdot\langle x-y \mid z\rangle = 8\cdot\langle x \mid z\rangle, \text{ to jest}$$

$$\langle x+y \mid z\rangle + \langle x-y \mid z\rangle = 2\cdot\langle x \mid z\rangle. \tag{1.20}$$

Dakle, (1.20) vrijedi za sve $x, y, z \in V$.

Neka su $a, b, c \in V$. Kada u (1.20) umjesto x uvrstimo $\frac{1}{2}\cdot(a+b)$, umjesto y uvrstimo $\frac{1}{2}\cdot(a-b)$ i umjesto z uvrstimo c, dobivamo

$$\langle\frac{1}{2}\cdot(a+b)+\frac{1}{2}\cdot(a-b) \mid c\rangle + \langle\frac{1}{2}\cdot(a+b)-\frac{1}{2}\cdot(a-b) \mid c\rangle = 2\cdot\langle\frac{1}{2}\cdot(a+b) \mid c\rangle. \tag{1.21}$$

Općenito, ako je $\lambda \in \mathbb{R}$ te ako su $x, y \in V$ vrijedi

$$\lambda\cdot(x-y) = \lambda\cdot x - \lambda\cdot y.$$

Naime, imamo

$$\begin{aligned}\lambda\cdot(x-y) &= \lambda\cdot(x+(-y))\\ &= \lambda\cdot x + \lambda\cdot(-y)\\ &= \lambda\cdot x - \lambda\cdot y.\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili da je $\lambda \cdot (-y) = -\lambda \cdot y$ (iz primjera 1.1.7).
Stoga je

$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) + \frac{1}{2} \cdot (a-b) = a, \text{ te je}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) - \frac{1}{2} \cdot (a-b) = b.$$

Sada iz (1.21) slijedi da je

$$\langle a \mid c\rangle + \langle b \mid c\rangle = 2 \cdot \langle \frac{1}{2} \cdot (a+b) \mid c\rangle. \tag{1.22}$$

Prema napomeni (1.2.2) za svaki $y \in V$ vrijedi

$$\langle 0 \mid y\rangle = 0.$$

Koristeći ovo i (1.20) (za $x = y$) zaključujemo da je

$$\langle 2 \cdot x \mid z\rangle = 2 \cdot \langle x \mid z\rangle, \text{ za sve } x, z \in V.$$

Stoga je

$$2 \cdot \left\langle \frac{1}{2} \cdot (a+b) \mid c \right\rangle = \left\langle 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (a+b)\right) \mid c \right\rangle = \langle a+b \mid c\rangle$$

pa prema (1.22) vrijedi

$$\langle a \mid c\rangle + \langle b \mid c\rangle = \langle a+b \mid c\rangle. \tag{1.23}$$

Ostaje dokazati da za sve $x, y \in V$ i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\langle \lambda \cdot x \mid y\rangle = \lambda \cdot \langle x \mid y\rangle. \tag{1.24}$$

Neka su $x, y \in V$. Dokažimo prvo da (1.24) vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{N}$, to jest da je

$$\langle n \cdot x \mid y\rangle = n \cdot \langle x \mid y\rangle, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Jednakost (1.25) dokazujemo indukcijom po n.
Za $n = 1$ je očito da vrijedi (1.25).
Pretpostavimo da (1.25) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Koristeći (1.23) dobivamo

$$\begin{aligned}\langle (n+1) \cdot x \mid y\rangle =& \langle n \cdot x + x \mid y\rangle \\ =& \langle n \cdot x \mid y\rangle + \langle x \mid y\rangle \\ =& n \cdot \langle x \mid y\rangle + \langle x \mid y\rangle \\ =& (n+1) \cdot \langle x \mid y\rangle, \text{ dakle}\end{aligned}$$

$\langle (n+1)\cdot x \mid y\rangle = (n+1)\cdot\langle x \mid y\rangle$.
Time smo dokazali da (1.25) vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Uočimo da (1.24) vrijedi za $\lambda = 0$.
Dokažimo sada da (1.24) vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{Z}$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je

$$\langle (-n)\cdot x \mid y\rangle = (-n)\cdot\langle x \mid y\rangle, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Općenito, ako su $a, b \in V$ imamo

$$\langle -a \mid b\rangle + \langle a \mid b\rangle = \langle -a + a \mid b\rangle = \langle 0 \mid b\rangle = 0 \text{ pa je}$$

$\langle -a \mid b\rangle = -\langle a \mid b\rangle$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned}\langle (-n)\cdot x \mid y\rangle &= \langle -(n\cdot x) \mid y\rangle\\ &= -\langle n\cdot x \mid y\rangle\\ &= -(n\cdot\langle x \mid y\rangle)\\ &= (-n)\cdot\langle x \mid y\rangle.\end{aligned}$$

Prema tome (1.24) vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{Z}$ (i za sve $x, y \in V$).
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\langle x \mid y\rangle = \langle n\cdot(\frac{1}{n}\cdot x) \mid y\rangle = n\cdot\langle\frac{1}{n}\cdot x \mid y\rangle, \text{ dakle}$$

$$\langle x \mid y\rangle = n\cdot\langle\frac{1}{n}\cdot x \mid y\rangle \text{ pa je}$$

$$\langle\frac{1}{n}\cdot x \mid y\rangle = \frac{1}{n}\cdot\langle x \mid y\rangle.$$

Stoga za sve $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\langle\frac{m}{n}\cdot x \mid y\rangle &= \langle m\cdot(\frac{1}{n}\cdot x) \mid y\rangle\\ &= m\cdot\langle\frac{1}{n}\cdot x \mid y\rangle\\ &= m\cdot(\frac{1}{n}\cdot\langle x \mid y\rangle)\\ &= \frac{m}{n}\cdot\langle x \mid y\rangle, \text{ to jest}\end{aligned}$$

$$\langle\frac{m}{n}\cdot x \mid y\rangle = \frac{m}{n}\cdot\langle x \mid y\rangle.$$

Time smo dokazali da (1.24) vrijedi za svaki $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Definirajmo funkciju
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(\lambda) = \langle \lambda \cdot x \mid y \rangle.$$

Neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$.

Tvrdimo da je f neprekidna s obzirom na d' i d'.

Neka je d metrika inducirana normom $\|\cdot\|$. Neka su $f_1 : \mathbb{R} \to V$ i $f_2 : V \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s
$$f_1(\lambda) = \lambda \cdot x \text{ i } f_2(z) = \langle z \mid y \rangle.$$

Prema lemi 1.5.1 funkcija f_1 je neprekidna s obzirom na d' i d.

Iz definicije funkcije $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ slijedi da za svaki $z \in V$ vrijedi
$$f_2(z) = \frac{1}{4} \cdot \|z + y\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|z - y\|^2.$$

Neka su $f_3, f_4 : V \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s
$$f_3(z) = \frac{1}{4} \cdot \|z + y\|^2 \text{ i } f_4(z) = -\frac{1}{4} \cdot \|z - y\|^2.$$

Neka je $h : V \to \mathbb{R}$, $h(z) = \|z + y\|$.

Funkcija h je kompozicija funkcija
$$V \to V, z \mapsto z + y \text{ i } V \to \mathbb{R}, z \mapsto \|z\|$$

pa iz lema 1.5.3, 1.5.5 i korolara 1.4.10 slijedi da je h neprekidna funkcija s obzirom na d i d'.

Vrijedi $f_3 = g \cdot (h \cdot h)$, pri čemu je
$$g : V \to \mathbb{R},\ g(z) = \frac{1}{4}, \text{ za svaki } z \in V.$$

Iz primjera 1.4.3 i korolara 1.4.8 slijedi da je f_3 neprekidna funkcija.

Analogno dobivamo da je f_4 neprekidna funkcija.

Uočimo da je $f_2 = f_3 + f_4$ pa prema korolaru 1.4.8 imamo da je f_2 neprekidna funkcija.

Iz definicija funkcija f_1 i f_2 slijedi da je
$$f = f_2 \circ f_1.$$

Prema korolaru 1.4.10 imamo da je f neprekidna funkcija s obzirom na d' i d'.

Definirajmo funkcije $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tako da je
$$g(\lambda) = \lambda \text{ i } h(\lambda) = \langle x \mid y \rangle,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da su prema primjerima 1.4.3 i 1.4.4 funkcije g i h neprekidne s obzirom na metrike d' i d'.

Definirajmo novu funkciju

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, k(\lambda) = \lambda \cdot \langle x \mid y \rangle,\, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Uočimo da je

$$k = g \cdot h$$

pa prema korolaru 1.4.8 slijedi da je i k neprekidna funkcija s obzirom na metrike d' i d'.

Znamo da za svaki $\lambda \in \mathbb{Q}$ vrijedi

$$\langle \lambda \cdot x \mid y \rangle = \lambda \cdot \langle x \mid y \rangle.$$

Dakle,

$$f(\lambda) = k(\lambda),\, \forall \lambda \in \mathbb{Q}.$$

Sada iz primjera 1.3.12 i propozicije 1.4.5 slijedi da je

$$f = k.$$

Iz toga slijedi da je

$$f(\lambda) = k(\lambda), \text{ za svaki } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prema tome,

$$\langle \lambda \cdot x \mid y \rangle = \lambda \cdot \langle x \mid y \rangle \text{ za svaki } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zaključak: funkcija $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ je skalarni produkt na $(V, +, \cdot)$.

Iz (1.17) slijedi da je

$$||x|| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle},\, \forall x \in V.$$

Prema tome, skalarni produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ inducira normu $|| \cdot ||$.

□

Poglavlje 2

Izometrije

2.1 Izometrije metričkih prostora

Definicija 2.1.1. *Neka su* (X, d) *i* (Y, d') *metrički prostori. Neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Kažemo da je* f *izometrija metričkih prostora* (X, d) *i* (Y, d') *ako za sve* $x_1,\ x_2 \in X$ *vrijedi*

$$d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Propozicija 2.1.2. *Neka je* f *izometrija metričkih prostora* (X, d) *i* (Y, d')*. Tada je* f *injekcija te je* f *neprekidna s obzirom na metrike* d *i* d'*.*

Dokaz. Neka su $x_1,\ x_2 \in X$ takvi da je $x_1 \neq x_2$.

Tada je $d(x_1, x_2) > 0$ pa iz

$$d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \text{ slijedi da je}$$

$$d'(f(x_1), f(x_2)) > 0, \text{ što povlači da je}$$

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Prema tome, f je injekcija.

Da je f neprekidna s obzirom na metrike d i d' slijedi iz leme 1.5.2.

□

Definicija 2.1.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Za funkciju* $f : X \to X$ *koja je izometrija metričkih prostora* (X, d) *i* (X, d) *naprosto kažemo da je izometrija metričkog prostora* (X, d)*.*

Napomena 2.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je Y neprazan podskup od X. Definirajmo funkciju $p : Y \times Y \to \mathbb{R}$ s*

$$p(y_1, y_2) = d(y_1, y_2).$$

Iz činjenice da je d metrika na X odmah slijedi da je p metrika na Y.

Za metrički prostor (Y, p) kažemo da je potprostor metričkog prostora (X, d).

Ako je f izometrija metričkog prostora (X, d) onda je prema propoziciji 2.1.2 f injekcija te je f neprekidna s obzirom na d i d.

Sljedeći primjer pokazuje da izometrija metričkog prostora općenito ne mora biti surjekcija.

Primjer 2.1.5. *Neka je $X = [0, +\infty\rangle$ te neka je p euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$d(x, y) = p(x, y).$$

Prema napomeni 2.1.4 d je metrika na X. Uočimo da je

$$d(x, y) = |x - y|, \ \forall x,\ y \in X.$$

Neka je $f : X \to X$ funkcija definirana s

$$f(x) = x + 1, \ \forall x \in X.$$

Neka su x_1, $x_2 \in X$. Vrijedi

$$\begin{aligned} d(f(x_1), f(x_2)) =& |(x_1 + 1) - (x_2 + 1)| \\ =& |x_1 - x_2| \\ =& d(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\text{dakle } d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Prema tome f je izometrija metričkog prostora (X, d).

No, f nije surjekcija jer očito ne postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = 0$.

2.2 Baza vektorskog prostora

Definicija 2.2.1. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor. Za konačan niz*

$$v_1, \ldots, v_n \text{ u } V$$

kažemo da je linearno nezavisan ako za sve $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ vrijedi implikacija

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Definicija 2.2.2. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor. Za konačan niz*

$$v_1, \ldots, v_n \text{ u } V$$

kažemo da generira $(V, +, \cdot)$ *ako za svaki* $x \in V$ *postoje* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tako da je*

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Definicija 2.2.3. *Neka je* $(V, +, \cdot)$ *vektorski prostor. Za konačan niz*

$$v_1, \ldots, v_n \text{ u } V$$

kažemo da je baza vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$ *ako je linearno nezavisan i generira* $(V, +, \cdot)$.

Definicija 2.2.4. *Za vektorski prostor* $(V, +, \cdot)$ *kažemo da je netrivijalan ako* V *ima barem dva elementa.*

Definicija 2.2.5. *Za vektorski prostor* $(V, +, \cdot)$ *kažemo da je konačnodimenzionalan ako postoji konačan niz u* V *koji generira* $(V, +, \cdot)$.

Napomena 2.2.6. *Ako vektorski prostor ima bazu, onda je on očito konačnodimenzionalan.*

U sljedećoj propoziciji dokazat ćemo da za netrivijalne vektorske prostore vrijedi obrat ove tvrdnje.

Propozicija 2.2.7. *Svaki netrivijalan konačnodimenzionalan vektorski prostor ima bazu.*

Dokaz. Neka je $(V, +, \cdot)$ netrivijalan konačnodimenzionalan vektorski prostor.

Tada postoji konačan niz $v_1, \ldots, v_n$ u V takav da $v_1, \ldots, v_n$ generira $(V, +, \cdot)$.

Neka je S skup svih $k \in \mathbb{N}$ za koje postoje $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ takvi da je

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k \text{ te takvi da konačan niz } v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \text{ generira } (V, +, \cdot).$$

Ako definiramo brojeve $i_1, \ldots, i_n$ s

$$i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$$

onda imamo da je

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_n \text{ te da konačan niz } v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \text{ generira } (V, +, \cdot).$$

To pokazuje da je $n \in S$.

Dakle, S je neprazan podskup od $\mathbb{N}$.

Stoga, S ima najmanji element, označimo ga s m.

Imamo $m \in S$ pa postoje $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ takvi da je

$$i_1 < \ldots < i_m \text{ te takvi da konačan niz } v_{i_1}, \ldots, v_{i_m} \text{ generira } (V, +, \cdot).$$

Dokažimo da je konačan niz $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$ linearno nezavisan.
Pretpostavimo suprotno.
Tada postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\alpha_1 \cdot v_{i_1} + \ldots + \alpha_m \cdot v_{i_m} = 0, \tag{2.1}$$

ali $\alpha_j \neq 0$ za neki $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Uočimo da je $m \geq 2$ (inače bi v_{i_j} generirao $(V, +, \cdot)$, što bi povlačilo da je $v_{i_j} \neq 0$ jer je vektorski prostor $(V, +, \cdot)$ netrivijalan, no tada očito imamo da je konačan niz v_{i_1} linearno nezavisan).

Iz (2.1) slijedi da je

$$\alpha_j \cdot v_{i_j} = (-\alpha_1) \cdot v_{i_1} + \ldots + (-\alpha_{j-1}) \cdot v_{i_{j-1}} + (-\alpha_{j+1}) \cdot v_{i_{j+1}} + \ldots + (-\alpha_m) \cdot v_{i_m}$$

pa množenjem ove jednakosti s $(\alpha_j)^{-1}$ i korištenjem svojstava operacija $+$ i $\cdot$ iz definicije vektorskog prostora dobivamo

$$\begin{aligned} v_{i_j} =& (-\alpha_1 \cdot (\alpha_j)^{-1}) \cdot v_{i_1} + \ldots + (-\alpha_{j-1} \cdot (\alpha_j)^{-1}) \cdot v_{i_{j-1}} \\ &+ (-\alpha_{j+1} \cdot (\alpha_j)^{-1}) \cdot v_{i_{j+1}} + \ldots + (-\alpha_m \cdot (\alpha_j)^{-1}) \cdot v_{i_m}. \end{aligned}$$

Dakle, postoje $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v_{i_j} = \beta_j \cdot v_{i_1} + \ldots + \beta_{j-1} \cdot v_{i_{j-1}} + \beta_{j+1} \cdot v_{i_{j+1}} + \ldots + \beta_m \cdot v_{i_m}. \tag{2.2}$$

Neka je $x \in V$.
Tada postoje $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \gamma_1 \cdot v_{i_1} + \ldots + \gamma_m \cdot v_{i_m}$$

jer $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$ generira $(V, +, \cdot)$

Koristeći (2.2) dobivamo

$$\begin{aligned} x =& \gamma_1 \cdot v_{i_1} + \ldots + \gamma_{j-1} \cdot v_{i_{j-1}} + \gamma_j \cdot (\beta_j \cdot v_{i_1} + \ldots + \beta_{j-1} \cdot v_{i_{j-1}} \\ &+ \beta_{j+1} \cdot v_{i_{j+1}} + \ldots + \beta_m \cdot v_{i_m} \\ &+ \gamma_{j+1} \cdot v_{i_{j+1}} + \ldots + \gamma_m \cdot v_{i_m}, \text{ pa je} \\ x =& (\gamma_1 + \gamma_j \cdot \beta_j) \cdot v_{i_1} + \ldots + (\gamma_{j-1} + \gamma_j \cdot \beta_{j-1}) \cdot v_{i_{j-1}} \\ &+ (\gamma_{j+1} + \gamma_j \cdot \beta_{j+1}) \cdot v_{i_{j+1}} + \ldots + (\gamma_m + \gamma_j \cdot \beta_m) \cdot v_{i_m}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da konačan niz $v_{i_1}, \dots, v_{i_{j-1}}, v_{i_{j+1}}, \dots, v_{i_m}$ generira $(V, +, \cdot)$.
Iz ovoga nije teško zaključiti da je $m - 1 \in S$.
Ovo je u kontradikciji s time da je m najmanji element od S.
Prema tome, konačan niz $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ je linearno nezavisan.
Stoga je $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ baza za $(V, +, \cdot)$.

□

Propozicija 2.2.8. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor te neka je $v_1, \dots, v_n$ baza za $(V, +, \cdot)$. Tada za svaki $x \in V$ postoje jedinstveni $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Dokaz. Da takvi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ postoje slijedi iz činjenice da konačan niz $v_1, \dots, v_n$ generira $(V, +, \cdot)$.

Pretpostavimo da su $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$$

i

$$x = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n.$$

Slijedi

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n \text{ pa je}$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot v_n = 0.$$

Budući da je konačan niz $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisan slijedi

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0.$$

Prema tome,

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

2.3 Linearni operatori

Definicija 2.3.1. *Neka su $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$ vektorski prostori te neka je $L : V \to W$. Kažemo da je L linearni operator (između $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$) ako za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $x, y \in V$ vrijedi*

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y).$$

Propozicija 2.3.2. *Neka su* $(V, +, \cdot)$ *i* $(W, +, \cdot)$ *vektorski prostori te neka su* $A, B : V \to W$ *linearni operatori. Pretpostavimo da je* $v_1, \ldots, v_n$ *baza vektorskog prostora* $(V, +, \cdot)$ *te da je* $A(v_i) = B(v_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. *Tada je* $A = B$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da je $A(x) = B(x)$, $\forall x \in V$.

Neka je $x \in V$.

Tada postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Sada je

$$A(x) = \alpha_1 \cdot A(v_1) + \ldots + \alpha_n \cdot A(v_n) = \alpha_1 \cdot B(v_1) + \ldots + \alpha_n \cdot B(v_n) = B(x).$$

Dakle,

$$A(x) = B(x).$$

□

Propozicija 2.3.3. *Neka su* $(V, +, \cdot)$ *i* $(W, +, \cdot)$ *vektorski prostori. Neka je* $v_1, \ldots, v_n$ *baza za* $(V, +, \cdot)$. *Pretpostavimo da je* $w_1, \ldots, w_n$ *konačan niz u* W. *Tada postoji jedinstveni linearni operator* $L : V \to W$ *takav da je* $L(v_i) = w_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dokaz. Jedinstvenost slijedi iz prethodne propozicije.

Dokažimo da postoji linearni operator $L : V \to W$ s traženim svojstvom.

Definirajmo funkciju $L : V \to W$ na sljedeći način.

Za $x \in V$ postoje jedinstveni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$$

pa definiramo

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot w_i.$$

Dokažimo da je ovo linearni operator.

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te $x, y \in V$.

Imamo

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i \text{ i } y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot v_i,$$

za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Slijedi da je

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i + \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot v_i \text{ pa je}$$

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot \alpha_i + \beta \cdot \beta_i) \cdot v_i.$$

Stoga je

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot \alpha_i + \beta \cdot \beta_i) \cdot w_i. \tag{2.3}$$

S druge strane vrijedi

$$\alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot w_i + \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot w_i, \text{ pa je}$$

$$\alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot \alpha_i + \beta \cdot \beta_i) \cdot w_i. \tag{2.4}$$

Iz (2.3) i (2.4) slijedi da je

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y).$$

Dakle, L je linearni operator.
Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Imamo

$$v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$$

pa prema definiciji funkcije L imamo

$$L(v_i) = 0 \cdot w_1 + \ldots + 0 \cdot w_{i-1} + 1 \cdot w_i + 0 \cdot w_{i+1} + \ldots + 0 \cdot w_n,$$

dakle $L(v_i) = w_i$.
Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Propozicija 2.3.4. *Neka su V, W i Z vektorski prostori te neka su $f : V \to W$ i $g : W \to Z$ linearni operatori. Tada je $g \circ f : V \to Z$ linearni operator.*

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $x, y \in V$.

Imamo

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) =& g(f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y))\\ =& g(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y))\\ =& \alpha \cdot g(f(x)) + \beta \cdot g(f(y))\\ =& \alpha \cdot (g \circ f)(x) + \beta \cdot (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

Dakle, $(g \circ f)(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot (g \circ f)(x) + \beta \cdot (g \circ f)(y)$ pa je time tvrdnja propozicije dokazana. □

Napomena 2.3.5. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \to T$ funkcija. Pretpostavimo da postoji funkcija $g : T \to S$ takva da je $g \circ f = id_S$ i $f \circ g = id_T$, pri čemu su id_S i id_T identitete na skupovima S i T. Tada je f bijekcija te je $f^{-1} = g$. Dokažimo to.*

Neka su $x_1, x_2 \in S$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Tada je $(g \circ f)(x_1) = id_S(x_1)$ pa je $g(f(x_1)) = x_1$. Isto tako dobivamo da je $g(f(x_2)) = x_2$. Sada vidimo da je $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ pa je očito $f(x_1) \neq f(x_2)$. Prema tome, f je injekcija.

Neka je $y \in T$. Imamo $y = id_T(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Dakle, $y = f(g(y))$ pa postoji $x \in S$ takav da je $y = f(x)$. Prema tome, f je surjekcija. Stoga je f bijekcija.

Neka je $y \in T$. Označimo $x = f^{-1}(y)$. Tada je $f(x) = y$. S druge strane, znamo da je $f(g(y)) = y$, to jest $f(x) = f(g(y))$ pa iz činjenice da je f injekcija slijedi da je $x = g(y)$, to jest $f^{-1}(y) = g(y)$. Prema tome, $f^{-1} = g$.

Definicija 2.3.6. *Neka su $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$ vektorski prostori te neka je $L : V \to W$ linearni operator takav da je L bijekcija. Tada za L kažemo da je izomorfizam ovih vektorskih prostora.*

Propozicija 2.3.7. *Neka je $L : V \to W$ izomorfizam vektorskih prostora $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$. Tada je $L^{-1} : W \to V$ linearni operator.*

Dokaz. Neka su $w_1, w_2 \in W$ te neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Želimo dokazati da je

$$L^{-1}(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2) = \alpha \cdot L^{-1}(w_1) + \beta \cdot L^{-1}(w_2). \tag{2.5}$$

U tu svrhu označimo $x = L^{-1}(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2)$ i $y = \alpha \cdot L^{-1}(w_1) + \beta \cdot L^{-1}(w_2)$.

Dovoljno je dokazati da je $L(x) = L(y)$. Naime, tada će iz injektivnosti od L slijediti da je $x = y$, a to je upravo (2.5).

Imamo

$$\begin{aligned}L(x) =& L(L^{-1}(\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2))\\ =& \alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2.\end{aligned}$$

S druge strane, vrijedi

$$\begin{aligned}L(y) =&L(\alpha \cdot L^{-1}(w_1) + \beta \cdot L^{-1}(w_2))\\ =&\alpha \cdot L(L^{-1}(w_1)) + \beta \cdot L(L^{-1}(w_2))\\ =&\alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2.\end{aligned}$$

Iz ovoga zaključujemo da je $L(x) = L(y)$. Time je tvrdnja dokazana.

□

Korolar 2.3.8. *Neka su $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$ vektorski prostori te neka je $L : V \to W$ linearni operator. Pretpostavimo da je $g : W \to V$ funkcija takva da je $g \circ L = id_V$ i $L \circ g = id_W$. Tada je L izomorfizam.*

Dokaz. To slijedi direktno iz napomene 2.3.5.

□

Propozicija 2.3.9. *Neka su $(V, +, \cdot)$ i $(W, +, \cdot)$ vektorski prostori. Pretpostavimo da je $L : V \to W$ linearni operator. Nadalje, pretpostavimo da je $v_1, \ldots, v_n$ baza za $(V, +, \cdot)$ takva da je $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ baza za $(W, +, \cdot)$. Tada je L izomorfizam.*

Dokaz. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ označimo $w_i = L(v_i)$. Prema pretpostavci propozicije $w_1, \ldots, w_n$ je baza za $(W, +, \cdot)$.

Prema propoziciji 2.3.3 postoji linearni operator $N : W \to V$ takav da je $N(w_i) = v_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Promotrimo kompoziciju $N \circ L : V \to V$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$(N \circ L)(v_i) = N(L(v_i)) = N(w_i) = v_i,$$

to jest $(N \circ L)(v_i) = v_i$.

S druge strane, funkcija $id_V : V \to V$ je očito linearni operator te za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$id_V(v_i) = v_i.$$

Iz propozicije 2.3.3 (jedinstvenost) slijedi da je $N \circ L = id_V$.

Obratno, neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tada za funkciju $L \circ N : W \to W$ vrijedi

$$(L \circ N)(w_i) = L(N(w_i)) = L(v_i) = w_i$$

pa na isti način zaključujemo da je $L \circ N = id_W$.

Iz korolara 2.3.8 slijedi da je L izomorfizam.

□

2.4 Svojstva linearne nezavisnosti i ortonormirane baze

Definicija 2.4.1. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor te neka je $v_1, \ldots, v_n$ konačan niz u V. Kažemo da je konačan niz $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisan u $(V, +, \cdot)$ (ili da su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisni) ako konačan niz $v_1, \ldots, v_n$ nije linearno nezavisan u $(V, +, \cdot)$.*

Propozicija 2.4.2. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor i neka je $v_1, \ldots, v_n$ konačan niz u V. Tada su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisni ako i samo ako je $v_1 = 0$ ili postoji $j \in \{2, \ldots, n\}$ takav da je*

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \cdot v_i, \text{ za neke } \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1} \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $v_1 = 0$. Tada je

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n = 0$$

pa je jasno da su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisni.
Pretpostavimo sada da postoji $j \in \{2, \ldots, n\}$ takav da je

$$v_j = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1}, \text{ za neke } \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1} \in \mathbb{R}.$$

Tada je

$$0 = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1} + (-1) \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$$

iz čega vidimo da su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisni.
Obratno, pretpostavimo da su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisni.
Tada postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \text{ te takvi da je } \alpha_i \neq 0 \text{ za barem jedan } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definirajmo $j = \max\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \alpha_i \neq 0\}$. Tada vrijedi

$$\alpha_{j+1} = \ldots = \alpha_n = 0$$

pa je

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_j \cdot v_j = 0. \tag{2.6}$$

Iz definicije broja j je također jasno da je $\alpha_j \neq 0$.
Razlikujemo dva slučaja.
Prvi slučaj: $j = 1$.
Tada iz (2.6) slijedi

$$\alpha_1 \cdot v_1 = 0.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s α_1^{-1} dobivamo

$$v_1 = 0.$$

Drugi slučaj: $j \in \{2, \ldots, n\}$.
Tada iz (2.6) slijedi

$$\alpha_j \cdot v_j = -\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + (-\alpha_{j-1}) \cdot v_{j-1}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s α_1^{-1} dobivamo

$$v_j = (\alpha_j^{-1} \cdot (-\alpha_1)) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha_j^{-1} \cdot (-\alpha_{j-1})) \cdot v_{j-1}.$$

Prema tome, postoje $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1} \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v_j = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_{j-1} \cdot v_{j-1}.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Napomena 2.4.3. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor te neka je $v_1, \ldots, v_n$ konačan niz u V. Kao u dokazu prethodne propozicije vidimo da vrijedi sljedeće:*

1. *Ako je $n \geq 2$ i $v_1 = \alpha_2 \cdot v_2 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$ za neke $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, onda su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisni.*

2. *Ako su $v_1, \ldots, v_n$ linearno nezavisni, onda je $v_i \neq 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Propozicija 2.4.4. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor te neka je $v_1, \ldots, v_n$ konačan niz koji generira V. Pretpostavimo da je $j \in \{2, \ldots, n\}$ takav da je*

$$v_j = \alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1}, \text{ za neke } \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1} \in \mathbb{R}.$$

Tada konačan niz $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$ generira V.

Dokaz. Neka je $x \in V$. Tada postoje $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_j \cdot v_j + \ldots + \beta_n \cdot v_n.$$

Slijedi

$$x = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_{j-1} \cdot v_{j-1} + \beta_j \cdot (\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1}) + \beta_{j+1} \cdot v_{j+1} + \ldots + \beta_n \cdot v_n$$

pa je

$$x = (\beta_1 + \beta_j \cdot \alpha_1) \cdot v_1 + \ldots + (\beta_{j-1} + \beta_j \cdot \alpha_{j-1}) \cdot v_{j-1} + \beta_{j+1} \cdot v_{j+1} + \ldots + \beta_n \cdot v_n.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

Teorem 2.4.5. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor, neka je $v_1, \ldots, v_n$ konačan linearno nezavisan niz vektora u V te neka je $w_1, \ldots, w_m$ konačan niz vektora koji generira V. Tada je $n \leq m$.*

Dokaz. Promotrimo konačan niz $v_1, w_1, \ldots, w_m$. Očito ovi vektori generiraju V.

Nadalje, budući da $w_1, \ldots, w_m$ generiraju V, napomena 2.4.3 (1.) povlači da su vektori $v_1, w_1, \ldots, w_m$ linearno zavisni.

Iz pretpostavke teorema i napomene 2.4.3 (2.) slijedi da je $v_1 \neq 0$.

Sada iz propozicije 2.4.2 slijedi da postoji $j \in \{1, \ldots, m\}$ takav da se w_j može zapisati kao linearna kombinacija vektora $v_1, w_1, \ldots, w_{j-1}$.

Propozicija 2.4.4 povlači da konačan niz $v_1, w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_m$ generira V.

Dakle, postoji $c_1, \ldots, c_{m-1} \in V$ takvi da vektori $v_1, c_1, \ldots, c_{m-1}$ generiraju V.

Promotrimo sada konačan niz $v_2, v_1, c_1, \ldots, c_{m-1}$.

Kao maloprije, zaključujemo da postoje $z_1, \ldots, z_{m-2}$ takvi da konačan niz

$$v_2, v_1, z_1, \ldots, z_{m-2}$$

generira V (uočimo da ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $v_2 = \lambda \cdot v_1$ zato što je konačan niz $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno nezavisan).

Ovaj postupak nastavljamo za $k \geq 3$ te dolazimo do konačnog niza

$$v_k, v_{k-1}, \ldots, v_1, t_1, \ldots, t_{m-k}$$

koji generira V, gdje su $t_1, \ldots, t_{m-k}$ elementi od V.

Ovaj postupak u nekom trenutku staje ako je $m - k = 0$ ili ako je $k = n$. U svakom slučaju vrijedi $m - k \geq 0$ pa je $k \leq m$.

Stoga, ako je $k = n$, imamo $n \leq m$.

Ostaje još da promotrimo slučaj $m - k = 0$. Tada je $m = k$. Jasno je da je $k \leq n$. Ako je $k = n$ onda smo gotovi.

Pretpostavimo da je $k < n$. Imamo da vektori $v_k, \ldots, v_1$ generiraju V (jer je $m-k = 0$), to jest $v_1, \ldots, v_k$ generiraju V pa se v_{k+1} može zapisati kao linearna kombinacija tih vektora. Iz propozicije 2.4.2 slijedi da je konačan niz $v_1, \ldots, v_n$ linearno zavisan što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema.

Zaključak: $n \leq m$.

□

Korolar 2.4.6. *Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor. Pretpostavimo da su $w_1, \ldots, w_n$ i $v_1, \ldots, v_n$ konačni nizovi u V takvi da je $w_1, \ldots, w_n$ baza za $(V, +, \cdot)$ te da je $v_1, \ldots, v_n$ linearno nezavisan niz. Tada je $v_1, \ldots, v_n$ također baza za $(V, +, \cdot)$.*

Dokaz. Tvrdimo da se za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vektor w_i može zapisati kao linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_n$.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da se w_i ne može zapisati kao linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_n$.

Promotrimo konačan niz $v_1, \dots, v_n, w_i$. Iz propozicije 2.4.2 slijedi da je taj konačan niz linearno nezavisan.

Kada primijenimo prethodni teorem na ovaj konačan niz te na konačan niz $w_1, \dots, w_n$ (koji generira V) dobivamo da je $n + 1 \leq n$ što je očito nemoguće.

Prema tome, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ postoje $\alpha^i_1, \dots, \alpha^i_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \cdot v_j.$$

Dokažimo sada da vektori $v_1, \dots, v_n$ generiraju V.

Neka je $x \in V$. Tada postoje $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot w_i.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot (\sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j \cdot v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \cdot \alpha^i_j \cdot v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \alpha^i_j \cdot v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \alpha^i_j) \cdot v_j. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \alpha^i_j) \cdot v_j.$$

Ovo pokazuje da vektori $v_1, \dots, v_n$ generiraju V.

Prema tome, $v_1, \dots, v_n$ je baza za V.

□

Definicija 2.4.7. *Neka je $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor. Za vektore $x, y \in V$ kažemo da su okomiti u ovom unitarnom prostoru i pišemo $x \perp y$ ako je $\langle x \mid y \rangle = 0$.*

Definicija 2.4.8. *Neka je $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor te neka je $v_1, \dots, v_n$ baza za $(V, +, \cdot)$. Kažemo da je $v_1, \dots, v_n$ ortonormirana baza za $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ako za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi $\|v_i\| = 1$ te ako za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$ takve da je $i \neq j$ vrijedi $v_i \perp v_j$.*

Propozicija 2.4.9. *Neka je $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ unitarni prostor te neka je $v_1, \dots, v_n$ ortonormirana baza tog prostora. Tada za svaki $x \in V$ vrijedi*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid v_i \rangle \cdot v_i.$$

Dokaz. Neka je $x \in V$.

Budući da je $v_1, \dots, v_n$ baza za $(V, +, \cdot)$, postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i. \tag{2.7}$$

Neka je $j \in \{1, \dots, n\}$.

Koristeći svojstva skalarnog produkta te činjenicu da je $v_1, \dots, v_n$ ortonormirana baza za $(V, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, dobivamo

$$\begin{aligned} \langle x \mid v_j \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i \mid v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i \cdot v_i \mid v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \langle v_i \mid v_j \rangle = \alpha_j. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\alpha_j = \langle x \mid v_j \rangle, \text{ za svaki } j \in \{1, \dots, n\}.$$

Sada iz (2.7) slijedi

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid v_i \rangle \cdot v_i.$$

□

Primjer 2.4.10. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ euklidski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Neka je*

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Za sve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda_1 \cdot e_1 + \ldots + \lambda_n \cdot e_n = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Iz ovoga slijedi da je $e_1, \ldots, e_n$ baza za $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (gdje su $+$ i $\cdot$ kao u primjeru 1.1.5). Nadalje, očito je $e_1, \ldots, e_n$ ortonormirana baza za $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

2.5 Izometrije euklidskog prostora

Propozicija 2.5.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ euklidski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija metričkog prostora $(\mathbb{R}^n, d)$ takva da je $f(0) = 0$. Tada za sve x, $y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle.$$

Dokaz. Neka je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$. Imamo

$$\begin{aligned}\|x\| &= \|x - 0\| = d(x, 0)\\ &= d(f(x), f(0)) = \|f(x) - f(0)\|\\ &= \|f(x) - 0\| = \|f(x)\|.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\|x\| = \|f(x)\|, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Neka su x, $y \in \mathbb{R}^n$. Imamo

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \langle x - y \mid x - y \rangle\\ &= \langle x - y \mid x \rangle + \langle x - y \mid -y \rangle\\ &= \langle x \mid x \rangle - \langle y \mid x \rangle - \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid y \rangle\end{aligned}$$

pa je

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2 \cdot \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2. \tag{2.9}$$

Posebno, kada u (2.9) umjesto x i y uvrstimo $f(x)$ i $f(y)$, dobivamo

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2 \cdot \langle f(x) \mid f(y) \rangle + \|f(y)\|^2. \tag{2.10}$$

Vrijedi $\|x - y\|^2 = (d(x, y))^2 = (d(f(x), f(y)))^2 = \|f(x) - f(y)\|^2$, dakle

$$\|x - y\|^2 = \|f(x) - f(y)\|^2.$$

Iz ovoga, (2.9) i (2.10) slijedi da je

$$\|x\|^2 - 2 \cdot \langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 = \|f(x)\|^2 - 2 \cdot \langle f(x) \mid f(y) \rangle + \|f(y)\|^2.$$

Iz (2.8) slijedi

$$-2 \cdot \langle x \mid y \rangle = -2 \cdot \langle f(x) \mid f(y) \rangle$$

pa je

$$\langle x \mid y \rangle = \langle f(x) \mid f(y) \rangle.$$

□

Teorem 2.5.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka su $+$ i $\cdot$ kao u primjeru 1.1.5. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija metričkog prostora $(\mathbb{R}^n, d)$ takva da je $f(0) = 0$. Tada je f izomorfizam vektorskih prostora $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.*

Dokaz. Neka je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ euklidski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Neka je $e_1, \ldots, e_n$ ortonormirana baza za $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ kao u primjeru 2.4.10. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $v_i = f(e_i)$.

Prema propoziciji 2.5.1 za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle.$$

Neka su $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.
Imamo

$$\langle v_i \mid v_j \rangle = \langle f(e_i) \mid f(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle = 0.$$

Dakle,

$$\langle v_i \mid v_j \rangle = 0, \text{ za sve } i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j. \tag{2.11}$$

Nadalje, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|v_i\| &= \sqrt{\langle v_i \mid v_i \rangle} \\ &= \sqrt{\langle f(e_i) \mid f(e_i) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle e_i \mid e_i \rangle} \\ &= \|e_i\| = 1. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\|v_i\| = 1. \tag{2.12}$$

Tvrdimo da su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno nezavisni.
Pretpostavimo da su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0. \tag{2.13}$$

Neka je $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Iz (2.13) slijedi da je

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i \mid v_j \rangle = 0.$$

Stoga je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \langle v_i \mid v_j \rangle = 0$$

pa iz (2.11) i (2.12) slijedi da je $\alpha_j = 0$.

Prema tome, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ pa imamo da su vektori $v_1, \ldots, v_n$ linearno nezavisni. Budući da je $e_1, \ldots, e_n$ baza za $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, iz korolara 2.4.6 slijedi da je $v_1, \ldots, v_n$ baza za $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Uočimo da je prema (2.11) i (2.12) to ortonormirana baza za $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$. Prema propoziciji 2.3.3 postoji linearni operator $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takav da je

$$L(e_i) = v_i, \text{ za svaki } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Iz propozicije 2.3.9 slijedi da je L izomorfizam.

Da bismo dokazali tvrdnju teorema, dovoljno je dokazati da je $f = L$.

Neka je $x \in \mathbb{R}^n$.

Koristeći propiziciju 2.4.9 dobivamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \langle f(x) \mid v_i \rangle \cdot v_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle f(x) \mid f(e_i) \rangle \cdot L(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \cdot L(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} L(\langle x \mid e_i \rangle \cdot e_i) \\
&= L(\sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle \cdot e_i) = L(x).
\end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = L(x)$.

Prema tome, $f = L$ i time je tvrdnja teorema dokazana.

□

Teorem 2.5.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$ te neka su $+$ i $\cdot$ kao u primjeru 1.1.5. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija metričkog prostora $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Tada postoje izomorfizam $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorskih prostora $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ i $a \in \mathbb{R}^n$ takvi da je

$$f(x) = L(x) + a, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Neka je $a = f(0)$.

Definirajmo funkciju $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ s $L(x) = f(x) - a$.

Dokažimo da je L izometrija metričkog prostora $(\mathbb{R}^n, d)$.

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$ te neka je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$.

Imamo

$$\begin{aligned} d(L(x), L(y)) =& \|L(x) - L(y)\| \\ =& \|f(x) - a - (f(y) - a)\| \\ =& \|f(x) - f(y)\| \\ =& d(f(x), f(y)) = d(x, y). \end{aligned}$$

Dakle, $d(L(x), L(y)) = d(x, y)$, prema tome L je izometrija.

Nadalje, iz definicije od L je očito da je $L(0) = 0$.

Sada prema teoremu 2.5.2 imamo da je L izomorfizam vektorskih prostora $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ i $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Iz definicije od L vidimo da je $f(x) = L(x) + a$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

□

Korolar 2.5.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrija metričkog prostora $(\mathbb{R}^n, d)$. Tada je f bijekcija.*

Dokaz. Prema propoziciji 2.1.2 imamo da je f injekcija.

Dokažimo da je f surjekcija.

Prema prethodnom teoremu postoje bijekcija $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i $a \in \mathbb{R}^n$ takvi da je

$$f(x) = L(x) + a, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Neka je $y \in \mathbb{R}^n$.

Budući da je L surjekcija postoji $x \in \mathbb{R}^n$ takav da je $L(x) = y - a$.

Iz ovoga slijedi da je $y = L(x) + a$, to jest $y = f(x)$.

Time smo dokazali da je f surjekcija pa je tvrdnja korolara dokazana.

□

Bibliografija

[1] B. F. Rezende Ribeiro, *Proof of Jordan-von Neumann theorem for vector spaces over* $\mathbb{R}$, https://oitofelix.github.io/academic/Jordan-von

[2] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.

[3] I. Gogić, *Diferencijalna geometrija*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu - matematički odsjek.

[4] Lj. Arambašić, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2022.

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavili smo se proučavanjem unitarnih prostora i izometrija, s posebnim naglaskom na izometrije u euklidskom prostoru. Podijelili smo ga na dva dijela.

Prvi dio rada usmjeren je na osnovne pojmove i strukture vektorskih prostora. Nakon definiranja vektorskog prostora, uvodi se pojam skalarnog produkta i istražuju njegova ključna svojstva. U nastavku su predstavljeni normirani i metrički prostori te su analizirane neprekidne funkcije između metričkih prostora. Poseban naglasak stavljen je na ispitivanje neprekidnosti specifičnih funkcija unutar normiranih prostora, pri čemu je dokazana tvrdnja da je norma inducirana skalarnim produktom ako i samo ako zadovoljava jednakost paralelograma.

Drugi dio rada posvećen je izometrijama metričkih prostora, s detaljnim osvrtom na euklidski prostor. Najprije je definirana izometrija između metričkih prostora, a potom se istražuju svojstva baza vektorskih prostora i linearnih operatora. Uključena je analiza linearne nezavisnosti vektora te definiranje ortonormiranih baza kao specijalnih vrsta baza vektorskog prostora. Na temelju tih definicija dokazano je da svaka izometrija euklidskog prostora predstavlja izomorfizam dotičnog vektorskog prostora "do na translaciju". Osim toga, pokazano je da su sve izometrije euklidskog prostora bijekcije.

Rad pridonosi razumijevanju struktura metričkih i unitarnih prostora te analizira ključna svojstva izometrija koje čine osnovu za daljnja istraživanja u teoriji vektorskih prostora i analizi linearnih operatora.

Summary

In this thesis, we explored unitary spaces and isometries, with a particular emphasis on isometries in the Euclidean space. The work is divided into two main sections.

The first part focuses on fundamental concepts and structures of vector spaces. We began by defining vector spaces, introducing the concept of the inner (scalar) product, and examining its key properties. Subsequently, we presented normed and metric spaces, analyzing continuous functions between metric spaces. Special attention is given to exploring the continuity of specific functions within normed spaces, where we proved that a norm is induced by an inner product if and only if it satisfies the parallelogram law.

The second part is dedicated to the study of isometries in metric spaces, with a detailed focus on the Euclidean space. We first defined isometries between metric spaces, then explored the properties of vector space bases and linear operators. This includes analyzing the linear independence of vectors and defining orthonormal bases as specific types of bases in vector spaces. Based on these definitions, we proved that every isometry of the Euclidean space is an isomorphism of the associated vector space, up to a translation. Additionally, it is demonstrated that all isometries of the Euclidean space are bijective.

This thesis contributes to a deeper understanding of the structures of metric and unitary spaces and examines key properties of isometries, providing a foundation for further research in vector space theory and linear operator analysis.

Životopis

Rođena sam 12.2.1999. godine u Slavonskom Brodu. Odrasla sam u Donjoj Vrbi, selu pored Slavonskog Broda. Školovanje započinjem 2005. godine u Osnovnoj školi ”Ivan Goran Kovačić”. Osnovnu školu završavam 2013. godine i upisujem Opću gimnaziju ”Matija Mesić” u Slavonskom Brodu. Nakon završene srednje škole, 2017. godine nastavljam školovanje na preddiplomskom studiju Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2021. godine te upisujem diplomski studij na istom fakultetu.

Tijekom diplomskog studija radila sam kao Data Annotator u Photomathu, učiteljica matematike u Osnovnoj školi ”Markuševec” u Zagrebu te sam sudjelovala na Summer Work and Travel programu kulturne razmjene u Sjedinjenim Američkim Državama.