SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Radovan

POSEBNE TOČKE TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima.

Zahvaljujem se mentoru doc.dr.sc. Matiji Bašiću na ukazanom povjerenju i savjetima koji su mi pomogli pri izradi ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Sadržaj iv

Uvod 1

1 Pojam trokuta u nastavi matematike 3
1.1 Svojstva trokuta . . . 9

2 Četiri karakteristične točke trokuta 15
2.1 Simetrala dužine . . . 16
2.2 Središte trokutu opisane kružnice . . . 17
2.3 Simetrala kuta . . . 21
2.4 Središte trokutu upisane kružnice . . . 23
2.5 Središte trokutu pripisane kružnice . . . 25
2.6 Težište trokuta . . . 26
2.7 Ortocentar trokuta . . . 32

3 Eulerova kružnica i Eulerov pravac 39
3.1 Eulerov pravac . . . 39
3.2 Središte Eulerove kružnice . . . 40

4 Kopunktalnost pravaca 43
4.1 Cevin teorem . . . 43
4.2 Lemoineova točka . . . 45

5 Fermatova, Jacobijeva i Napoleonove točke 51
5.1 Fermat-Torricellijeva i Jacobijeva točka . . . 51
5.2 Napoleonove točke . . . 54

6 Brocardova točka 63

Bibliografija 71

Uvod

Pojam geometrija je nastao od starogrčke riječi $\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\varrho\iota\alpha$ ('zemljomjeriteljstvo'). To je grana matematike koja proučava položaj, oblik i svojstva geometrijskih tijela u prostoru te njihov međusobni odnos. Razvila se iz praktične potrebe mjerenja površina zemljišnih parcela te volumena posuda i skladišta. Otprilike oko 3100. godine prije Krista u Egiptu i Mezopotamiji nailazimo na prve geometrijske zapise. Daljnjim razvojem njezin je predmet proučavanja postao širi i apstraktniji.

U ovome radu bavit ćemo se pojmom trokuta, koji je jedan od najranije otkrivenih geometrijskih likova u doba starog Babilona na području nekadašnje Mezopotamije (danas je to područje na kojem se nalaze države Irak i Iran). Ime trokut nastalo je od latinske riječi 'triangulus' što znači tri kuta. Osim kratkog pregleda uvođenja pojma trokuta u redovitoj nastavi matematike opisat ćemo četiri karakteristične točke trokuta te neke od točaka koje imaju posebna svojstva, njihove definicije, značaj i primjene takvih točaka. Posebne točke trokuta su vrlo često definirane kao presjek tri pravca. Jedan način za dokazivanje da se tri pravca sijeku u jednoj točki je prvo pronaći sjecište dvaju pravaca, a onda provjeriti prolazi li i treći pravac kroz tu točku. U ovom radu ćemo spomenuti i druge dokaze kopunktalnosti pravaca. Također ćemo prikazati pomoćne ili poznate rezultate, poput Napoleonovog i Jacobijevog teorema.

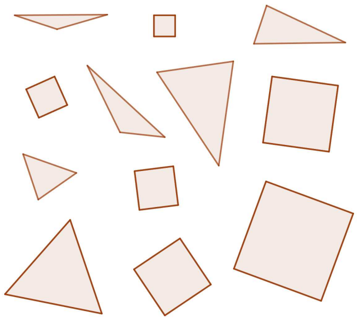
Poglavlje 1

Pojam trokuta u nastavi matematike

Osvrnemo li se na sadašnji obrazovni sustav, možemo primijetiti da se geometriji kao grani matematike u usporedbi s ostalim granama matematike pridaje nedovoljno značaja. Djeca se s geometrijom susreću od najranije dobi jer kroz igru i interakciju s prirodom uočavaju predmete nalik geometrijskim likovima i geometrijskim tijelima. Zastupljenost geometrije u nastavi matematike je značajna jer učenike potiče na svijest o postojanju obrazaca, razumijevanju tih obrazaca i njihovih svojstava. Zbog toga učenje geometrije treba započeti u najranijoj dobi djece, a u daljnjem obrazovnom procesu to znanje na odgovarajući način postepeno nadograđivati. Tako se kod učenika razvija prostorno mišljenje i vizualizacija pa učenici mogu razumjeti svijet u kojem žive. Zastupljenost geometrije može doprinijeti razvoju koordinacije i umjetničkog izražavanja učenika, a nastavna sredstva i pomagala u učenju geometrije, kao što su alati dinamične geometrije mogu uvelike doprinijeti učenikovom razumijevanju pojedinih koncepata te je stoga potrebno upotrijebiti ih da se kod učenika potaknu misaoni procesi. Specifičnost geometrije su dokazi koji iziskuju visoku razinu mišljenja, generaliziranja i apstrahiranja. Pojam trokuta je bitan u nastavi matematike te se učenici s njime susreću u svakom razredu osnovne pa tako i srednje škole počevši od prvog razreda razredne nastave. Na konceptu trokuta gradimo pojmove i rezultate vezane uz njega. Također, trokut je temeljni pojam s pomoću kojeg nadograđivanjem dolazimo do složenijih kao što je naprimjer mnogokut. U ovom dijelu rada dat ćemo kratki pregled uvođenja pojma trokuta u nastavi matematike po etapama. Prema profesoru Zdravku Kurniku [1] proces formiranja nekog pojma je postupan proces i ima tri faze: promatranje i opažanje, predodžba o pojmu te formiranje pojma. U prvoj fazi promatranja i opažanja se promatraju konkretni objekti i upoznavaju njihova konkretna svojstva povezana s pojmom. U osnovi ove faze je osjetilna spoznaja. Druga faza sastoji se od uočavanja nečeg općenitog i zajedničkog objektima u promatranom skupu. Treća faza je izdvajanje bitnog općeg svojstva takvih objekata. U navedenom procesu prepoznajemo bitne znanstvene postupke: analizu, sintezu, apstrahiranje i poopćavanje. Prema tome matematički pojmovi nakon analize nastaju apstrahiranjem svojstava predmeta koji postoje u prirodi te njihovim poopćavanjem. Tako apstraktni matematički pojmovi održavaju neke strane stvarnog svijeta i pridonose njegovom spoznavanju. Profesor Zdravko Kurnik naglašava da proces uvođenja novih pojmova u osnovnoj školi treba provoditi pažljivo i primjereno. Svaka faza procesa ima određenu težinu i bitna je za razvoj mišljenja učenika. Prelazeći iz jedne faze u drugu povisuje se razina mišljenja učenika, a kritično mjesto obrade pojma je prijelaz u fazu u kojoj počinje postupak apstrahiranja, jer za neke učenike prijelaz s konkretnog na apstraktno može biti veoma zahtjevan. Za razliku od osnovne u srednjoj se školi proces formiranja pojmova najčešće skraćuje pa se do definicije pojma može doći bez provođenja neke od navedenih faza. Prema Kurikulumu za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj učenje geometrije je potrebno započeti upoznavanjem geometrijskih tijela na konkretnim modelima jer su trodimenzionalni prostor i oblici u njemu učenicima bliski. [2] Učenici tijela uzimaju u ruke, okreću ih i imenuju, tako bi u slučaju uvođenja trokuta učenici razgledavali trostranu piramidu. Kada su geometrijska tijela zorno upoznata, prelazi se na njihove ilustracije. Geometrijske likove učenici upoznaju kao ravne plohe geometrijskih tijela, tako će trokut upoznati kao ravnu plohu trostrane piramide.

Promatranje i opažanje pojma trokuta

U prvoj fazi uvođenja pojma trokuta prema profesoru Zdravku Kurniku [1] učenici prvog razreda razredne nastave promatraju konkretne modele trokuta od papira, kartona, drveta ili žice. U početku će učenici trokute bojiti i izrezivati ih iz kolažnog papira kako bi doživjeli cijeli lik, a ne samo njegove stranice. Nastavnik crta te trokute na ploči ili ih prikazuje projektorom, a učenici crtaju u svojim bilježnicama. Zatim se prisjećaju i imenuju objekte nalik trokutu u okolini čime se motivira potreba za proučavanjem novog pojma. Tome prethodi isticanje točke kružićem i označavanje velikim tiskanim slovima te razlikovanje ravnih, izlomljenih crta i njihovo samostalno crtanje. Također, ovdje dolazi do prvog susreta učenika s geometrijskim priborom kao što je ravnalo, s pomoću kojeg točke spajaju ravnom crtom. Osim trokuta učenici upoznaju druge geometrijske likove kao što su krug, pravokutnik i kvadrat. Ishodi učenja koji se ostvaruju u ovoj fazi navedeni su u tablici 1.1. Tipična aktivnost u fazi promatranja i opažanja za učenike prvog razreda razredne nastave je prepoznavanje trokuta među kvadratima poput slike 1.1.



Slika 1.1

Predodžbe o pojmu trokuta

Druga faza formiranja pojma trokuta obuhvaća drugi, treći i četvrti razred razredne nastave gdje se od učenika zahtjeva da uoče neka od svojstava trokuta, među kojima se razlikuju bitna, nebitna i ekvivalentna svojstva, a time učenici misaono od opažanja prelaze na predodžbu o pojmu. [1] U drugom razredu razredne nastave učenici usvajaju pojam dužine kao najkraće spojnice dviju točaka i prepoznaju ju kao stranicu geometrijskog lika koju potom crtaju i mjere. Osim stranica učenici opisuju i vrhove trokuta kao točke. U trećem razredu učenici se prvi put služe šestarom u crtanju i prenošenju dužine određene duljine. te prvi put određuju opseg trokuta. U početku proučavanja učenici će opseg mjeriti neformalnim načinom: koristeći se vunom, papirnatim vrpcama ili koncem. Tako se učenike navodi na zaključak da je opseg zbroj duljina svih stranica trokuta te se uvodi oznaka za opseg o, nakon čega određuju opseg zadanih trokuta. U četvrtom razredu razredne nastave učenici će uočiti da postoje različiti trokuti koje prema duljinama njihovih stranica dijelimo na jednakostranične, raznostranične i jednakokračne trokute. Upoznaju se s pravokutnim trokutom i uočavaju da raznostranični i jednakokračni trokuti mogu biti ujedno i pravokutni. Preporuka Kurikuluma za nastavni predmet matematike je da se učenicima različite vrste trokuta prikazuju u različitim položajima koje učenici prepoznavaju. Nakon što su otkrili jednakostranične, raznostranične i jednakokračne trokute učenici ih crtaju i konstruiraju razvijajući motoričke vještine uporabe geometrijskog pribora. Prema Kurikulumu u četvrtom je razredu bitno povezati sve do tada usvojene geometrijske pojmove pa učenici označavaju vrhove, stranice i kutove trokuta te trokut zapisuju simbolima ($\triangle ABC$). Upoznaju se i s pojmom površine trokuta tako da prvo u ravnini uspoređuju trokute različitih površina prema veličini dijela ravnine kojeg zauzimaju, a zatim mjere procjenjuju i mjere površinu trokuta ucrtanih u kvadratnoj mreži prebrojavanjem kvadratića. [2] Ishodi učenja koji se ostvaruju u ovoj fazi navedeni su u tablici 1.2.

Formiranje pojma trokuta

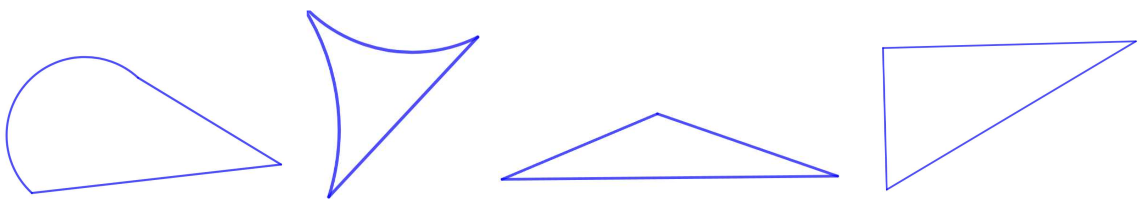
U petom razredu osnovne škole dolazimo do posljednje faze formiranja pojma trokuta u kojoj se odbacuju nebitna, a zadržavaju bitna svojstva pojma, čime se od predodžbe o pojmu prelazi na sam pojam. [1] Učenici opisuju sukladnost dužina i kutova te konstruiraju i definiraju simetralu dužine, opisuju i primjenjuju njezina svojstva. Također, učenike se potiče da precizno i uredno konstruiraju i skiciraju trokut te stvara motive koristeći se njime.

Analiziranjem svojstava koje trokut mora imati učenici će ga opisati i doći do sljedećih zaključaka:

- Trokut je geometrijski lik.

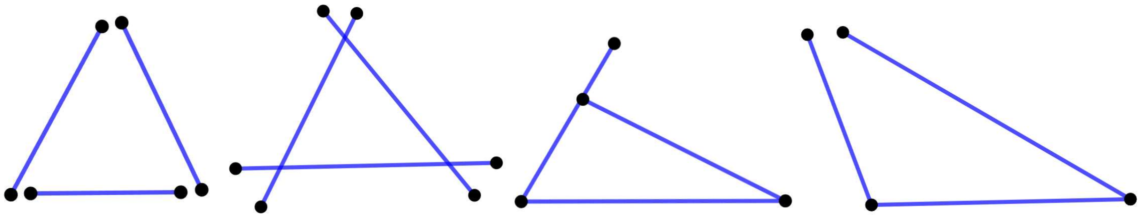
- Trokut je omeđen s tri dužine koje se ne smiju presjecati niti pripadati istome pravcu, a jedine zajedničke točke tih dužina su njihovi rubovi.

Primjer prikazan na slici 1.2 može biti koristan za poticanje dubljeg učenikovog razumijevanja pojma trokuta kao i za uklanjanje mogućih učenikovih miskoncepcija. Upitamo li učenike koji su od navedenih likova trokuti neki bi učenici mogli odgovoriti da su svi prikazani likovi trokuti. Međutim prisjete li se da je dužina ravna crta, a na prvoj i drugoj slici mogu uočiti zakrivljene crte zaključit će da su samo na trećoj i četvrtoj slici prikazani trokuti.



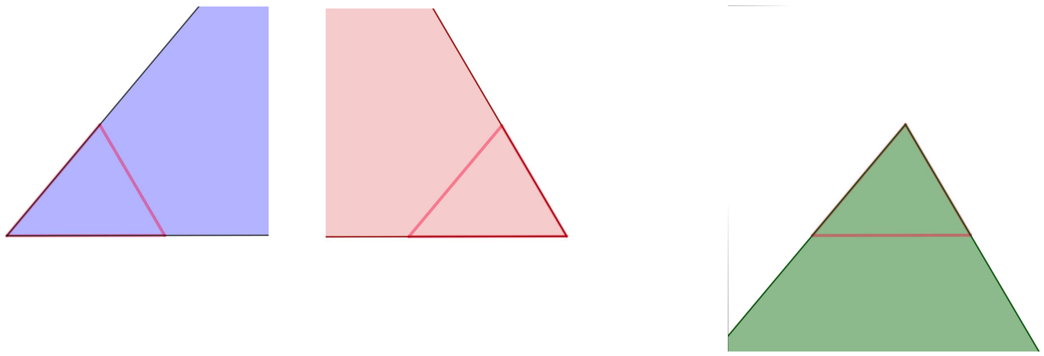
Slika 1.2

Također, bitno je dati i primjere likova koji nisu trokuti iako tako na prvi pogled mogu izgledati. Primjer prikazan na slici 1.3 ne samo da će kod učenika potaknuti razvoj kritičkog mišljenja, nego će im biti korisna asocijacija kod opisivanja trokuta. Uočit će da nije dovoljno reći da je trokut dio ravnine omeđen trima dužinama, jer su navedeni likovi omeđeni dužinama, ali ipak nisu trokuti.



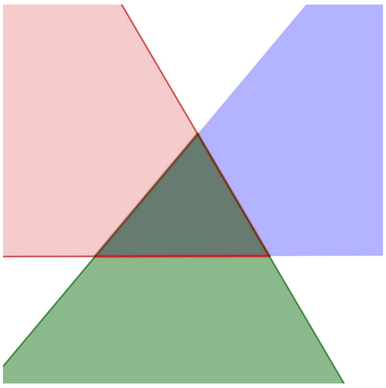
Slika 1.3

Zanimljivo je da trokut možemo promatrati kao presjek svojih unutarnjih kutova. Na slici 1.4 su prikazana tri unutarnja kuta trokuta, a dani trokut je dio svakog od tih kutova.



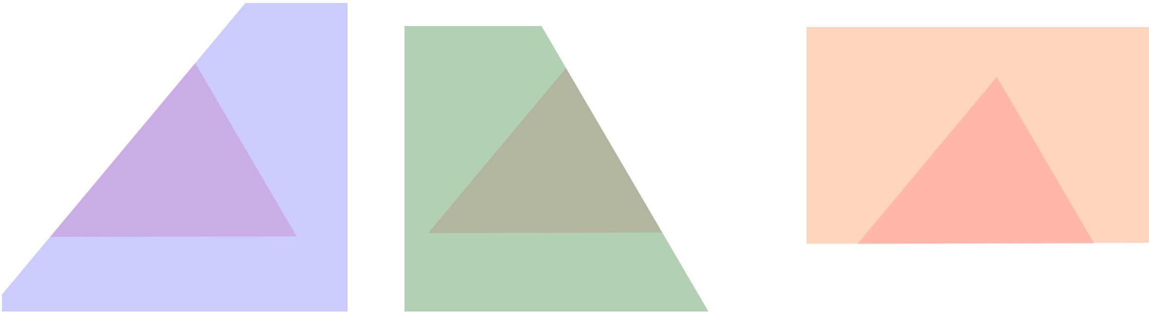
Slika 1.4

Presječemo li navedene unutarnje kutove dobivamo upravo taj trokut, što je prikazano na slici 1.5.



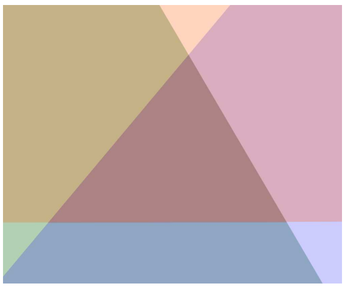
Slika 1.5

Na sličan način trokut možemo promatrati kao presjek triju poluravnina. Na slici 1.6 su prikazane tri poluravnine, a dani trokut je dio svake od tih poluravnina.



Slika 1.6

Presiječemo li navedene poluravnine dobivamo upravo taj trokut, što je prikazano na slici 1.7.



Slika 1.7

U matematici postoje temeljni geometrijski pojmovi koje ne definiramo, a to su točka, pravac i ravnina. Kako bismo došli do definicije trokuta najprije ćemo definirati pojam konveksnog skupa.

Definicija 1.0.1. *Neka je S neki skup točaka. Ako je za svake dvije različite točke A i B iz skupa S dužina $\overline{AB}$ podskup skupa S kažemo da je skup S konveksan. Za skup koji nije konveksan kažemo da je nekonveksan.*

Ako bilo koja od tri promatrane točke pripada pravcu s ostale dvije točke, kažemo da su te tri točke **kolinearne**. Inače su nekolinearne. Na sličan način definirali bismo i kolinearnost većeg broja točaka. Sada konačno možemo dati definiciju trokuta: trokut je najmanji konveksan skup koji sadrži tri zadane nekolinearne točke. Navedena definicija je pristup u deduktivnoj matematici te se ona s učenicima može obraditi u srednjoj školi.

U petom razredu je primjereno ovako: trima točkama A, B i C koje ne pripadaju istomu pravcu određene su tri dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Te dužine omeđuju trokut kojeg ćemo označavati s $\triangle ABC$. Za točke kojima je trokut određen kažemo da su vrhovi tog trokuta. Dužine $\overline{AB}$,

$\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ su stranice $\triangle ABC$, a njihove duljine ćemo označavati: $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$.

1.1 Svojstva trokuta

U petom razredu učenici su izgradili pojam trokuta, a u sljedećim razredima analiziraju svojstva i druge pojmove vezane uz trokut. U šestom razredu učenici primijenjuju odnose i veze veličina kutova i stranica trokuta, konstruiraju trokutu upisanu kružnicu, visinu kod svih vrsta trokuta i određuju površinu trokuta ako je poznata duljina stranice i duljina visine na tu stranicu. Također, otkrivaju da je zbroj veličina unutarnjih kutova svakog trokuta jednak 180°, a zbroj veličina vanjskih kutova trokuta jednak 360°. Nadalje, obrazlažu postojanje trokuta i otkrivaju da u svakom trokutu vrijedi da je duljina svake stranice trokuta manja od zbroja duljina preostalih dviju stranica tog trokuta.

Sukladnost trokuta

Nakon što su učenici u petom razredu osnovne škole otkrili sukladnost dužina i kutova, u šestom otkrivaju i primjenjuju sukladnost trokuta. Zaključuju da ako su trokuti sukladni, onda su im jednake duljine odgovarajućih stranica i veličine odgovarajućih kutova. Kažemo da su trokuti ABC i DEF sukladni ako vrijedi: $|AB| = |DE|$, $|BC| = |EF|$, $|CA| = |FD|$ i $\angle CAB = \angle FDE$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$. Važan dio nastavnog sadražaja čine poučci o sukladnosti trokuta koji će učenicima biti potrebni za određivanje nepoznate stranice trokuta ili pak pri računanju opsega ili površine trokuta. Poučci o sukladnosti trokuta s kojima se učenici susreću su sljedeći: S-S-S pučak o sukladnosti trokuta, S-K-S poučak o sukladnosti trokuta, K-S-K poučak o sukladnosti trokuta, S-S-K$^{>}$ poučak o sukladnosti trokuta, pri čemu je posljednji od navedenih poučaka manje zastupljen u školskom programu nastave matematike.

Sličnost trokuta

U sedmom razredu učenici proučavajući svojstva trokuta prepoznaju slične trokute, osim toga iskazuju i primjenjuju poučke o sličnosti trokuta. Najprije spoznaju da se svake dvije dužine mogu razlikovati jedino po duljini pa su svake dvije dužine slične te da su kutovi jednakih veličina sukladni. Nakon toga se uvodi pojam sličnosti dvaju trokuta, a učenici otkrivaju da ako su trokuti slični, onda su im duljine odgovarajućih stranica proporcionalne i veličine odgovarajućih kutova jednake. Kažemo da su trokuti ABC i DEF slični ako vrijedi: $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$ i $\angle CAB = \angle FDE$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle BCA = \angle EFD$. Nakon toga, učenici otkrivaju K-K poučak o sličnosti trokuta, S-S-S poučak o sličnosti trokuta, S-K-S poučak o sličnosti trokuta i primjenjuju ih pri rješavanju matematičkih problema.

Pitagorin poučak

U osmom razredu učenici otkrivaju da u svakom pravokutnom trokutu vrijedi da je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta i to nazivaju Pitagorinim poučkom. Osim toga, otkrivaju i obrat Pitagorinog poučka. To jest: ako je kvadrat duljine jedne stranice trokuta jednak zbroju kvadrata preostalih duljina stranica trokuta, onda je taj trokut pravokutan s pravim kutom nasuprot najdulje stranice. Navedeni poučak iskazuju riječima i simbolima, a kasnije ga primjenjuju za određivanje nepoznatih elemenata tog trokuta. Također ga primjenjuju u jednakokračnom i jednakostraničnom trokutu, kvadratu i pravokutniku, rombu i jednakokračnom trapezu. Ishodi učenja za 5., 6., 7. i 8. razred navedeni su u tablici 1.3.

Ishodi učenja za 1. razred razredne nastave prema NMK-u (Geometrija trokuta)	
	Učenik/ca:
MAT OŠ C.1.1.	Izdvaja i imenuje geometrijska tijela i likove i povezuje ih s oblicima objekata u okruženju.
MAT OŠ C.1.2.	Crta i razlikuje ravne i zakrivljene crte.
MAT OŠ C.1.3.	Prepoznaje i ističe točke.
MAT OŠ D.1.1.	Analizira i uspoređuje objekte iz okoline prema mjerivu svojstvu.

Tablica 1.1

Ishodi učenja za 2., 3. i 4. razred razredne nastave prema NMK-u (Geometrija trokuta)	
	Učenik/ca:
MAT OŠ C.2.1.	Opisuje i crta dužine.
MAT OŠ C.2.2.	Povezuje poznate geometrijske objekte.
MAT OŠ D.2.2.	Procjenjuje, mjeri i crta dužine zadane duljine.
MAT OŠ C.3.3.	Služi se šestarom u crtanju i konstruiranju.
MAT OŠ D.3.3.	Određuje opseg likova.
MAT OŠ C.4.2.	Razlikuje i opisuje trokute prema duljinama stranica te pravokutni trokut.
MAT OŠ C.4.4.	Crta i konstruira geometrijske likove.
MAT OŠ C.4.5.	Povezuje sve poznate geometrijske oblike.
MAT OŠ D.4.2.	Uspoređuje površine likova te ih mjeri jediničnim kvadratima.

Tablica 1.2

Ishodi učenja za 5., 6., 7. i 8. razred osnovne škole prema NMK-u (Geometrija trokuta)	
	Učenik/ca:
MAT OŠ C.5.1.	Opisuje skupove točaka u ravnini te analizira i primjenjuje njihova svojstva i odnose.
MAT OŠ C.5.2.	Opisuje i crta/konstruira geometrijske likove te stvara motive koristeći se njima.
MAT OŠ D.5.4.	Računa i primjenjuje opseg i površinu geometrijskih likova.
MAT OŠ C.6.2.	Konstruira trokute, analizira njihova svojstva i odnose.
MAT OŠ D.6.2.	Računa i primjenjuje opseg i površinu trokuta i četverokuta te mjeru kuta.
MAT OŠ C.7.1.	Crta i konstruira mnogokute i koristi se njima pri stvaranju složenijih geometrijskih motiva.
MAT OŠ D.7.3.	Odabire strategije za računanje opsega i površine mnogokuta.
MAT OŠ C.8.3.	Primjenjuje Talesov poučak.
MAT OŠ D.8.1.	Primjenjuje Pitagorin poučak.

Tablica 1.3

Pojam trokuta u srednjoj školi

Četiri karakteristične točke trokuta

U prvom razredu srednje škole učenici se prisjećaju simetrale dužine, simetrale kuta te konstruiraju i analiziraju središte kružnice opisane trokutu i središte kružnice upisane trokutu, težište i ortocentar. Također, otkrivaju Euklidov poučak.

Opseg trokuta

S pojmom opsega kao zbroja duljina svih stranica trokuta učenici su se prvi put susreli u trećem razredu razredne nastave, a u petom razredu osnovne škole otkrivaju i računaju opseg geometrijskog lika sastavljenog od više trokuta. S pojmom poluopsega se učenici prvi put susreću pri otkrivanju Heronove formule za površinu trokuta. Poluopseg s trokuta jednak polovini opsega trokuta, to jest

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Površina trokuta

Učenici su u šestom razredu osnovne škole otkrili da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine stranice i duljine pripadne visine. To su zapisivali

$$P = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c.$$

U prvom razredu srednje škole površinu trokuta računaju pomoću analitičke formule za površinu trokuta i Heronove formule za površinu trokuta. Također, otkrivaju površinu trokuta opisanog kružnici ako su poznate duljine stranica trokuta a, b, c i duljina polumjera r trokutu upisane kružnice

$$P = sr.$$

Isto tako, otkrivaju površinu trokuta upisanog kružnici ako su poznate duljine stranica a, b, c i duljina polumjera R trokutu opisane kružnice

$$P = \frac{abc}{4R}.$$

Trigonometrija trokuta

Učenici se u prvom razredu srednje škole prvi put susreću s trigonometrijskim omjerima. Otkrivaju sinus, kosinus, tangens i kotangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta. Nadalje otkrivaju da se duljine stranica a, b, c trokuta $\triangle ABC$ odnose kao sinusi nasuprotnih kutova α, β, γ tim stranicama, to jest da vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Isto tako otkrivaju poučak o kosinusu untarnjih kutova trokuta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

pri čemu je γ mjera kuta pri vrhu nasuprot stranice duljine c. Ishodi učenja u svim gimnazijskim programima za nastavni predmet matematike navedeni su u tablici 1.4.

Ishodi učenja za srednju školu prema NMK-u (Geometrija trokuta)	
	Učenik/ca:
MAT SŠ C.1.1	Konstruira i analizira položaj karakterističnih točaka trokuta.
MAT SŠ C.1.2.	Primjenjuje Talesov poučak o proporcionalnosti dužina i sličnost trokuta.
MAT SŠ D.1.3.	Primjenjuje trigonometrijske omjere.
MAT SŠ C.2.4.	Primjenjuje poučak o sinusima i poučak o kosinusu.

Tablica 1.4

Poglavlje 2

Četiri karakteristične točke trokuta

U ovom radu je planirano obraditi nekoliko posebnih točaka trokuta, a najprije ćemo proučavati četiri karakteristične točke trokuta koje su sjecišta triju pravaca. Učenici se prvi put sa simetralom i polovištem dužine susreću u petom razredu osnovne škole kada crtaju dužinu pa konstruiraju njezinu simetralu i polovište. Zaključuju da je simetrala dužine pravac koji je okomit na nju i dijeli ju na dva jednaka dijela. U šestom razredu osnovne škole učenici otkrivaju simetralu kuta koju konstruiraju šiljastom, pravom i tupom kutu. Za simetralu kuta zaključuju da je pravac koji sadrži vrh kuta i raspolavlja ga. Nakon otkrivanja simetrale dužine i simetrale kuta, u šestom razredu se prvi put susreću s četiri karakteristične točke trokuta. Otkrivaju da je središte kružnice opisane trokutu u sjecištu simetrala njegovih stranica te konstruiraju kružnicu opisanu trokutu. Isto tako otkrivaju da je središte kružnice upisane trokutu u sjecištu simetrala njegovih kutova i konstruiraju kružnicu upisanu trokutu. Nadalje se upoznaju s težišnicom trokuta za koju zaključuju da je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem njemu nasuprotne stranice i težištem koje je sjecište tri težišnice trokuta. Potom konstruiraju težište trokuta. Otkrivaju i posljednju od četiri karakteristične točke trokuta, a to je ortocentar. Za ortocentar zaključuju da je sjecište tri pravca koji sadrže visine trokuta i konstruiraju ortocentar šiljastokutnom, pravokutnom i tupokutnom trokutu. U prvom razredu srednje škole učenici se ponovno susreću sa četiri karakteristične točke trokuta, konstruiraju ih i analiziraju njihov položaj ovisno o vrsti trokuta. Također, otkrivaju formule za površinu trokuta sa zadanim polumjerom upisane i opisane kružnice. U ovom ćemo poglavlju predstaviti osnovna svojstva i definicije tih točaka.

Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers

U trokutu postoji doista velik broj posebnih točaka, točnije njih 72 000. Američki matematičar Clark Kimberling se bavio proučavanjem svojstava nekih točaka trokuta te je izradio enciklopediju *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers* (kratko nazvanom *ETC*) koja je sastavljena od ukupno 36 poglavlja, a u svakom od tih poglavlja navedeno je točno

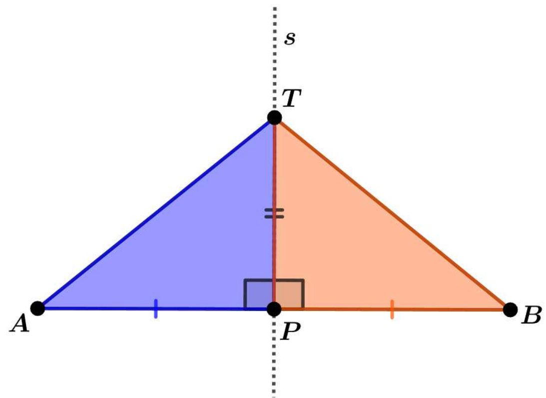
2000 posebnih točaka trokuta. U svakom od primjera u kojem je prikazana neka posebna točka trokuta referentni trokut je trokut ABC. Točkom $X(1)$ označeno je središte trokutu upisane kružnice, $X(2)$ težište trokuta, $X(3)$ središte trokutu opisane kružnice, $X(4)$ ortocentar trokuta. Ove su točke prve po redu u *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers* i najbitnije pa se zato s učenicima obrađuju u redovnoj nastavi matematike.

2.1 Simetrala dužine

Prva od četiri karakteristične točke trokuta će biti središte kružnice opisane trokutu. Pokazat ćemo da je to sjecište simetrala njegovih stranica. Zato prvo proučimo simetralu dužine na čijim se svojstvima temelji definicija i egzistencija kružnice opisane trokutu. Slijedi veoma važna propozicija o simetrali dužine koju je svakako dobro obraditi s učenicima u redovitoj nastavi matematike. Pri obradi nastavnog sadražaja opisane kružnice u redovnoj nastavi matematike naglasak treba biti na razumijevanju svojstava simetrale dužine, čime bi se, potencijalno uklonile učeničke miskoncepcije vezane uz pojam središta trokutu opisane kružnice.

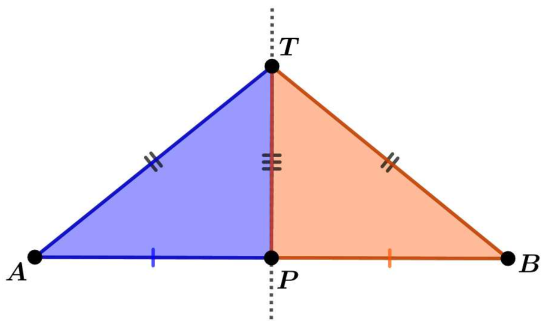
Propozicija 2.1.1. *Neka je točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Za proizvoljnu točku T vrijedi da je pravac PT okomit na dužinu $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AT| = |BT|$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Najprije želimo pokazati prvi smjer. Pretpostavimo da je pravac PT okomit na dužinu $\overline{AB}$ za proizvoljnu točku T. Želimo pokazati da je $|AT| = |BT|$. Sada promatrajući trokute APT i PBT uočavamo sljedeće, $|AP| = |PB|$ jer je , $\angle APT = \angle BPT = 90°$, te je dužina $\overline{PT}$ zajednička stranica trokuta APT i PBT. Iz navedenog zaključujemo da su trokuti APT i PBT sukladni po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta, a iz te sukladnosti dobivamo da su stranice $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$ sukladne, što zapisujemo $|AT| = |BT|$.



Slika 2.1

Sada dokazujemo obratni smjer. Pretpostavimo da je točka T takva da vrijedi $|AT| = |BT|$. Želimo pokazati da je pravac PT okomit na dužinu $\overline{AB}$. Promatrajući trokute APT i PBT uočavamo sljedeće, $|AT| = |BT|$ (po pretpostavci), $|AP| = |PB|$ te je $\overline{PT}$ njihova zajednička stranica. Iz navedenog zaključujemo da su trokuti APT i PBT sukladni po S-S-S poučku o sukladnosti trokuta, a iz te sukladnosti dobivamo da vrijedi $\angle APT = \angle BPT$. Kako su ovi kutovi sukuti imamo da je $\angle APT = \angle BPT = 90°$. Nadalje, pravci AB i PT su okomiti. Osim toga, pravac PT prolazi polovištem dužine $\overline{AB}$.



Slika 2.2

□

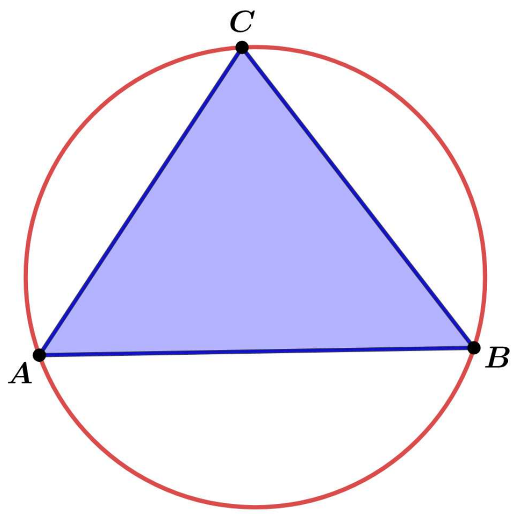
Vidimo da smo pokazali ekvivalentna svojstva i tako opisali pravac koristeći dva različita svojstva. Time smo pokazali da se simetrala dužine može definirati na dva ekvivalentna načina. U udžbenicima je često odabrano jedno svojstvo za definiciju, a drugo se onda dokazuje.

Definicija 2.1.1. ***Simetrala dužine*** *je pravac koji prolazi njezinim polovištem i okomit je na nju.*

2.2 Središte trokutu opisane kružnice

Prvo ćemo iskazati definiciju kružnice opisane trokutu.

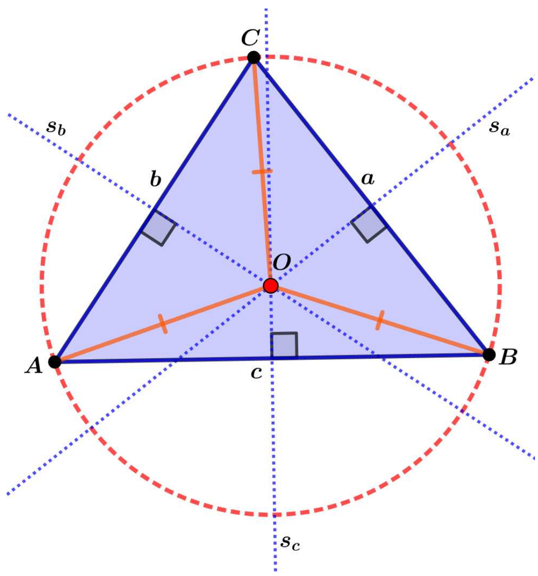
Definicija 2.2.1. ***Kružnica opisana trokutu*** *je kružnica koja prolazi vrhovima tog trokuta.*



Slika 2.3: Kružnica opisana trokutu ABC

Teorem 2.2.1. *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki, to sjecište je središte kružnice opisane tom trokutu.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC i neka su s_a i s_b simetrale njegovih stranica $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Sjecište simetrala s_a i s_b označimo točkom O.



Slika 2.4: Središte kružnice opisane trokutu ABC

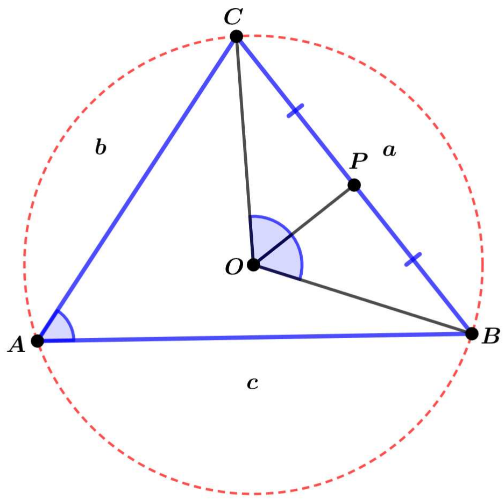
Koristeći se propozicijom o simetrali dužine (2.1.1) dobivamo da vrijedi $|OA| = |OC|$ i $|OB| = |OC|$. Iz navedenog, zbog svojstva tranzitivnosti, slijedi $|OA| = |OB|$. Prema tome, točka O pripada i simetrali s_c stranice $\overline{AB}$. Dakle, točka O jednako je udaljena od vrhova trokuta, pa je središte kružnice opisane tom trokutu. □

Polumjer kružnice je s trokutom povezan na razne načine. Ako je trokutu poznat polumjer njemu opisane kružnice i duljine njegovih stranica onda možemo izračunati njegovu površinu.

Teorem 2.2.2. *Omjeri stranica trokuta jednaki su omjerima sinusa nasuprotnih kutova i, štoviše, vrijedi*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC te neka su a, b, c redom duljine njegovih stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, a P polovište $\overline{BC}$. Neka je O središte trokutu ABC opisane kružnice, $\angle BOP = \alpha$ i $|OB| = R$.



Slika 2.5

Promotrimo trokute OBP i OPC. $\overline{OP}$ im je zajednička stranica, $|BP| = |CP|$ i $\angle OPB = \angle CPO = 90°$. Oni su sukladni prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta iz čega proizlazi $\angle BOP = \angle POC$. Sada je $\angle BOC = 2\angle BOP$. Prema teoremu o središnjem i obodnom kutu slijedi $\angle BOC = 2\angle BAC$ pa je $\angle BOP = \angle BAC$. Promotrimo pravokutan trokut OBP s pravim kutom pri vrhu P. Primjenom trigonometrije pravokutnog trokuta je

$$\sin\angle BOP = \frac{|BP|}{|OB|} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}.$$

Sada je

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$$

pa je

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Analogno dobivamo ostale omjere. □

Teorem 2.2.3. *Površina trokuta ABC jednaka je*

$$P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R},$$

ili

$$P_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

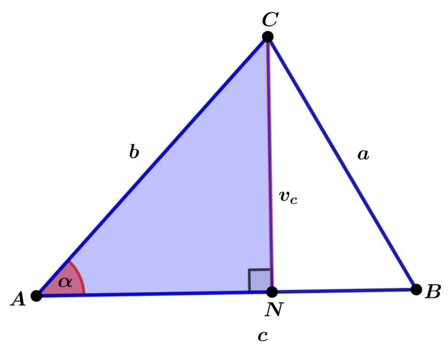
pri čemu je R polumjer trokutu ABC opisane kružnice.

Dokaz. Neka je dan trokut ABC te neka su a, b, c redom duljine njegovih stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, a N nožište visine iz vrha C na pravac kojem pripada stranica $\overline{AB}$. Neka je $|CN| = v_c$. Iz (2.2.2) vrijedi

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha}. \tag{2.1}$$

Sjetimo se da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine stranice trokuta i duljine visine na pravac kojem pripada ta stranica. Prema tome je površina trokuta ABC jednaka

$$P = \frac{1}{2}cv_c. \tag{2.2}$$



Slika 2.6

Trokut ANC je pravokutan s pravim kutom pri vrhu N. Koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta dobivamo

$$v_c = b \sin\alpha. \tag{2.3}$$

Sada uvrštavanjem (2.3) u (2.2) dobivamo

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc}. \tag{2.4}$$

Uvrštavanjem (2.4) u (2.1) imamo

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{2P}{bc}} = \frac{abc}{2P}$$

pa je

$$P = \frac{abc}{4R},$$

što je ujedno i trebalo pokazati. Iz 2.1 dobivamo

$$a = 2R \sin\alpha. \tag{2.5}$$

Analogno dobivamo

$$b = 2R \sin\beta \tag{2.6}$$

i

$$c = 2R \sin\gamma. \tag{2.7}$$

Uvrstimo li dobivene jednakosti (2.5), (2.6), (2.7) u 2.2 slijedi

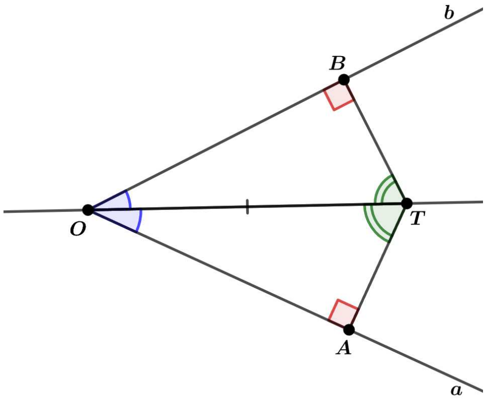
$$P = \frac{2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot 2R\sin\gamma}{4R} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

što smo također trebali pokazati. □

2.3 Simetrala kuta

Propozicija 2.3.1. *Za točku T unutar kuta $\angle aOb$ vrijedi da je $\angle aOT = \angle TOb$ ako i samo ako je točka T jednako udaljena od krakova tog kuta.*

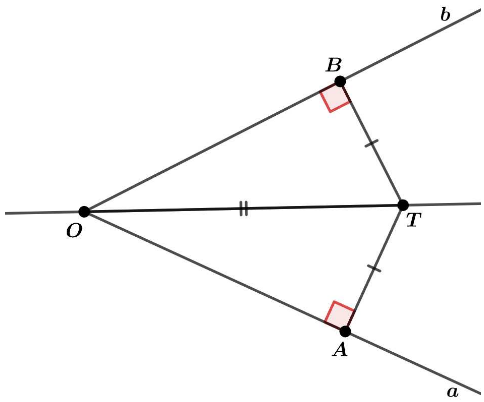
Dokaz. Pretpostavimo prvo da je točka T unutar kuta $\angle aOb$ takva da vrijedi $\angle aOT = \angle TOb$. Želimo pokazati da je točka T jednako udaljena od krakova tog kuta. Iz točke T spustimo okomicu na krak kuta koji pripada polupravcu a, nožište te okomice označimo točkom A. Potom iz točke T spustimo okomicu na krak kojem pripada polupravac b, nožište te okomice označimo točkom B. Sada promatramo tako dobivene trokute OAT i OTB.



Slika 2.7

Uočimo da vrijedi $\angle TAO = \angle OBT = 90°$ i $\angle AOT = \angle TOB$. Prema tome slijedi $\angle OTA = \angle BTO$, a $\overline{OT}$ je zajednička stranica tih dvaju trokuta. Dakle, trokuti OAT i OTB su sukladni prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta. Iz sukladnosti proizlazi da je $|TA| = |TB|$ i time je tvrdnja dokazana.

Pretpostavimo sada da je točka T unutar kuta $\angle aOb$ jednako udaljena od krakova tog kuta. Vrijedi $|TA| = |TB|$, pri čemu su točke A i B nožišta okomica iz točke T na polupravce a, b koji sadrže krakove kuta s vrhom u točki O. Želimo pokazati da vrijedi $\angle aOT = \angle TOb$. Promotrimo trokute OAT i OTB.



Slika 2.8

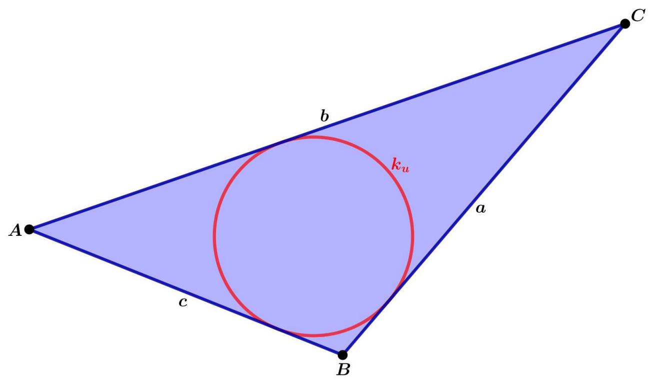
Uočimo da vrijedi $|TA| = |TB|$, $\angle TAO = \angle OBT = 90°$, a $\overline{OT}$ je zajednička stranica tih dvaju trokuta. Iz navedenog slijedi da su trokuti OAT i OTB tada sukladni po S-S-K$^{>}$ poučku o sukladnosti trokuta. Iz ove sukladnosti proizlazi da je $\angle AOT = \angle TOB$, što je trebalo pokazati. □

Definicija 2.3.1. ***Simetrala kuta*** *je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.*

2.4 Središte trokutu upisane kružnice

Iskažimo sada definiciju središta trokutu upisane kružnice.

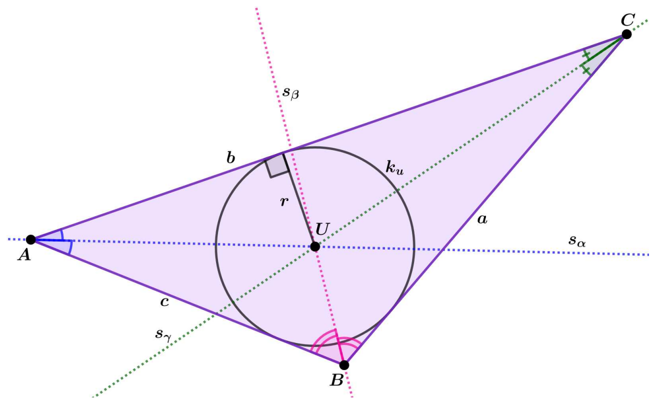
Definicija 2.4.1. ***Kružnica upisana trokutu*** *je kružnica koja dira svaku od stranica danog trokuta s unutrašnje strane.*



Slika 2.9: Kružnica upisana trokutu ABC

Teorem 2.4.1. *Sve simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je središte kružnice upisane tom trokutu.*

Dokaz. Dan je trokut ABC s unutarnjim kutovima $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$. Neka su s_α, s_β, s_γ redom simetrale kutova $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$. Označimo točkom U sjecište simetrala s_α i s_β.



Slika 2.10

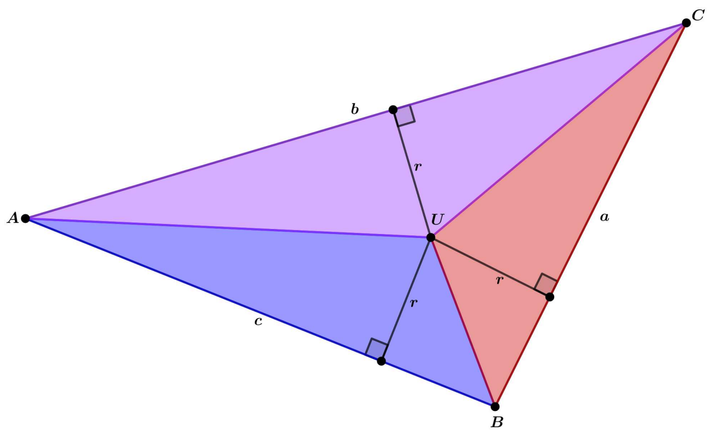
Koristeći se propozicijom o simetrali kuta (2.3.1) zaključujemo da je točka U jednako udaljena od krakova kuta $\angle BAC$. Štoviše, točka U je jednako udaljena od krakova kuta $\angle CBA$. Zbog svojstva tranzitivnosti, točka U je tada jednako udaljena i od krakova kuta $\angle ACB$. Ponovno, koristeći se propozicijom o simetrali kuta zaključujemo da i treća simetrala s_γ prolazi točkom U. Naposljetku, dolazimo do zaključka da je točka U u kojoj se sijeku sve tri simetrale kutova trokuta ABC, ujedno i središte kružnice upisane tom trokutu ABC. □

Teorem 2.4.2. *Polumjer r upisane kružnice trokuta ABC dan je s*

$$r = \frac{P}{s},$$

pri čemu je s polupseg, a P površina danog trokuta ABC.

Dokaz. Dan je trokut ABC sa stranicama duljine a, b, c. Točkom U označimo središte tom trokutu upisane kružnice. Površinu trokuta ABC možemo promatrati kao zbroj površina trokuta ABU, BCU, CAU. Uočimo da je duljina visine manjih trokuta jednaka polumjeru upisane kružnice r.



Slika 2.11

Sada je,

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= P_{\triangle ABU} + P_{\triangle BCU} + P_{\triangle CAU} \\ &= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \\ &= r \cdot \frac{a+b+c}{2} \\ &= rs \end{aligned}$$

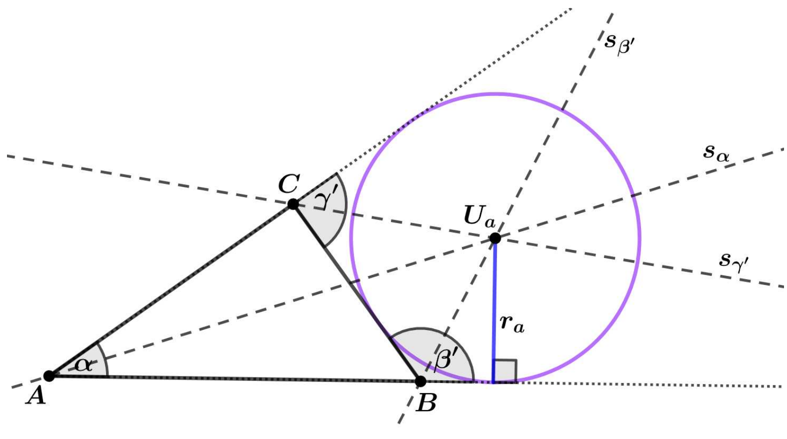
iz čega slijedi tvrdnja. □

2.5 Središte trokutu pripisane kružnice

Spomenut ćemo osim trokutu opisane kružnice i trokutu upisane kružnice još tri zanimljive kružnice, a to su pripisane kružnice. Pojam pripisane kružnice nije dio redovnog programa nastave matematike u hrvatskim školama, međutim može se obraditi u sklopu dodatnih aktivnosti kao što je dodatna nastava matematike. Dokažimo sljedeći teorem u kojem ćemo koristiti propoziciju o simetrali kuta (2.3.1) koju smo već iskazali i dokazali.

Teorem 2.5.1. *Simetrale dvaju vanjskih kutova trokuta ABC i simetrala trećeg unutarnjeg kuta tog trokuta se sijeku u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC s vanjskim kutovima β' i γ' pri vrhu B, odnosno C. Označimo sa $s_{\beta'}$ simetralu vanjskog kuta β' pri vrhu B, a sa $s_{\gamma'}$ simetralu vanjskog kuta γ' pri vrhu C trokuta ABC. Presjek simetrala $s_{\beta'}$ i $s_{\gamma'}$ označimo točkom U_a. S obzirom da točka U_a pripada simetrali $s_{\beta'}$, prema propoziciji o simetrali kuta (2.3.1) slijedi da je točka U_a jednako udaljena od pravaca kojima pripadaju stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC. Isto tako, točka U_a pripada i simetrali $s_{\gamma'}$ pa po propoziciji o simetrali kuta (2.3.1) slijedi da je točka U_a jednako udaljena od pravaca kojima pripadaju stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC. Zbog svojstva tranzitivnosti sada dobivamo da je točka U_a jednako udaljena od pravaca kojima pripadaju stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC, iz čega po propoziciji o simetrali kuta (2.3.1) slijedi da točka U_a pripada simetrali s_α unutarnjeg kuta α pri vrhu A tog trokuta. Zaključujemo da se simetrala s_α unutarnjeg kuta trokuta i simetrale $s_{\beta'}$ i $s_{\gamma'}$ vanjskih kutova trokuta sijeku u jednoj točki, a to je točka U_a. Naime, pravci AB, AC i BC su tangente na kružnicu $k_a(U_a, r_a)$, pri čemu je r_a udaljenost točke U_a od pravca AB. □

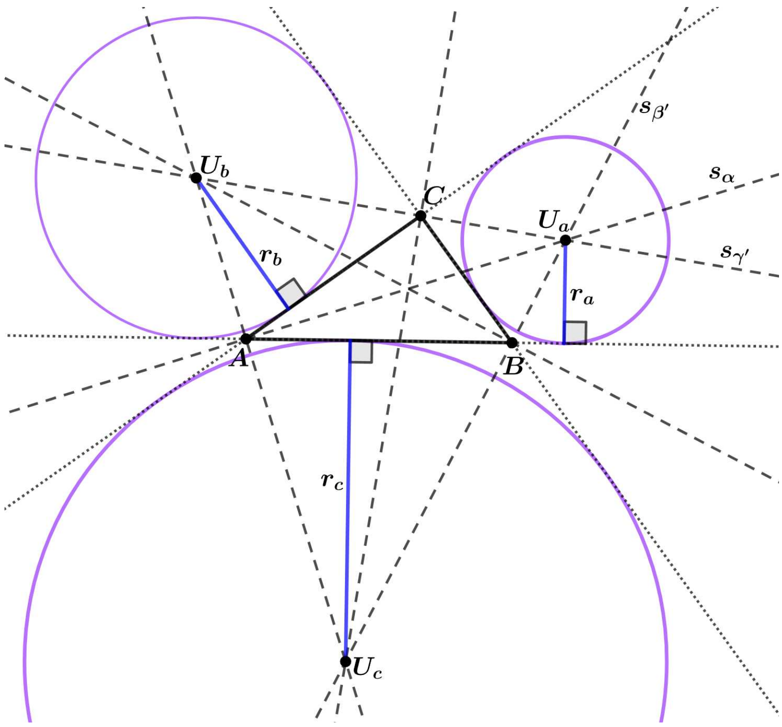


Slika 2.12

Slijedi definicija trokutu pripisane kružnice.

Definicija 2.5.1. *Za kružnicu koja dira stranicu a s vanjske strane i produžetaka stranica b i c trokuta ABC, kažemo da je pripisana kružnica nasuprot vrha A, označavamo ju s k_a.*

Točka U_a je središte pripisane kružnice k_a. Analogno definiramo pripisane kružnice k_b i k_c nasuprot vrhova B i C, a njihova središta su U_b i U_c.



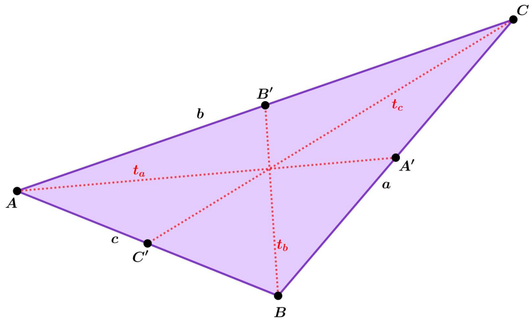
Slika 2.13: Svaki trokut ima 3 pripisane kružnice.

2.6 Težište trokuta

Treća točka koju ćemo promatrati je težište trokuta. Ona se promatra kao sjecište težišnica.

Definicija 2.6.1. ***Težišnica trokuta*** *je spojnica nekog vrha trokuta s polovištem nasuprotne stranice.*

Postoje dakle tri težišnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ trokuta ABC, pri čemu su točke A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Duljine težišnica označavamo s $t_a = |AA'|$, $t_b = |BB'|$, $t_c = |CC'|$.

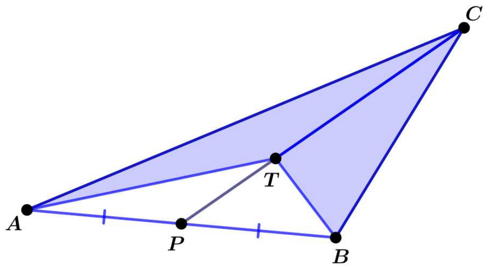


Slika 2.14: Težišnice trokuta ABC

U nastavku ćemo izložiti karakterizaciju točaka koje leže na pravcu koji sadrži težišnicu. Navedenu karakterizaciju ćemo koristiti pri dokazivanju postojanja težišta.

Propozicija 2.6.1. *Neka je točka P polovište dužine $\overline{AB}$ trokuta ABC. Točka T pripada pravcu CP ako i samo ako vrijedi $P_{\triangle ATC} = P_{\triangle BTC}$.*

Dokaz. Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$ trokuta ABC. Pretpostavimo da proizvoljna točka T pripada pravcu CP. Želimo pokazati da je $P_{\triangle ATC} = P_{\triangle BCT}$. Promotrimo trokute APC i PBC.



Slika 2.15

Vrijedi da je $|AP| = |PB|$ i visina iz vrha C im je zajednička. Stoga je

$$P_{\triangle APC} = P_{\triangle PBC}.$$

Trokuti APT i PBT također imaju zajedničku visinu iz vrha T pa vrijedi

$$P_{\triangle APT} = P_{\triangle PBT}.$$

Budući da je

$$P_{\triangle ATC} = P_{\triangle APC} - P_{\triangle APT}$$

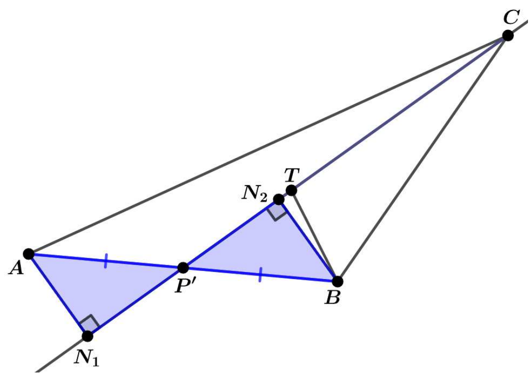
i

$$P_{\triangle BCT} = P_{\triangle PBC} - P_{\triangle PBT}$$

dobivamo

$$P_{\triangle ATC} = P_{\triangle BCT}.$$

Pretpostavimo sada da je točka T takva da vrijedi $P_{\triangle ATC} = P_{\triangle BTC}$. Želimo pokazati da točka T pripada pravcu CP. Neka su N_1 i N_2 nožišta visina iz vrhova A i B na pravac CT. Neka je P' sjecište pravaca AB i CT.



Slika 2.16

Budući da je

$$\frac{|AN_1| \cdot |CT|}{2} = P_{\triangle ATC} = P_{\triangle BCT} = \frac{|BN_2| \cdot |CT|}{2}$$

dobivamo

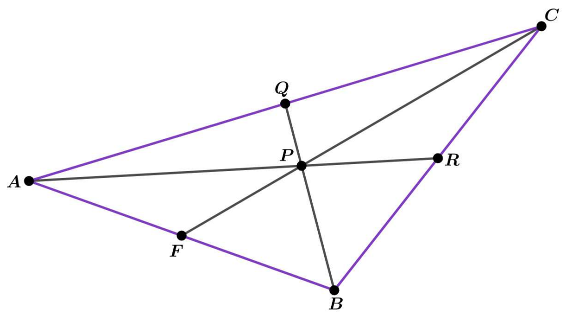
$$|AN_1| = |BN_2|.$$

Uočimo da vrijedi $\angle AN_1P' = \angle BN_2P'$, $\angle AP'N_1 = \angle BP'N_2$ i $|AN_1| = |BN_2|$ stoga su trokuti AN_1P' i BN_2P' sukladni prema S-S-K$^{>}$ poučku o sukladnosti trokuta. Iz te sukladnosti proizlazi $|AP'| = |BP'|$, to jest $P = P'$. Zaključujemo da pravac CT prolazi točkom P, to jest točka T pripada pravcu CP. □

Dokažimo sada egzistenciju težišta.

Propozicija 2.6.2. *Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta točka je težište tokuta.*

Dokaz. Neka je ABC trokut. Neka su točke F, R i Q redom polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Sjecište pravaca CF i AR označimo točkom P. Želimo pokazati da točka P pripada pravcu BQ.



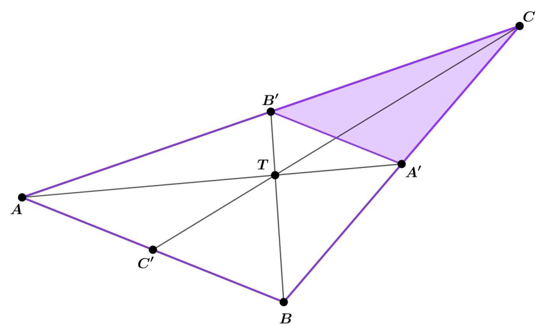
Slika 2.17

Budući da točka P pripada pravcu CF prema propoziciji 2.6.1 slijedi $P_{\triangle APC} = P_{\triangle BPC}$. Točka P također pripada pravcu AR pa prema propoziciji 2.6.1 slijedi $P_{\triangle ABP} = P_{\triangle APC}$. Dakle, vrijedi $P_{\triangle ABP} = P_{\triangle BPC}$. Prema propoziciji 2.6.1 zaključujemo da točka P pripada i pravcu BQ. □

Sljedeća propozicija je drugi način pokazivanja egzistencije težišta te takav pristup češće nalazimo u školskim udžbenicima.

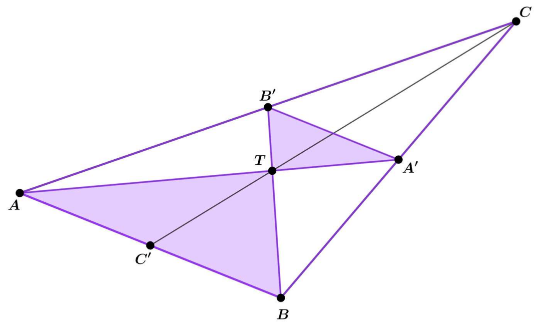
Propozicija 2.6.3. *Ako se dvije težišnice sijeku u točki T, onda ta točka dijeli svaku od tih težišnica u omjeru* $2 : 1$ *(od vrha prema polovištu nasuprotne stranice).*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC te neka su točke A', B', C' redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Promotrimo trokute ABC i $B'A'C$.



Slika 2.18

Budući da vrijedi $|AC| = 2|B'C|$, $|BC| = 2|A'C|$ i $\angle ACB = \angle B'CA'$, slijedi da su trokuti ABC i $B'A'C$ slični prema S-K-S poučku o sličnosti trokuta s koeficijentom sličnosti $k = 2$. Iz toga proizlazi da su pravci $A'B'$ i AB paralelni te da vrijedi $|AB| = 2|A'B'|$. Promotrimo sada trokute $B'TA'$ i BTA.



Slika 2.19

Budući da su pravci $A'B'$ i AB paralelni vrijedi $\angle TB'A' = \angle TBA$ i $\angle B'A'T = \angle BAT$. Također je $\angle ATB = \angle A'TB'$ (vršni kutovi). Dakle, trokuti $B'TA'$ i BTA su slični prema K-K poučku o sličnosti trokuta. Kako je

$$|AB| = 2|A'B'|$$

slijedi da je omjer duljina stranica trokuta BTA i $B'TA'$ jednak $2 : 1$ pa je

$$|BT| : |TB'| = |AT| : |TA'| = 2 : 1.$$

□

Iz propozicije 2.6.3 slijedi da točka presjeka težišnica AA' i BB' dijeli te dužine u omjeru $2 : 1$, ali i da točka presjeka težišnica BB' i CC' dijeli te dužine u omjeru $2 : 1$, pa zaključujemo da se sve tri dužine sijeku u istoj točki, te da ta točka dijeli svaku od dužina AA', BB' i CC' u omjeru $2 : 1$.

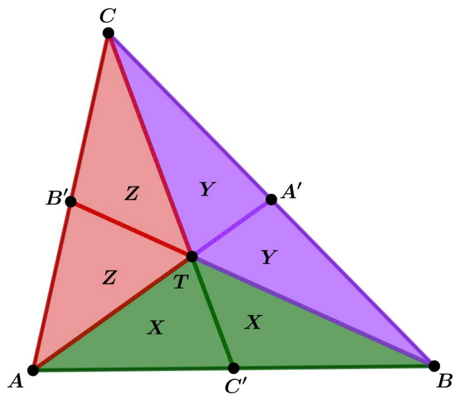
U nastavku slijedi još jedan zanimljiv primjer o podjeli trokuta na šest trokuta jednakih površina.

Zadatak 2.6.1. *Dokažite da težišnice trokuta ABC djele taj trokut na šest trokuta jednakih površina, to jest da vrijedi*

$$P_{\triangle AC'T} = P_{\triangle C'BT} = P_{\triangle BA'T} = P_{\triangle A'CT} = P_{\triangle CB'T} = P_{\triangle B'AT},$$

pri čemu je T težište trokuta ABC.

Dokaz. Neka je dan trokut ABC. Neka je točka A' polovište stranice $\overline{BC}$, B' polovište stranice $\overline{AC}$ i C' polovište stranice $\overline{AB}$.



Slika 2.20

Uočimo da za trokute $AC'T$ i $C'BT$ prema propoziciji 2.6.1 vrijedi da su im površine jednake. Zbog jednostavnijeg dokaza površinu označimo na sljedeći način:

$$P_{\triangle AC'T} = P_{\triangle C'BT} = X.$$

Na anlogan način dobivamo

$$P_{\triangle BA'T} = P_{\triangle A'CT} = Y$$

i

$$P_{\triangle CB'T} = P_{\triangle B'AT} = Z.$$

Promotrimo trokute ABA' i $A'CA$. Koristeći propoziciju 2.6.1 zaključujemo da vrijedi $P_{\triangle ABA'} = P_{\triangle A'CA}$. Naime, površine trokuta ABA' i $A'CA$ možemo zapisati na sljedeći način:

$$P_{\triangle ABA'} = P_{\triangle AC'T} + P_{\triangle C'BT} + P_{\triangle BA'T} = X + X + Y = 2X + Y$$

i

$$P_{\triangle A'CA} = P_{\triangle A'CT} + P_{\triangle CB'T} + P_{\triangle B'AT} = Y + Z + Z = Y + 2Z.$$

Budući da su površine trokuta ABA' i $A'CA$ jednake, slijedi

$$X = Z.$$

Promotrimo li trokute ABB' i BCB' te trokute $AC'C$ i $C'BC$ na analogan način dobivamo da su njihove površine jednake. Dakle, vrijedi

$$X = Y$$

i

$$Y = Z.$$

Dakle, zaista vrijedi da težišnice trokuta dijele trokut na šest trokuta jednakih površina. □

2.7 Ortocentar trokuta

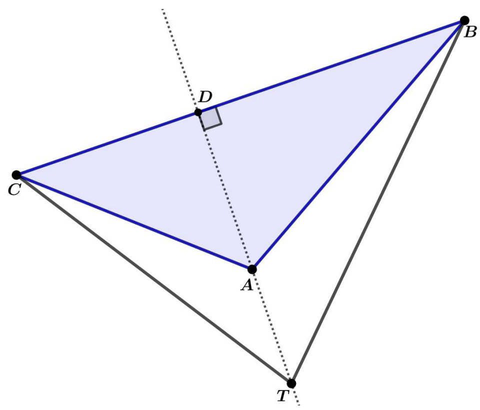
Definicija 2.7.1. ***Visina trokuta*** *je dužina koja spaja vrh trokuta i nožište okomice iz toga vrha na pravac kojem pripada nasuprotna stranica.*

U nastavku ćemo obraditi kriterij za točke koje leže na okomici.

Propozicija 2.7.1. *Točka T pripada pravcu koji sadrži visinu iz vrha A trokuta ABC ako i samo ako vrijedi*

$$|TC|^2 - |TB|^2 = |AC|^2 - |AB|^2.$$

Dokaz. Pretpostavimo da točka T pripada pravcu koji sadrži visinu iz vrha A trokuta ABC.



Slika 2.21

Promotrimo trokute DTC i ADC, oni su pravokutni pa primjenjujemo Pitagorin poučak. Imamo da je

$$|TC|^2 = |CD|^2 + |DT|^2$$

i

$$|CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2.$$

Sada je

$$|TC|^2 = |AC|^2 - |AD|^2 + |DT|^2. \tag{2.8}$$

Pitagorin pučak primjenjujemo i na pravokutne trokute DBT i ABD pa je

$$|TB|^2 = |DT|^2 + |BD|^2$$

i

$$|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2.$$

Sada je

$$|TB|^2 = |DT|^2 + |AB|^2 - |AD|^2. \tag{2.9}$$

Oduzimanjem jednakosti (2.8) i (2.9) dobivamo

$$|TC|^2 - |TB|^2 = |AC|^2 - |AD|^2 + |DT|^2 - |DT|^2 - |AB|^2 + |AD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2.$$

Pretpostavimo sada da za točku T vrijedi

$$|TC|^2 + |AB|^2 = |TB|^2 + |AC|^2.$$

Želimo pokazati da je $\angle TDC = 90°$. Pristupit ćemo ovom problemu tako što ćemo pokazati da kut $\angle TDC$ nije ni šiljasti ni tupi. Pretpostavimo prvo da je $\angle TDC < 90°$, tada je $\angle ADB < 90°$, a $\angle CDA > 90°$ i $\angle BDT > 90°$. Slijedi

$$|TC|^2 < |TD|^2 + |CD|^2, \quad |AB|^2 < |AD|^2 + |BD|^2,$$

te

$$|BT|^2 > |TD|^2 + |BD|^2, \quad |AC|^2 > |CD|^2 + |AD|^2$$

Zbrajanjem dobivamo sljedeću dvostruku nejednakost

$$|TC|^2 + |AB|^2 < |TD|^2 + |CD|^2 + |AD|^2 + |BD|^2 < |BT|^2 + |AC|^2.$$

Iz toga slijedi

$$|TC|^2 + |AB|^2 < |BT|^2 + |AC|^2,$$

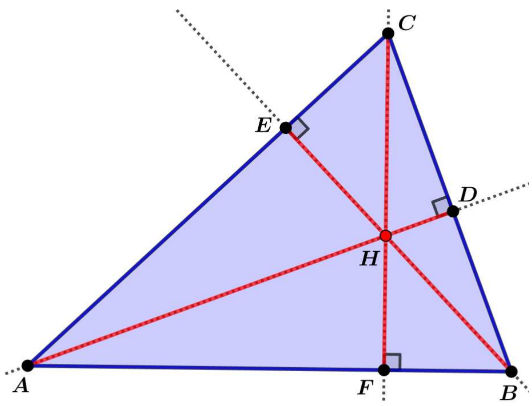
što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Prema tome, kut $\angle TDC$ ne može biti šiljasti. Pretpostavimo li da je $\angle TDC > 90°$, analogno dobivamo

$$|TC|^2 + |AB|^2 > |BT|^2 + |AC|^2,$$

što je također u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Prema tome, jedina preostala mogućnost je da je kut $\angle TDC$ pravi, pa točka T pripada pravcu koji sadrži visinu iz vrha A. □

Teorem 2.7.1. *Pravci kojima pripadaju visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je ABC proizvoljan trokut te neka su točke D, E, F nožišta visina iz vrhova A, B, C na pravce BC, CA i AB. Sjecište pravaca AD i BE označimo točkom H. Želimo pokazati da pravac CF prolazi točkom H.



Slika 2.22

Budući da točka H pripada pravcu koji sadrži visinu iz vrha A te pravcu koji sadrži visinu iz vrha B, prema propoziciji 2.7.1 vrijedi

$$|HC|^2 - |HB|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 \tag{2.10}$$

i

$$|HA|^2 - |HC|^2 = |BA|^2 - |BC|^2. \tag{2.11}$$

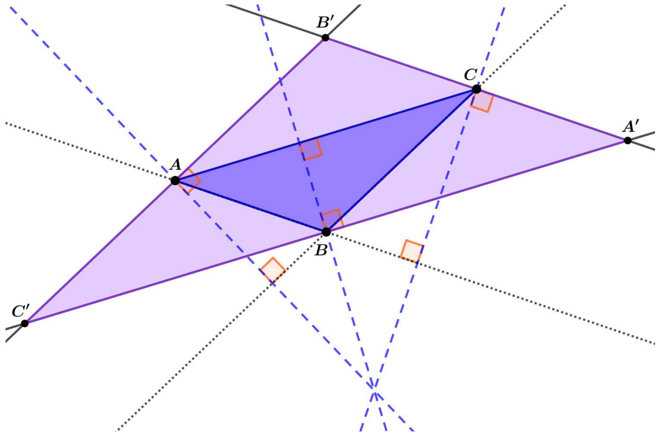
Zbrajanjem jednakosti 2.10 i 2.11 dobivamo

$$|HA|^2 - |HB|^2 = |AC|^2 - |BC|^2,$$

iz čega prema propoziciji 2.7.1 slijedi da točka H pripada pravcu koji sadrži visinu iz vrha C. Dakle, pravac CF prolazi točkom H. □

Prikazat ćemo još jedan način na koji možemo dokazati teorem 2.7.1. Ovo je dokaz koji se često obrađuje u školskoj matematici.

Dokaz. Dan je trokut ABC. Kroz vrhove trokuta A, B, C povlačimo paralele s odgovarajućom suprotnom stranicom. Točkom C povučemo pravac paralelan s pravcem AB, točkom B pravac paralelan s pravecm AC i naposlijetku točkom A pravac paralelan s pravcem BC. Na navedeni način dobivamo trokut $A'B'C'$.



Slika 2.23

Sada promatramo četverokut $ABA'C$. Vrijedi da $AC \parallel BA'$ i $CA' \parallel AB$ pa je stoga taj četverokut paralelogram, te je $|AB| = |CA'|$ i $|AB| = |B'C|$. Iz toga slijedi da je $|B'C| = |CA'|$, dakle točka C je polovište stranice $\overline{A'B'}$. Na analogan način dokazujemo da je točka B polovište stranice $\overline{A'C'}$ te da je A polovište stranice $\overline{B'C'}$. Nadalje, konstruiramo okomicu iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$ i iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Uočimo, visina iz vrha A je okomita na pravac na kojem leži stranica $\overline{BC}$, a vrijedi $BC \parallel B'C'$ pa je ona okomita i na dužinu $\overline{B'C'}$. Analogno, visina iz vrha B je okomita na pravac na kojem leži dužina $\overline{A'C'}$ i visina iz vrha C je okomita na pravac na kojem leži dužina $\overline{A'B'}$. Iz toga zaključujemo da su pravci na kojima leže visine trokuta ABC simetrale stranica trokuta $A'B'C'$ te se sijeku u jednoj točki. Tada se prema teoremu 2.2.1 i sva tri pravca koji sadrže visine trokuta ABC sijeku u jednoj točki. □

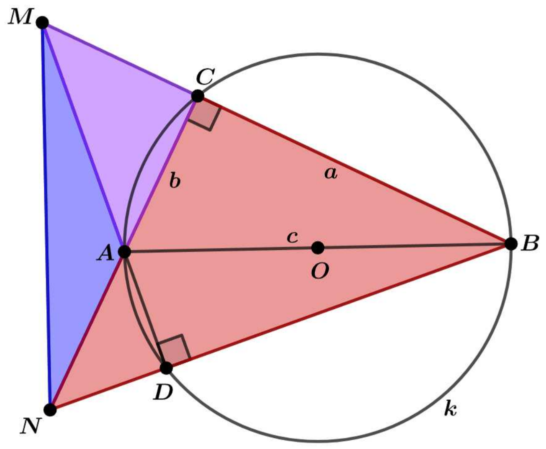
Definicija 2.7.2. ***Ortocentar*** *trokuta je sjecište pravaca kojima pripadaju visine tog trokuta.*

Veoma zgodan i zanimljiv primjer koji možemo obraditi s učenicima u nastavi matematike je dokaz Pitagorinog poučka pomoću ortocentra.

Teorem 2.7.2. *U pravokutnom trokutu kvadrat nad stranicom nasuprot pravog kuta (hipotenuzom) jednak je zbroju kvadrata nad stranicama koje zatvaraju pravi kut (katetama).*

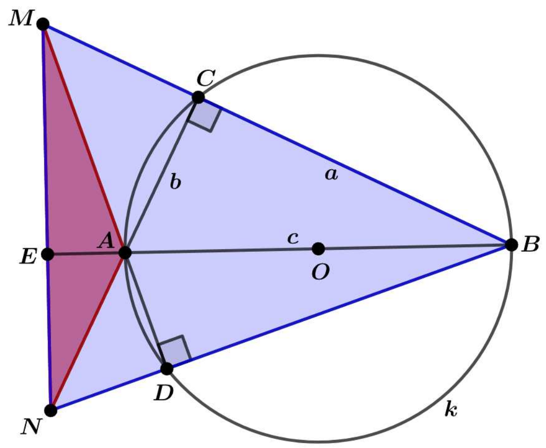
Dokaz. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu C, katetama a, b i hipotenuzom c. Neka je točka O polovište stranice $\overline{AB}$. Konstruiramo kružnicu k sa središtem u točki O polumjera $\overline{OA}$. Pretpostavimo da je $b \leq a$. Neka je točka M na pravcu BC takva da vrijedi $|CM| = |AC| = b$ i M ne pripada dužini $\overline{BC}$. Sada pravac AM siječe kružnicu k u točki D. Kako vrijedi $b \leq a$, točka D se nalazi na polukružnici različitoj od polukružnice koja sadrži točku C. Točka N je sjecište pravaca AC i BD. Sada vrijedi

$$P_{\triangle BMN} = P_{\triangle MNA} + P_{\triangle CNB} + P_{\triangle CMA}.$$



Slika 2.24

$$P_{\triangle BMN} - P_{\triangle MNA} = P_{\triangle CNB} + P_{\triangle CMA}.$$



Slika 2.25

Znamo da je

$$P_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |BE|$$

i

$$P_{\triangle MNA} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |EA|.$$

Sada je

$$\begin{aligned} P_{\triangle BMN} - P_{\triangle MNA} &= \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |BE| - \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |EA| \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|BE| - |EA|) \cdot |MN| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |MN|. \end{aligned}$$

Uočimo da je $ADBC$ tetivni četverokut, stoga vrijedi $\angle ACB + \angle BDA = 180°$. Poznato je da je $\angle ACB = 90°$, stoga je $\angle BDA = 180° - \angle ACB = 90°$. Prema tome, $\overline{NC}$ je visina iz vrha N na stranicu $\overline{BM}$ trokuta MNB i $\overline{MD}$ je visina iz vrha M na stranicu $\overline{NB}$ trokuta MNB. Navedene visine sijeku se u točki A pa zaključujemo da je A ortocentar trokuta MNB. Dalje je

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |MN| = P_{\triangle CNB} + P_{\triangle CMA}. \tag{2.12}$$

Uočimo, trokuti MCA, NDA, NCB, MDB su pravokutni. Nadalje, vrijedi $|CM| = |CA|$, $|CN| = |CB|$, $\angle ACB = \angle MCN = 90°$ pa su trokuti CMN i CAB sukladni po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta. Odakle slijedi $|MN| = |AB| = c$. Sada iz (2.12) imamo:

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |MN| = P_{\triangle CNB} + P_{\triangle CMA}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |MN| &= \frac{1}{2} \cdot |CN| \cdot |CB| + \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |CA| \\ \frac{1}{2} \cdot c \cdot c &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \\ \frac{1}{2}c^2 &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Time je dokaz gotov. □

Poglavlje 3

Eulerova kružnica i Eulerov pravac

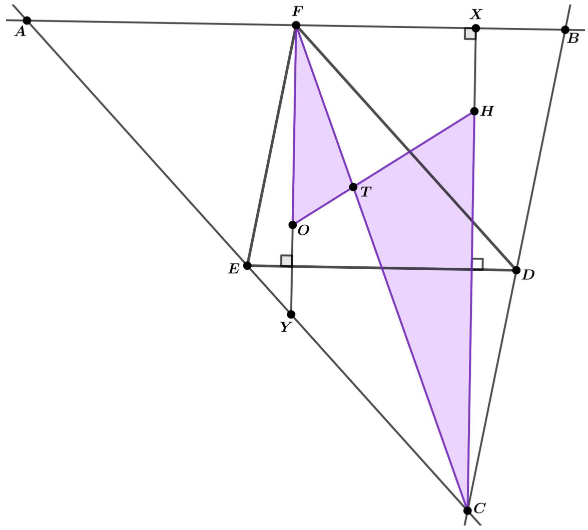
3.1 Eulerov pravac

Jedan od pojmova na koje također nailazimo u literaturi, usko vezan uz karakteristične točke trokuta, svakako je Eulerov pravac koji prolazi težištem, ortocentrom i središtem kružnice opisane trokutu. Taj pravac se pokazuje korisnim i pri rješavanju nekih složenijih geometrijskih zadataka. Zato ćemo u nastavku iskazati i dokazati teorem o Eulerovom pravcu.

Teorem 3.1.1. *Središte O opisane kružnice, težište T i ortocentar H trokuta ABC leže na jednom pravcu e kojeg nazivamo* ***Eulerov pravac*** *tog trokuta.*
Udaljenost $|HT|$ ortocentra H i težišta T dvostruko je veća od udaljenosti $|TO|$ težišta T i središta opisane kružnice O,

$$|HT| = 2|TO|.$$

Dokaz. Neka je dan trokut ABC te neka su točke D, E, F redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Neka je O središte kružnice opisane trokutu ABC i ortocentar trokuta DEF, te T težište i H ortocentar trokuta ABC.



Slika 3.1

Uočimo da su trokuti ABC i DEF slični prema K-K poučku o sličnosti trokuta s koeficijentom sličnosti $k = 2$. Sjecište okomice iz vrha F na stranicu $\overline{ED}$ i pravca AC označimo točkom Y, a sjecište okomice iz vrha C na stranicu $\overline{ED}$ i pravca AB označimo točkom X. Promotrimo sada trokute FOT i CHT. Uočimo da je FC transverzala paralelnih pravaca FY i CX pa je $\angle OFT = \angle HCT$. $\overline{CF}$ je težišnica iz vrha C trokuta ABC, stoga je $|CT| = 2|TF|$. Budući da su trokuti ABC i DEF slični s koeficijentom sličnosti $k = 2$ slijedi da je $|CH| = 2|FO|$. Dakle, trokuti FOT i CHT su slični prema S-K-S poučku o sličnosti trokuta. Iz toga proizlazi $\angle TOF = \angle THC$ i $\angle FTO = \angle CTH$ pa točke O, T i H pripadaju istom pravcu. □

3.2 Središte Eulerove kružnice

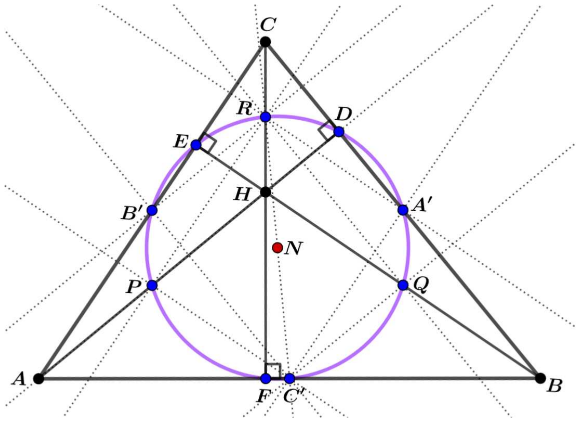
Učenici su se do sada susretali s tri vrste kružnica koje su pridružene trokutu, a to su opisana, upisana i pripisana kružnica. U ovom ćemo poglavlju definirati još jednu zanimljivu kružnicu trokuta koja prolazi kroz devet odabranih točaka (odakle joj i potječe sam naziv). Iskazat ćemo i dokazati teorem o kružnici devet točaka koja se ponegdje naziva Feuerbachovom ili pak Eulerovom kružnicom. Prva osoba koja je tu kružnicu (1765. godine) proučavala i zapisala dokaz da ona sadrži šest istaknutih točaka trokuta (polovišta stranica i nožišta visina) bio je švicarski matematičar Leonhard Euler kojeg se smatra najvećim matematičarem 18. stoljeća. Rodio se 1707. godineu Baselu, gdje je također studirao filozofiju i pravo. Svoju karijeru gradi u Berlinu, ali i u St. Petersburgu gdje je na Akademiji znanosti obnašao dužnost voditelja katedre matematike. Smatra ga se utemeljiteljem matematičke discipline topologije, to jest njezine poddiscipline teorije grafova.[3]

Još jedan bitan matematičar po kojemu je ova kružnica dobila naziv je njemački matematičar Karl Wilhelm Feuerbach. On se posebno zanimao za geometriju, a zanimljivo je da je doktorirao u svojoj 22. godini života nakon čega se zaposlio u gimnaziji u Erlangenu. On je 1822. godine napisao knjižicu o matematici u kojoj se bavio kružnicom devet točaka. Važno je napomenutu da se otkriće kružnice devet točaka pripisuje još i Brianchonu, Ponceletu i Terquemu. Središte kružnice devet točaka je u *Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers - ETC* navedeno kao točka $X(5)$.

U trokutu ABC s ortocentrom H, točke P, Q, R koje su polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ nazivamo **Eulerovim točkama.**

Teorem 3.2.1. *Polovišta stranica, nožišta visina i Eulerove točke trokuta pripadaju jednoj kružnici koju nazivamo* ***kružnicom devet točaka.***

Dokaz. Neka je ABC proizvoljan trokut. Točkama D, E, F označimo nožišta visina iz vrhova A, B, C na pravce kojima pripadaju stranice $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ redom. Označimo točkama A', B', C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, a točkama P, Q, R polovišta dužina $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ pri čemu je H ortocentar trokuta ABC. Promotrimo trokut ABH. Kako je točka C' polovište stranice $\overline{AB}$ te točka Q polovište stranice $\overline{BH}$, po teoremu o srednjici trokuta slijedi da je $\overline{C'Q}$ srednjica trokuta ABH pa su pravci $C'Q$ i AH paralelni. Budući da je u trokutu AHC točka B' polovište stranice $\overline{AC}$ i točka R polovište stranice $\overline{HC}$, slijedi da je $\overline{B'R}$ srednjica tog trokuta i da su pravci $B'R$ i AH paralelni. Također je dužina $\overline{QR}$ srednjica trokuta BCH, stoga zaključujemo da su pravci QR i BC paralelni. Uočimo da je pravac AH okomit na pravac BC, a BC i QR su paralelni pa je pravac AH okomit i na pravac QR. Dužina $\overline{B'C'}$ je srednjica trokuta ABC pa su pravci BC i $B'C'$ paralelni. Dakle, pravac $B'C'$ je okomit na pravac AH. Sada zaključujemo da je $B'C'QR$ tetivni četverokut s dijagonalama $\overline{B'Q}$ i $\overline{C'R}$. Na analogan način zaključujemo da je $A'C'PR$ također tetivni četverokut. Uočimo da tetivni četverokuti $B'C'QR$ i $A'C'PR$ imaju zajedničku dijagonalu $\overline{C'R}$ pa se kružnice opisane tim četverokutima podudaraju. Isto tako, $A'B'PQ$ je tetivni četverokut i njemu opisana kružnica se podudara s kružnicama opisanim četverokutima $B'C'QR$ i $A'C'PR$.



Slika 3.2

Dakle, točke A', B', C', P, Q i R pripadaju istoj kružnici, a dužine $\overline{A'P}$, $\overline{B'Q}$, $\overline{C'R}$ su promjeri te kružnice. Uočimo da vrijedi

$$\angle PDA' = \angle QEB' = \angle RFC' = 90°,$$

prema tome zaključujemo da točke D, E i F također pripadaju navedenoj kružnici. Središte te kružnice nazivamo **središtem Eulerove kružnice**. □

Poglavlje 4

Kopunktalnost pravaca

4.1 Cevin teorem

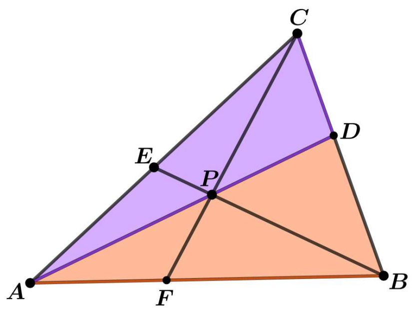
Giovanni Ceva rođen 1647. godine je bio talijanski profesor matematike i inženjer za vodogradnju. Studirao je na Sveučilištu u Pisi, gdje se kasnije zaposlio kao profesor matematike. Osim toga podučavao je matematiku i na Sveučilištu u talijanskom gradu Mantua. Kako je Giovanni Ceva radio i u industriji vodogradnje, bavio se primjenom geometrije u mehanici i statici, a 1678. godine je napisao djelo *De lineis rectis se invicem sectantibus* u kojem je izložio poznati teorem koji danas nazivamo Cevin teorem. Zanimljivo je da se navedeni teorem primjenjuje u mnogim displicplinama kao što su astronomija, ekonomija i biologija. Naime, u astronomiji se primjenjuje u području nebeske mehanike za ispitivanje stabilnosti trokuta čije vrhove predstavljaju nebeska tijela. Koristi se i kao alat za modeliranje ekonomske ravnoteže koji se može primijeniti u analizi reakcije tržišnih sustava s više čimbenika koji međusobno djeluju. Također, važan je u biologiji i ekologiji gdje se koristi pri analizi ravnoteže te stabilnosti ekosustava. Ovaj teorem pomaže ekolozima u razumijevanju interakcija među vrstama u ekosustavu te donosi predviđanja o dinamici populacije. Kako se navedeni teorem pojavljuje na zadacima Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi, njegov se dokaz može provesti s učenicima na satovima dodatne nastave matematike.

Teorem 4.1.1. *Neka je dan trokut ABC, te neka su na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom dane točke D, E, F. Pravci AD, BE i CF se sijeku u jednoj točki ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1. \tag{4.1}$$

Dokaz. Neka je ABC trokut i P bilo koja točka unutar tog trokuta. Označimo točkom D presjek pravaca AP i dužine $\overline{BC}$, točkom E presjek pravca BP i dužine $\overline{AC}$ te točkom F presjek pravca CP i dužine $\overline{AB}$. U ovome dokazu koristimo ideju koju smo pokazali u dokazu propozicije 2.6.1 kako bismo dobili malo općenitiji rezultat. Primijenimo li ideju propozicije 2.6.1 na trokute ABD i ADC dobivamo

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}}.$$



Slika 4.1

Isto vrijedi za trokute PBD i PDC pa je

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}} = \frac{P_{\triangle PBD}}{P_{\triangle PDC}} = \frac{P_{\triangle ABD} - P_{\triangle PBD}}{P_{\triangle ADC} - P_{\triangle PDC}} = \frac{P_{\triangle ABP}}{P_{\triangle APC}}.$$

Analogno se dobiva

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P_{\triangle BCP}}{P_{\triangle ABP}}$$

i

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{P_{\triangle APC}}{P_{\triangle BCP}}.$$

Množenjem dobivenih omjera je

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{P_{\triangle ABP}}{P_{\triangle APC}} \cdot \frac{P_{\triangle BCP}}{P_{\triangle ABP}} \cdot \frac{P_{\triangle APC}}{P_{\triangle BCP}} = 1.$$

Pretpostavimo sada da točke D, E, F zadovoljavaju (4.1) i pretpostavimo da se pravci AD i BE sijeku u točki P. Pretpostavimo da pravac CP siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki F'. Pokazali smo da točka F' mora zadovoljavati (4.1) stoga je

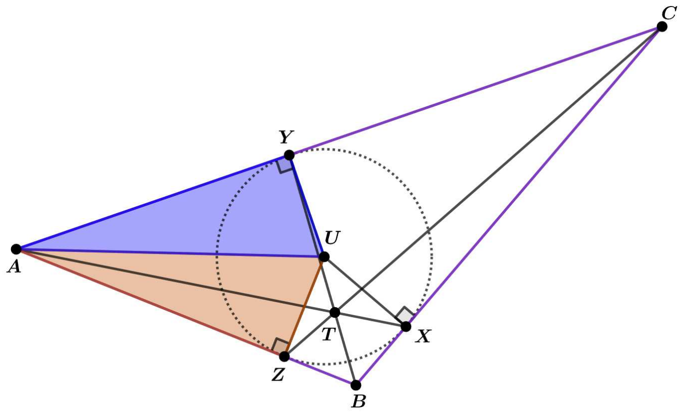
$$\frac{|AF'|}{|F'B|} = \frac{|AF|}{|FB'|},$$

iz čega slijedi da se točke F' i F podudaraju te da pravac CF prolazi sjecištem pravaca AD i BE. $\square$

U nastavku ćemo riješiti jedan zadatak za drugi razred srednje škole koji se pojavio na županijskom natjecanju iz matematike 2001. godine u Republici Hrvatskoj.[4]

Zadatak 4.1.1. *Trokutu ABC upisana je kružnica koja stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ dodiruje redom u točkama X, Y i Z. Dokažite da se pravci AX, BY i CZ sijeku u točki T.*

Rješenje. Označimo točkom U središte kružnice upisane trokutu ABC.



Slika 4.2

Promotrimo trokute ZUA i UYA. Uočimo da vrijedi $|UZ| = |UY|$, $\angle UZA = \angle AYU = 90°$ te im je $\overline{AU}$ zajednička stranica. Trokuti ZUA i UYA su sukladni prema S-S-K$^>$ poučku o sukladnosti trokuta. Iz te sukladnosti proizlazi $|AZ| = |AY|$. Na analogan način zaključujemo da su trokuti ZBU i BXU te trokuti XCU i CYU sukladni pa dobivamo $|BZ| = |BX|$ i $|CX| = |CY|$. Nadalje je

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = \frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BZ|}{|CY|} \cdot \frac{|CY|}{|AZ|} = 1.$$

Prema Cevinom teoremu 4.1.1 slijedi da se pravci AX, BY i CZ sijeku u jednoj točki.

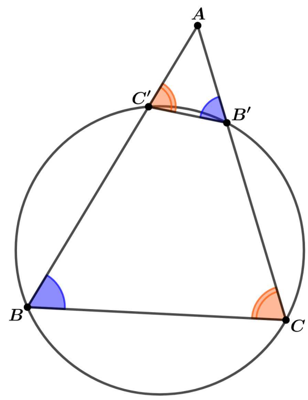
Dobivena točka T je zapravo Gergonova točka. Rješenje zadatka 4.1.1 je dokaz sljedećeg teorema.

Teorem 4.1.2. *Pravci AA', BB' i CC', pri čemu su točke A', B' i C' dirališta upisane kružnice trokuta ABC sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ redom, sijeku se u istoj, takozvanoj,* ***Gergonovoj točki****.*

4.2 Lemoineova točka

Postojanje sljedeće točke koju ćemo promatrati je lijepa ilustracija primjene Cevinog teorema. Emile Michel Hyacinthe Lemoine (rođen 1840.godine) je bio francuski matematičar koji se posebno zanimao za geometriju, a najpoznatiji je po otkriću Lemoineove točke. Nazivaju ga suutemljiteljem moderne geometrije trokuta od 18. stoljeća na dalje. Prije nego što definiramo Lemoineovu točku definirat ćemo pojam simedijane trokuta. Simedijane trokuta možemo dobiti na dva načina, a njihovo postojanje je posljedica sličnosti. Da bismo definirali simedijanu trokuta na prvi način trebamo uvesti pojam antiparalele.

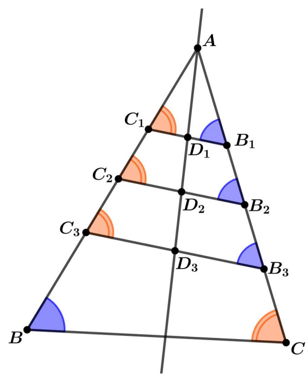
Definicija 4.2.1. *Neka je dan trokut ABC, te neka je točka B' na pravcu AC, a točka C' na pravcu AB. Ako za navedene točke vrijedi da je $\angle AB'C' = \angle ABC$ i $\angle AC'B' = \angle ACB$, tada za dužinu $\overline{B'C'}$ kažemo da je* ***antiparalela*** *stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC.*



Slika 4.3: Antiparalela stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC

Zbog sličnosti sva polovišta svih antiparalela neke stranice pripadaju istom pravcu.

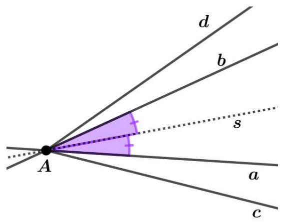
Definicija 4.2.2. *Simedijana trokuta je pravac koji prolazi polovištima svih antiparalela neke stranice i nasuprotnim vrhom tog trokuta.*



Slika 4.4: Simedijana trokuta ABC

Drugi način je da promatramo simedijane trokuta kao izogonale pravaca koji sadrže težišnice trokuta. Stoga definirajmo izogonalne pravce i izogonalno konjugirane točke.

Definicija 4.2.3. *Neka je dan kut i par pravaca, a i b koji prolaze vrhom kuta te sa simetralom tog kuta zatvaraju sukladne kutove. Par pravaca, a i b zovemo* ***izogonalama*** *tog kuta.*



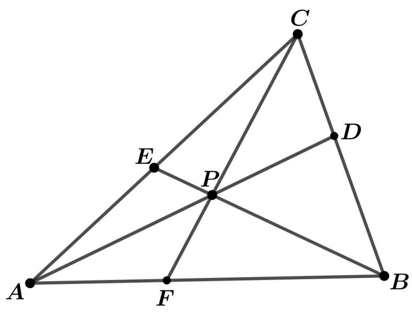
Slika 4.5

Izogonale a i b kuta $\angle cAd$ sa simetralom s tog kuta zatvaraju sukladne kutove pa vrijedi $\angle aAs = \angle sAb$. Zaključujemo da su kutovi koje izogonale zatvaraju s krakovima kuta $\angle cAd$ također sukladni, to jest vrijedi $\angle cAa = \angle bAd$.

Iz trigonometrijske verzije Cevinog teorema 4.1.1

$$\frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle ABE} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} = 1$$

slijedi da ako se tri pravca koja prolaze vrhovima trokuta sijeku u jednoj točki, onda se i izogonale tih pravaca također sijeku u jednoj točki.

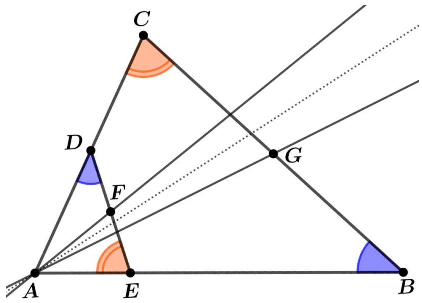


Slika 4.6

Definicija 4.2.4. *Neka je točka P unutar trokuta ABC, a točka P' sjecište pravaca simetričnih pravcima AP, BP i CP s obzirom na simetrale kutova trokuta ABC. Točke P i P' zovemo* ***izogonalno konjugiranim točkama*** *trokuta ABC.*

Teorem 4.2.1. *Simedijana i pravac kojem pripada težišnica trokuta osnosimetrični su s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta trokuta.*

Dokaz. Neka je ABC trokut, a $\overline{DE}$ antiparalela dužine $\overline{BC}$. Točkama F i G označimo polovišta dužina $\overline{DE}$ i $\overline{BC}$.



Slika 4.7

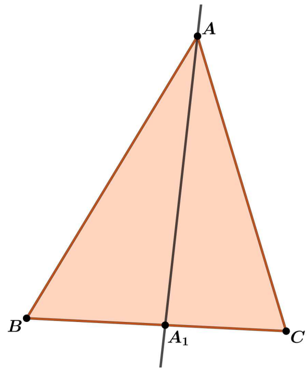
Promotrimo trokute ABC i ADE. Budući da vrijedi $\angle CBA = \angle ADE$ i $\angle ACB = \angle DEA$ trokuti ABC i ADE su slični prema K-K poučku o sličnosti trokuta. Iz te sličnosti proizlazi $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DE|}$, odnosno $\frac{|AB|}{|BG|} = \frac{|AD|}{|DF|}$. Sada zaključujemo da su trokuti ABG i AFD slični prema S-K-S poučku o sličnosti trokuta, stoga vrijedi $\angle BAG = \angle FAD$. □

Dakle, dokazali smo da su simedijana trokuta i pravac kojem pripada težišnica osnosimetrični s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta trokuta. To jest, simedijane su izogonale pravaca koji sadrže težišnicu.

Za dokaz idućeg teorema koristit ćemo teorem 4.2.2 čiji je dokaz jednostavan, stoga ga nećemo provoditi.

Teorem 4.2.2. *Neka je A_1 točka koja pripada dužini $\overline{BC}$ trokuta ABC, takva da je pravac AA_1 simedijana tog trokuta. Tada vrijedi:*

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$



Slika 4.8: Pravac AA_1 je simedijana trokuta ABC.

Sada smo spremni za dokaz idućeg teorema.

Teorem 4.2.3. *Simedijane trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Označimo s $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$ duljine stranica trokuta ABC. Neka su A_1, B_1, C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ takve da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 simedijane trokuta ABC. Budući da su pravci AA_1, BB_1, CC_1 simedijane trokuta prema teoremu (4.2.2) dobivamo:

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{|CB_1|}{|AB_1|} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = \frac{a^2}{c^2},$$

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

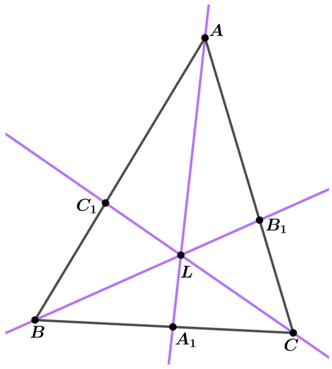
Pomnožimo li ove tri jednakosti dobivamo

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} \cdot \frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Sada pak primjenom obrata Cevinog teorema možemo zaključiti da pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze jednom točkom. □

Teorem 4.2.3 može se dokazati i primjenom trigonometrijske verzije Cevinog teorema, ukoliko znamo da su simedijane izogonale pravaca koji sadrže težišnice. Navedeni dokaz je jednostavan, stoga ga nećemo provoditi.

Definicija 4.2.5. *Točku u kojoj se sijeku simedijane trokuta nazivamo* ***Lemoineova točka****.*



Slika 4.9: Lemoineova točka

Poglavlje 5

Fermatova, Jacobijeva i Napoleonove točke

5.1 Fermat-Torricellijeva i Jacobijeva točka

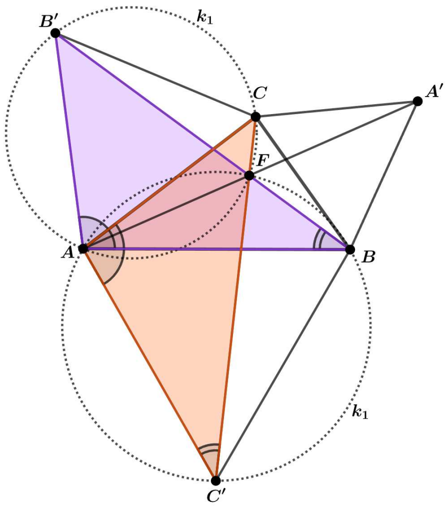
U ovom poglavlju se upoznajemo s Fermat-Torricellijevom i Jacobijevom točkom. Učenicima će razumijevanje pojma Fermat-Torricellijeve točke pomoći pri rješavanju zadataka iz fizike. U povijesti je Fermat zadao zadatak u kojem treba dokazati da je zbroj udaljenosti od vrhova do Fermatove točke minimalan, kojeg je Torricelli uspješno riješio. Fermat-Torricellijevu točku možemo uvesti na više načina. Na primjer, za Fermat-Torricellijevu točku, u oznaci F vrijedi

$$\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA = 120^\circ.$$

Međutim, iz takve definicije nije očito da je takva točka jedinstvena. U ovome radu ćemo definirati točku na drugi način i vidjeti da ima i ovo svojstvo. Prije nego li uvedemo definiciju Fermat-Torricellijeve točke navest ćemo bitan teorem pomoću kojega ćemo definirati tu točku.

Teorem 5.1.1. *Neka je dan trokut ABC i neka su ABC', BCA' i ACB' prema van konstruirani jednakostranični trokuti nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$. Tada se pravci AA', BB' i CC' sijeku u jednoj točki F i vrijedi $|AA'| = |BB'| = |CC'|$.*

Dokaz. Najprije želimo dokazati prvu tvrdnju, to jest želimo dokazati da se pravci AA', BB' i CC' sijeku u jednoj točki. Presjek pravaca BB' i CC' označimo točkom F.



Slika 5.1: Fermatova točka

Promotrimo li trokute BAB' i $C'AC$ uočavamo da je $|AB| = |AC'|$ i $|AB'| = |AC|$, jer su trokuti ABC' i ACB' jednakostranični. Također, vrijedi $\angle BAB' = \angle BAC + \angle CAB'$ i $\angle C'AC = \angle C'AB + \angle BAC$, a kako je $\angle CAB' = \angle C'AB = 60°$ slijedi $\angle BAB' = \angle C'AC$. Dakle, trokuti BAB' i $C'AC$ su sukladni prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta, a iz navedene sukladnosti proizlazi $\angle FBA = \angle FC'A$ i $|BB'| = |CC'|$. Kutovi $\angle FBA$ i $\angle FC'A$ su obodni kutovi nad tetivnom $\overline{AF}$ stoga zaključujemo da su točke A, F, C i B' konciklične, to jest da je $AFCB'$ tetivni četverokut. Također, vrijedi da su točke A, C', B, F konciklične, to jest $AC'BF$ je tetivni četverokut (jer su kutovi $\angle FC'A$ i $\angle FBA$ obodni kutovi nad tetivom $\overline{AF}$). Za tetivni četverokut vrijedi da zbroj mjera njegovih nasuprotnih kutova iznosi 180°, to jest oni su suplementarni. S obzirom da je $\angle AC'B = \angle CB'A = 60°$, (jer su trokuti $AC'B$ i $CB'A$ jednakostranični) vrijedi $\angle BFA = \angle AFC = 120°$. Znamo da je $\angle BFA + \angle AFC + \angle CFB = 360°$ pa je $\angle CFB = 120°$. Uočimo sada da je zbroj mjera nasuprotnih kutova $\angle CFB$ i $\angle CA'B$ četverokuta $CFBA'$ jednak $\angle CFB + \angle CA'B = 120° + 60° = 180°$, jer je trokut $CA'B$ jednakostraničan. Iz toga prema obratu poučka o tetivnom četverokutu slijedi da su točke C, F, B i A' konciklične, to jest četverokut $CFBA'$ je tetivni. $\angle AFB'$, $\angle B'FC$ i $\angle CFA'$ su obodni kutovi nad stranicama jednakostraničnih trokuta, stoga vrijedi: $\angle AFB' = \angle B'FC = \angle CFA'$. Iz toga proizlazi da ti kutovi čine ispruženi kut. Prema tome, zaključujemo da su točke A, F, A' kolinearne pa točka F pripada pravcu AA'.
Već smo naveli sukladnost iz koje slijedi $|BB'| = |CC'|$. Na analogan način se dokaže da je i $\overline{AA'}$ njima sukladna dužina. □

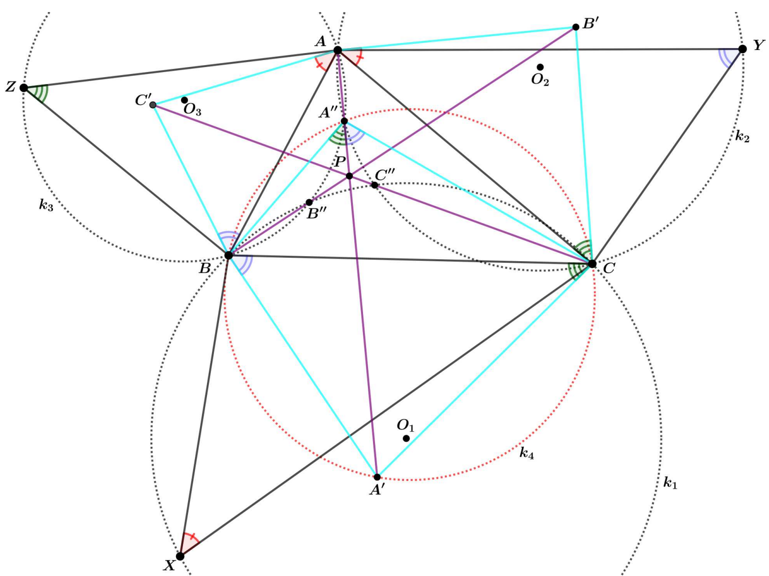
Definicija 5.1.1. *Neka je dan trokut ABC i neka su nad njegovim stranicama prema van konstruirani jednakostranični trokuti ABC', BCA' i ACB'. Spojnice $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ sijeku se u jednoj točki F koju nazivamo* ***Fermat-Torricellijeva točka****.*

Sljedeća točka koju ćemo obraditi je povezana s Fermat-Torricellijevom točkom. Carl Friedrich Andreas Jacobi (1795.-1855.) bio je njemački matematičar i profesor koji je otkrićem Jacobijevog teorema geometriji trokuta dao značajan doprinos. Radio je kao profesor matematike i fizike u gimnaziji u Schulpforti, a prije toga bio je prorektor u Brandenburgu an der Havel. Osim značajnog i bogatog doprinosa u profesorskoj struci Jacobi je 1834. godine objavio djelo *Grondbeginsels der Meetkunde (Osnove geometrije)* Jeana Henrija van Swindena koje je nadopunio vlastitim dodacima na njemačkom jeziku. Jacobijeva točka je rezultat teorema kojeg ćemo u nastavku dokazati. No, prije iskaza i dokaza Jacobijevog teorema uvodimo pojam potencije točke na kružnicu i radikalne osi.

Neka je k kružnica i T neka točka u ravnini. Neka je s pravac koji prolazi točkom T i dira kružnicu u barem jednoj točki. Neka su to točke A i B (mogu biti ista točka). **Potencija točke** T na kružnicu k je umnožak $|TA| \cdot |TB|$.

Radikalna os je pravac koji se sastoji od svih točaka ravnine koje imaju jednaku potenciju na dvije nekoncentrične kružnice. Radikalne osi triju nekoncentričnih kružnica sijeku se u jednoj točki koju nazivamo **radikalno središte**.

Teorem 5.1.2. *Neka je dan trokut ABC te neka su točke A', B', C' u ravnini takve da $\angle CAB' = \angle C'AB = \alpha$, $\angle ABC' = \angle A'BC = \beta$ i $\angle BCA' = \angle B'CA = \gamma$. Tada se pravci AA', BB' i CC' sijeku u jednoj točki.*



Slika 5.2

Dokaz. Neka su točke X, Y, Z takve da vrijedi $\angle CXB = \alpha$, $\angle AYC = \beta$, $\angle BZA = \gamma$. Nadalje, neka su O_1, O_2, O_3 redom središta trokutima $\triangle XBC$, $\triangle YAC$, $\triangle ZAB$ opisanih kružnica k_1, k_2,

k_3. Neka su trokuti $\triangle BAC'$, $\triangle ACB'$, $\triangle CBA'$ takvi da vrijedi $\angle C'AB = \angle CAB' = \angle CXB = \alpha$, $\angle ABC' = \angle A'BC = \angle AYC = \beta$ i $\angle B'CA = \angle BCA' = \angle BZA = \gamma$.

Neka je točka A'' presjek pravca AA' i kružnice k_4 opisane trokutu $\triangle A'BC$. Kako su $\angle A'A''C$ i $\angle A'BC$ kutovi nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{A'C}$ kružnice k_4 vrijedi $\angle A'A''C = \angle A'BC = \beta$. Također su $\angle BA''A'$ i $\angle A'CB$ kutovi nad istim kružnim lukom $\overset{\frown}{BA'}$ kružnice k_4 pa vrijedi $\angle BA''A' = \angle A'CB = \gamma$. Prema tome, slijedi da točka A'' pripada presjeku kružnica k_2 i k_3. Pravac AA' (koji se podudara s pravcem AA'') je radikalna os kružnica k_2 i k_3.

Analogno zaključujemo da je pravac BB' radikalna os kružnica k_1 i k_3 te je CC' radikalna os kružnica k_1 i k_2. Prema tome zaključujemo da je $AA' \cap BB' \cap CC' = P$, dakle točka P je radikalno središte kružnica k_1, k_2 i k_3. Točku P nazivamo Jacobijevom točkom. □

Uočimo da je Jacobijeva točka generalizacija Fermat-Torricellijeve točke za koju vrijedi $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ i ako su mjere svih unutarnjih kutova trokuta manje od $120°$.

5.2 Napoleonove točke

U ovom ćemo poglavlju spomenuti Napoleonove točke, koje su točke dobile naziv po bivšem francuskom caru Napoleonu Bonaparteu koji je poznat i pod imenom Napoleon I. On se obrazovao na Francuskoj vojnoj akademiji gdje se i pobudilo njegovo zanimanje za geometriju. Osim toga riješit ćemo jedan zanimljiv zadatak u kojem ćemo vidjeti da ako od površine vanjskog Napoleonovog trokuta oduzmemo površinu unutarnjeg Napoleonovog trokuta dobit ćemo površinu zadanog trokuta.

Iskaz i dokaz Napoleonovog teorema

Teorem 5.2.1. *Nad stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ trokuta ABC konstruiramo jednakostranične trokute $C'BA$, $A'CB$, $B'AC$ prema van i jednakostranične trokute $C''AB$, $A''BC$, $B''CA$ prema unutra. Treba dokazati:*

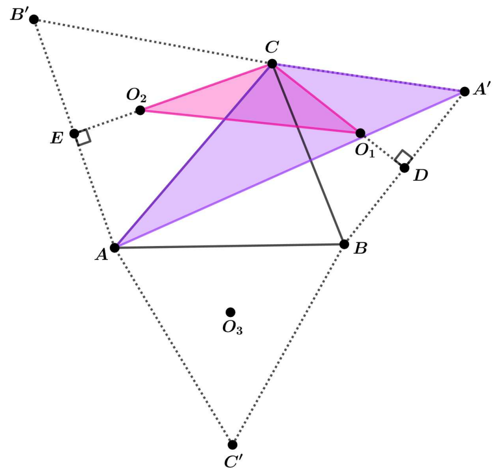
(a) $|AA'| = |BB'| = |CC'|$;

(b) *Pravci AA', BB' i CC' sijeku se u jednoj točki;*

(c) *Središta jednakostraničnih trokuta $C'BA$, $A'CB$, $B'AC$ vrhovi su jednakostraničnog trokuta $O_1O_2O_3$.*

Iz iskaza Napoleonovog teorema vidimo da je Napoleonova točka zapravo Fermat-Torricelijeva točka. Dijelovi teorema *(a)* i *(b)* su dokazani u teoremu o Fermat-Torricellijevoj točki 5.1.1 stoga ih nećemo ponovno dokazivati. Dokažimo dio *(c)* Napoleonovog teorema 5.2.1.

Dokaz. *(c)* Želimo pokazati da su središta jednakostraničnih trokuta $A'CB$, $B'AC$, $C'BA$ vrhovi jednakostraničnog trokuta. Točkama O_1, O_2, O_3 označimo središta jednakostraničnih trokuta $A'CB$, $B'AC$ i $C'BA$. Neka je D nožište okomice iz vrha C na pravac kojem pripada stranica $\overline{BA'}$ jednakostraničnog trokuta $BA'C$, $\overline{CD}$ je visina jednakostraničnog trokuta $BA'C$.



Slika 5.3

Primjenom Pitagorinog teorema imamo

$$|CD|^2 = |A'C|^2 - |DA'|^2 = |A'C|^2 - (\frac{1}{2}|A'C|)^2 = |A'C|^2 - \frac{1}{4}|A'C|^2 = \frac{3}{4}|A'C|.$$

Dakle,

$$|CD| = \frac{\sqrt{3}}{2}|A'C|.$$

Budući da se radi o jednakostraničnom trokutu težišnica i visina se podudaraju pa vrijedi da je duljina dužine $\overline{CO_1}$ jednaka je dvije trećine duljine $\overline{CD}$

$$|CO_1| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|A'C| = \frac{\sqrt{3}}{3}|A'C|.$$

Dakle,

$$|CO_1| = \frac{\sqrt{3}}{3}|A'C|.$$

Neka je E nožište okomice iz vrha C na pravac kojem pripada stranica $\overline{AB'}$ jednakostraničnog trokuta ACB', $\overline{CE}$ je visina tog trokuta. Primjenom Pitagorinog teorema slijedi

$$|CE|^2 = |AC|^2 - |AE|^2 = |AC|^2 - (\frac{1}{2}|AC|)^2 = \frac{3}{4}|AC|^2.$$

Imamo da je

$$|CE| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC|.$$

Duljina dužine $\overline{CO_2}$ jednaka je $\frac{2}{3}$ duljine dužine $\overline{CE}$. Slijedi

$$|CO_2| = \frac{2}{3}|CE| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|AC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|.$$

Dakle,

$$|CO_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|.$$

Sada vidimo da vrijedi

$$|CO_!| : |CO_2| = |A'C| : |AC|.$$

Promotrimo li kutove možemo uočiti da je

$$\angle ACA' = \angle BCA + 60^\circ \tag{5.1}$$

i

$$\angle O_1CN = \angle O_1CB + \angle BCA + \angle ACO_2 = 30^\circ + \angle BCA + 30^\circ = \angle BCA + 60^\circ.$$

To jest

$$\angle ACA' = \angle BCA.$$

Trokuti ACA' i O_2CO_1 su slični po S-K-S poučku o sličnosti trokuta s koeficijentom sličnosti $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Pa je tada

$$|O_1O_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AA'|.$$

Na analogan način dobivamo

$$|O_1O_3| = \frac{\sqrt{3}}{3}|CC'|$$

i

$$|O_2O_3| = \frac{\sqrt{3}}{3}|BB'|.$$

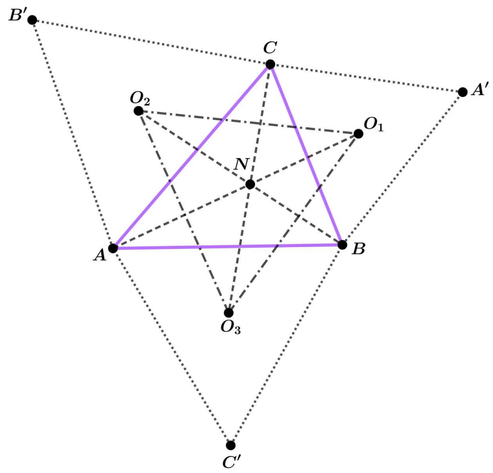
Budući da smo već pokazali da vrijedi $|AA'| = |BB'| = |CC'|$ slijedi

$$|O_1O_2| = |O_2O_3| = |O_1O_3|.$$

Time smo dokazali da je trokut $O_1O_2O_3$ jednakostraničan. □

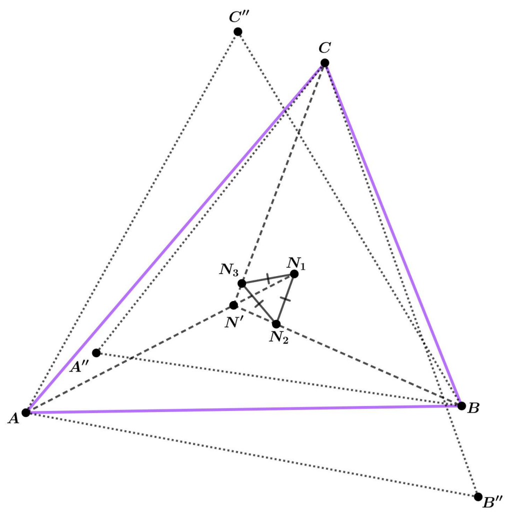
Na analogan se način provodi dokaz da su središta jednakostraničnih trokuta $A''BC$, $B''CA$, $C''AB$ vrhovi jednakostraničnog trokuta $N_1N_2N_3$.

Prva Napoleonova točka N (to je $X(17)$ u ETC) je sjecište spojnica vrhova danog trokuta ABC s odgovarajućim nasuprotnim vrhovima trokuta $O_1O_2O_3$.



Slika 5.4: Prva Napoleonova točka N

Druga Napoleonova točka N' (to je $X(18)$ u ETC) je sjecište spojnica vrhova danog trokuta ABC s odgovarajućim nasuprotnim vrhovima trokuta $N_1N_2N_3$.



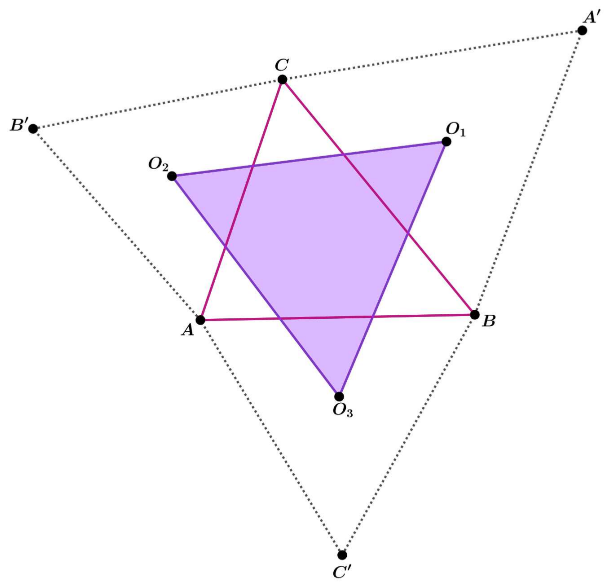
Slika 5.5: Druga Napoleonova točka N'

Primjena Napoleonovog teorema u zadacima

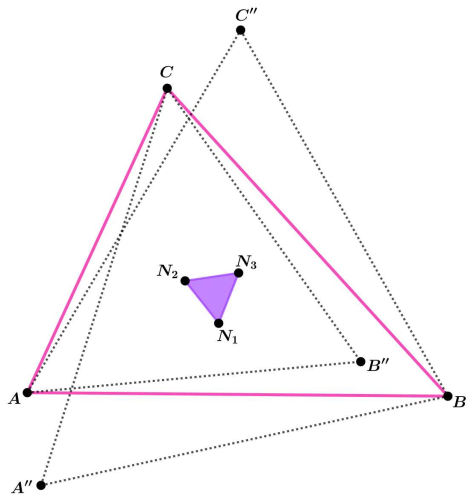
Slijedi primjer zadatka s Napoleonovim trokutima. Zanimljivo je, da se car Napoleon zaista zanimao za geometriju, no ne zna se je li uistinu bio povezan s ovim problemom.

Zadatak 5.2.1. ***[Napoleonovi trokuti]*** *Nad svakom stranicom danog trokuta ABC konstruirajmo jednakostranični trokut prema vani. Središta O_1, O_2, O_3 tako nastalih trokuta $A'CB$, $B'AC$, $C'BA$ vrhovi su jednakostraničnog trokuta. Konstruiramo li jednakostranične trokute $A''BC$, $B''CA$, $C''AB$ nad stranicama istog trokuta ABC prema unutra, dobivamo na analogan način trokut $N_1N_2N_3$ njihovih središta koji je također jednakostraničan. Razlika površina trokuta $O_1O_2O_3$ i $N_1N_2N_3$ jednaka je površini danog trokuta ABC.*

Trokut $O_1O_2O_3$ nazivamo **vanjski Napoleonov trokut**, a trokut $N_1N_2N_3$ **unutarnji Napoleonov trokut**.



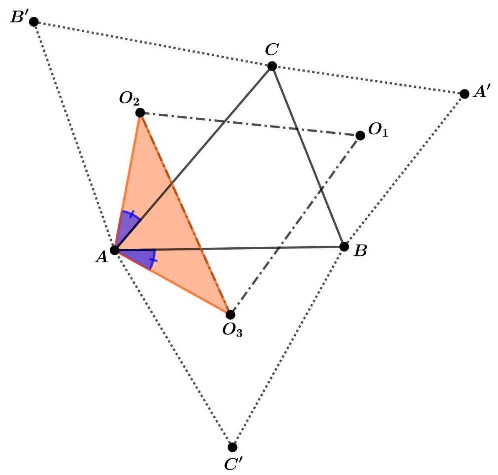
Slika 5.6: Trokut $O_1O_2O_3$ je vanjski Napoleonov trokut.



Slika 5.7: Trokut $N_1N_2N_3$ je unutarnji Napoleonov trokut.

Rješenje: U teoremu (5.2.1) smo već pokazali da je trokut $O_1O_2O_3$ jednakostraničan. Neka su $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$ te $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ i $\angle ACB = \gamma$. Želimo pokazati da vrijedi:

$$P_{\triangle O_1O_2O_3} - P_{\triangle N_1N_2N_3} = P_{\triangle ABC}.$$



Slika 5.8: Trokut O_2AO_3

Promotrimo prvo trokut AO_3O_2. Duljina dužine $\overline{AO_2}$ jednaka je polumjeru kružnice opisane trokutu ACB'. Isto tako, duljina dužine $\overline{AO_3}$ jednaka je polumjeru kružnice opisane trokutu ABC'. Prisjetimo se da je polumjer R trokutu ABC opisane kružnice jednak $R = \frac{abc}{4P}$, pri čemu su a, b, c duljine stranica, a P iznos površine tog trokuta. Promotrimo trokut ACB'. Naime, njegova površina je jednaka $P_{\triangle}ACB' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b^2$. Stoga vrijedi

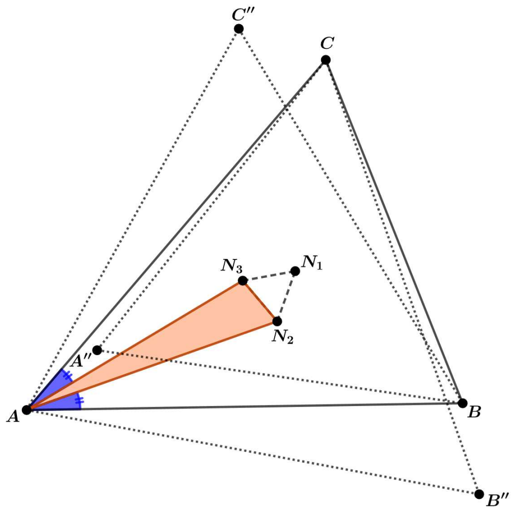
$$|AO_2| = \frac{b^3}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot b^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} b.$$

Na isti način dobivamo da je površina trokuta ABC' jednaka $P_{\triangle}ABC' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2$ pa je

$$|AO_3| = \frac{c^3}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot c^2} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot c} = \frac{\sqrt{3}}{3} c.$$

Primjenom poučka o kosinusu na trokut AO_3O_2 dobivamo:

$$\begin{aligned}
|O_2O_3|^2 &= |AO_3|^2 + |AO_2|^2 - 2 \cdot |AO_3| \cdot |AO_2| \cdot \cos(\angle O_3AO_2) \\
&= (\frac{\sqrt{3}}{3} c)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3} b)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} c \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} b \cdot \cos(\alpha + 60°) \\
&= \frac{1}{3} c^2 + \frac{1}{3} b^2 - \frac{2}{3} bc \cos(\alpha + 60°)
\end{aligned}$$



Slika 5.9: Trokut AN_2N_3

Promotrimo sada trokut AN_2N_3. Uočimo da je $\angle BAN_3 = 30°$ i $\angle N_2AC = 30°$. Prema tome je $\angle N_3AN_2 = \angle BAC - \angle BAN_3 - \angle N_2AC = \alpha - 60°$. Duljna dužine $\overline{AN_2}$ jednaka je polumjeru kružnice opisane trokutu $AB''C$. Isto tako, duljina dužine $\overline{AN_3}$ jednaka je polumjeru kružnice opisane trokutu ABC''. Tako dobivamo da je $|AN_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}b$ i $|AN_3| = \frac{\sqrt{3}}{3}c$. Primjenom poučka o kosinusu na trokut AN_3N_2 dobivamo

$$\begin{aligned}
|N_2N_3|^2 &= |AN_3|^2 + |AN_2|^2 - 2 \cdot |AN_2| \cdot |AN_3| \cdot \cos\angle N_3AN_2\\
&= (\frac{\sqrt{3}}{3}c)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3}b)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}b \cdot \cos(\alpha - 60°)\\
&= \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}bc\cos(\alpha - 60°).
\end{aligned}$$

Primjenjujući adicijske formule za kosinus

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

i

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

te znajući da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljina dviju stranica tog trokuta i sinusa kuta između njih dobivamo da je razlika kvadrata duljina spojnica $\overline{O_2O_3}$ i $\overline{N_2N_3}$ jednaka:

$$\begin{aligned}
|O_2O_3|^2 - |N_2N_3|^2 &= \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}bc\cos(\alpha + 60°) - \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{3}bc\cos(\alpha - 60°)\\
&= -\frac{2}{3}bc\cos(\alpha + 60°) + \frac{2}{3}bc\cos(\alpha - 60°)\\
&= \frac{2}{3}bc[\cos(\alpha - 60°) - \cos(\alpha + 60°)]\\
&= \frac{2}{3}bc[\cos(\alpha)\cos(60°) + \sin(\alpha)\sin(60°) - \cos(\alpha)\cos(60°) + \sin(\alpha)\sin(60°)]\\
&= \frac{2}{3}bc[2\sin(\alpha)\sin(60°)]\\
&= \frac{2}{3}bc\left[2\sin(\alpha)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)\\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot P_{\triangle ABC}.
\end{aligned}$$

Analogno dobivamo razliku kvadrata duljina spojnica $\overline{O_1O_2}$ i $\overline{N_1N_2}$:

$$|O_1O_2|^2 - |N_1N_2|^2 = |O_3O_1|^2 - |N_3N_1|^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot P_{\triangle ABC}. \tag{5.2}$$

S obzirom na to da vrijedi $|O_1O_2| = |O_2O_3| = |O_1O_3|$, dobivamo $|N_1N_2| = |N_2N_3| = |N_1N_3|$. Dakle, trokut $N_1N_2N_3$ je jednakostraničan. Površina jednakostraničnog trokuta $O_1O_2O_3$ jednaka je

$$P_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |O_1O_2|^2,$$

a površina jednakostraničnog trokuta $N_1N_2N_3$ jednaka je

$$P_{\triangle N_1N_2N_3} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |N_1N_2|^2.$$

Stoga iz (5.2) slijedi:

$$\begin{aligned} P_{\triangle O_1O_2O_3} - P_{\triangle N_1N_2N_3} &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |O_1O_2|^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |N_1N_2|^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (|O_1O_2|^2 - |N_1N_2|^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot P_{\triangle ABC} \\ &= P_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Time smo dobili ono što je trebalo pokazati.

Poglavlje 6

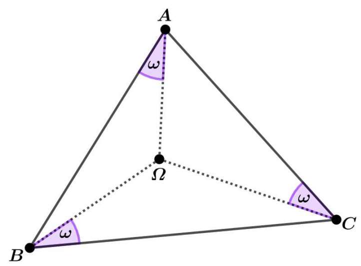
Brocardova točka

U ovom poglavlju još jednom zanimljivom točkom, a to je Brocardova točka. Istraživanje svojstava Brocardove točke i Brocardovog kuta može učenike potaknuti na razvoj viših misaonih procesa. Upravo zato se problemi vezani uz navedene pojmove pojavljuju na međunarodnim matematičkim natjecanjima. Iznijet ćemo definiciju Brocardove točke i Brocardovog kuta trokuta.

Definicija 6.0.1. *Neka je dan trokut ABC. Za točku Ω unutar trokuta ABC takvu da je*

$$\angle BA\Omega = \angle CB\Omega = \angle AC\Omega = \omega$$

kažemo da je ***Brocardova točka*** *trokuta ABC, a za kut ω određen tom točkom kažemo da je* ***Brocardov kut*** *trokuta ABC.*



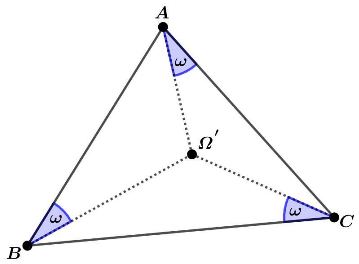
Slika 6.1: Brocardova točka Ω

Brocardova točka Ω dobiva se kao presjek stranice trokuta koje su zarotirane za isti Brocardov kut ω. Spomenut ćemo i drugu Brocardovu točku Ω' koju dobivamo promijenimo li orijentaciju, a drugi naziv za tu točku je negativna Brocardova točka.

Definicija 6.0.2. *Neka je dan trokut ABC. Za točku Ω' unutar trokuta ABC takvu da je*

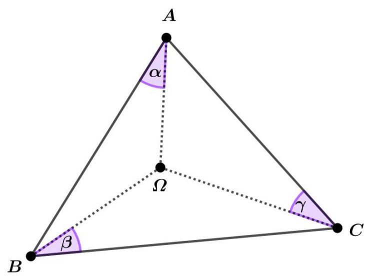
$$\angle\Omega' BA = \angle\Omega' CB = \angle\Omega' AC = \omega$$

kažemo da je druga ili negativna Brocardova točka trokuta ABC.



Slika 6.2: Druga Brocardova točka Ω'

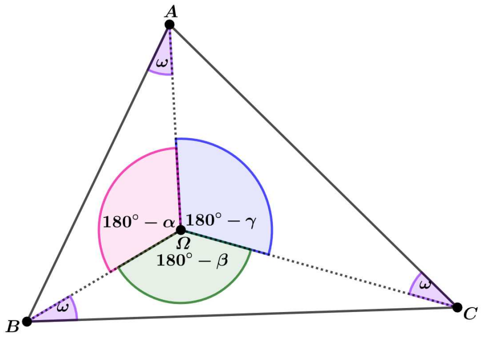
U nastavku ćemo se baviti samo prvom Brocardovom točkom. Stavimo da je točka Ω neka točka unutar trokuta ABC te da spojnice točke Ω i vrhova trokuta A, B, C s odgovarajućim stranicama trokuta zatvaraju kutove α, β, γ. Zanima nas postoji li točka Ω za koju će sva tri kuta α, β, γ biti jednaka.



Slika 6.3: Postoji li točka Ω za koju su kutovi α, β, γ jednaki?

Zanimljivo je da je zadatak u kojem treba odrediti takvu točku 1875. godine postavio i riješio francuski meteorolog i matematičar Henri Brocard, iz tog razloga se točka naziva Brocardovom (iako je prva osoba koja je 1816. godine riješila taj zadatak bio upravo njemački matematičar August Leopold Crelle), a njezino otkriće smatra se najznačajnijim Brocardovim postignućem. Osim bavljenja matematikom, Brocard je veći dio svoga života proveo proučavajući meteorologiju kao časnik francuske mornarice, a na tom području čini se, nije dao značajan doprinos. Naizgled nije sasvim jasno postoji li takva točka u trokutu, stoga ćemo ovo u nastavku razjasniti.

Stavimo stoga da je Brocardova točka Ω trokuta ABC određena i neka su $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.



Slika 6.4: Kutovi pri vrhu Ω

Promotrimo trokut $AB\Omega$. Jasno je da je $\angle \Omega BA = \angle CBA - \angle CB\Omega = \beta - \omega$, stoga je

$$\angle A\Omega B = 180^\circ - \angle BA\Omega - \angle \Omega BA = 180^\circ - \omega - (\beta - \omega) = 180^\circ - \beta.$$

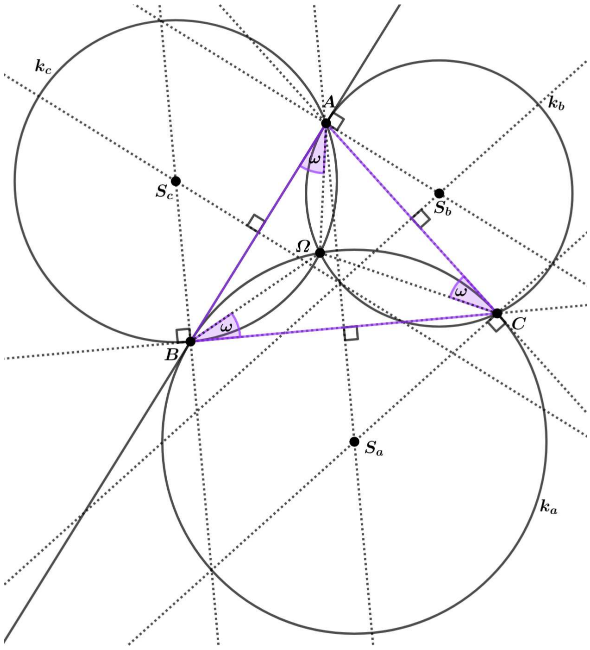
Promotrimo trokut $A\Omega C$. Kako je $\angle \Omega AC = \angle BAC - \angle BA\Omega = \alpha - \omega$ slijedi da je

$$\angle C\Omega A = 180^\circ - \angle AC\Omega - \angle \Omega AC = 180^\circ - \omega - (\alpha - \omega) = 180^\circ - \alpha.$$

Također, za trokut $BC\Omega$ vrijedi $\angle \Omega CB = \angle ACB - \angle AC\Omega = \gamma - \omega$ pa je

$$\angle B\Omega C = 180^\circ - \angle CB\Omega - \angle \Omega CB = 180^\circ - \omega - (\gamma - \omega) = 180^\circ - \gamma.$$

Sada koristeći se dobivenim rezultatima, možemo konstruirati Brocardovu točku Ω. Prije same konstrukcije provedimo analizu.



Slika 6.5: Analiza

U danom trokutu ABC želimo konstruirati točku Ω takvu da je $\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle CA$. Trokutu $AB\Omega$ opišimo kružnicu k_c sa središtem S_c. Vrijedi $\angle BA\Omega = \angle\Omega CA$ pa zaključujemo da je pravac BC tangenta na kružnicu k_c u točki B. Prema tome, središte S_c te kružnice pripada simetrali dužine $\overline{AB}$. Također, točka S_c pripada okomici na pravac BC u točki B. Iz navedenog zaključujemo da je k_c kružnica polumjera $|S_cA|$ sa središtem u točki S_c. Trokutu $BC\Omega$ opišimo kružnicu k_a. Kako vrijedi $\angle\Omega BC = \angle\Omega CA$ na analogan način zaključujemo da je pravac AC tangenta na kružnicu k_a u točki C. Prema tome, središte S_a kružnice k_a pripada simetrali dužine $\overline{BC}$. Također, točka S_a pripada i okomici na pravac AC u točki C. Postupak analogno provodimo i za kružnicu k_b opisanu trokutu $AC\Omega$. Dakle, točka Ω je zajednička kružnicama k_a, k_b i k_c. Time smo pokazali da Brocardova točka postoji u svakom trokutu i ona je jedinstvena.

Provedimo sada korak kostrukcije Brocardove točke danog trokuta ABC.

1. Konstruiramo simetralu s_1 dužine $\overline{AB}$.
2. Konstruiramo pravac p_1 okomit na pravac BC u točki B.
3. Sjeciste pravaca s_1 i p_1 označimo točkom S_c ($s_1 \cap p_1 = S_c$).
4. Konstruiramo kružnicu k_c sa središtem S_c polumjera $|S_cA|$, $k_c = k(S_c, |S_cA|)$.

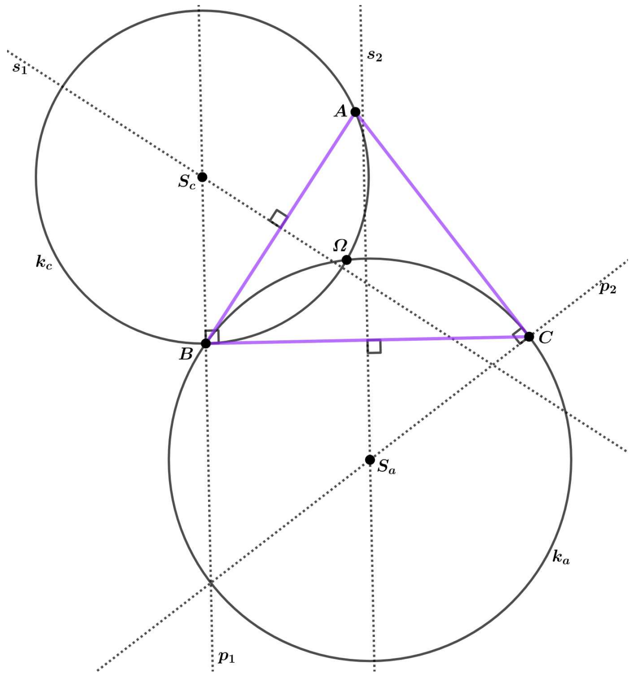
5. Konstruiramo simetralu s_2 dužine $\overline{BC}$.

6. Konstruiramo pravac p_2 okomit na pravac AC u točki C.

7. Sjecište pravaca s_2 i p_2 označimo točkom S_a ($s_2 \cap p_2 = S_a$).

8. Konstruiramo kružnicu k_a sa središtem S_a polumjera $|S_aB|$, $k_a = k(S_a, |S_aB|)$.

9. Sjecište kružnica k_a i k_c označimo točkom Ω ($k_a \cap k_c = \Omega$).



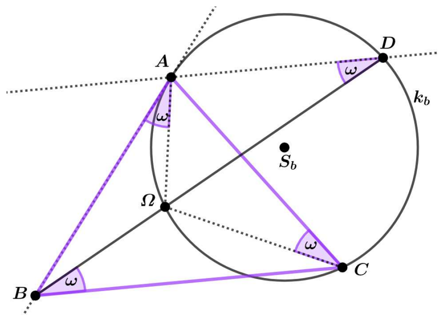
Slika 6.6: Konstrukcija Brocardove točke Ω trokuta ABC

Iz navedenih razmatranja proizlazi teorem 6.0.1.

Teorem 6.0.1. *Neka je dan trokut ABC. Neka je k_a kružnica koja sadrži točku A i dira pravac BC u točki B, k_b kružnica koja sadrži točku B i dira pravac AC u točki C i k_c kružnica koja sadrži točku C i dira pravac AB u točki A. Kružnice k_a, k_b i k_c sijeku se u jednoj točki. Ta točka je upravo Brocardova točka trokuta ABC.*

Dokaz. Prvi korak je konstruirati jednu od tri spomenute kružnice. Konstruirajmo najprije kružnicu k_b. Potom konstruiramo pravac koji prolazi točkom A i paralelan je s pravcem BC, sjecište tog pravca i kružnice k_b označimo točkom D. Tada spojnica $\overline{BD}$ siječe kružnicu k_b u traženoj točki Ω. Stavimo da je $\angle CB\Omega = \omega$. Pravci AD i BC su paralelni, a pravac BD

je transverzala tih paralelnih pravaca. Prema tome je $\angle CB\Omega = \angle AD\Omega = \omega$. Promotrimo li kutove $\angle AD\Omega$ i $\angle AC\Omega$ vidimo da su to obodni kutovi nad kružnim lukom $\overset{\frown}{A\Omega}$ kružnice k_b, stoga je $\angle AD\Omega = \angle AC\Omega = \omega$. Kut $\angle BA\Omega$ je jednak obodnom kutu nad kružnim lukom $\overset{\frown}{\Omega A}$ jer se jedan krak kuta $\angle BA\Omega$ podudara s tetivom $\overline{\Omega A}$ kružnice k_b, a drugi krak tog kuta se podudara s tangentom AB na tu kružnicu. Dakle, $\angle BA\Omega = \omega$. Zaključujemo da je Ω Brocardova točka trokuta ABC. □

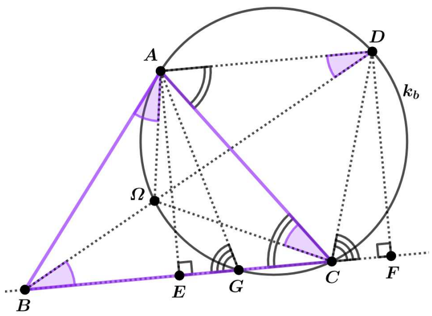


Slika 6.7

U nastavku ćemo iskazati i dokazati jedan zgodan i zanimljiv teorem koji nam govori na koji način možemo pomoću poznatih mjera unutrašnjih kutova danog trokuta izračunati mjeru Brocardovog kuta.

Teorem 6.0.2. *Dan je trokut ABC. Neka su α, β, γ mjere njegovih unutarnjih kutova pri vrhovima A, B, C te neka je ω Brocardov kut tog trokuta. Tada vrijedi:*

$$ctg(\omega) = ctg(\alpha) + ctg(\beta) + ctg(\gamma).$$



Slika 6.8

Dokaz. Neka je k_b kružnica opisana trokutu ΩCA. Pravac koji prolazi točkom A i paralelan je s pravcem BC siječe kružnicu k_b u točki D. Točkom E označimo nožište okomice spuštene iz vrha A na pravac BC, a točkom F nožište okomice iz D na pravac BC. Neka je točka G na pravcu BC takva da je $|CF| = |EG|$. Promotrimo trokute AEG i DFC. Vidimo da vrijedi

$$|AE| = |DF|, \quad \angle GEA = \angle DFC = 90°, \quad |EG| = |CF|$$

pa su trokuti AEG i DFC sukladni po S-K-S poučku o sukladnosti trokuta. Zapisujemo $\triangle AEG \cong \triangle DFC$. Uočimo da su $\angle CAD$ i $\angle ACB$ kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca BC i AD prema tome oni su sukladni. Vrijedi $\angle CAD = \angle ACB = \gamma$. Također su $\angle CB\Omega$ i $\angle AD\Omega$ kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca BC i AD pa je $\angle CB\Omega = \angle AD\Omega$. Kutovi $\angle ADC$ i $\angle C\Omega A$ su obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC}$ kružnice k_b. ΩCDA je tetivni četverokut pa prema poučku o tetivnom četverokutu slijedi $\angle C\Omega A + \angle ADC = 180°$. Budući da $\angle C\Omega A = 180° - \alpha$, slijedi

$$\angle ADC = 180° - \angle C\Omega A = 180° - (180° - \alpha) = \alpha.$$

Uočimo da vrijedi $\angle DCA = 180° - \alpha - \gamma = \beta$. Stoga je $\angle FCD = 180° - \beta - \gamma = \alpha$. Iz sukladnosti trokuta AEG i DFC proizlazi $\angle AGE = \angle FCD = \gamma$.

Prisjetimo se sada trigonometrijskih omjera, preciznije kotangensa šiljastog kuta pravokutnog trokuta. Kotangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine priležeće i nasuprotne katete tom kutu. Uočimo da su trokuti BFD, BEA, CAE i GAE pravokutni. Primjenjujući sukladnost AED i DFC dobivamo:

$$\frac{|BF|}{|DF|} = ctg(\omega),$$

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|BE|}{|DF|} = ctg(\beta),$$

$$\frac{|EC|}{|AE|} = \frac{|EC|}{|DF|} = ctg(\gamma),$$

$$\frac{|EG|}{|AE|} = \frac{|CF|}{|DF|} = ctg(\alpha).$$

Vrijedi da je

$$|BE| + |EC| + |CF| = |BF|,$$

pa dijeljenjem lijeve i desne strane jednakosti s $|DF|$ dobivamo

$$\frac{|BE|}{|DF|} + \frac{|EC|}{|DF|} + \frac{|CF|}{|DF|} = \frac{|BF|}{|DF|}.$$

To jest,

$$ctg(\beta) + ctg(\gamma) + ctg(\alpha) = ctg(\omega)$$

što smo i htjeli pokazati. □

Bibliografija

[1] Zdravko Kurnik. *Oblici matematičkog mišljenja*. Element, Zagreb, 2013.

[2] Ministarstvo znanosti i obrazovanja. *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*. Narodne novine, 2019. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html.

[3] Franka Miriam Brückler. *Povijest matematike*. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2022. https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/skripta2024.pdf.

[4] Maria Gračan. *Konkurentni pravci*. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2017. https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:561220.

[5] Dominik Palman. *Trokut i kružnica*. Element, Zagreb, 1994.

[6] Clark Kimberling. *Encyclopedia of triangle centers*. 2012. https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[7] MathPages. *Napoleon's Theorem*. 2024. https://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm.

[8] John Baker. *Napoleon's Theorem and Beyond*. Spreadsheets in Education (eJSiE), 2005.

[9] David Gale. *Tracking the Automatic Ant: And Other Mathematical Explorations*. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] Linked open terminology resources. *Jacobi's theorem*. 2023. https://skosmos.loterre.fr/PSR/en/page/-D1LDBSDF-L.

[11] Art of Problem Solving. *Orthocenter*. 2024. https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Orthocenter.

[12] Alexander Bogomolny. *A Proof of the Pythagorean Theorem with Orthocenter and Right Isosceles Triangles*. 2018. https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PythagorasOrthocenter.shtml.

[13] Jablonski Simone and Matthias Ludwig. *Teaching and Learning of Geometry—A Literature Review on Current Developments in Theory and Practice*. Goethe University Frankfurt, 2023. https://www.mdpi.com/2227-7102/13/7/682.

[14] Ana Jurasić. *Temeljni pojmovi o trokutu*. 2024. https://www.math.uniri.hr/~ajurasic/trokut.pdf.

[15] Lana Crnobrnja. *Fermat-Torricellijeva točka*. Poučak 96, 2024. https://hrcak.srce.hr/file/456258.

[16] Matej Vojvodić. *Potencija točke i za što se koristi*. Matematička natjecanja, 2024. https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2024/01/Zimska-2023-24-grupa-D-G-Matej-Vojvodic-Potencija_tocke.pdf.

[17] Vittas Kostas. *Jacobi's theorem*. 2007. https://artofproblemsolving.com/community/c6h154396p870445.

[18] Wikipedia. *Jacobi's theorem*. 2024. https://en.wikipedia.org/wiki/Jacobi%27s_theorem_(geometry).

[19] Keti Stepčić. *Lemoineova točka*. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2017. https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:901125.

[20] Ivana Major Šomođi. *Sličnost i homotetija*. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2015. https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:625344.

Sažetak

U ovom radu prikazali smo nekoliko posebnih točaka trokuta. Osim najpoznatije četiri karakteristične točke trokuta, obradili smo još mnoge zanimljive točke kao što su središte kružnice devet točaka, Lemoineova, Fermat-Torricellijeva, Brocardova, prva i druga Napoleonova i Jacobijeva točka te smo proučavali neka njihova svojstva.

Summary

In this thesis, we have described several special points of the triangle. In addition to the most famous four characteristic points of the triangle, we covered many other interesting points such as the center of the circle of nine points, Lemoine's, Fermat-Torricelli's, Brocard's, the first and second Napoleon's and Jacobi's points and we studied some of their properties.

Životopis

Rođena sam 14. rujna 1998. godine u Puli. Osnovnu školu Jože Šurana u Višnjanu završila sam 2013. godine nakon koje upisujem jezičnu gimnaziju u Pazinskom kolegiju u Pazinu. Nakon položene mature, 2017. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, nastavnički smjer matematike te godine 2021. stječem titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Matematike, nastavnički smjer te sam u zimskom semestru pohađala praksu u sklopu studija u Osnovnoj školi Augusta Šenoe i Tehničkoj školi Ruđera Boškovića u Zagrebu. Uz studiranje, radila sam u Photomath-u kao anotator matematičkog sadržaja.