Stohastička teorija polja u kozmologiji

Šostik, Eugen

Master's thesis / Diplomski rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:296055

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Eugen Šostik

STOHASTIČKA TEORIJA POLJA U KOZMOLOGIJI

Diplomski rad

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Eugen Šostik

Diplomski rad

Stohastička teorija polja u kozmologiji

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Zvonimir Vlah

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____
Zagreb, 2025.

Zahvaljujem se svojim roditeljima, baki Ivani i sestri. Bez njih možda nikad ne bih uspio uložiti trud koji je bio potreban da postanem fizičar.
Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Zvonimiru Vlahu na poučavanju i korisnim savjetima, razumijevanju, dostupnosti i kontroliranju mog napretka, na uvažavanju mojih prijedloga i mišljenja te na ustupanju ove zanimljive teme.
Hvala Vam!

Sažetak

Prezentiraju se dvije alternativne matematičke metode za izračunavanje statističkih svojstava raspodjele tvari u svemiru iz evolucijskih jednadžbi za tvar. ”Evolucijskim jednadžbama” se nazivaju prva dva tzv. momenta Vlasovljeve jednadžbe. Kao u već postojećoj metodi, u ovima se primjenjuje matematička teorija stohastičkih (slučajnih) polja, koja spada pod teoriju vjerojatnosti, ali cilj je izbjeći uobičajeni oslonac na postupak rješavanja evolucijskih jednadžbi s pomoću računa smetnje na njima. Umjesto toga, ovdje se kao centralni matematički alat koristi integriranje po skupovima funkcija koje bi mogle opisati početne raspodjele tvari - nepoznanice koje predstavljaju značajnu prepreku u teorijskim istraživanjima u suvremenoj kozmologiji i jedan su od razloga za statistički pristup. Pritom se identificira prikladna verzija računa smetnje na spomenutim integralima. ”Lajtmotiv” ovog rada je nastojanje prema postizanju pristojne razine matematičke strogosti u prezentaciji, budući da je u referentnoj literaturi za fiziku primijećena svojevrsna nonšalantnost u tom aspektu koja se manifestira na nimalo trivijalnim matematičkim idejama i objektima ključnim u ovoj temi. U najnižem redu računa smetnje, prezentiranim metodama su generirani rezultati u suglasju s literaturnim, no u višim redovima je uspjeh izostao. Motiv za razvoj alternativnih metoda je primarno ubrzavanje strojnih numeričkih izračuna u kozmologiji, ali smatra se da istražene matematičke ideje mogu biti korisne u drugim teorijama i disciplinama u fizici.

Ključne riječi: kozmologija, ΛCDM, pod-horizontne prostorne skale, kozmičke strukture velikih skala, raspodjela tvari u svemiru, statistička svojstva raspodjele tvari, evolucijske jednadžbe za tvar, račun smetnje, stohastički procesi, stohastička polja, funkcionalni integrali, *path* integrali, integracija po skupovima funkcija, Wienerova Gausijanska mjera.

Stochastic Field Theory in Cosmology

Abstract

Two alternative mathematical methods are presented for calculating the statistical properties of the distribution of matter in the Universe from the evolutionary equations for matter. The first two so-called moments of the Vlasov equation are called ”evolutionary equations”. As in the already existing method, these apply the mathematical theory of stochastic (random) fields, which falls under the theory of probability, but the goal is to avoid the usual reliance on the procedure for solving evolutionary equations using the calculus of perturbations on them. Instead, the central mathematical tool used here is integration over sets of functions that could describe the initial distributions of matter - unknowns that represent a significant obstacle in theoretical research in contemporary cosmology and so one of the reasons for the statistical approach. In doing so, a suitable version of the perturbation calculus on the aforementioned integrals is identified. The ”leitmotif” of this thesis is the effort to achieve a decent level of mathematical rigor in the presentation, since a certain nonchalance in this aspect has been observed in the reference literature for physics and it manifests on not at all trivial mathematical ideas and objects key to this topic. In the lowest order of perturbation calculus, the presented methods generated results in agreement with those in the literature, but in the higher orders there was no success. The motive for developing alternative methods is primarily to speed up machine numerical calculations in cosmology, but it is believed that the mathematical ideas explored can be useful in other theories and disciplines in physics.

Keywords: cosmology, ΛCDM, sub-horizon spatial scales, large-scale cosmic structures, distribution of matter in the Universe, statistical properties of matter distribution, evolution equations for matter, perturbation theory, stochastic processes, stochastic fields, functional integrals, path integrals, integration on a set of functions, Wiener Gaussian measure.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Evolucijske jednadžbe za tvar i uvjeti u kojima vrijede **4**

3 Opis evolucije raspodjele tvari u najnižem redu računa smetnje **11**

3.1 Statistička svojstva raspodjele tvari u najnižem redu računa smetnje - metoda 1 13

3.2 Izvorni članovi 16

4 Statistička svojstva raspodjele tvari u najnižem redu računa smetnje - metoda 2 **21**

4.1 Varijacija metode 2 i popratna kontradikcija 28

5 Prijedlog strože primjene teorije stohastičkih polja **34**

5.1 Kritika metode 2 34

5.2 Fourier-transformirane evolucijske jednadžbe 35

5.3 Definicije, pretpostavke i tvrdnje 37

6 Statistička svojstva raspodjele tvari - metoda 3 **44**

6.1 Najniži red računa smetnje 51

6.2 Prvi viši red računa smetnje 55

7 Zaključak **59**

Literatura **62**

1 Uvod

U ovom radu, istražene su dvije alternativne matematičke metode za izračun statističkih svojstva raspodjele tvari u ΛCDM modelu svemira. U nastavku ih se zove "metoda 2" i "metoda 3". Rezultati koji trebaju biti dobiveni su već poznati u literaturi pa doprinos ovog poduhvata leži uglavnom u načinu dolaska do ispravnih rezultata, ali nije isključena mogućnost da drugačiji pristup rezultira novim uvidima s fizikalnom interpretacijom u nekom eventualnom daljnjem istraživanju. Naziv "metoda 1", pridaje se metodi koja je već opisana u literaturi. Za potrebe kozmoloških istraživanja, izvodimo numeričke izračune uz pomoć računala i statistička svojstva su nezaobilazan sastojak, no metoda 1 unosi neke komplikacije u cijelu proceduru. O tome se ovdje ne piše, ali to je svakako bila znanstvena motivacija za razmatranje alternativnih načina razmišljanja.

Komentar 1.1 U kozmologiji, pojmom "tvar" uglavnom obuhvaćamo dovoljno stabilne vrste čestica s masom, a koje u prirodi najčešće ne opažamo u ultra-relativističkom stanju gibanja ili opravdano vjerujemo da ih nebi opazili takve. Tu se ubrajaju elektroni, nukleoni, njihova vezana stanja te tamna tvar, kojoj je identitet zasad nepoznat. Sve nabrojane vrste osim tamne tvari zovemo zajedničkim imenom *barionska tvar*[*]. Neutrini su često relevantni kao ultra-relativističke čestice pa njih tada ubrajamo u "zračenje". Ostale masivne čestice su rijetko bitne u kozmološkim kontekstima, stoga ih praktično izostavljamo iz analiza, one su relevantnije u fizici elementarnih čestica, no slično tretiramo i većinu barionske tvari jer postaje bitna tek u temama iz drugih fizikalnih disciplina poput astrofizike. U sljedećih nekoliko odlomaka se pojam "tvar" koristi u ovom smislu, no potom se taj pojam redefinira radi jednostavnosti izrijeka u daljnjem tekstu.

Statistički opis je prirodan odabir kada ne možemo znati neke informacije o fenomenu od interesa, a raspodjele nekih vrsta čestica u svemiru svakako jesu takvi fenomeni. Najveća nepoznanica u kontekstu ovog rada su početne raspodjele tvari. Znamo izračunati kako raspodjele evoluiraju, ali ne znamo sa sigurnošću iz čega evoluiraju. Stoga, tražimo najvjerojatnija svojstva raspodjela tvari s obzirom na sve moguće početne raspodjele i fizikalno ih tumačimo. Ovo je razlog zašto se za potrebe statističke analize u ovom radu primjenjuje matematička teorija stohastičkih

[*]Čak i elektrone, iako spadaju u leptone. To je poznata konvencija u kozmologiji.

polja*. Vjerojatnosna mjera za razne početne raspodjele smatra se nasljeđenom od određenih kvantnih fluktuacijskih fenomena tijekom inflacije svemira.

Za kraj uvoda, još se navode primjeri znanstvenih istraživanja u kozmologiji s kojima se otkriva šira slika u koju se ovaj rad uklapa.

Komentar 1.2 U kozmologiji često koristimo izraz *prostorna skala* u istom značenju kao pojmove ”prostorna duljina” i ”prostorna udaljenost”. Taj običaj se poštuje u nastavku teksta.

Komentar 1.3 U raspodjelama tvari u svemiru, područja koja izgledom odstupaju od neke svoje okoline zovemo (kozmičke) strukture. Na primjer, galaksije su strukture, skup galaksija može tvoriti strukturu, a i planeti se mogu smatrati strukturama.

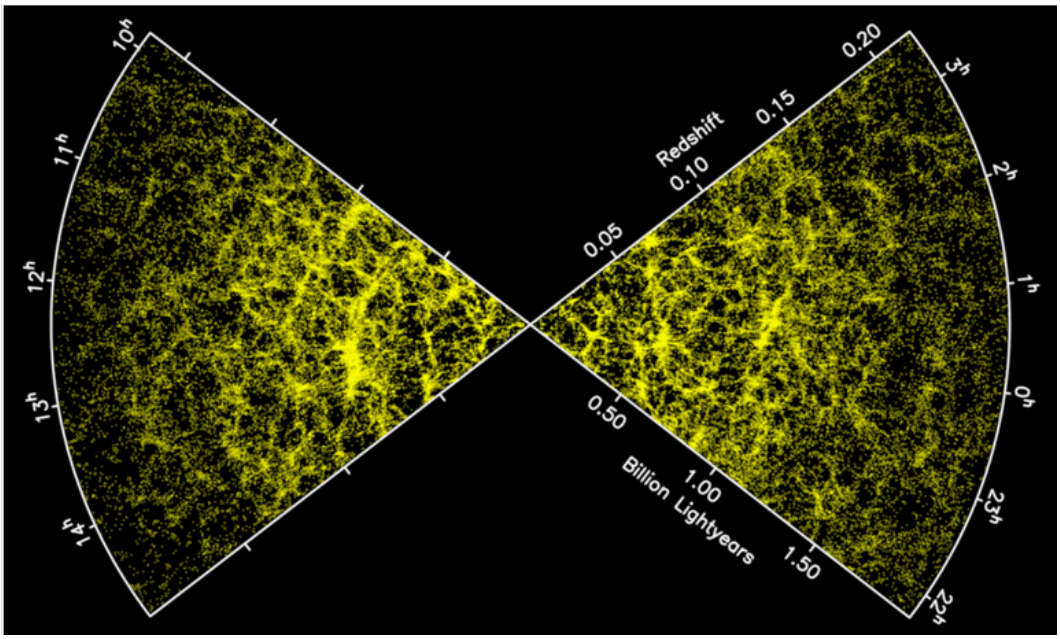
Malim skalama zovemo prostorne skale manje od mutne granice između 5-10 Mpc/h, a preostale *velikim skalama*. Neko vrijeme smo na temelju dostupnih opažanja smatrali da su galaksije jednoliko raspodjeljene na velikim skalama. Izumom metoda prikupljanja trodimenzionalnih *pregleda galaksija* spoznali smo da to nije tako [4]. Kozmičke strukture su opažene na većim prostornim skalama, od nekoliko desetaka pa sve do oko tisuću megaparseka. Takve strukture nazivamo *strukture velikih skala*. Postoji li ipak *skala homogenosti* raspodjele galaksija? To nije dokazano, ali postojanje se smatra plauzibilnom posljedicom sljedećih argumenata:
a) Empirijski podaci iz ispitivanja anizotropije kozmičke mikrovalne pozadine ukazuju da je raspodjela tvari u nekom razdoblju nakon inflacije bila jednolika iznad određene prostorne skale [3], odnosno postojala je skala homogenosti, manja nego eventualna suvremena za galaksije;
b) Smatramo da su strukture nastale evolucijom primordijalnih poremećaja u jednolikoj raspodjeli tvari u svemiru [3]. Uglavnom zbog utjecaja gravitacije su ti poremećaji uznapredovali kroz milijarde godina u strukture koje opažamo danas, a kroz cijeli tijek procesa, gravitaciji su se suprotstavljali fenomeni širenja svemira i barionskog tlaka [3]. Nastanak primordijalnih poremećaja smo protumačili teorijom inflacije svemira, koja trenutno ima status hipoteze, ali plauzibilne jer su neka od pripadnih predviđanja empirijski potvrđena [3]. Jedno od potvrđenih je postojanje primordijalnih fluktuacija zakrivljenosti prostorvremena [6]. Po teoriji, tvar je slijedila fluktuacije zakrivljenosti i upravo tako su nastali početni uvjeti za evoluciju

**Slučajni proces* je isto što i *stohastički proces*, a stohastička polja su specijalna vrsta procesa.

struktura [6];

c) Sudeći po opažanjima i teoriji, raspodjela (nerelativističke) tvari u svemiru evoluira *hijerarhijski* - od manjih prostornih skala prema većima [3]. Dakle, najprije se formiraju strukture manjih skala, potom se one organiziraju u strukture većih skala itd.

Jedna od alternativa ideji postojanja skale homogenosti je fraktalna raspodjela tvari u svemiru [4].



Slika 1.1: *2dF* pregled galaksija i njihovih crvenih pomaka (eng. *redshift*), prezentiran kao raspodjela žutih točaka od kojih svaka predstavlja jednu galaksiju u dijelu određene ravnine oko Mliječne staze koja je predstavljena centrom slike. Razmak od krajnjeg lijevog do desnog dijela slike u stvarnosti predstavlja udaljenost od oko četiri milijarde svjetlosnih godina, odnosno otprilike 1226 Mpc. Stoga, radi se o prikazu raspodjele tvari na velikim skalama. Mogu se primijetiti razne strukture. Pregled je napravio *Australian Astronomical Observatory*, a slika je preuzeta s internetske stranice https://www.roe.ac.uk od *The Royal Observatory, Edinburgh*.

2 Evolucijske jednadžbe za tvar i uvjeti u kojima vrijede

Ukratko se izlaže kozmološka teorija o svemiru koja se podrazumjeva u ovom radu. Kao prvo, uzima se da je postanak svemira opisan teorijom Velikog praska. Potom, svojstva svemira odgovaraju ΛCDM modelu. Ovaj odabir je suvremeno najplauzibilniji empirijski. Slijedno tome, prema poznatom mjerenju *Planck 2018*, svemir već postoji 13.787 ± 0.020 milijardi godina. Neke njegove karakteristike se znatno razlikuju u različitim razdobljima pa je poželjno ograničiti se na neko određeno razdoblje, a potom je moguće identificirati relevantne vrste čestica tvari.

Definicija 2.1 Razdoblje nakon nastanka kozmičkog mikrovalnog zračenja u približno 380000. godini svemira pa nadalje, naziva se *kasni stadij evolucije svemira*.

U ovom radu se odabire promatrati isključivo kasni stadij. dodatno ga još možemo okarakterizirati kao razdoblje koje počinje tijekom epohe dominacije tvari dok je rekombinacija elektrona s protonima i nuklidima već u punom zamahu pa postoje i nastaju neutralni atomi ili razdoblje kada barionska tvar evoluira u strukture [3]. Ove dodatne karakterizacije ukazuju na razloge zašto se promatra baš kasni stadij.

U kasnom stadiju već postoje atomi, ali to su uglavnom oni helija i vodika*. Prvih nekoliko milijardi godina kasnog stadija, atomi su najkompleksnija vezana stanja čestica u Svemiru. Molekule se pojavljuju tek na planetoidnim strukturama tvari koje su ionako zanemarivih dimenzija u odnosu na prostorne skale koje se ovdje razmatraju i u tom kontekstu se mogu smatrati nebitnim, prefinim detaljima. Zanemaruju se i bilo koja kompliciranija vezana stanja čestica. Nadalje, atomi teži od helijevih formiraju se uglavnom u zvijezdama i događajima poput supernova. Dakle, tijekom znatnog dijela kasnog stadija takvi atomi ne postoje, a jednom kada nastanu su također lokalizirani na područjima puno manjim od prostornih skala na koje se cilja u ovoj analizi. U Mliječnoj stazi je udio vodikovih i helijevih atoma i suvremeno znatno veći nego udio bilo koje druge vrste atoma. Argumente ovog paragrafa se sumira u prvo pojednostavnjenje.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.1 Jedina vezana stanja elektrona i nukleona koja se

*Zanimljivost je da se u epohi rekombinacije lakše formiraju helijevi nego vodikovi atomi.

ne zanemaruju su atomi vodika i helija te njihovi nuklidi (uključujući sve realno ostvarive izotope).

Iako su neutrini u kozmologiji relevantni kao zračenje (Komentar 1.1), svojom masom utječu na proces formacije struktura tvari. Ovdje se to ipak zanemaruje jer bi netrivijalno zakompliciralo izračune. Što se tiče interakcija neutrina s česticama tvari, njihova stopa je davno prije kasnog stadija postala zanemariva u ovom kontekstu*.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.2 Zanemaruje se utjecaj neutrina na evoluciju raspodjele tvari u svemiru.

Do ovuda je argumentirano izbačen iz analize dio tvari i u nastavku se referira samo na relevantne vrste čestica. Zato se redefinira pojam "(barionska) tvar" kako bi rečenično izražavanje bilo jednostavnije.

Definicija 2.2 U nastavku ovog rada, skup sljedećih vrsta čestica se naziva *barionska tvar*: elektroni, nukleoni, vodikovi i helijevi atomi te njihovi nuklidi, uključujući sve realno ostvarive izotope.
Skup vrsta čestica barionske i tamne tvari zove se *tvar*.

Potom se postavljaju granice na prostorne skale. Gornja granica je određena horizontom.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.3 Razmatranja se ograničavaju na pod-horizontne prostorne skale.

Donjoj granici su razlog teškoće s elektromagnetskom interakcijom. Razni efekti elektromagnetske interakcije imaju bitnu ulogu samo u formaciji manjih struktura poput planeta, zvijezda i galaksija. Budući da bi uračunavanje tih efekata znatno otežalo matematički opis, radije se odabire djelomično ignorirati elektromagnetsku interakciju, ali to znači nemogućnost opisa spomenutih manjih struktura. U narednim razmatranjima se implicitno i djelomično uračunava Coulombska interakcija tako što se raspodjele različitih vrsta čestica barionske tvari izjednačuju - ta jednakost je moguća jedino ako su te čestice snažno vezane, a to upravo omogućava Coulombska interakcija. Kompletniji način uračunavanja bi bio razmatranje svake vrste čestica posebno

*Zato se neutrine teško detektira.

i uvođenje stopa raspršenja Coulombskom interakcijom. Tako bi se opisali efekti koji imaju bitnu ulogu u formiranju struktura malih skala.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.4 Zanemaruju se sve interakcije između čestica barionske tvari osim gravitacije i djelomično elektromagnetske interakcije. Jedini efekt elektromagnetske interakcije koji se uzima u obzir je približno izjednačavanje raspodjela različitih vrsta čestica barionske tvari.

U nastavku su pobrojana ostala pojednostavnjenja koja čine temelj za evolucijske jednadžbe tvari s kojima se operira u ostatku rada. *Ispod* pojednostavnjenja koja nisu očita, argumentirano je njihovo uvođenje.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.5 Zanemaruje se utjecaj fotona na evoluciju raspodjele tvari u svemiru.

U kasnom stadiju, stopa interakcije fotona i tvari je puno manja nego prije, zato se tada i događa rekombinacija.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.6 Zanemaruje se razlika početnih uvjeta barionske i tamne tvari te se uzima da njihove početne raspodjele zadovoljavaju jednadžbe linearne teorije.

Dok je barionska tvar vezana s fotonima Comptonovom interakcijom, ona ostaje u gotovo glatkoj raspodjeli, no istovremeno tamna tvar već formira strukture jer ona postaje inertna puno prije. Padom temperature ispod 1 eV, stopa Comptonove interakcije počinje naglo opadati, a barionska tvar postaje slobodna započeti evoluirati u strukture. U kasnom stadiju, barionska tvar već evoluira i raspodjela joj zadovoljava jednadžbe linearne teorije, međutim, tamna tvar više ne zadovoljava te jednadžbe. Ipak, barionska tvar pada pod gravitacijski utjecaj struktura tamne tvari i počinje ju sljediti te razlika s vremenom nestaje. Time se oporavdava gornje pojednstavnjenje.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.7 Zanemaruje se mogućnost relativističkog stanja gibanja čestica tvari.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.8 Koristi se režim slabe gravitacije, tj. zanemaruju se sve vrijednosti reda veličine manjeg od prvih potencija gravitacijskih potencijala u odgovarajućem bezdimenzionalnom obliku.

Fizikalna pojednostavnjenja 2.3 i 2.8 rezultiraju Newtonovskom gravitacijom.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.9 Zanemaruje se mogućnost degeneracije kvantnih stanja čestica tvari.

Sva pojednostavnjenja do ovuda omogućuju matematički opis tvari *Vlasovljevom jednadžbom*.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.10 Zanemaruje se prostorna ovisnost gustoće energije tvari.

Ovo pojednostavnjenje nije baš dobro. U literaturi se često u ovom kontekstu piše o ”tlaku tvari” umjesto o gustoći energije zbog jednakosti mjernih jedinica ovih dviju mjernih veličina, no tlak je prirodno povezati s nekom površinom na kojoj se on mjeri, a takve površine u kozmološkom kontekstu nema pa se ovdje odabire upotrebljavati pojam gustoće energije.

Fizikalno pojednostavnjenje 2.11 Zanemaruje se vrtložnost tvari.

Ovo pojednostavnjenje je moguće zbog nekih od prethodnih, posebice onih s kojima je cijelo razmatranje ograničeno na pod-horizontne prostorne skale na kojima Coulombska interakcija nema preznačajnu ulogu. Na tim skalama se vrtložnost tvari ne ističe. Matematički rečeno, s nekim pojednostavnjenjima je uklonjen mehanizam u matematičkom opisu koji bi generirao ili održavao vrtložnosti tvari, što znači da čak ako vrtložnost postoji u početnim uvjetima, ona trne. Ovo pojednostavnjenje bi bilo loše za galaksije, koje rotiraju, no već je istaknuto da one kao pojedinačne strukture ispadaju iz intervala skala koje se razmatraju ovom analizom.

Sljedeći uobičajenu metodu u kozmologiji, prostornu raspodjelu tvari u svemiru matematički se opisuje s pomoću koncepta gustoće mase. Upotreba gustoća je pogodna u slučajevima kada je broj objekata od interesa prevelik da bi analizirali jednog po jednog. Gustoće definiramo s obzirom na jedan proizvoljno odabran prostorni volumen koji karakteriziramo geometrijskim oblikom i nekom prostornom skalom. Iznos gustoće nekog fizikalnog fenomena općenito ovisi o izboru tog volumena, a prvi kriterij za odabir pripadne mu prostorne skale je da na njoj ne zamjećujemo čestičnu građu tvari, već da tvar izgleda neprekidno. Međutim, Fizikalna pojednostavnjenja 2.3 i 2.4 dodatno ograničavaju odabir te prostorne skale. Kada je od posebnog interesa aspekt struktura u raspodjelama tvari, onda ne operiramo direktno s

gustoćama raspodjela već uvodimo funkciju naziva "poremećaj gustoće tvari". Njene vrijednosti predstavljaju bezdimenzionalnu mjernu veličinu odstupanja gustoće mase tvari u točkama prostorvremena od prosječne gustoće u svemiru i kao takva je prikladna za karakterizaciju "strukturiranosti" raspodjele tvari na nekom položaju.

Notacija 2.1 Za svaki $n \in \mathbb{N}$, Borelovu σ-algebru na skupu $\mathbb{R}^n$ se označava s $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Oznaka λ_n se rezervira za Lebesgueovu mjeru na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Definicija 2.3 Neka R označava raspodjelu nekih istovrsnih čestica tvari u Svemiru, $\rho : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je gustoća od R, za dani interval realnih brojeva I. Za svaki $t \in I$ i neki $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$, funkciju $\overline{\rho}_\Omega \colon I \to \mathbb{R}$, s pravilom

$$\overline{\rho}_\Omega(t) := \frac{1}{\lambda_3(\Omega)} \int_\Omega \rho(t, \boldsymbol{x})\, d\lambda_3(\boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

nazivamo *prosječna gustoća od* R ako i samo ako:
a) Integral postoji;
b) $\overline{\rho}_\Omega(t) > 0$, za svaki $t \in I$ i;
c) $(\Omega_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) : \lambda_3(\Omega_1) > \lambda_3(\Omega)) \implies (\overline{\rho}_{\Omega_1}(t) = \overline{\rho}_\Omega(t),\ \forall t \in I)$.
Tada označavamo $\overline{\rho} \equiv \overline{\rho}_\Omega$.

Definicija 2.4 Neka R označava raspodjelu nekih istovrsnih čestica tvari u svemiru, a $\rho : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je gustoća od R, pri čemu je I neki interval realnih brojeva. Funkciju $\delta_R : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, s pravilom

$$\delta_R(t, \boldsymbol{x}) := \frac{\rho(t, \boldsymbol{x}) - \overline{\rho}(t)}{\overline{\rho}(t)},\ \forall t \in I,\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{2.2}$$

zovemo *poremećaj gustoće od* R.

Zanima nas i matematički opis stanja gibanja raspodjela čestica tvari. Zato uvodimo funkciju "divergencija brzine tvari", čije vrijednosti predstavljaju iznos mjerne veličine divergentnog gibanja tvari iz točaka prostora u određenom trenutku. Divergencija brzine je dovoljna za opis gibanja tvari zbog Fizikalnog pojednostavnjenja 2.11.

Komentar 2.1 Pojam "brzina" u nazivu "divergencija brzine raspodjele" ne odnosi se na brzinu definiranu kao stopa promjene položaja s obzirom na tijek vremena, dakle

”standardna” definicija, nego na tangentno preslikavanje na prostorvremenu, neka je označeno s $\boldsymbol{u}$, koje u odnosu na gustoću vjerojatnosti u Boltzmannovom faznom prostoru daje ista očekivanja za brzine kao i standardna definicija, stoga $\boldsymbol{u}$ nije pridjeljen samo jednoj čestici već cijeloj raspodjeli istovrsnih čestica, a tangentni vektor $\boldsymbol{u}(\cdot)$, u odabranoj točki prostorvremena, tumačimo kao vektor brzine bilo koje čestice koja se nalazi u toj točki. Ovaj komentar se ostavlja kao jedino objašnjenje objekta označenog s $\boldsymbol{u}$, a koji se u nastavku zove *brzina raspodjele*. Razlog je sljedeći, eksplicitno definiranje zahtjeva uvođenje Boltzmannovog faznog prostora, pojma tangentnog preslikavanja i sl., no ti koncepti nisu korisni u ostatku rada i samo bi zakomplicirali izlaganje.

Definicija 2.5 Neka R označava raspodjelu nekih istovrsnih čestica tvari, a $\mathbf{u}_R : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ neka je brzina od R, gdje je I neki interval realnih brojeva. Funkciju $\theta_R : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, s pravilom

$$\theta_R(t, \boldsymbol{x}) := \nabla \cdot \boldsymbol{u}_R(t, \boldsymbol{x}),\ \forall (t, \boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3, \tag{2.3}$$

zovemo *divergencija brzine od* R.

Zbog Fizikalnih pojednostavnjenja 2.4 i 2.6, raspodjele svih vrsta čestica tvari imaju jednak poremećaj gustoće. Označava se s δ_m i zovemo ga *poremećaj gustoće tvari*. Jednako vrijedi i za divergenciju brzine raspodjela svih vrsta čestica tvari, koju se označava s θ_m i nazivamo ju *divergencija brzine tvari*.

Notacija 2.2 U nastavku, varijable funkcija će biti numerirane redom s lijeva počevši s nulom, tako da, na primjer, ”nulta varijabla” funkcija δ_m i θ_m je ona koja predstavlja vremenski trenutak, a isto tako ∂_0 označava parcijalnu derivaciju po nultoj varijabli.

Konačno se mogu napisati evolucijske jednadžbe za tvar, a da je pritom jasno što znače i pod kojim premisama vrijede. Koristi se sustav mjernih jedinica u kojem se brzina svjetlosti, Planckova konstanta i Boltzmannova konstanta upotrebljavaju kao mjerne jedinice. Funkcije δ_m i θ_m zadovoljavaju sljedeći sustav dvaju nelinearnih integro-diferencijalnih jednadžbi, za neki zadani interval $I \subset \mathbb{R}$:

$$
\begin{cases}
\partial_0 \delta_m(\eta, \boldsymbol{x}) + \theta_m(\eta, \boldsymbol{x}) + \nabla \cdot (\delta_m \boldsymbol{u}_m)(\eta, \boldsymbol{x}) = 0, \quad \text{(jednadžba kontinuiteta)} \\
\frac{3}{2}\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2 \delta_m(\eta, \boldsymbol{x}) + \partial_0 \theta_m(\eta, \boldsymbol{x}) + (aH)(\eta)\, \theta_m(\eta, \boldsymbol{x}) \\
+ \nabla \cdot (\boldsymbol{u}_m \nabla) \boldsymbol{u}_m(\eta, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad \text{(Euler-Poissonova jednadžba)}
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

za svaku točku $(\eta, \boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3$, pri čemu je brzina tvari

$$
\boldsymbol{u}_m(\eta, \boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \theta_m(\eta, \boldsymbol{x}_1) \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1|^3}\, d\lambda_3(\boldsymbol{x}_1),
\tag{2.5}
$$

a početni i rubni uvjeti su oblika

$$
\begin{cases}
\delta_m(\eta_i, \boldsymbol{x}) = \delta_{m,i}(\boldsymbol{x}), \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \\
\theta_m(\eta_i, \boldsymbol{x}) = -\frac{D_+'(\eta_i)}{D_+(\eta_i)} \delta_{m,i}(\boldsymbol{x}), \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \\
\lim\limits_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \delta_m(\eta, \boldsymbol{x}) = 0, \ \forall \eta \in I, \\
\theta_m \text{ barem klase } o\left(|\boldsymbol{x}|^{-(2+\lambda)}\right), \ \lambda > 0, \text{ kada } |\boldsymbol{x}| \to \infty \text{ na } \mathbb{R}^3.
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

Tu se pojavljuju neki novi objekti i koncepti:

- Prevenstveno valja napomenuti da se koristi *sugibajući horizont*, "η", kao mjera vremena jer on sam monotono raste tijekom vremena i to je standardna praksa u kozmologiji;
- η_i je horizont u proizvoljnom početnom trenutku, dakle nekad u kasnom stadiju;
- a je *skalni faktor* kao funkcija horizonta;
- H je *Hubbleova stopa* također kao funkcija horizonta;
- Ω_m je *parametar gustoće tvari* kao funkcija horizonta;
- Funkciju D_+ zovemo *faktor rasta* i o njoj se piše u poglavlju 3;
- Funkcija $\delta_{m,i}$ je *početni poremećaj gustoće tvari*, međutim, mi ne znamo njen oblik i praktično nismo u mogućnosti riješiti ovaj sustav jednadžbi. Zato se poseže za statističkom analizom i to na način da uzimamo u obzir sve moguće oblike $\delta_{m,i}$.

Negdje u nastavku su korisni simboli H_0, Hubblova "konstanta" u sadašnjosti, i $\Omega_{m,0}$, sadašnji parametar gustoće.

Nazivlje 2.1 Jednadžbe (2.4) se nadalje nazivaju *evolucijske jednadžbe*.

3 Opis evolucije raspodjele tvari u najnižem redu računa smetnje

Pregled najnižeg reda računa smetnje izvršenog na evolucijskim jednadžbama dobro je pokriven u referentnoj literaturi, no ovdje je ipak također izložen zbog potrebe za motivacijom jedne matematičke finese. Tom finesom je omogućen izračun statističkih svojstava raspodjele tvari alternativnim metodama koje se prezentiraju u ostatku ovog rada.

Zbog hijerarhijske evolucije raspodjele tvari s obzirom na prostorne skale, u okviru ΛCDM modela, zaključujemo da uvijek možemo odabrati prostornu skalu tako da u željenom početnom trenutku (η_i), za početni poremećaj gustoće tvari vrijedi $|\delta_{m,i}(\boldsymbol{x})| < 1$ u svakoj točki $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Tada mogu postojati dva niza funkcija, $(\delta_{(n)} \colon I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ i $(\boldsymbol{u}_{(n)} \mid n \in \mathbb{N})$*, takvi da za svaki** $\eta \in [\eta_i, \eta_s] \subseteq I$ i svaki $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, uz početne i rubne uvjete (2.6), vrijedi

$$\delta_{(n)}(\eta, \boldsymbol{x}) \sim \delta_{m,i}(\boldsymbol{x})^n, \quad \boldsymbol{u}_{(n)}(\eta, \boldsymbol{x}) \sim \delta_{m,i}(\boldsymbol{x})^n, \tag{3.1}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$ i

$$\delta_m(\eta, \boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{(n)}(\eta, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{u}_m(\eta, \boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}_{(n)}(\eta, \boldsymbol{x}). \tag{3.2}$$

Račun smetnje na evolucijskim jednadžbama znači da umjesto traženja funkcija δ_m i θ_m, pokušavamo postepeno odrediti nekoliko članova spomenutih nizova, koji onda čine aproksimativno rješenje evolucijskih jednadžbi.

Najniži red računa smetnje je određen sa sustavom dvije linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{cases} \partial_0 \delta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) + \theta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) = 0, \\ \dfrac{3}{2}\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2 \delta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) + \partial_0 \theta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) + (aH)(\eta)\, \theta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Pritom vrijedi $\theta_{(n)} := \nabla \cdot \boldsymbol{u}_{(n)}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Ako usporedimo evolucijske jednadžbe

*Namjerno su ispuštene domena i kodomena. Vidjeti Komentar 2.1.

**η_s je neka hipotetska vrijednost argumenta iz I koja kad se prijeđe, opisani nizovi funkcija više nemaju svojstvo (3.2). Nadalje se pretpostavlja da je $I = [\eta_i, \eta_s]$.

s jednadžbama (3.3), možemo uočiti da potonjima nedostaju nelinearni članovi s istaknutim parcijalnim derivacijama po prostornim argumentima. Prema tome, $\delta_{(1)}$ i $\theta_{(1)}$ doprinose samo opisu linearnih kozmičkih struktura tvari. U kasnom stadiju, takve strukture možemo opaziti na dovoljno velikim pod-horizontnim prostornim skalama i u tom slučaju su $\delta_{(1)}$ i $\theta_{(1)}$ dobre aproksimacije koje se koriste u tzv. *linearnoj teoriji* formacije kozmičkih struktura.

Prema [1], općenito rješenje sustava jednadžbi (3.3) je

$$\delta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) = C_+(\boldsymbol{x})D_+(\eta) + C_-(\boldsymbol{x})\frac{H(\eta)}{H_0}, \quad \theta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) = -\partial_0\delta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}). \tag{3.4}$$

Članove obilježene znakom "+" zovemo *rastući mod*, a one obilježene s "−" *mod raspada*. Prisjetimo se pod kojim premisama su izvedene evolucijske jednadžbe. Tijekom kasnog stadija i kada barionska i tamna tvar imaju sličnu raspodjelu, formacija struktura je počela, a to znači da je mod raspada nadvladan. Ta tvrdnja je uračunata u početne i rubne uvjete (2.6) uz koje je rješenje jednadžbi (3.3)

$$\delta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) = \frac{D_+(\eta)}{D_+(\eta_i)}\delta_{m,i}(\boldsymbol{x}) \ \text{ i } \ \theta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) = -\frac{D'_+(\eta)}{D_+(\eta_i)}\delta_{m,i}(\boldsymbol{x}), \tag{3.5}$$

u svakoj točki $(\eta, \boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3$ te se može vidjeti slaganje s (3.1).

Za faktor rasta D_+ ne postoji općeniti izraz. Bitni slučajevi su modeli svemira u kojima su jedini energetski-nezanemarivi konstituenti tvar, kozmološka konstanta* i zakrivljenost prostor-vremena, tj. kada *prva Friedmannova jednadžba* glasi

$$H(\eta)^2 = H_0^2\left(\Omega_{m,0}\, a(\eta)^{-3} + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_\Lambda)a(\eta)^{-2}\right), \tag{3.6}$$

gdje je Ω_Λ parametar gustoće kozmološke konstante. Tada iz [3] možemo isčitati faktor rasta**

$$D_+(a) = \frac{5}{2}\Omega_{m,0}\, H(a)H_0^2 \int_0^a (xH(x))^{-3}\, dx. \tag{3.7}$$

*Uvriježeni naziv za tamnu energiju u slučaju ako je to fenomen s vremenski konstantnim svojstvima.

**U ovoj formuli (3.7), argument funkcija se interpretira kao skalni faktor (a) i to je drugačija konvencija od one koja se koristi u ostalim formulama iz ovog rada.

3.1 Statistička svojstva raspodjele tvari u najnižem redu računa smetnje - metoda 1

Iako je sve spremno za uvođenje matematičke finese koja je potrebna u metodi 2 i metodi 3 za izračun statističkih svojstava raspodjele tvari u svemiru, prije toga se usput demonstrira već postojeća metoda (1). Takav pristup se može pronaći u [1], [2], [3] i [6]. Demonstracija je izvršena samo u najnižem redu računa smetnje, a u višim redovima je postupak analogan.

Komentar 3.1 U sekcijama o statističkim svojstvima se koriste neki *osnovni* matematički objekti, nazivlje i notacija svojstveni teoriji vjerojatnosti i teoriji stohastičkih polja. Pretpostavlja se da je čitatelj upoznat s istima.

Statistička svojstva koja nas zanimaju su očekivanja, kovarijance, korelatori te spektri snage stohastičkih verzija funkcija poput δ_m i θ_m, s kojima karakteriziramo raspodjelu tvari. Skica ideje za izračun je sljedeća. Budući da ne znamo dovoljno dobro početne uvjete raspodjele tvari, funkciju $\delta_{m,i}$ zamjenjujemo stohastičkim poljem. Iz inflacijskih modela su nam poznata statistička svojstva tog polja pa koristeći teoriju vjerojatnosti zaključujemo kakva statistička svojstva nasljeđuje raspodjela tvari u kasnijim trenucima.

U referentnoj literaturi se češće koristi skalirana verzija početnog poremećaja $\delta_{m,i}$:

$$\delta_0(\boldsymbol{x}) := \frac{\delta_{m,i}(\boldsymbol{x})}{D_+(\eta_i)} \tag{3.8}$$

za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. δ_0 se zamjenjuje sa stohastičkim poljem na odgovarajućem ansamblu.

Komentar 3.2 U referentnoj literaturi za fiziku se stohastička polja izjednačava s funkcijama koje nemaju ikakav ansambl za domenu, niti se spominje koji bi to ansambl bio. To nije matematički korektno. Blaga iznimka u razlikovanju stohastičkog polja od njegovog *puta* (”realizacije”, ”determinističke funkcije”) je [4], ali u jednom dijelu knjige eksplicitno odabiru nadalje koristiti taj nekorektni pristup ”zbog jednostavnosti”.

Ansambl je vjerojatnosni prostor od prostora događaja Ω koji je u ovom slučaju nekakav skup funkcija. U Ω svakako mogu biti sve funkcije koje bi zbog matematičkih i

fizikalnih razloga mogli odabrati za δ_0. Nadalje, stohastička polja su zasebni objekti, a δ_0 je zbog određene slobode u odabiru početnih uvjeta najprimjerenije zamjeniti sa stohastičkim poljem $\hat{\delta}_0 \colon \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$, s pravilom

$$\hat{\delta}_0(\boldsymbol{x}, f) := f(\boldsymbol{x}). \tag{3.9}$$

Notacija 3.1 Dirac-delta distribuciju se označava simbolom δ_D. Upotrebljava se heuristički oblik za čiju "trodimenzionalnu verziju" vrijedi
$\delta_D(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp(\pm i\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}))\, d\lambda_3(\boldsymbol{x})/(2\pi)^3$, za svaki par $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$.

Notacija 3.2 Neka je Γ prostor događaja, $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj, a S skup takav da je $\hat{a} \colon S \times \Gamma \to \mathbb{R}^n$ stohastičko polje. Dakle, S je indeksirajući skup. Za svaki $s \in S$ se uvodi oznaka $\hat{a}_s$ koja predstavlja slučajni vektor $\hat{a}_s \colon \Gamma \to \mathbb{R}^n$ s pravilom $\hat{a}_s(\gamma) = \hat{a}(s, \gamma)$.

Može se pokazati, kao npr. u [3], sljedeća tvrdnja.

Tvrdnja 3.1[*] Linearni poremećaj gustoće tvari ($\delta_{(1)}$) u kasnom stadiju je posljedica primordijalnih fluktuacija zakrivljenosti prostorvremena, nastalih tijekom inflacije. Vjerojatnost pojavljivanja takve fluktuacije u proizvoljnoj točki prostorvremena se može opisati s barem približno Gausijanskom gustoćom vjerojatnosti.

To znači da za svaki $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ možemo zahtjevati da slučajna varijabla $\hat{\delta}_{0\boldsymbol{x}}$ ima Gausijansku gustoću vjerojatnosti poprimanja nekog realnog broja i to s očekivanjem nula. To se u literaturi za fiziku izražava zahtjevom da je *vjerojatnosni funkcional* od $\hat{\delta}_0$ oblika

$$\begin{aligned} g_{\delta_0}(f) &\overset{!}{=} \aleph_{\delta_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{\delta}_0(\boldsymbol{x}, f) B(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \hat{\delta}_0(\boldsymbol{y}, f)\, d\lambda_3(\boldsymbol{x}) d\lambda_3(\boldsymbol{y})\right) \\ &= \aleph_{\delta_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(\boldsymbol{x}) B(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) f(\boldsymbol{y})\, d\lambda_3(\boldsymbol{x}) d\lambda_3(\boldsymbol{y})\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

za svaki slučajni događaj $f \in \Omega$, pri čemu je $\aleph_{\delta_0}$ konstanta normiranja, a funkcija $B \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava

[*]Ova spoznaja je temelj za teorijsku statističku analizu raspodjele tvari u svemiru. Ona se podrazumjeva u sve tri metode za izračun statističkih svojstava u ovom radu. U [3], nije ovako kompaktno napisana, ali njen sadržaj jest argumentiran.

$$\int_{\mathbb{R}^3} B(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|)\ \mathrm{cov}\left(\hat{\delta}_{0\boldsymbol{z}}, \hat{\delta}_{0\boldsymbol{y}}\right)\ d\lambda_3(\boldsymbol{z}) = \delta_D(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} B(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|)\left\langle \hat{\delta}_{0\boldsymbol{z}}\ \hat{\delta}_{0\boldsymbol{y}}\right\rangle\ d\lambda_3(\boldsymbol{z}) = \delta_D(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{3.11}$$

za svaki par $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$. Kovarijanca u relaciji (3.11) se mora zadati nekim argumentima izvan teorije vjerojatnosti, a iz izgleda cijele jednakosti, B je očito generalizacija inverza matrice varijance. Također, matematički gledano, B ne mora nužno ovisiti samo o udaljenosti između točaka u prostoru ($\mathbb{R}^3$), ali tako mora biti ako želimo uvažiti *kozmološki princip**. U ovom radu se slijedi ΛCDM model, a u sklopu njega se kozmološki princip poštuje.

Sada je jednostavno definirati stohastičke verzije $\delta_{(1)}$ i $\theta_{(1)}$ po uzoru na funkcije (3.5) kao $\hat{\delta}_{(1)}, \hat{\theta}_{(1)} \colon I \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$ s pravilima

$$\hat{\delta}_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}, f) := D_+(\eta)\hat{\delta}_0(\boldsymbol{x}, f), \quad \hat{\theta}_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}, f) := -D'_+(\eta)\hat{\delta}_0(\boldsymbol{x}, f). \tag{3.12}$$

Dakle, promatramo rješenja evolucijskih jednadžbi u najnižem redu računa smetnje kao funkciju početne raspodjele tvari koja se tretira kao slučajan događaj s Gausijanskim vjerojatnosnim svojstvima. To nam omogućava upotrebu statistike i teorije vjerojatnosti.

Preferirani zapis statističkih svojstava u kozmologiji je u terminima prostornih skala i spektara snage jer su mjerljivi. U tu svrhu, uvodimo Fourierove transformate stohastičkih polja: $\hat{\tilde{\delta}}_{(1)}, \hat{\tilde{\theta}}_{(1)} \colon I \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{C}$ s pravilima

$$\hat{\tilde{\delta}}_{(1)}(\eta, \boldsymbol{k}, f) := \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\delta}_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}, f) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\ d\lambda_3(\boldsymbol{x}),$$
$$\hat{\tilde{\theta}}_{(1)}(\eta, \boldsymbol{k}, f) := \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\theta}_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}, f) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\ d\lambda_3(\boldsymbol{x}). \tag{3.13}$$

Također, $\hat{\tilde{\delta}}_0 \colon \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{C}$ tako da

$$\hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{k}, f) := \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\delta}_0(\boldsymbol{x}, f) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\ d\lambda_3(\boldsymbol{x}). \tag{3.14}$$

Bitna statistička svojstva su 2-korelatori, koji su opservable, pa su oni izračunati u

*To je naziv za pretpostavku koja pojednostavljeno glasi: svemir je *opažački* homogen i izotropan ako se uzme u obzir dovoljno veliki uzorak. Kako god, to implicira, u slaganju s [4], tzv. statističku homogenost i statističku izotropnost u svojstvima raspodjele tvari s obzirom na dovoljno velike prostorne skale. Ovdje korišteni opis raspodjele tvari vrijedi upravo na takvim prostornim skalama u početnim trenucima i zato B ovisi samo o udaljenosti točaka u prostoru.

ovoj demonstraciji. Rezultate možemo izraziti preko spektra snage P_{δ_0} od početnog poremećaja gustoće $\hat{\delta}_0$. Poznati identitet u kozmologiji povezuje spektre snage i 2-korelatore Fourierovih transformata stohastičkih polja (općenito, ne samo za $\hat{\tilde{\delta}}_0$):

$$\left\langle \hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{k}} \, \hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{q}} \right\rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|). \tag{3.15}$$

Konačno, koristeći relacije (3.12)-(3.15), zaključujemo sljedeća statistička svojstva:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\tilde{\delta}}_{(1)\eta\boldsymbol{k}} \, \hat{\tilde{\delta}}_{(1)\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle &= (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) D_+(\eta)^2 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|), \\
\left\langle \hat{\tilde{\delta}}_{(1)\eta\boldsymbol{k}} \, \hat{\tilde{\theta}}_{(1)\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle &= -(2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) D_+(\eta) D'_+(\eta) P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|), \\
\left\langle \hat{\tilde{\theta}}_{(1)\eta\boldsymbol{k}} \, \hat{\tilde{\theta}}_{(1)\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle &= (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) D'_+(\eta)^2 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ove relacije se mogu empirijski provjeravati. Po uzoru na (3.15), iz svojstava (3.16) možemo isčitati linearne spektre snage za raspodjelu tvari:

$$\begin{aligned}
\pi_{11}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) &\equiv P_{\delta}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) \equiv D_+(\eta)^2 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|), \\
\pi_{12}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) &\equiv \pi_{21}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) \equiv P_{\delta\theta}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) \equiv -D_+(\eta) D'_+(\eta) P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|), \\
\pi_{22}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) &\equiv P_{\theta}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) \equiv D'_+(\eta)^2 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ove oznake sa simbolom $\pi^{(L)}$ su korisne u nastavku rada.

Da bi izračunali doprinos statističkim svojstvima od viših redova računa smetnje, postupamo analogno prezentiranom postupku. Npr., potrebno je odrediti funkcije $\delta_{(2)}$ i $\theta_{(2)}$, definirati odgovarajuća stohastička polja i iz njih je moguće izračunati popravku statističkih svojstava. Međutim, primjetimo zahtjev da je *potrebno odrediti funkcije* $\delta_{(n)}$ i $\theta_{(n)}$. Cilj ovog rada je bio pokušati konstruirati metodu za određivanje statističkih svojstava iz evolucijskih jednadžbi kojom se izbjegava njihovo rješavanje u višim redovima računa smetnje. Slijedi uvođenje matematičke finese na kojoj se cijela ideja alternativne metode zasniva.

3.2 Izvorni članovi

Za proizvoljni $\eta \in I$, uvodi se linearno diferencijalno preslikavanje L_η, s pravilom

$$L_\eta\left(f_1, f_2\right) := \left(\partial_0 f_1 + f_2 \ , \ \frac{3}{2}\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2 f_1 + \partial_0 f_2 + (aH)(\eta)\ f_2\right), \tag{3.18}$$

za svaki uređeni par (f_1, f_2) funkcija s $I \times \mathbb{R}^3$ na $\mathbb{C}$ za koje izraz (3.18) ima smisla. U nastavku se tom preslikavanju simbolično pridružuje 2×2 matrica

$$L_\eta \equiv \begin{bmatrix} \partial_0 & 1 \\ \frac{3}{2}\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2 & (aH)(\eta) + \partial_0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} L_{\eta 11} & L_{\eta 12} \\ L_{\eta 21} & L_{\eta 22} \end{bmatrix}. \tag{3.19}$$

S pomoću L_η možemo kompaktnije zapisati sustav jednadžbi (3.3):

$$\left[L_\eta(\delta_{(1)}, \theta_{(1)})\right](\eta, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{3.20}$$

za svaki $(\eta, \boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3$.

Notacija 3.3 Neka je $n \in \mathbb{N}$. Skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ se označava sa simbolom $M_n(\mathbb{R})$.

Nadalje, definira se *matrična Greenova funkcija* od preslikavanja L_η kao funkcija $G\colon I \times I \to M_2(\mathbb{R})$ koja zadovoljava jednakost

$$(L_\eta G)(\eta, \eta') = \delta_D(\eta - \eta')\mathbb{1}_2, \tag{3.21}$$

i *kauzalno* svojstvo $G(\eta, \eta') = 0$ kada $\eta < \eta'$, za svaki $(\eta, \eta') \in I \times I$. U definicijskom izrazu (3.21) se matrični zapis od L_η matrično "množi" s

$$G \equiv \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Iako elementi tih matrica nisu samo brojevi, u tom izrazu ih treba tretirati upravo kao da jesu i koristiti uobičajena pravila za množenje matrica brojeva jer se tako dolazi do ispravnog izraza sa standardnim smislom. Također, funkcije treba izvrijedniti u točki (η, η') nakon "djelovanja" L_η.

Komentar 3.3 G se može smatrati nekom vrstom *desnog inverza* od preslikavanja L_η. Ta ideja je bitna u daljnjem dijelu ovog rada.

Uz pokratu $Đ(\eta) \equiv 3\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2/2$, lako se možemo uvjeriti da je G oblika*

$$G(\eta,\eta') = \begin{bmatrix} -Đ(\eta)^{-1}\left(\partial_\eta G_{21}(\eta,\eta') + (aH)(\eta)\, G_{21}(\eta,\eta')\right) & G_{12}(\eta,\eta') \\ G_{21}(\eta,\eta') & -\partial_\eta G_{12}(\eta,\eta') \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

dok su funkcije G_{12} i G_{21} određene jednadžbama

$$\begin{aligned} Đ(\eta)G_{12}(\eta,\eta') - (aH)(\eta)\,\partial_\eta G_{12}(\eta,\eta') - \partial_\eta^2 G_{12}(\eta,\eta') &= \delta_D(\eta-\eta'), \\ G_{21}(\eta,\eta') - \partial_\eta\left[Đ(\eta)^{-1}\left(\partial_\eta G_{21}(\eta,\eta') + (aH)(\eta)\, G_{21}(\eta,\eta')\right)\right] &= \delta_D(\eta-\eta'), \end{aligned} \tag{3.24}$$

i kauzalnim svojstvima $G_{12}(\eta,\eta') = G_{21}(\eta,\eta') = 0$ kada $\eta < \eta'$, za svaki $(\eta,\eta') \in I \times I$.

Greenove funkcije se uobičajeno koriste za rješavanje nehomogenih diferencijalnih jednadžbi. Sustav jednadžbi (3.20) za najniži red računa smetnje nije nehomogen, ali da jest, pri traženju rješenja bi koristili upravo matričnu Greenovu funkciju G. Ideja je pokušati napraviti jednadžbe (3.20) "umjetno" nehomogenima, tako da njihovo rješenje ostane isto - par funkcija (3.4), odnosno (3.5). Dakle, traže se netrivijalni nehomogeni članovi koji nekako ne doprinose rješenju jednadžbi. Neka su E_1 i E_2 funkcije s argumentima u $I \times \mathbb{R}^3$, a koje imaju traženo svojstvo. Jednadžbe (3.20) su onda

$$\left[L_\eta(\delta_{(1)},\theta_{(1)})\right](\eta,\boldsymbol{x}) = \left(E_1(\eta,\boldsymbol{x}), E_2(\eta,\boldsymbol{x})\right). \tag{3.25}$$

Opće rješenje ovih jednadžbi je opet (3.4) pa vrijedi

$$\begin{bmatrix} \delta_{(1)}(\eta,\boldsymbol{x}) \\ \theta_{(1)}(\eta,\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_+(\boldsymbol{x})D_+(\eta) + C_-(\boldsymbol{x})\frac{H(\eta)}{H_0} \\ -\partial_0\delta_{(1)}(\eta,\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \int_{\eta_i}^{\eta_s} G(\eta,t) \begin{bmatrix} E_1(t,\boldsymbol{x}) \\ E_2(t,\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} dt. \tag{3.26}$$

Budući da jednadžbe (3.20) nisu originalno nehomogene, njihovo rješenje je sadržano u matričnoj Greenovoj funkciji G, bez ikakve potrebe da ju integriramo s inače nepostojećim nehomogenim članom. Stoga, E_1 i E_2 moraju sadržavati Dirac-delta distribuciju. Za svaki $(\eta,\boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3$, s $e_{1\eta\boldsymbol{x}}$ i $e_{2\eta\boldsymbol{x}}$ se označavaju realni brojevi za koje vrijedi

$$\begin{aligned} E_1(\eta,\boldsymbol{x}) &= \delta_D(\eta-\eta_i)e_{1\eta\boldsymbol{x}} = \delta_D(\eta-\eta_i)e_{1\eta_i\boldsymbol{x}}\ , \\ E_2(\eta,\boldsymbol{x}) &= \delta_D(\eta-\eta_i)e_{2\eta\boldsymbol{x}} = \delta_D(\eta-\eta_i)e_{2\eta_i\boldsymbol{x}}\ . \end{aligned} \tag{3.27}$$

Iz drugih jednakosti u (3.27), zaključuje se da brojevi $e_{1..}$ i $e_{2..}$ ovise samo o iz-

*U ovim izrazima za matričnu Greenovu funkciju se umjesto oznake ∂_0 koristi ∂_η zbog jasnoće.

boru početnog sugibajućeg horizonta η_i i argumenata iz $\mathbb{R}^3$ od funkcija E_1 i E_2. Uvrštavanjem spoznaje (3.27) u drugu jednakost u (3.26), dobiva se

$$\begin{bmatrix} C_+(\boldsymbol{x})D_+(\eta) + C_-(\boldsymbol{x})\frac{H(\eta)}{H_0} \\ -\partial_0\delta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = G(\eta, \eta_i) \begin{bmatrix} e_{1\eta_i\boldsymbol{x}} \\ e_{2\eta_i\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Očito će se matrična Greenova funkcija G uvijek sastojati od rastućeg moda G_+ i moda raspada G_-. U izvodu rješenja (3.5) je objašnjen fizikalni razlog zbog kojeg mod raspada možemo ignorirati. Konačno, uvodi se sljedeći niz definicija.

Definicija 3.1 Neka je zadan početni sugibajući horizont η_i i zatvoreni interval $I \equiv [\eta_i, \eta_s] \subset \mathbb{R}$. Također, neka su zadane jednadžbe (3.3) s početnim i rubnim uvjetima (2.6) na domeni $I \times \mathbb{R}^3$.
Tada se kaže da je *zadana linearna evolucija raspodjele tvari* na domeni $I \times \mathbb{R}^3$.

Definicija 3.2 Neka je zadana linearna evolucija raspodjele tvari na domeni $I \times \mathbb{R}^3$ i linearno diferencijalno preslikavanje L_η s pravilom (3.18) za proizvoljni $\eta \in I$.
Tada se kaže da L_η *opisuje linearnu evoluciju raspodjele tvari* pod horizontom η.

Definicija 3.3 Neka L_η opisuje linearnu evoluciju raspodjele tvari pod horizontom $\eta \in I$, s početnim horizontom η_i, faktorom rasta D_+ i početnim poremećajem gustoće tvari $\delta_{m,i}$. Nadalje, G_+ neka je rastući mod matrične Greenove funkcije od L_η.
Funkcije $\epsilon_1, \epsilon_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ koje za svaki $(\eta, \boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3$ zadovoljavaju jednakost

$$G_+(\eta, \eta_i) \begin{bmatrix} \epsilon_1(\boldsymbol{x}) \\ \epsilon_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \frac{\delta_{m,i}(\boldsymbol{x})}{D_+(\eta_i)} \begin{bmatrix} D_+(\eta) \\ -D'_+(\eta) \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

nazivaju se *izvorni članovi* od zadane linearne evolucije raspodjele tvari.

S ovim definicijama na umu može se demonstrirati prijedlog načina kako sustav diferncijalnih jednadžbi (3.20) napraviti "umjetno" nehomogenim, tako da mu se rješenja ne promjene.

Tvrdnja 3.2 Neka L_η opisuje linearnu evoluciju raspodjele tvari pod horizontom $\eta \in I$, s početnim horizontom η_i, a ϵ_1 i ϵ_2 neka su izvorni članovi zadane linearne evolucije. Rješenje diferencijalne jednadžbe $\left[L_\eta(\delta_{(1)}, \theta_{(1)})\right](\eta, \boldsymbol{x}) = 0$ je jednako rješenju diferencijalne jednadžbe $\left[L_\eta(\delta_{(1)}, \theta_{(1)})\right](\eta, \boldsymbol{x}) = \delta_D(\eta - \eta_i)\left(\epsilon_1(\boldsymbol{x}), \epsilon_2(\boldsymbol{x})\right)$, za svaki $(\eta, \boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3$.

Prijedlog dokaza Budući da je zadana linearna evolucija raspodjele tvari na domeni $I \times \mathbb{R}^3$, jednadžba $\left[L_\eta(\delta_{(1)}, \theta_{(1)})\right](\eta, \boldsymbol{x}) = 0$ na tom skupu ima kao rješenje uređeni par funkcija s pravilima (3.5). Neka je $G = G_+ + G_-$ matrična Greenova funkcija od L_η. Zbog zadanih početnih i rubnih uvjeta (2.6), jedino je relevantan rastući mod G_+. Uzevši u obzir $[\eta_i, \eta_s] \equiv I$, matrični zapis rješenja jednadžbe $\left[L_\eta(\delta_{(1)}, \theta_{(1)})\right](\eta, \boldsymbol{x}) = \delta_D(\eta - \eta_i)\,(\epsilon_1(\boldsymbol{x}), \epsilon_2(\boldsymbol{x}))$ je

$$\begin{bmatrix} \delta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) \\ \theta_{(1)}(\eta, \boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \int_{\eta_i}^{\eta_s} \delta_D(t - \eta_i)\; G_+(\eta, t) \begin{bmatrix} \epsilon_1(\boldsymbol{x}) \\ \epsilon_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} dt = G_+(\eta, \eta_i) \begin{bmatrix} \epsilon_1(\boldsymbol{x}) \\ \epsilon_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}, \tag{3.30}$$

a posljednji matrični umnožak je upravo po Definiciji 3.3 ekvivalentan izrazima (3.5).

■

Iz definicijskog izraza (3.29) je jasno da izvorni članovi moraju biti direktno proporcionalni početnom poremećaju $\delta_{m,i}$. Zato je za neku zadanu linearnu evoluciju raspodjele tvari moguće definirati odgovarajuće stohastičke verzije $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2 \colon \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$ izvornih članova. Osim toga, onda je jasno i da je zajednički vjerojatnosni funkcional ta dva stohastička polja Gausijanskog oblika, kao u izrazu (3.10). Neka mu je oznaka g_ϵ pa vrijedi

$$g_\epsilon(f) = \aleph_\epsilon \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{c,d=1}^{2} \hat{\epsilon}_c(\boldsymbol{x}, f) A_{cd}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \hat{\epsilon}_d(\boldsymbol{y}, f)\; d\lambda_3(\boldsymbol{x}) d\lambda_3(\boldsymbol{y})\right), \tag{3.31}$$

za svaki slučajni događaj $f \in \Omega$. Konstanta normiranja je označena s $\aleph_\epsilon$, dok tri funkcije $A_{11}, A_{12} \equiv A_{21}, A_{22} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{c=1}^{2} A_{ac}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|)\, \mathrm{cov}\,(\hat{\epsilon}_{c\boldsymbol{z}}, \hat{\epsilon}_{b\boldsymbol{y}})\;\, d\lambda_3(\boldsymbol{z}) &= \delta_{ab}\, \delta_D(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \\ \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{c=1}^{2} A_{ac}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|)\, \langle \hat{\epsilon}_{c\boldsymbol{z}}\; \hat{\epsilon}_{b\boldsymbol{y}} \rangle\, d\lambda_3(\boldsymbol{z}) &= \delta_{ab}\, \delta_D(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \end{aligned} \tag{3.32}$$

za svaki par $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ i zadane kovarijance.

4 Statistička svojstva raspodjele tvari u najnižem redu računa smetnje - metoda 2

Ideja izvornih članova se u ovom poglavlju iskorištava za alternativni način izračuna statističkih svojstava (3.16). Nastavlja se raditi u najnižem redu računa smetnje jer sudeći prema nekim referencama, postoje matematički problemi s metodom 2 i njenom primjenom na puni, nelinearni oblik evolucijskih jednadžbi, no o tome se ne piše u ovom poglavlju. Tijekom ovog poglavlja se ističu neki drugi pronađeni problemi u obliku kontradikcija, koji su vezani uz metodu 2. Kako god, statistička svojstva (3.16) su uspješno izvedena tom metodom, a spomenuti problemi su motiv za metodu 3. Sve zajedno se diskutira u narednim poglavljima.

Neka L_η opisuje linearnu evoluciju raspodjele tvari pod horizontom $\eta \in I$. Također, neka je zadan ansambl (Ω, Σ, μ), gdje je prostor događaja Ω neki skup funkcija s $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}$, Σ je σ-algebra na prostoru događaja, a μ je vjerojatnosna mjera ansambla. Za zadanu linearnu evoluciju postoje izvorni članovi ϵ_1 i ϵ_2 koje se može zamjeniti stohastičkim poljima $\hat{\epsilon}_1$ i $\hat{\epsilon}_2$ na danom ansamblu, respektivno.

Uvode se praktičnije oznake. Preimenuju se Stohastička polja $\hat{\delta}_{(1)}$ i $\hat{\theta}_{(1)}$ na način

$$\hat{\varphi}_1 \equiv \hat{\delta}_{(1)} \ \text{ i } \ \hat{\varphi}_2 \equiv \hat{\theta}_{(1)}. \tag{4.1}$$

Potom se uvodi funkcija $\hat{\varphi}\colon I \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ s pravilom

$$\hat{\varphi}(\eta, \boldsymbol{x}, f) := \left(\hat{\varphi}_1(\eta, \boldsymbol{x}, f), \hat{\varphi}_2(\eta, \boldsymbol{x}, f)\right), \tag{4.2}$$

za svaki $(\eta, \boldsymbol{x}) \in I \times \mathbb{R}^3$ te jednako tako i za izvorne članove se uvodi $\hat{\epsilon}\colon \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ s pravilom

$$\hat{\epsilon}(\boldsymbol{x}, f) := \left(\hat{\epsilon}_1(\boldsymbol{x}, f), \hat{\epsilon}_2(\boldsymbol{x}, f)\right). \tag{4.3}$$

Evolucijske jednadžbe u najnižem redu računa smetnje sad možemo pisati kao

$$\left[L_\eta(\hat{\varphi})\right](\eta, \boldsymbol{x}, f) = \delta_D(\eta - \eta_i)\hat{\epsilon}(\boldsymbol{x}, f), \tag{4.4}$$

za zadani slučajni događaj $f \in \Omega$, pri čemu je η_i početni horizont zadane linearne

evolucije. Naposljetku, uvodi se matrična funkcija $A\colon \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ s pravilom

$$A(x) := \begin{bmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{12}(x) & A_{22}(x) \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

a funkcije A_{11}, A_{12} i A_{22} su određene relacijama (3.32).

Notacija 4.1: Zbog maksimalne sažetosti matematičkih izraza, ponegdje se koristi alternativna oznaka za Lebesgueov integral po $\mathbb{R}^3$ s obzirom na Lebesgueovu mjeru λ_3:

$$\int_{\boldsymbol{x}} \ldots := \int_{\mathbb{R}^3} \ldots \, d\lambda_3(\boldsymbol{x}) \tag{4.6}$$

U referenci [6] se spominju *generirajući funkcionali* stohastičkih polja. Između ostalog, predstavljeni su kao kompleksne funkcije s nekim skupom preslikavanja kao domenom. Iz napisanog je jasno da realna preslikavanja u domeni generirajućih funkcionala imaju $\mathbb{R}^3$ za domenu, ali više od toga nije navedeno*. Simbolom Z_η se označava generirajući funkcional stohastičkog polja $\hat{\varphi}$ pod horizontom η pa prema [6] možemo pisati

$$Z_\eta(J) := \left\langle \exp\left(i \int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\varphi}(\eta, \boldsymbol{x}, f) \right) \right\rangle, \tag{4.7}$$

za svaku funkciju $J\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ za koju ovaj izraz ima smisla. Simbol "$\cdot$" predstavlja skalarno množenje uređenih n-torki realnih brojeva. Iz izgleda formule (4.7) je jasno da su generirajući funkcionali zamišljeni kao nekakva generalizacija karakterističnih funkcija iz teorije vjerojatnosti, a i oba koncepta služe za praktično generiranje statističkih svojstava slučajnih varijabli.

Izraz (4.7) možemo zapisati s pomoću integrala po ansamblu,

$$Z_\eta(J) := \int_\Omega \exp\left(i \int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\varphi}(\eta, \boldsymbol{x}, f) \right) \, d\mu(f). \tag{4.8}$$

Pretpostavka 4.1 Na izmjerivom prostoru (Ω, Σ) postoji mjera generirana stohastičkim

*Mišljenje autora ovog teksta je da se domena generirajućih funkcionala treba sastojati od realnih funkcija koje su barem omeđene.

poljem $\hat{\varphi}$, takva da vrijedi

$$Z_\eta(J) = \int_\Omega \exp\left(i \int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\varphi}(\eta, \boldsymbol{x}, f)\right) g_\varphi(\eta, f)\, \mathcal{D}\hat{\varphi}(f), \tag{4.9}$$

gdje je $\mathcal{D}\hat{\varphi}(f)$ oznaka za generiranu mjeru, a g_φ je vjerojatnosni funkcional stohastičkog polja $\hat{\varphi}$.

Komentar 4.1 Razlog za *pretpostavljanje* izraza (4.9) su nekoliko neodgovorenih pitanja o mjeri $\mathcal{D}\hat{\varphi}(f)$. Naime, čini se kako je uporaba te mjere svojstvena literaturi za fiziku, a u referiranim primjercima se ne može puno saznati. U [6] stoji da je to "integracijska mjera u Hilbertovom prostoru" i odgovarajuća oznaka u ovom slučaju bi bila $[\mathcal{D}\varphi]$. U [4] se pak piše o "funkcionalnom diferencijalu *nad ansamblom*" i odgovarajuća oznaka bi ovdje bila $D[\varphi(\eta, \boldsymbol{x})]$. Iz potonjeg se dobiva indicija da je integral i dalje po prostoru događaja Ω, od kojeg je ansambl izgrađen. Stoga, uzevši u obzir i teoriju vjerojatnosti, autor ovog teksta smatra da bi tvrdnja u Pretpostavci 4.1 trebala biti uobličena upravo tako, ali to je i dalje samo pretpostavka.

Komentar 4.2 Česti nazivi za integrale oblika (4.9) u literaturi za fiziku su eng. *path integrals* i *funkcionalni integrali*.

Ovdje je potrebno iskoristiti znanje o izvornim članovima, odnosno stohastičkom polju $\hat{\epsilon}$. Kod izraza (3.31) je argumentiran Gausijanski oblik vjerojatnosnog funkcionala od $\hat{\epsilon}$. No, kako vrijedi jednadžba (4.4), jasno je i da stohastičko polje $L_\eta(\hat{\varphi})$, za proizvoljni $\eta \in I$, ima Gausijanski vjerojatnosni funkcional pa se tvrdi

$$g_\varphi(\eta, f) = \aleph_\varphi \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{x}} \int_{\boldsymbol{y}} \left[L_\eta(\hat{\varphi})\right](\eta, \boldsymbol{x}, f) \cdot A(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) \left[L_\eta(\hat{\varphi})\right](\eta, \boldsymbol{y}, f)\right). \tag{4.10}$$

Komentar 4.3 U najnižem redu računa smetnje, izraz poput (4.10) se mogao izvest i bez izvornih članova, dakle, bio bi oblika (3.10), ali za puni oblik evolucijskih jednadžbi, zaključak bez izvornih članova ne zvuči uvjerljivo.

Izraz (4.10) još uvijek nije u povoljnom obliku. Zato se upotrebljava generalizirana verzija Hubbard-Stratonovichevog integrala koja je zaključena po analogiji s

matričnom generaliziranom verzijom navedenom u [8]. Dakle, slijedi:

$$
\begin{aligned}
g_\varphi(\eta, f)\aleph_\varphi^{-1} \sim \int_\Omega \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{x}}\int_{\boldsymbol{y}} \hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{x}, h)\cdot \operatorname{cov}\left(\hat{\epsilon}_{\boldsymbol{x}}, \hat{\epsilon}_{\boldsymbol{y}}\right)\hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{y}, h)\right) \\
\times \exp\left(i\int_{\boldsymbol{x}} \hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{x}, h)\cdot\left[L_\eta(\hat{\varphi})\right](\eta, \boldsymbol{x}, f)\right)\mathscr{D}\hat{\chi}(h).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Na desnoj strani jednakosti se integrira u odnosu na mjeru generiranu nekim stohastičkim poljem $\hat{\chi}\colon I\times\mathbb{R}^3\times\Omega\to\mathbb{R}^2$, a $\operatorname{cov}\left(\hat{\epsilon}_{\boldsymbol{x}}, \hat{\epsilon}_{\boldsymbol{y}}\right)$ je matrica kovarijance slučajnih vektora $\hat{\epsilon}_{\boldsymbol{x}}$ i $\hat{\epsilon}_{\boldsymbol{y}}$. Budući da se pojavilo novo stohastičko polje $\hat{\chi}$, redefinira se generirajući funkcional Z_η u ζ_η, dodavanjem faze $\exp[i\int_{\boldsymbol{x}} K(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{x}, h)]$ u integral (4.11) tako da vrijedi

$$
\zeta_\eta(J, K=0) \overset{!}{=} Z_\eta(J). \tag{4.12}
$$

Drugi argument u ζ_η će služiti za generiranje statističkih svojstava od $\hat{\chi}$. Nakon svih promjena, ukupni generirajući funkcional izgleda ovako:

$$
\begin{aligned}
\zeta_\eta(J, K) := \aleph'_\varphi \int_\Omega\int_\Omega \exp\left(i\int_{\boldsymbol{x}}\left[J(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\varphi}(\eta, \boldsymbol{x}, f) + K(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{x}, h)\right]\right) \\
\times \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{x}}\int_{\boldsymbol{y}} \hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{x}, h)\cdot \operatorname{cov}\left(\hat{\epsilon}_{\boldsymbol{x}}, \hat{\epsilon}_{\boldsymbol{y}}\right)\hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{y}, h)\right) \\
\times \exp\left(i\int_{\boldsymbol{x}} \hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{x}, h)\cdot\left[L_\eta(\hat{\varphi})\right](\eta, \boldsymbol{x}, f)\right)\mathscr{D}\hat{\chi}(h)\,\mathscr{D}\hat{\varphi}(f).
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

$\aleph'_\varphi$ je jednak umnošku $\aleph_\varphi$ i odgovarajućeg faktora proporcionalnosti iz (4.11).

Unutarnji integral možemo izvrijedniti ako napravimo supstituciju poput one u [6]: $\hat{\chi}'(\eta, \boldsymbol{x}, h) \equiv \hat{\chi}(\eta, \boldsymbol{x}, h) - i\int_{\boldsymbol{z}} A(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|)\hat{R}(\eta, \boldsymbol{z}, f)$, gdje je iskorištena pokrata $\hat{R}(\eta, \boldsymbol{z}, f) \equiv K(\boldsymbol{z}) + L_\eta(\hat{\varphi})(\eta, \boldsymbol{z}, f)$. Ta supstitucija ne mjenja integracijsku mjeru $\mathscr{D}\hat{\chi}(h)$ jer integralni član ne sadrži integracijsku varijablu h. Dobiva se

$$
\begin{aligned}
&\zeta_\eta(J, K) = \\
&\frac{\int_\Omega \exp\left(i\int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\varphi}(\eta, \boldsymbol{x}, f) - \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{x}}\int_{\boldsymbol{y}} \hat{R}(\eta, \boldsymbol{x}, f)\cdot A(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\hat{R}(\eta, \boldsymbol{y}, f)\right)\mathscr{D}\hat{\varphi}(f)}{\int_\Omega \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{x}}\int_{\boldsymbol{y}}\left[L_\eta(\hat{\varphi})\right](\eta, \boldsymbol{x}, f)\cdot A(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\left[L_\eta(\hat{\varphi})\right](\eta, \boldsymbol{y}, f)\right)\mathscr{D}\hat{\varphi}(f)},
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

a pritom je potrebno paziti na promjene u konstanti normiranja, koja je u gornjoj formuli eksplicitno raspisana. I preostali integral možemo izvrijedniti odgovarajućom

supstitucijom gore spomenutog oblika. Konačno preostaje

$$\begin{aligned}\zeta_\eta(J,K) = \exp\left(-i\int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x})\cdot G(\eta,\eta_i)K(\boldsymbol{x})\right)\\ \times\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{x}}\int_{\boldsymbol{y}} J(\boldsymbol{x})\cdot G(\eta,\eta_i)\mathrm{cov}(\hat{\epsilon}_{\boldsymbol{x}},\hat{\epsilon}_{\boldsymbol{y}})G(\eta,\eta_i)^T J(\boldsymbol{y})\right).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Matrična Greenova funkcija G se pojavi zato što je ona po definiciji desni inverz preslikavanja L_η, za proizvoljni $\eta \in I$.

Iz generirajućeg funkcionala (4.15) se mogu izvesti statistička svojstva stohastičkog polja $\hat{\varphi}$.

Notacija 4.2 Simbolom Δ se označava *funkcionalna derivacija*.

Neka je $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, ..., a_n \in \{1,2\}$ i $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^3$. Koriste se oznake $J \equiv (J_1, J_2)$ i $K \equiv (K_1, K_2)$. U [6] možemo saznati da vrijede identiteti

$$\begin{aligned}\langle\hat{\varphi}_{a_1\eta\boldsymbol{x}_1}\hat{\varphi}_{a_2\eta\boldsymbol{x}_2}...\hat{\varphi}_{a_n\eta\boldsymbol{x}_n}\rangle &= i^{-n}\Delta^n_{J_{a_n}(\boldsymbol{x}_n)...J_{a_2}(\boldsymbol{x}_2)J_{a_1}(\boldsymbol{x}_1)}\zeta_\eta(0,0),\\ \langle\hat{\chi}_{a_1\eta\boldsymbol{x}_1}\hat{\chi}_{a_2\eta\boldsymbol{x}_2}...\hat{\chi}_{a_n\eta\boldsymbol{x}_n}\rangle &= i^{-n}\Delta^n_{K_{a_n}(\boldsymbol{x}_n)...K_{a_2}(\boldsymbol{x}_2)K_{a_1}(\boldsymbol{x}_1)}\zeta_\eta(0,0).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Drugim riječima, poznavanjem odgovarajućeg generirajućeg funkcionala, izračun statističkih svojstava stohastičkih polja se svodi na uzastopno funkcionalno deriviranje prema formulama (4.16). Stoga, rezultat za 2-korelatore polja $\hat{\varphi}$, u točkama prostora $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$ pod horizontom η, je

$$\begin{aligned}\langle\hat{\varphi}_{a\eta\boldsymbol{x}}\,\hat{\varphi}_{b\eta\boldsymbol{y}}\rangle &= \sum_{c,d=1}^{2} G_{ac}(\eta,\eta_i)\,\langle\hat{\epsilon}_{c\boldsymbol{x}}\hat{\epsilon}_{d\boldsymbol{y}}\rangle\,G_{bd}(\eta,\eta_i)\\ &= \left\langle\sum_{c=1}^{2}(G_+)_{ac}(\eta,\eta_i)\hat{\epsilon}_{c\boldsymbol{x}}\sum_{d=1}^{2}(G_+)_{bd}(\eta,\eta_i)\hat{\epsilon}_{d\boldsymbol{y}}\right\rangle,\end{aligned} \tag{4.17}$$

pri čemu su $a, b \in \{1,2\}$ proizvoljni. U drugoj liniji jednakosti je istaknuto kako je relevantan samo rastući mod G_+. Upotrebom definicijske relacije (3.29) i funkcije (3.8), lako se možemo uvjeriti da za izabrane a i b, jednakost (4.17) možemo izraziti s pomoću stohastičkog polja $\hat{\delta}_0$. Prisjetimo se da preferiramo zapis statističkih svojstava u ovisnosti o prostornim skalama. Zato se uvode oznake

$$\hat{\tilde{\varphi}}_1 \equiv \hat{\tilde{\delta}}_{(1)} \;\text{ i }\; \hat{\tilde{\varphi}}_2 \equiv \hat{\tilde{\theta}}_{(1)}. \tag{4.18}$$

I za ta polja vrijedi identitet (3.15) pa uz korištenje oznaka iz (3.17) imamo

$$\left\langle \hat{\tilde{\varphi}}_{a\eta\boldsymbol{k}}\ \hat{\tilde{\varphi}}_{b\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) \pi_{ab}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|), \tag{4.19}$$

za neke Fourierove modove $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Zbog kozmološkog pricipa vrijedi Wiener-Khinchinov teorem, koji povezuje spektre snage stohastičkih polja s njihovim 2-korelatorima. Štoviše, uporabom identiteta (3.15) tiho podrazumjevamo da za rezultat Wiener-Khinchinovog teorema vrijedi Fourierova inverzija:

$$\pi_{ab}^{(L)}(\eta, |\boldsymbol{k}|) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \hat{\varphi}_{a\eta\boldsymbol{x}}\ \hat{\varphi}_{b\eta\boldsymbol{y}} \rangle\, e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\ d\lambda_3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{4.20}$$

Konačno, kombinirajući (4.17), (4.19) i (4.20), 2-korelatori polja $\hat{\tilde{\varphi}}_1$ i $\hat{\tilde{\varphi}}_2$ su onda

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\tilde{\varphi}}_{a\eta\boldsymbol{k}}\ \hat{\tilde{\varphi}}_{b\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle &= (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) \int_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}} \langle \hat{\varphi}_{a\eta\boldsymbol{x}}\ \hat{\varphi}_{b\eta\boldsymbol{y}} \rangle\, e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\ &= (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) \int_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}} \left\langle \sum_{c=1}^{2} (G_+)_{ac}(\eta,\eta_i) \hat{\epsilon}_{c\boldsymbol{x}} \sum_{d=1}^{2} (G_+)_{bd}(\eta,\eta_i) \hat{\epsilon}_{d\boldsymbol{y}} \right\rangle e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ako se ovdje upotrijebi definicijska relacija (3.29), ovisno o izboru a i b, dobivaju se upravo statistička svojstva (3.16).

U Komentaru 4.3 je već istaknuta redundanta nota ove alternativne metode dok se njome izračunavaju statistička svojstava raspodjele tvari u najnižem redu računa smetnje. Izračun istih svojstava uobičajenom metodom (1) je dovoljno lagan da ova alternativna metoda izgleda kao nepotrebna komplikacija, ali glavni cilj je istražiti vrijedi li ovaj postupak na način da se izbjegava znatno zahtjevnije rješavanje evolucijskih jednadžbi u višim redovima računa smetnje? S tim na umu, primjenu alternativne metode u najnižem redu treba shvatiti kao važnu stepenicu u njenom razvoju i testiranju.

Dodatni produkt metode 2 je stohastičko polje $\hat{\chi}$. Kao takvo, trebalo bi imati statistička svojstva. Koriste se oznake $\hat{\chi} \equiv (\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2)$, gdje su $\hat{\chi}_1$ i $\hat{\chi}_2$ realna stohastička polja na prostoru događaja Ω, indeksirana skupom $I \times \mathbb{R}^3$. Prema formulama (4.16), 2-korelatori tih polja su

$$\langle \hat{\chi}_{a\eta\boldsymbol{x}}\ \hat{\chi}_{b\eta\boldsymbol{y}} \rangle = 0, \tag{4.22}$$

za proizvoljne $a, b \in \{1, 2\}$. Očekivanje tih polja je također

$$\langle \hat{\chi}_{a\eta\boldsymbol{x}} \rangle = 0. \tag{4.23}$$

Međutim, promotrimo miješane 2-korelatore s poljem $\hat{\varphi}$ i $\hat{\chi}$, koje možemo izračunati prikladno kombinirajući formule (4.16):

$$\langle \hat{\chi}_{a\eta\boldsymbol{x}} \, \hat{\varphi}_{b\eta\boldsymbol{y}} \rangle = i^{-2} \Delta^2_{J_b(\boldsymbol{y}) K_a(\boldsymbol{x})} \zeta_\eta(0,0) = i\delta_D(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) G_{ba}(\eta, \eta_i). \tag{4.24}$$

Uvode se Fourierovi tranformati $\hat{\hat{\chi}}_1, \hat{\hat{\chi}}_2 \colon I \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{\chi}}_1(\eta, \boldsymbol{k}, f) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\chi}_1(\eta, \boldsymbol{x}, f) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \, d\lambda_3(\boldsymbol{x}), \\ \hat{\hat{\chi}}_2(\eta, \boldsymbol{k}, f) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\chi}_2(\eta, \boldsymbol{x}, f) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \, d\lambda_3(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{4.25}$$

S pomoću relacija (4.19), (4.20) i (4.24), slijede miješani 2-korelatori u ovisnosti o prostornim skalama:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\hat{\chi}}_{a\eta\boldsymbol{k}} \, \hat{\hat{\varphi}}_{b\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle &= (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}) \int_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}} \langle \hat{\chi}_{a\eta\boldsymbol{x}} \, \hat{\varphi}_{b\eta\boldsymbol{y}} \rangle \, e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\ &= i(2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}) G_{ba}(\eta, \eta_i), \end{aligned} \tag{4.26}$$

za neke Fourierove modove $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Dakle, budući da su 2-korelatori opservable, miješani korelatori (4.24) i (4.26) izgledaju kao prilika za empirijsko provjeravanje matrične Greenove funkcije G. Ipak, ako se pažljivije promotri relacija (4.24), može se uočiti da je zapravo matematički kontradiktorna.

Kontradikcija 4.1 Neka je (Ω, Σ, μ) ansambl s realnom vjerojatnosnom mjerom μ i neka je zadana linearna evolucija raspodjele tvari na domeni $I \times \mathbb{R}^3$ s početnim horizontom η_i, faktorom rasta D_+ i početnim poremećajem gustoće tvari $D_+(\eta_i) f \in \Omega$. Potom, neka su $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2 \colon I \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$ stohastička polja čiji putevi, za svaki $f \in \Omega$, su rješenje zadane linearne evolucije. Naposljetku, $\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2 \colon I \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$ neka su stohastička polja sa svojstvima (4.16) za generirajući funkcional (4.15).
Sljedeći 2-korelatori *realnih* stohastičkih polja s obzirom na *realnu* vjerojatnosnu

mjeru sadrže *imaginarnu jedinicu*:

$$\langle \hat{\chi}_{a\eta\boldsymbol{x}}\ \hat{\varphi}_{b\eta\boldsymbol{y}} \rangle := \int_{\Omega} \hat{\chi}_a(\eta, \boldsymbol{x}, h)\hat{\varphi}_b(\eta, \boldsymbol{y}, h)\ d\mu(h) = i\delta_D(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})G_{ba}(\eta, \eta_i), \tag{4.27}$$

za sve $\eta \in I,\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ i $a, b \in \{1, 2\}$, gdje je G matrična Greenova funkcija zadane linearne evolucije.

Razmatralo se nekoliko prijedloga rješenja ove kontradicije:
a) $\hat{\chi}_1$ i $\hat{\chi}_2$ su kompleksna stohastička polja. Ta ideja bi pak trebala biti kontradiktorna s obzirom na upotrebljenu generaliziranu verziju Hubbard-Stratonovichevog integrala (4.11). Tamo $\hat{\chi}_1$ i $\hat{\chi}_2$ stoje na mjestima gdje u matričnoj generaliziranoj verziji stoje realne integracijske varijable;
b) Vjerojatnosna mjera μ od ansambla je kompleksna. Nije jasno kako bi to utjecalo na zahtjev (3.10), odnosno da je vjerojatnosni funkcional od stohastičkog polja $\hat{\delta}_0$ Gausijanskog oblika. Razlog je ne poznavanje ideje kompleksnih mjera;
c) Tumačenje prema kojem se pojavi dodatno stohastičko polje $\hat{\chi}$ je pogrešno, nema dodatnog polja. Takvo tumačenje je direktna posljedica upotrebe integracijske mjere $\mathcal{D}\hat{\varphi}(.)$ iz Pretpostavke 4.1.
Kao što je vidljivo u narednim poglavljima, metoda 3 je u suglasju s prijedlogom pod c), upravo zato što se njome izbjegava tip mjere iz Pretpostavke 4.1.

4.1 Varijacija metode 2 i popratna kontradikcija

Želi se napraviti varijacija metode 2 kojom možemo dobiti korelatore (4.21) i (4.26) bez upotrebe dodatnih identiteta (4.19) i (4.20). Naravno, za tu svrhu je dovoljno odrediti zajednički generirajući funkcional od Fourierovih transformata stohastičkih polja $\hat{\varphi}$ i $\hat{\chi}$, iz kojega direktno, funkcionalnim deriviranjem, možemo odrediti željene korelatore. U [6] je spomenuta ideja da je takve generirajuće funkcionale općenito moguće odrediti odgovarajućom transformacijom generirajućih funkcionala "originalnih" stohastičkih polja, dakle, u ovdašnjem slučaju izraza (4.9) ili (4.15). Međutim, unatoč razumnosti tog postupka, pokazano je na jednostavnijem primjeru da se iz tako izvedenih relacija može deducirati još jedna kontradikcija.

Postupak transformacije generirajućih funkcionala se demonstrira na primjeru vjerojatnosnog funkcionala (3.10) i generirajućeg funkcionala stohastičkog polja $\hat{\delta}_0$,

zbog jednostavnosti. Naime, u tom slučaju se izbjegava rad s dvokomponentnim funkcijama $\hat{\varphi}$, pri čemu je potrebno uvažiti Fourierove transformate obje komponente, a sam postupak je sličan za sve smislene primjere stohastičkih polja. Naposljetku, kontradikcija za ovaj primjer je već dovoljno zabrinjavajuća. Polazi se od generirajućeg funkcionala od $\hat{\delta}_0$:

$$\Psi(J) = \aleph_{\delta_0} \int_\Omega \exp\left(i \int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{x}} \int_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}) B(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) f(\boldsymbol{y}) \right) \mathscr{D} f. \tag{4.28}$$

U obzir su uzeti izraz (3.10) i Pretpostavka 4.1 za slučaj polja $\hat{\delta}_0$, a domena od Ψ se sastoji od nekih realnih funkcija $J\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Uvode se Fourierovi transformati $\tilde{J}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ i $\tilde{B}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\boldsymbol{k}) &:= \int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}, \\ \tilde{B}(|\boldsymbol{k}|) &:= \int_{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}} B(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) e^{-i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Treba primjetiti da je $\tilde{B}$ realna funkcija zato što vrijedi $B(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) = B(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)$, za svaki $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$. Potom, pretpostavlja se da su sve relevantne funkcije takve da vrijedi Fourierova inverzija. Uvrštavanjem inverznog Fourierovog transformata od $\tilde{B}$ u relaciju (3.11) i uređivanjem dobivene jednakosti uz upotrebu Wiener-Khinchinovog teorema za 2-korelatore polja $\hat{\delta}_0$, zaključujemo

$$\tilde{B}(|\boldsymbol{k}|) = \frac{1}{P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)}, \tag{4.30}$$

za svaki Fourierov mod $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$. $\tilde{B}$ je ustvari inverz spektra snage od $\hat{\delta}_0$. Možemo uvrstiti u (4.28) inverzne Fourierove transformate od (4.29) i stohastičkog polja $\hat{\tilde{\delta}}_0$ (relacija (3.14)) kako bi odredili generirajući funkcional od tog polja. Prvi član eksponenta u (4.28) se transformira ovako:

$$\int_{\boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{k}} l(\boldsymbol{k}) \tilde{f}(\boldsymbol{k}), \quad \text{gdje je} \quad l(\boldsymbol{k}) \equiv \frac{\tilde{J}(-\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}, \tag{4.31}$$

za sve J. Jednakost (4.31) je varijanta *Plancherelovog teorema*. U nastavku se koristi pokrata

$$\tilde{f}(\boldsymbol{k}) \equiv \hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{k}, f). \tag{4.32}$$

Sljedeći korak je zamjena integracijske mjere da bi za integraciju mogli koristiti onu supstituciju iz prethodne sekcije. Po analogiji s realnim integralima i prema znanju o funkcionalnim derivacijama, zamjena bi trebala rezultirati dodatnim konstantnim faktorom, ali zbog nejasnoća vezanih uz ovaj tip mjere (Komentar 4.1), zapravo se opet radi o pretpostavci.

Pretpostavka 4.2 Na izmjerivom prostoru (Ω, Σ) vrijedi sljedeća veza između mjera generiranih stohastičkim poljima $\hat{\delta}_0$ i $\hat{\tilde{\delta}}_0$:

$$\int_\Omega ... \mathscr{D} f = \int_\Omega ... \mathscr{D}\hat{\delta}_0(f) = C \int_\Omega ... \mathscr{D}\hat{\tilde{\delta}}_0(f), \tag{4.33}$$

pri čemu je $C \in \mathbb{C}$ kompleksni broj koji ne ovisi o integracijskoj varijabli.

Treba imati na umu da se identična transformacija integracijske mjere događa i u konstanti normiranja pa se brojevi C ponište. Ukupno, generirajući funkcional od stohastičkog polja $\hat{\tilde{\delta}}_0$ je

$$\tilde{\Psi}(l) = \aleph_{\tilde{\delta}_0} \int_\Omega \exp\left(i \int_{\boldsymbol{k}} l(\boldsymbol{k}) \tilde{f}(\boldsymbol{k}) - \frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{k}} \int_{\boldsymbol{q}} \tilde{f}(\boldsymbol{k}) b(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}) \tilde{f}(\boldsymbol{q}) \right) \mathscr{D}\hat{\tilde{\delta}}_0(f), \tag{4.34}$$

gdje se koristi pokrata

$$b(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}) \equiv \frac{\delta_D(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q})}{(2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)}. \tag{4.35}$$

Prema dobivenom, vjerojatnosni funkcional od $\hat{\tilde{\delta}}_0$ je također Gausijanskog oblika. Za potrebe rješavanja integrala (4.34), uvodi se distribucija b^I koja zadovoljava

$$\int_{\boldsymbol{w}} b(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{w}) b^I(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{q}) = \int_{\boldsymbol{w}} \frac{\delta_D(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{w})}{(2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)} b^I(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{q}) = \delta_D(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}). \tag{4.36}$$

Lako je vidjeti da tu jednakost zadovoljava

$$b^I(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}) = (2\pi)^3 \delta_D(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}) P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|) = \left\langle \hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{k}} \, \hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{q}} \right\rangle, \tag{4.37}$$

pri čemu se druga jednakost prepoznaje kao identitet (3.15). Provođenjem sličnog postupka kojim je zaključena formula za generirajući funkcional od $\hat{\varphi}$ (4.15), slijedi

$$\tilde{\Psi}(l) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{k}} l(-\boldsymbol{k}) \, (2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|) \, l(\boldsymbol{k}) \right). \tag{4.38}$$

Izračun 2-korelatora polja $\hat{\tilde{\delta}}_0$ funkcionalnim deriviranjem izraza (4.38), ponovno vodi na zaključak jednakosti (4.37), kako se i priželjkivalo na početku sekcije. Čini se da je sve do ovdje napravljeno ispravno jer se dobivaju konzistentni i ispravni rezultati.

Notacija 4.3 Neka je f kompleksna funkcija, a z kompleksni broj. Realni i imaginarni dio od f se označavaju $\Re f$ i $\Im f$, respektivno. Sa simbolom z^* je označen kompleksni konjugat broja z.

Iz istih ovih izraza se može zaključiti i kontradiktorni rezultat. Primjetimo prvo da vrijedi

$$\hat{\tilde{\delta}}_0(-\boldsymbol{k}, f) = \hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{k}, f)^* \ \text{ i } \ \tilde{J}(-\boldsymbol{k}) = \tilde{J}(\boldsymbol{k})^*, \tag{4.39}$$

u svim točkama pripadnih domena, jer su $\hat{\delta}_0$ i J-ovi realne funkcije. Upotrebom svojstva (4.39) na korelatoru $\left\langle \hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{k}} \, \hat{\tilde{\delta}}_{0,-\boldsymbol{k}} \right\rangle$, zbog jednakosti (4.37) zaključujemo

$$\left\langle \Re \hat{\tilde{\delta}}^2_{0\boldsymbol{k}} \right\rangle + \left\langle \Im \hat{\tilde{\delta}}^2_{0\boldsymbol{k}} \right\rangle = (2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)\delta_D(\mathbf{0}). \tag{4.40}$$

Već je spomenuto kako je jednakost (4.37) sadržana u generirajućem funkcionalu (4.38). Iz istih premisa, dakle (4.38) i (4.39), može se izvesti relacija kontradiktorna relaciji (4.40). Da bi to vidjeli, nastavimo ovako. Lijeva strana jednakosti (4.31) je realna, ali onda je realna i desna strana pa uz zamjenu $l(\boldsymbol{k}) \equiv R(\boldsymbol{k}) - iI(\boldsymbol{k})$, pri čemu R i I predstavljaju realne funkcije*, za prvi integral iz eksponenta u generirajućem funkcionalu $\tilde{\Psi}$ (4.34) vrijedi

$$\int_{\boldsymbol{k}} l(\boldsymbol{k})\tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{\boldsymbol{k}} \left(R(\boldsymbol{k})\Re\tilde{f}(\boldsymbol{k}) + I(\boldsymbol{k})\Im\tilde{f}(\boldsymbol{k}) \right), \tag{4.41}$$

za sve funkcije l. Stoga, uvodi se novi generirajući funkcional Ξ s pravilom

$$\Xi(R, I) := \tilde{\Psi}(R - iI) \tag{4.42}$$

i on je pridružen stohastičkim poljima $\Re\hat{\tilde{\delta}}_0$ i $\Im\hat{\tilde{\delta}}_0$. U to se možemo uvjeriti dokazivanjem odgovarajućih relacija oblika (4.16), npr. korištenjem izraza (4.34) u kombinaciji s Pretpostavkom 4.1 primjenjenom na stohastičko polje $\hat{\tilde{\delta}}_0$. Prema tome, vrijedi

*U sljedećih nekoliko jednadžbi se simbol I koristi kao oznaka za neke realne funkcije i nema veze s konceptom intervala realnih brojeva, koji se kroz cijeli ovaj rad označava s istim tim simbolom.

$$
\begin{aligned}
i^{-2}\Delta^2_{R(\boldsymbol{q})R(\boldsymbol{k})}\Xi(0,0) &= \int_\Omega \Re\hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{k},f)\ \Re\hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{q},f)\ d\mu(f) =: \left\langle \Re\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{k}}\ \Re\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{q}} \right\rangle, \\
i^{-2}\Delta^2_{I(\boldsymbol{q})I(\boldsymbol{k})}\Xi(0,0) &= \int_\Omega \Im\hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{k},f)\ \Im\hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{q},f)\ d\mu(f) =: \left\langle \Im\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{k}}\ \Im\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{q}} \right\rangle,
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

za proizvoljne Fourierove modove $\boldsymbol{k},\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Nadalje treba primjetiti da svojstvo (4.39) implicira

$$
l(-\boldsymbol{k}) \equiv \frac{\tilde{J}(\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3} = \frac{\tilde{J}(-\boldsymbol{k})^*}{(2\pi)^3} = \left(\frac{\tilde{J}(-\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}\right)^* = l(\boldsymbol{k})^*, \tag{4.44}
$$

za funkcije l iz domene od $\tilde{\Psi}$. To znači da pravilo (4.38) od $\tilde{\Psi}$ možemo drugačije zapisati

$$
\tilde{\Psi}(l) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{k}} (2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)\ |l(\boldsymbol{k})|^2\right). \tag{4.45}
$$

Ovaj zapis je povoljan za odrediti pravilo generirajućeg funkcionala Ξ po njegovoj definiciji (4.42):

$$
\Xi(R,I) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{k}} (2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)\left(R(\boldsymbol{k})^2 + I(\boldsymbol{k})^2\right)\right). \tag{4.46}
$$

Primjenom formula (4.43) na izraz (4.46), slijedi

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Re\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{k}}\ \Re\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{q}} \right\rangle &= (2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)\delta_D(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) \\
\left\langle \Im\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{k}}\ \Im\hat{\tilde{\delta}}_{0\boldsymbol{q}} \right\rangle &= (2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)\delta_D(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}),
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

za proizvoljne Fourierove modove $\boldsymbol{k},\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Konačno, iz tih relacija i jednakosti (4.40), zaključuje se

$$
2(2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)\delta_D(\boldsymbol{0}) = (2\pi)^3 P_{\delta_0}(|\boldsymbol{k}|)\delta_D(\boldsymbol{0}), \tag{4.48}
$$

za svaki Fourierov mod $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$, ali to je očito kontradiktorno.

Kontradikcija 4.2 Neka vrijede definicije i oznake iz ovog poglavlja te neka je $F = \{l\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid l \text{ ima svojstva } S\}$, gdje su svojstva S sljedeća:

a) $\int_{\boldsymbol{k}} l(\boldsymbol{k})\hat{\tilde{\delta}}_0(\boldsymbol{k},f) \in \mathbb{R}$, za svaki slučajni događaj $f \in \Omega$,

b) $l(-\boldsymbol{k}) = l(\boldsymbol{k})^*$, za svaki $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$.

Ako generirajući funkcional od $\hat{\tilde{\delta}}_0$ ima pravilo (4.38), s domenom koja je podskup od F, onda je $2 = 1$.

Razmatrala su se dva potencijalna objašnjenja zaključene kontradikcije:

a) Na način opisan u ovoj sekciji nije moguće izvesti ispravan vjerojatnosni funkcional od $\hat{\tilde{\delta}}_0$, koji je potreban u izrazu (4.34). Naime, $\hat{\tilde{\delta}}_0$ je kompleksno stohastičko polje, a vjerojatnosni funkcionali su svojevrsna generalizacija koncepta gustoće vjerojatnosti slučajnih varijabli. U odgovarajućoj matematičkoj literaturi se možemo uvjeriti da općenita formula za Gausijansku gustoću *kompleksnih* slučajnih varijabli izgleda znatno drugačije nego pripadna formula za Gausijansku gustoću *realnih* slučajnih varijabli od kojih se kompleksne sastoje. U kompleksnom slučaju se koristi kompleksno množenje i kompleksna kovarijanca, a uz to je potreban i koncept pseudo-kovarijance. Stoga, možda niti vjerojatnosni funkcionali od $\hat{\delta}_0$ i $\hat{\tilde{\delta}}_0$ nisu u toliko jednostavnom odnosu da možemo jedan izvesti iz drugoga pukim uvrštavanjem (inverznog) Fourierovog transformata.

b) Pretpostavka 4.2 nije točna. Ako je tako, ostaje nejasno koja je ispravna veza između mjera generiranih stohastičkim poljima $\hat{\delta}_0$ i $\hat{\tilde{\delta}}_0$

Dodatno zbunjuje činjenica da je s ovakvom varijacijom metode 2 moguće izvesti nekoliko ispravnih jednakosti. Konkretno, može se zaključiti upravo statistička svojstva (3.16). Čak je moguće dobiti neke relacije vezane uz više redove računa smetnje koje se ovdje računaju tek metodom 3. Razlog ispuštanja tih izračuna je postojanje Kontradikcije 4.2. Smatra se nesigurnim ignorirati demonstriranu kontradikciju, unatoč tome što u ponekim situacijama ne utječe na ispravnost rezultata.

5 Prijedlog strože primjene teorije stohastičkih polja

5.1 Kritika metode 2

U prethodnom poglavlju su uspješno izračunata statistička svojstva (3.16) metodom 2. Pokazano je kako varirati postupak metode 2 da bi mogli direktnije izračunati korelatore u ovisnosti o prostornim skalama. Međutim, putem do tih rezultata istaknute su teškoće pri pronalasku konkretnih definicija nekih matematičkih objekata u literaturi za fiziku, kao i uputa za upravljanje njima. Zbog toga su u izračunima korištene neke pretpostavke, a time se povećava mogućnost pogreške. Zaista, ustanovljena je zaključivost dviju kontradikcija iz relacija korištenih u metodi 2, no iako bi neke od istaknutih pretpostavki mogle biti uzrok, to nije sa sigurnošću utvrđeno.

Daljnja kritika metode 2 se može spoznati u primjerku [5] matematičke literature, u kojem se detaljnije piše o nekim matematičkim objektima i konceptima koji su relevantni za ovaj rad. Prvo, autor komentira mjeru koju označava $\mathscr{D}\boldsymbol{x}$, a koja se pojavljuje u Feynmanovoj *path integral* formuli u literaturi za fiziku. To je upravo tip mjere koja se koristi u metodi 2. Autor tvrdi kako je ta mjera zamišljena kao nešto poput Lebesgueove mjere na nekom izmjerivom prostoru od odgovarajućeg skupa funkcija, no objašnjava kako je poznato da na beskonačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima ne postoji takva mjera, a koja bi imala svojstva priželjkivana u teoriji fizike u kontekstu koje je tekst napisan*.

Nadalje spominje i mjere oblika $g(\boldsymbol{x})\mathscr{D}\boldsymbol{x}$, pri čemu je funkcija g gustoća s obzirom na "mjeru" $\mathscr{D}\boldsymbol{x}$ i ima Gausijanski oblik. Prema Pretpostavci 4.1, taj tip mjere odgovara onoj koju se u prošlom poglavlju označavalo s μ. U [5] ih se tumači kao Gausijanske mjere. Autor tvrdi da postoji dobro razvijena teorija Gausijanskih mjera za beskonačno-dimenzionalne vektorske prostore. Takve mjere se mogu konstruirati kao limesi Gausijanskih mjera na konačno-dimenzionalnim vektorskim prostorima, gdje dimenzija teži u beskonačnost. U konačno-dimenzionalnom slučaju, Lebesgueova mjera može postojati pa takav konstrukt s limesom je matematički korektna verzija heurističkog objekta $g(\boldsymbol{x})\mathscr{D}\boldsymbol{x}$. Potom autor razmatra primjer - Wienerovu Gausijansku mjeru. Iz toga je jasno da upravo na sličan način treba zamjeniti heurističku mjeru iz Pretpostavke 4.1 u metodi 2, kako bi se poboljšala strogost u primjeni teorije stohastičkih polja.

*Kvantna teorija.

Druga vrijedna informacija koja se može naučiti u [5] je sljedeća. U prostorima događaja koje možemo mjeriti Wienerovom Gausijanskom mjerom, sve funkcije koje su diferencijabilne, makar u samo jednoj točki, tvore skup mjere nula. U ovom radu se ne može koristiti Wienerova Gausijanska mjera kakva je opisana u [5], već je potrebna kompliciranija verzija, no onda je izgledno da i u tom slučaju skupovi diferencijabilnih funkcija imaju mjeru nula. Ovo je razlog zašto nije prezentirano izračunavanje statističkih svojstava raspodjele tvari u višim redovima računa smetnje s pomoću metode 2. Doprinosi iz viših redova su generirani nelinearnim članovima u evolucijskim jednadžbama, a oni sadrže parcijalne derivacije po prostornim koordinatama. To znači da su rješenja evolucijskih jednadžbi barem jednom diferencijabilna u prostornim koordinatama, odnosno vjerojatnost "izvlačenja" njih iz ansambla sa spomenutim Wienerovim tipom vjerojatnosne mjere je nula. Kada bi se ovakve tvrdnje nekako empirijski potvrdile, to bi značilo da raspodjele tvari na dovoljno velikim podhorizontnim prostornim skalama u svemiru nisu opisive funkcijama diferencijabilnim po prostornim koordinatama. Nastavak teksta u [5] daje za naslutiti da bi evolucijske jednadžbe trebalo generalizirati na distribucije kako bi se mogla definirati mjera u odnosu na koju skup rješenja ne bi imao mjeru nula, ali to nije zaobilaženje opisanog hendikepa funkcija diferencijabilnih po prostornim koordinatama, on i dalje ostaje. Distribucije se ne razmatraju u ovom radu za tu svrhu.

5.2 Fourier-transformirane evolucijske jednadžbe

Budući da evolucijske jednadžbe nisu pogodne za statističku analizu, čini se da imamo problem. Ipak, promotrimo jednadžbe koje zadovoljavaju odgovarajući Fourierovi transformati. Uvode se Fourierovi transformati poremećaja gustoće tvari i divergencije brzine tvari, dakle funkcije $\delta\colon I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ i $\theta\colon I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, respektivno, s pravilima:

$$\begin{aligned} \delta(\eta, \boldsymbol{k}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \delta_m(\eta, \boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} d\lambda_3(\boldsymbol{x}), \\ \theta(\eta, \boldsymbol{k}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \theta_m(\eta, \boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} d\lambda_3(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Jednadžbe koje zadovoljavaju funkcije δ i θ možemo izvesti iz evolucijskih jednadžbi, naravno, i jedan način je uvrstiti u njih inverzne Fourierove transformate od δ i θ, pritom pretpostavljamo da vrijedi Fourierova inverzija. Uređeni oblik jednadžbi nakon

uvrštavanja možemo isčitati* npr. iz [1] ili [2]:

$$\begin{cases} \partial_0\delta(\eta,\boldsymbol{k}) + \theta(\eta,\boldsymbol{k}) \\ + \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \alpha(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\delta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1) = 0, \\ \dfrac{3}{2}\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2\delta(\eta,\boldsymbol{k}) + \partial_0\theta(\eta,\boldsymbol{k}) + (aH)(\eta)\,\theta(\eta,\boldsymbol{k}) \\ + \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1) = 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

za svaki horizont $\eta \in I$ i Fourierov mod $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$, pritom se pojavljuju funkcije $\alpha, \beta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s pravilima

$$\alpha(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}) := \frac{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}^2} \quad \text{i} \quad \beta(\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}) := \frac{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{q})}{2\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{q}^2}, \tag{5.3}$$

a odgovarajući oblik početnih i rubnih uvjeta, koji slijedi iz (2.6) uz upotrebu (3.8), je

$$\begin{cases} \delta(\eta_i,\boldsymbol{k}) = D_+(\eta_i)\tilde{\delta}_0(\boldsymbol{k}), \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{(početni uvjet)} \\ \theta(\eta_i,\boldsymbol{k}) = -D'_+(\eta_i)\tilde{\delta}_0(\boldsymbol{k}), \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{(početni uvjet)} \\ \lim\limits_{|\boldsymbol{k}|\to\infty} \delta(\eta,\boldsymbol{k}) = 0, \quad \forall \eta \in I, \quad \text{(rubni uvjet)} \\ \lim\limits_{|\boldsymbol{k}|\to\infty} \theta(\eta,\boldsymbol{k}) = 0, \quad \forall \eta \in I, \quad \text{(rubni uvjet)} \end{cases} \tag{5.4}$$

gdje je $\tilde{\delta}_0\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ funkcija s pravilom

$$\tilde{\delta}_0(\boldsymbol{k}) := \int_{\mathbb{R}^3} \delta_0(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\, d\lambda_3(\boldsymbol{x}). \tag{5.5}$$

Rubni uvjeti u (5.4) su svojstvo svakog Fourierovog transformata.

Nazivlje 5.1 Jednadžbe (5.2) se nadalje nazivaju *FT-evolucijske jednadžbe*, gdje "FT" znači "Fourier-transformirane".

Komentar 5.1 Običaj je u kozmologiji funkcije δ i θ također zvati "poremećaj gustoće tvari" i "divergencija brzine tvari", respektivno, bez isticanja činjenice da su to Fourierovi transformati. Ovdje se poštuje to nazivlje ako je zgodno i nezbunjujuće.

FT-evolucijske jednadžbe su opet integro-diferencijalne jednadžbe, u njima os-

*Može se uočiti nekonzistentnost s faktorom $(2\pi)^3$ u nelinearnim članovima. Tomu je tako zbog različitih konvencija za Fourierov transformat.

taje integral po $\mathbb{R}^3$, no budući da se Fourierova transformacija izvodi po prostornim koordinatama (zadnja tri argumenta), nema parcijalnih derivacija po tim koordinatama. I dalje su prisutne parcijalne derivacije po horizontu, ali ne analizira se slučajnost u vremenu već samo u prostoru u odabranom početnom trenutku. Dakle, FT-evolucijske jednadžbe bi trebale biti pogodne za statističku analizu. Pripadna moguća rješenja nisu nužno diferencijabilna po prostornim koordinatama i zato se ne očekuje da su u skupu mjere nula s obzirom na odgovarajuću mjeru Wienerovog tipa.

Ako postoje rješenja takva da njihovi inverzni Fourierovi transformati ne zadovoljavaju evolucijske jednadžbe, to se ne izbjegava u nastavku. Možemo reći da se ovdje FT-evolucijske jednadžbe smatraju generalnijima od evolucijskih jednadžbi.

5.3 Definicije, pretpostavke i tvrdnje

Započinje se s eksplicitnom argumentacijom sadržaja prostora događaja koji se koristi u metodi 3. Već je spomenuto da se radi o skupu funkcija, ali kojih točno? U metodi 3 se radi na bazi FT-evolucijskih jednadžbi pa su funkcije u prostoru događaja kao prvo kompleksne. Stohastička polja se uvode zbog nepoznavanja oblika početnog poremećaja gustoće $\tilde{\delta}_0$, stoga funkcije iz prostora događaja imaju $\mathbb{R}^3$ za domenu. Potom se zahtjeva da postoji inverzni Fourierov transformat tih funkcija, a za to je dovoljno da su funkcije apsolutno integrabilne s obzirom na Lebesgueovu mjeru λ_3:

$$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}, \lambda_3) := \left\{ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^3} |f(\boldsymbol{k})| \, d\lambda_3(\boldsymbol{k}) < \infty \right\}. \tag{5.6}$$

Nadalje, želimo da su inverzni Fourierovi transformati realni. Skup kompleksnih funkcija s takvim svojstvom je:

$$R^*_- := \{ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid f(-\boldsymbol{k}) = f(\boldsymbol{k})^*, \ \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3 \}. \tag{5.7}$$

Za dfiniciju tog skupa je iskorišteno poznato svojstvo Fourierovih transformata realnih funkcija. Konačno, želimo da su funkcije u prostoru događaja neprekidne. Skup neprekidnih kompleksnih funkcija je:

$$C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) := \{ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \mid f \text{ je neprekidno} \}. \tag{5.8}$$

To je najistaknutija odlika funkcija u prostorima mjere s Wienerovom Gausijanskom mjerom. Od svega navedenog se želi konstruirati ansambl s mjerom koja je *slična* Wienerovoj. Wiener je tu mjeru definirao za određeni izmjerivi prostor funkcija s omeđenom domenom, a funkcije ovdje su definirane na $\mathbb{R}^3$. Srećom, Fizikalnim pojednostavnjenjem 2.3 i 2.4 je omogućeno restringiranje domene bez utjecaja na fizikalni značaj rezultata. Ovom teorijom možemo opisati samo strukture tvari dovoljno velikih pod-horizontnih skala pa smo u mogućnosti zanemariti dio domene od kojeg nemamo fizikalne koristi. Geometrijski interpretirano, relevantne prostorne skale su predstavljene Fourierovim modovima unutar specifične sferne ljuske centrirane u $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Budući da se samo želi postići omeđenost domene, dovoljno je ograničiti se na kuglu omeđenu vanjskom sferom ljuske. Na kraju izračuna statističkih svojstava, može se promotriti odgovarajući limes kada domena teži u $\mathbb{R}^3$.

Notacija 5.1 Neka je $k_0 > 0$. Otvorenu kuglu radijusa k_0 u točki $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ se označava B_{k_0}. Zatvarač te kugle s obzirom na standardnu topologiju na $\mathbb{R}^3$ se označava $\overline{B}_{k_0}$.

Definicija 5.1 Neka je dana otvorena kugla B_{k_0} i standardna topologija na $\mathbb{R}^3$, a S neka je skup preslikavanja s domenom na $\mathbb{R}^3$.
Skup restrikcija $S_{|k_0} := \{f|_{\overline{B}_{k_0}} : f \in S\}$ naziva se *kuglasta restrikcija skupa* S. Za skup S se kaže da je *kuglasta ekstenzija od* $S_{|k_0}$.

Konačno, smatra se da za prostor događaja treba odabrati sljedeći skup.

Definicija 5.2 Neka je dana otvorena kugla B_{k_0}.
Uvodi se skup $\Omega := C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \cap R^*_- \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}, \lambda_3)$.
Kuglasta restrikcija $\Omega_{|k_0}$ se naziva *prostor događaja do skale* k_0.

Sljedeći korak je zamjeniti Pretpostavku 4.1 s alternativnom tvrdnjom. Pritom se oponaša jedan teorem vezan uz Wienerovu Gausijansku mjeru, no zato je potrebno uvesti nekoliko definicija.

Definicija 5.3 Neka je dana otvorena kugla B_{k_0}, prostor događaja $\Omega_{|k_0}$ i neka je Σ σ-algebra na $\Omega_{|k_0}$, takva da za svaki $\boldsymbol{k} \in \overline{B}_{k_0}$, slučajni vektor $\hat{\jmath}_{\boldsymbol{k}} \colon \Omega_{|k_0} \to \mathbb{R}^2$, s pravilom $\hat{\jmath}_{\boldsymbol{k}}(f) := f(\boldsymbol{k})$, je izmjeriv u paru σ-algebri $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Tada se stohastičko polje

$\hat{\jmath}\colon \overline{B}_{k_0} \times \Omega_{|k_0} \to \mathbb{R}^2$, s pravilom $\hat{\jmath}(\boldsymbol{k}, f) := f(\boldsymbol{k})$, zove *jednostavno stohastičko polje izmjerivog prostora* $(\Omega_{|k_0}, \Sigma)$.

Komentar 5.2 Vrijedi $\Im\hat{\jmath}(\mathbf{0}, f) = 0$ na cijelom $\Omega_{|k_0}$ jer je izgrađen od skupa R^*_-.

Definicija 5.4 Neka je zadana standardna topologija na $\mathbb{R}^3$ i otvorena kugla B_{k_0}. Također, neka je dan skup $S \equiv \{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, ..., \boldsymbol{k}_n\}$ s $n \in \mathbb{N}$ točaka iz $B_{k_0} - \{(0,0,0)\}$ i skup $P \equiv \{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, ..., \boldsymbol{q}_m\}$ s $m \in \mathbb{N}$ točaka iz ruba ∂B_{k_0}, a $S_- \equiv \{-\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k} \in S\}$ i $P_- \equiv \{-\boldsymbol{q} \mid \boldsymbol{q} \in P\}$ su skupovi sa suprotnim točkama. Tada se uređena familija $H_{2(n+m)} \equiv (\boldsymbol{h} \mid \boldsymbol{h} \in S \cup S_- \cup P \cup P_-)$ naziva *kolekcija hvatišta stupnja* $n+m$, a njeni elementi *hvatišta*.

Komentar 5.3 Ne dopušta se $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ kao hvatište. Razlog za takav odabir je objašnjen kroz dva komentara u ostatku rada.

Definicija 5.5 Neka je dana otvorena kugla B_{k_0}, a H_{2N} neka je kolekcija hvatišta stupnja N.
Za funkciju $f : \overline{B}_{k_0} \to \mathbb{C}$ se kaže da je *adaptirana na kolekciju hvatišta* H_{2N} ako i samo ako je linearno interpolirana između vrijednosti u hvatištima tako da vrijedi $f \in \Omega_{|k_0}$. Tada se f označava s f_N^H.

Komentar 5.4 Definicijom 5.5 se ostavljaju otvorenim pitanja postojanja i jedinstvenosti odgovarajuće linearne interpolacije.

Definicija 5.6 Neka je dana otvorena kugla B_{k_0}, H_{2N} neka je kolekcija hvatišta stupnja N, a $(\Omega_{|k_0}, \Sigma)$ neka je izmjerivi prostor s jednostavnim stohastičkim poljem $\hat{\jmath}$.
Za slučajni vektor $\hat{\jmath}_N^H := (\Re\hat{\jmath}_{\boldsymbol{k}}, \Im\hat{\jmath}_{\boldsymbol{k}} \mid \boldsymbol{k} \in H_{2N})$ se kaže da je *adaptiran na kolekciju hvatišta* H_{2N}.

Slijedi pretpostavka kojom se u metodi 3 zamjenjuje Pretpostavku 4.1. Na njoj se bazira korektnost primjene teorije stohastičkih polja na način ovdje prezentiran. Razlog za baš takav oblik pretpostavke je sljedeći. U [5] i [7] je opisan prostor mjere s Wienerovom Gausijanskom mjerom, a u [9] je naveden teorem koji je recept za integraciju na tom prostoru, upravo kako je i manje eksplicitno objašnjeno u [5]. Opisani prostor mjere je neprimjenjiv u slučaju s kojim se ovdje suočava, ali ipak postoje neke ključne sličnosti. Zato se sa sljedećom pretpostavkom prilagođava spomenuta Wienerova ideja za integraciju. Pritom se koriste prethodno uvedene definicije.

Pretpostavka 5.1 Neka je dana otvorena kugla B_{k_0}. Postoje σ-algebra Σ na prostoru događaja $\Omega_{|k_0}$ i funkcija $\mu\colon \Sigma \to [0,1]$ takve da:
a) $(\Omega_{|k_0}, \Sigma, \mu)$ je vjerojatnosni prostor,
b) za svaki niz kolekcija hvatišta $(H_{2N}|N \in \mathbb{N})$ i proizvoljno preslikavanje $F\colon \Omega_{|k_0} \to \mathbb{C}$ izmjerivo u paru σ-algebri $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, Lebesgueov integral od F zadovoljava

$$\int_{\Omega_{|k_0}} F(f)\, d\mu(f) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{4N}} F_N(x)\, g_{\mathfrak{j}_N^H}(x)\, d\lambda_{4N}(x), \tag{5.9}$$

gdje je $F_N\colon \mathbb{R}^{4N} \to \mathbb{C}$ funkcija određena relacijom

$$F_N\left(\hat{\mathfrak{j}}_N^H(f_N^H)\right) = F\left(f_N^H\right), \tag{5.10}$$

za svaku funkciju f_N^H adaptiranu na H_{2N}, a $g_{\mathfrak{j}_N^H}$ je gustoća slučajnog vektora $\hat{\mathfrak{j}}_N^H$ adaptiranog na H_{2N}, oblika je

$$g_{\mathfrak{j}_N^H}(x) = \aleph_{\mathfrak{j}_N^H} \exp\left(-\frac{1}{2} x \cdot \mathrm{var}\left(\hat{\mathfrak{j}}_N^H\right)^{-1} x\right), \tag{5.11}$$

za proizvoljno zadanu realnu, invertibilnu, $4N \times 4N$ matricu varijance $\mathrm{var}\left(\hat{\mathfrak{j}}_N^H\right)$, dok je $\aleph_{\mathfrak{j}_N^H}$ prikladna konstanta normiranja.

Komentar 5.5 Simbol "$\cdot$" predstavlja operaciju skalarnog množenja uređenih familija realnih brojeva.
Nadalje, možemo primjetiti kako se Pretpostavkom 5.1 nalaže da je moguće izračunati integral po $\Omega_{|k_0}$ pokrivanjem neprebrojivog skupa $\overline{B}_{k_0}$ s prebrojivo beskonačno mnogo hvatišta. To znači da neke točke iz $\overline{B}_{k_0}$ ostaju nepokrivene čak i limesu. Ovisi o (proizvoljnom) izboru niza kolekcija hvatišta koje će točke iz $\overline{B}_{k_0}$ ostati nepokrivene. Upravo zbog ove slobode su kolekcije hvatišta definirane tako da ne sadrže $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ (vidi Komentar 5.3). Razlog zašto je baš ta točka odabrana je objašnjen u jednom od narednih komentara.

Ovime je integral po skupu funkcija, prostoru događaja, sveden na višestruki integral po realnim brojevima. Konačni akt ove sekcije je povezati uvedene matematičke ideje s kozmološkim jednadžbama. Tu vezu se iskazuje s još jednim nizom definicija.

Definicija 5.7 Neka je zadan zatvoreni interval realnih brojeva I, potom otvorena kugla B_{k_0} i kuglasta restrikcija $\Omega_{|k_0}$. Nadalje, $F\colon I \times \overline{B}_{k_0} \to \mathbb{C}$ neka je funkcija takva

da za svaki $\eta \in I$ postoji funkcija $f \in \Omega_{|k_0}$ s pravilom $f(\boldsymbol{k}) = F(\eta, \boldsymbol{k})$.
Tada se kaže da je F *po trenucima u* $\Omega_{|k_0}$.

Definicija 5.8 Neka je zadan zatvoreni interval realnih brojeva I, potom otvorena kugla B_{k_0}, kuglasta restrikcija $\Omega_{|k_0}$, a $f\colon I \times \overline{B}_{k_0} \to \mathbb{C}$ neka je funkcija po trenucima u $\Omega_{|k_0}$.
Za neku funkciju $F\colon I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ se kaže da je *proširenje od* f *u* Ω ako i samo ako vrijedi $F(\eta, \boldsymbol{k}) = f(\eta, \boldsymbol{k})$ za svaki $(\eta, \boldsymbol{k}) \in I \times \overline{B}_{k_0}$. Tada se koristi oznaka $f^F \equiv F$.
Specijalno, isti pojam se definira i za slučaj kada je $I = \emptyset$.

Definicija 5.9 Neka je zadan početni sugibajući horizont η_i i zatvoreni interval $I \equiv [\eta_i, \eta_s] \subset \mathbb{R}$. Također, neka su zadane FT-evolucijske jednadžbe s početnim i rubnim uvjetima (5.4) na domeni $I \times \mathbb{R}^3$.
Tada se kaže da je *zadana FT-evolucija raspodjele tvari* na domeni $I \times \mathbb{R}^3$.

Notacija 5.2 Neka je Γ neprazni skup, a $\hat{a}$ stohastičko polje na nekom vjerojatnosnom prostoru od Γ. Put od $\hat{a}$ generiran slučajnim događajem $\gamma \in \Gamma$ se označava simbolom ${}_\gamma a$.

Definicija 5.10 Neka je zadana otvorena kugla B_{k_0}, a $(\Omega_{|k_0}, \Sigma, \mu)$ neka je ansambl od prostora događaja $\Omega_{|k_0}$. Nadalje, neka je zadana FT-evolucija raspodjele tvari na domeni $I \times \mathbb{R}^3$, s početnim sugibajućim horizontom η_i, faktorom rasta D_+ i početnim poremećajem gustoće tvari $D_+(\eta_i)\tilde{\delta}_0$.
Dublet strukture je naziv za dva stohastička polja $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2\colon I \times \overline{B}_{k_0} \times \Omega_{|k_0} \to \mathbb{R}^2$ čiji putevi ${}_f\phi_1$ i ${}_f\phi_2$, generirani proizvoljno odabranim slučajnim događajem $f \in \Omega_{|k_0}$, imaju sljedeće svojstvo: za svaki odabir početnog poremećaja gustoće tvari kao proširenja $f^{D_+(\eta_i)\tilde{\delta}_0}$ u Ω, postoji par proširenja ${}_f\phi_1^\delta,\ {}_f\phi_2^\theta$ u Ω koji zadovoljava FT-evolucijske jednadžbe u svakoj točki skupa $I \times \mathbb{R}^3$.

Statistička svojstva dubleta strukture $\hat{\phi}_1$ i $\hat{\phi}_2$ su ona koja želimo izračunati jer proširenja njihovih puteva su rješenja FT-evolucijskih jednadžbi. Pretpostavka 5.1 nam teoretski omogućuje izračun statističkih svojstava ako su zadane matrice varijance slučajnih vektora adaptiranih na kolekcije hvatišta iz odabranog niza.

Posljednja izmjena u ovom prijedlogu strožeg pristupa se odnosi na način sustavnog generiranja korelatora stohastičkih polja. U metodi 2 se u tu svrhu funkcionalno

derivirao generirajući funkcional. U matematičkoj literaturi je češća upotreba karakteristične funkcije umjesto generirajućeg funkcionala i zato se u nastavku odabire isto, no u tom slučaju se više ne koristi funkcionalno deriviranje. Korelatori *realnih* slučajnih varijabli su obične derivacije karakterističnih funkcija. U pretraženoj literaturi nije pronađeno kako su povezane karakteristične funkcije i korelatori *kompleksnih* slučajnih varijabli, ali je utvrđeno da se ta veza može iskazati Wirtingerovim derivacijama.

Tvrdnja 5.1 Neka je (Γ, Σ, μ) vjerojatnosni prostor i neka je na njemu dano $N \in \mathbb{N}$ slučajnih vektora $\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_N \colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$. Također, neka je $Z_N \colon \underbrace{\mathbb{R}^2 \times ... \times \mathbb{R}^2}_{N \text{ puta}} \to \mathbb{C}$ zajednička karakteristična funkcija danih slučajnih vektora, uz notaciju

$$Z_N(J_1, J_2, ..., J_N) := \int_\Gamma \exp\left(i \sum_{l=1}^{N} [J_l \cdot \hat{a}_l(\gamma)]\right) d\mu(\gamma). \tag{5.12}$$

Tada, za svaki $n \in \mathbb{N}$, proizvoljni n-korelator zadanih slučajnih vektora zadovoljava

$$\langle \hat{a}_{j_1} \hat{a}_{j_2} ... \hat{a}_{j_n} \rangle = \frac{2^n}{i^n} \partial^n_{J^*_{j_n} ... J^*_{j_2} J^*_{j_1}} Z_N(0), \tag{5.13}$$

gdje su $j_1, j_2, ..., j_n \in \{1, 2, ..., N\}$, a derivacije su Wirtingerove.

Prijedlog dokaza Uvodi se praktična notacija, $J_l \equiv \left(J_l^{(1)}, J_l^{(2)}\right)$ i $\hat{a}_l \equiv \left(\hat{a}_l^{(1)}, \hat{a}_l^{(2)}\right)$, za svaki $l \in \{1, 2, ..., N\}$. Zapišimo Z_N na način pogodniji za izvrednjavanje Wirtingerovih derivacija:

$$\begin{aligned} Z_N(J_1, J_2, ..., J_N) &:= \int_\Gamma \exp\left(i \sum_{l=1}^{N} \sum_{A=1}^{2} J_l^{(A)} \hat{a}_l^{(A)}(\gamma)\right) d\mu(\gamma) \\ &=: \left\langle \exp\left(i \sum_{l=1}^{N} \sum_{A=1}^{2} J_l^{(A)} \hat{a}_l^{(A)}\right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Po definiciji Wirtingerovih derivacija slijedi:

$$\begin{aligned} \partial_{J^*_{j_1}} Z_N(J_1, J_2, ..., J_N) &= \frac{i}{2} \left\langle \exp\left(i \sum_{l=1}^{N} [J_l \cdot \hat{a}_l]\right) \hat{a}_{j_1} \right\rangle, \\ \partial^2_{J^*_{j_2} J^*_{j_1}} Z_N(J_1, J_2, ..., J_N) &= \frac{i^2}{2^2} \left\langle \exp\left(i \sum_{l=1}^{N} [J_l \cdot \hat{a}_l]\right) \hat{a}_{j_1} \hat{a}_{j_2} \right\rangle. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Izračunamo li još i treću derivaciju

$$\partial^3_{J^*_{j_3} J^*_{j_2} J^*_{j_1}} Z_N(J_1, J_2, ..., J_N) = \frac{i^3}{2^3} \left\langle \exp\left(i \sum_{l=1}^{N} [J_l \cdot \hat{a}_l] \right) \hat{a}_{j_1} \hat{a}_{j_2} \hat{a}_{j_3} \right\rangle , \tag{5.16}$$

možemo uočiti jasan uzorak na temelju kojeg zaključujemo

$$\begin{gathered} \partial^n_{J^*_{j_n} \dots J^*_{j_2} J^*_{j_1}} Z_N(J_1, J_2, ..., J_N) = \frac{i^n}{2^n} \left\langle \exp\left(i \sum_{l=1}^{N} [J_l \cdot \hat{a}_l] \right) \hat{a}_{j_1} \hat{a}_{j_2} ... \hat{a}_{j_n} \right\rangle , \\ \frac{2^n}{i^n} \partial^n_{J^*_{j_n} \dots J^*_{j_2} J^*_{j_1}} Z_N(0) = \langle \hat{a}_{j_1} \hat{a}_{j_2} ... \hat{a}_{j_n} \rangle . \end{gathered} \tag{5.17}$$

■

Dakle, Tvrdnjom 5.1 je objašnjen novi način sustavnog generiranja korelatora i primjenjuje se u sljedećem poglavlju.

6 Statistička svojstva raspodjele tvari - metoda 3

Za razliku od poglavlja 4, ovdje se nastavlja u prvi viši red računa smetnje, ali na FT-evolucijskim jednadžbama. U prošlom poglavlju je argumentirano zašto se smatra da je takav način matematički korektan. Neki koraci metode 3 su slični onima u metodi 2, no matematički objekti su drugačiji.

Započinje se uz standardne napomene. Neka je zadana FT-evolucija raspodjele tvari na domeni $I \times \mathbb{R}^3$, s početnim sugibajućim horizontom η_i, faktorom rasta D_+ i skaliranim početnim poremećajem gustoće tvari $\tilde{\delta}_0$. Nadalje, neka je zadana otvorena kugla B_{k_0}, a $(\Omega_{|k_0}, \Sigma, \mu)$ neka je ansambl od prostora događaja $\Omega_{|k_0}$ do skale k_0, takav da na njemu vrijedi Pretpostavka 5.1. Dublet strukture su $\hat{\phi}_1$ i $\hat{\phi}_2$.

Notacija 6.1 Neka je $N \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}^{8N}$.
Uvodi se notacija $x \equiv (x_{-N}, x_{-N+1}, ..., x_{-1}, x_1, ..., x_N)$, gdje je $x_l \equiv (x_{1(l)}, x_{2(l)})$, za svaki $l \in \{-N, -N+1, ..., -1, 1, ..., N\}$, a $x_{a(l)} \equiv (x^{(1)}_{a(l)}, x^{(2)}_{a(l)})$, za svaki $a \in \{1, 2\}$ i l. Očito je $x^{(A)}_{a(l)} \in \mathbb{R}$ za svaki $A \in \{1, 2\}$, a i l.

Od interesa su statistička svojstva dubleta strukture. Neka je $(H_{2n} \mid n \in \mathbb{N})$ odabrani niz kolekcija hvatišta na $\overline{B}_{k_0}$. Uvodi se zajednička karakteristična funkcija $Z_{\eta N}$ od dubleta strukture u hvatištima iz kolekcije $H_{2N} \equiv (\boldsymbol{k}_{-N}, \boldsymbol{k}_{-N+1}, ..., \boldsymbol{k}_{-1}, \boldsymbol{k}_1, ..., \boldsymbol{k}_N)$, za neki $N \in \mathbb{N}$ i $\eta \in I$:

$$Z_{\eta N}(W) := \int_{\Omega_{|k_0}} \exp\left(i \sum_{\substack{l=-N \\ l \neq 0}}^{N} \sum_{a=1}^{2} \left(W_{a(l)} \cdot \hat{\phi}_a(\eta, \boldsymbol{k}_l, f) \right) \right) d\mu(f), \tag{6.1}$$

za svaki $W \in \mathbb{R}^{8N}$. Prema Pretpostavci 5.1, integral po prostoru događaja $\Omega_{|k_0}$ možemo rastaviti po nizu kolekcija hvatišta $(H_{2n} \mid n \in \mathbb{N})$. Pritom su potrebne gustoće vjerojatnosti slučajnih vektora adaptiranih na kolekcije hvatišta iz niza. Međutim, ti slučajni vektori nisu direktno korisni za daljne korake, želi se integral rastaviti s pomoću izvornih članova. Kako bi se to postiglo, treba primjetiti sljedeće. Očito želimo za početni uvjet $\tilde{\delta}_0 \in \Omega$. Stoga, po definiciji postoji slučajni događaj $f \in \Omega_{|k_0}$ takav da je $\tilde{\delta}_0 \equiv {}_f\mathrm{J}^{\tilde{\delta}_0}$, dakle proširenje puta jednostavnog stohastičkog polja u Ω. Možemo zadati linearnu evoluciju raspodjele tvari na domeni $I \times \mathbb{R}^3$, s istim faktorom rasta D_+ i sa skaliranim početnim poremećajem δ_0, koji je inverzni Fourierov transformat od $\tilde{\delta}$. S definicijskim izrazom (3.29) su onda određeni izvorni članovi ϵ_1

i ϵ_2. Uvode se Fourierovi transformati $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_1(\boldsymbol{k}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_1(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \, d\lambda_3(\boldsymbol{x}), \\ \tilde{\epsilon}_2(\boldsymbol{k}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon_2(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \, d\lambda_3(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Budući da su po definiciji izvorni članovi direktno proporcionalni δ_0, vrijedi $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2 \in \Omega$. Štoviše, tada postoje dva stohastička polja $\hat{\varepsilon}_1$ i $\hat{\varepsilon}_2$ direktno proporcionalna $\hat{\jmath}$, a da je $\tilde{\epsilon}_1 \equiv {}_f\varepsilon_1^{\tilde{\epsilon}_1}$ i $\tilde{\epsilon}_2 \equiv {}_f\varepsilon_2^{\tilde{\epsilon}_2}$. U metodi 3 se upravo $\hat{\varepsilon}_1$ i $\hat{\varepsilon}_2$ smatraju stohastičkim verzijama od $\tilde{\epsilon}_1$ i $\tilde{\epsilon}_2$. Od tih polja se za svaki H_{2N} može sagraditi slučajni vektor $\hat{\varepsilon}_N^H \colon \Omega_{|k_0} \to \mathbb{R}^{8N}$, s pravilom

$$\hat{\varepsilon}_N^H(f) := \left(\Re\hat{\varepsilon}_{1\boldsymbol{k}}(f), \Im\hat{\varepsilon}_{1\boldsymbol{k}}(f), \Re\hat{\varepsilon}_{2\boldsymbol{k}}(f), \Im\hat{\varepsilon}_{2\boldsymbol{k}}(f) \mid \boldsymbol{k} \in H_{2N}\right). \tag{6.3}$$

S tim na umu, integrale po $\Omega_{|k_0}$ možemo rastaviti po odabranom nizu kolekcija hvatišta, no pritom koristeći gustoće vjerojatnosti slučajnih vektora $\hat{\varepsilon}_N^H$, za svaki $N \in \mathbb{N}$. Te gustoće su također Gausijanske:

$$g_{\varepsilon_N^H}(x) = \aleph_{\varepsilon_N^H} \exp\left(-\frac{1}{2} x \cdot \operatorname{var}\left(\hat{\varepsilon}_N^H\right)^{-1} x\right), \tag{6.4}$$

za svaki $x \in \mathbb{R}^{8N}$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} Z_{\eta N}(W) = \lim_{n\to\infty} \aleph_{\varepsilon_n^H} \int_{\mathbb{R}^{8n}} \exp\left(i \sum_{\substack{l=-N \\ l\neq 0}}^{N} \sum_{a=1}^{2} \left(W_{a(l)} \cdot \phi_{a\eta\boldsymbol{k}_l n}(x)\right)\right) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2} x \cdot \operatorname{var}\left(\hat{\varepsilon}_n^H\right)^{-1} x\right) d\lambda_{8n}(x). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Funkcije $\phi_{a\eta\boldsymbol{k}_l n} \colon \mathbb{R}^{8n} \to \mathbb{R}^2$ su nepoznate, za svaki $a \in \{1, 2\}$, $\boldsymbol{k}_l \in H_{2N}$ i $n \in \mathbb{N}$ te odabrani $\eta \in I$, ali znamo da moraju zadovoljavati relacije

$$\phi_{a\eta\boldsymbol{k}_l n}\left(\hat{\varepsilon}_n^H(f_n^H)\right) = \hat{\phi}_a\left(\eta, \boldsymbol{k}_l, f_n^H\right), \tag{6.6}$$

za svaku funkciju f_n^H adaptiranu na kolekciju hvatišta H_{2n}. Narednih nekoliko redaka se posvećuje rasvjetljavanju doprinosa tih funkcija.

Uvodi se još jedna pretpostavka na koju se oslanja cijelokupni ostatak izračuna.

Pretpostavka 6.1 Neka je zadana FT-evolucija raspodjele tvari na domeni $I \times \mathbb{R}^3$, s početnim horizontom η_i. Neka je zadana i linearna evolucija raspodjele tvari na istoj

domeni, s istim faktorom rasta, s početnim poremećajem gustoće tvari koji je inverzni Fourierov transformat od onog iz zadane FT-evolucije i s izvornim članovima ϵ_1, ϵ_2. Naposljetku, neka su $\tilde{\epsilon}_1$ i $\tilde{\epsilon}_2$ Fourierovi transformati izvornih članova.
Rješenja jednadžbi

$$\begin{cases} \partial_0\delta(\eta,\boldsymbol{k}) + \theta(\eta,\boldsymbol{k}) \\ + \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \alpha(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\delta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1) = \delta_D(\eta-\eta_i)\tilde{\epsilon}_1(\boldsymbol{k}), \\ \dfrac{3}{2}\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2\delta(\eta,\boldsymbol{k}) + \partial_0\theta(\eta,\boldsymbol{k}) + (aH)(\eta)\,\theta(\eta,\boldsymbol{k}) \\ + \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1) = \delta_D(\eta-\eta_i)\tilde{\epsilon}_2(\boldsymbol{k}), \end{cases} \tag{6.7}$$

s početnim i rubnim uvjetima iz zadane FT-evolucije, ekvivalentna su rješenjima zadane FT-evolucije.

Potom se uvode dva niza funkcija, $\left(\gamma_{1N}\colon \overline{B}_{k_0}\times\overline{B}_{k_0}\to\mathbb{R} \mid N\in\mathbb{N}\right)$ i $\left(\gamma_{2N}\colon \overline{B}_{k_0}\times\overline{B}_{k_0}\to\mathbb{R} \mid N\in\mathbb{N}\right)$ u kojima svaki član ima svojstvo

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{l,j=-N\\ l,j\neq 0}}^{N} \gamma_{1N}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_l)\delta_{\boldsymbol{k}_j,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_l}\,\delta(\eta,\boldsymbol{k}_l)\theta(\eta,\boldsymbol{k}_j) \\ = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \alpha(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\delta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1), \\ \displaystyle\sum_{\substack{l,j=-N\\ l,j\neq 0}}^{N} \gamma_{2N}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_l)\delta_{\boldsymbol{k}_j,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_l}\,\theta(\eta,\boldsymbol{k}_l)\theta(\eta,\boldsymbol{k}_j) \\ = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1), \end{cases} \tag{6.8}$$

za rješenja δ i θ od zadane FT-evolucije te pritom oba niza konvergiraju u funkcije $\gamma_{1k_0}\colon \overline{B}_{k_0}\times\overline{B}_{k_0}\to\mathbb{R}$ i $\gamma_{2k_0}\colon \overline{B}_{k_0}\times\overline{B}_{k_0}\to\mathbb{R}$, respektivno, koje zadovoljavaju relacije

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\overline{B}_{k_0}} \gamma_{1k_0}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1)\delta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1) \\ = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \alpha(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\delta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1), \\ \displaystyle\int_{\overline{B}_{k_0}} \gamma_{2k_0}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1) \\ = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \beta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}_1)\theta(\eta,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\, d\lambda_3(\boldsymbol{k}_1), \end{cases} \tag{6.9}$$

sve to za svaki uređeni par $(\eta, \boldsymbol{k}) \in I \times \overline{B}_{k_0}$. U (6.8) se sumira po hvatištima iz H_{2N}. Budući da se za potrebe izračuna statističkih svojstava raspodjele tvari uzima u obzir beskonačno mnogo ispravno zadanih FT-evolucija raspodjele tvari, onda nije važno mogu li se ti nizovi praktično odrediti, već samo postoje* li. Ovdje se pretpostavlja da postoje. Nadalje, prisjetimo se diferencijalnog preslikavanja L_η iz (3.18) i njemu pridružene matrice (3.19). Također, objašnjeno je da vrijedi $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2 \in \Omega$ pa postoji $f \in \Omega_{|k_0}$ takav da $\tilde{\epsilon}_1 \equiv {}_f\varepsilon_1^{\tilde{\epsilon}_1}$ i $\tilde{\epsilon}_2 \equiv {}_f\varepsilon_2^{\tilde{\epsilon}_2}$. To znači da prema Pretpostavci 6.1, definiciji dubleta strukture i svojstvima (6.8), za svaki $(\eta, \boldsymbol{k}) \in I \times \overline{B}_{k_0}$ te proizvoljnu adaptiranu funkciju f_n^H, može se pisati

$$\begin{aligned} &\delta_D(\eta - \eta_i)\hat{\varepsilon}_a\left(\boldsymbol{k}, f_n^H\right) = \delta_D(\eta - \eta_i)\ {}_{f_n^H}\varepsilon_a(\boldsymbol{k}) \\ &= \sum_{b=1}^{2} L_{\eta ab}\ {}_{f_n^H}\phi_a(\eta, \boldsymbol{k}) + \sum_{\substack{l,j=-n \\ l,j\neq 0}}^{n} \gamma_{an}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{h}_l)\delta_{\boldsymbol{h}_j, \boldsymbol{k}-\boldsymbol{h}_l}\ {}_{f_n^H}\phi_a(\eta, \boldsymbol{h}_l)\ {}_{f_n^H}\phi_2(\eta, \boldsymbol{h}_j), \end{aligned} \tag{6.10}$$

pri čemu je $a \in \{1, 2\}$, a u drugoj sumi se sumira po hvatištima iz H_{2n}. S ovime i relacijama (6.6) možemo primjetiti niz jednakosti:

$$\begin{aligned} \phi_{a\eta \boldsymbol{k}_l n}\left(\hat{\varepsilon}_{1\boldsymbol{h}_{-n}}(f_n^H), \hat{\varepsilon}_{2\boldsymbol{h}_{-n}}(f_n^H), \hat{\varepsilon}_{1\boldsymbol{h}_{-n+1}}(f_n^H), ..., \hat{\varepsilon}_{2\boldsymbol{h}_n}(f_n^H)\right) &= \hat{\phi}_a\left(\eta, \boldsymbol{k}_l, f_n^H\right), \\ \phi_{a\eta \boldsymbol{k}_l n}\left({}_{f_n^H}\varepsilon_1(\boldsymbol{h}_{-n}), {}_{f_n^H}\varepsilon_2(\boldsymbol{h}_{-n}), {}_{f_n^H}\varepsilon_1(\boldsymbol{h}_{-n+1}), ..., {}_{f_n^H}\varepsilon_2(\boldsymbol{h}_n)\right) &= \hat{\phi}_a\left(\eta, \boldsymbol{k}_l, f_n^H\right), \\ \tilde{\Phi}_{a\eta \boldsymbol{k}_l n}\left({}_{f_n^H}\phi_1(\eta, \boldsymbol{h}_{-n}), ..., \partial_0\left[{}_{f_n^H}\phi_1\right](\eta, \boldsymbol{h}_{-n}), ...\right) &= \hat{\phi}_a\left(\eta, \boldsymbol{k}_l, f_n^H\right), \\ \tilde{\Phi}_{a\eta \boldsymbol{k}_l n}\left({}_{f_n^H}\phi_1(\eta, \boldsymbol{h}_{-n}), ..., \partial_0\left[{}_{f_n^H}\phi_1\right](\eta, \boldsymbol{h}_{-n}), ...\right) &= {}_{f_n^H}\phi_a(\eta, \boldsymbol{k}_l), \\ \Phi_{aln}\left({}_{f_n^H}\phi_1(\eta, \boldsymbol{h}_{-n}), {}_{f_n^H}\phi_2(\eta, \boldsymbol{h}_{-n}), ..., {}_{f_n^H}\phi_2(\eta, \boldsymbol{h}_n)\right) &= {}_{f_n^H}\phi_a(\eta, \boldsymbol{k}_l). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Funkcije $\tilde{\Phi}_{a\eta \boldsymbol{k}_l n}\colon \underbrace{\mathbb{R}^2 \times ... \times \mathbb{R}^2}_{8n \text{ puta}} \to \mathbb{R}^2$ se uvode kao one koje treba komponirati s putevima ${}_{f_n^H}\phi_1, {}_{f_n^H}\phi_2$ dubleta strukture i njihovim derivacijama $\partial_0\left[{}_{f_n^H}\phi_1\right], \partial_0\left[{}_{f_n^H}\phi_2\right]$ da bi se dobila desna strana iz relacija (6.6), ali već iz predzadnjeg retka u (6.11) se vidi da je za $n \geq N$ moguće uvesti jednostavnije funkcije koje ne treba komponirati s derivacijama puteva: $\Phi_{aln}\colon \underbrace{\mathbb{R}^2 \times ... \times \mathbb{R}^2}_{4n \text{ puta}} \to \mathbb{R}^2$, s pravilom

$$\Phi_{aln}\left(x_{1(-n)}, x_{2(-n)}, x_{1(-n+1)}, ..., x_{2(-1)}, x_{1(1)}, ..., x_{2(n)}\right) := x_{a(l)}, \tag{6.12}$$

*Zbog Kroneckerovih simbola u svojstvima (6.8), čini se da će takva dva niza funkcija postojat ako se, između ostalog, kolekcije hvatišta izaberu kao neke kristalne rešetke. Taj detalj se ovdje ne istražuje.

za svaki $a \in \{1,2\}$, $l \in \{-N,-N+1,...,-1,1,...,N\}$ i $n \geq N$. Dakle, umjesto određivanja funkcija $\phi_{a\eta \boldsymbol{k}_l n}$, može se transformirati integral (6.5) algoritmom supstitucije tako da se u njemu pojave funkcije Φ_{aln}. Odgovarajuće supstitucije su oblika relacija (6.10), međutim diferencijalno preslikavanje L_η unosi derivacije koje bi u supstitucijama djelovale na realne brojeve, a to nema smisla. Ipak, istaknuto je kako iz jednakosti (6.11) proizlazi da je moguće izbjeći komponiranje s derivacijama puteva unatoč tome što se one pojavljuju u relacijama (6.10), stoga, derivacije puteva se nekako ponište unutar funkcija $\phi_{a\eta \boldsymbol{k}_l n}$ nakon kompozicije. Zbog toga se predlaže da je moguće zamjeniti diferencijalni dio od L_η s proizvoljnim algebarskim članovima bez utjecaja na rezultat integrala u (6.5). U pogodnom dijelu izračuna, diferencijalni dio se može vratiti natrag u matematičke izraze. U tu svrhu, uvodi se matrica

$$\tilde{L}_\eta := \begin{bmatrix} ... & 1 \\ \frac{3}{2}\Omega_m(\eta)\left[(aH)(\eta)\right]^2 & (aH)(\eta) + ... \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{L}_{\eta 11} & \tilde{L}_{\eta 12} \\ \tilde{L}_{\eta 21} & \tilde{L}_{\eta 22} \end{bmatrix}, \tag{6.13}$$

za svaki $\eta \in I$, gdje "..." predstavljaju neke algebarske članove, tj. realne brojeve. Od te matrice je zgodno za svaki $N \in \mathbb{N}$ sagraditi $8N \times 8N$ realnu matricu $\mathcal{L}_{\eta N}$ tako da je

$$\mathcal{L}^{(AB)}_{\eta N a(l) b(j)} := \tilde{L}_{\eta ab}\delta_{lj}\delta_{AB} \tag{6.14}$$

A,B-ti element u a,b-tom 2×2 dijagonalnom bloku l,j-tog 4×4 bloka, za svaki $A,B,a,b \in \{1,2\}$ i $l,j \in \{-N,-N+1,...,-1,1,...,N\}$. Konačno, po uzoru na relacije (6.10), mogu se uvesti supstitucije

$$x_{a(l)} \equiv \sum_{b=1}^{2} \tilde{L}_{\eta ab} x'_{b(l)} + \sum_{\substack{j,m=-n \\ j,m\neq 0}}^{n} \gamma_{an}(\boldsymbol{h}_l, \boldsymbol{h}_j)\delta_{\boldsymbol{h}_m, \boldsymbol{h}_l - \boldsymbol{h}_j} x'_{a(j)} x'_{2(m)}, \tag{6.15}$$

za svaki $a \in \{1,2\}$ i $\boldsymbol{h}_l \in H_{2n}$, gdje se pritom zamjene vrše na način

$$x^{(1)}_{1(l)} \to (x')^{(1)}_{2(l)}, \quad x^{(2)}_{1(l)} \to (x')^{(2)}_{2(l)}, \quad x^{(1)}_{2(l)} \to (x')^{(1)}_{1(l)}, \quad x^{(2)}_{2(l)} \to (x')^{(2)}_{1(l)}. \tag{6.16}$$

Komentar 6.1 U Komentarima 5.3 i 5.5 je istaknuto da je $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ isključena iz svih kolekcija hvatišta. Razlog zašto je baš ta uređena trojka izbačena je ova transformacija integrala. Budući da je ta nula sama sebi suprotna točka, ona mora biti ili u svim kolekcijama hvatišta ili u nijednoj, a ako jest element kolekcija hvatišta, ova

transformacija rezultira nepovoljnim predfaktorom u integrandu koji bi zakomplicirao integraciju.

Supstitucije (6.15) su nezgrapno dugačke pa se koristi matrična generalizirana varijanta Hubbard-Stratonovichevog integrala iz [8] za Gausijanski faktor u integralu (6.5):

$$\begin{aligned}
&\aleph_{\varepsilon_n^H} \exp\left(-\frac{1}{2}x \cdot \mathrm{var}\left(\hat{\varepsilon}_n^H\right)^{-1} x\right) = \\
&= \aleph_{\varepsilon_n^H} \sqrt{\frac{|\mathrm{var}\left(\hat{\varepsilon}_n^H\right)|}{(2\pi)^{8n}}} \int_{\mathbb{R}^{8n}} \exp\left(-\frac{1}{2}y \cdot \mathrm{var}(\hat{\varepsilon}_n^H)y + i(x \cdot y)\right) \, d\lambda_{8n}(y) \\
&= \aleph'_{\varepsilon_n^H} \int_{\mathbb{R}^{8n}} \exp\left(-\frac{1}{2}y \cdot \mathrm{var}(\hat{\varepsilon}_n^H)y + i(x \cdot y)\right) \, d\lambda_{8n}(y).
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Potom, nakon provođenja algoritma supstitucije, uvodi se za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $S_n \colon \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{8n \text{ puta}} \to i\mathbb{R}$, s pravilom

$$\begin{aligned}
&S_n\left(x_{1(-n)}, x_{2(-n)}, x_{1(-n+1)}, \ldots, x_{2(-1)}, x_{1(1)}, \ldots, x_{2(n)}, y_{1(-n)}, \ldots, y_{2(n)}\right) := \\
&i \sum_{\substack{l,j,m=-n \\ l,j,m\neq 0}}^{n} \sum_{a=1}^{2} \gamma_{an}(\boldsymbol{h}_l, \boldsymbol{h}_j)\delta_{\boldsymbol{h}_m, \boldsymbol{h}_l - \boldsymbol{h}_j} \left[y_{a(l)} \cdot \left(x_{a(j)} x_{2(m)}\right)\right].
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Sve ukupno, integral (6.5) postaje

$$\begin{aligned}
Z_{\eta N}(W) = \lim_{n\to\infty} \aleph'_{\varepsilon_n^H} Đ(\eta)^{8n} \int_{\mathbb{R}^{8n}} \int_{\mathbb{R}^{8n}} \exp\left(i \sum_{\substack{l=-N \\ l\neq 0}}^{N} \sum_{a=1}^{2} \left(W_{a(l)} \cdot \Phi_{aln}(x)\right)\right) \\
\times \exp\left(-\frac{1}{2}y \cdot \mathrm{var}\left(\hat{\varepsilon}_n^H\right) y + i(y \cdot \mathcal{L}_{\eta n} x) + S_n(x, y)\right) d\lambda_{8n}(y) d\lambda_{8n}(x),
\end{aligned} \tag{6.19}$$

gdje* je $Đ(\eta)^{8n}$ posljedica transformacije integrala supstitucijama (6.15) na način (6.16).

Za svaki $n > N$, u integralu (6.19) postoji $8(n-N)$ realnih komponenti od integracijske varijable x koje se nalaze u Gausijanskom članu, ali ne i članu s funkcijama Φ_{aln}. Budući da je Gausijanski član zapravo gustoća vjerojatnosti, takve integracijske varijable se prointegriraju u jedinicu i uvijek preostaje gustoća vjerojatnosti od slučajnog vektora $\hat{\varepsilon}_N^H$, a ne $\hat{\varepsilon}_n^H$. Inače se to isto svojstvo gustoća iskorištava za izračun

*Pokrata $Đ(\eta)$ je definirana kod formule (3.23).

marginalnih gustoća vjerojatnosti. Uglavnom, limes u integralu (6.19) je nepotreban i $n = N$ je jedini mogući slučaj:

$$\begin{aligned} Z_{\eta N}(W) &= \aleph''_{\varepsilon_N^H} \int_{\mathbb{R}^{8N}} \int_{\mathbb{R}^{8N}} \exp\left(i\left(W \cdot x\right)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} y \cdot \operatorname{var}\left(\hat{\varepsilon}_N^H\right) y + i(y \cdot \mathcal{L}_{\eta N} x) + S_N(x, y)\right) d\lambda_{8N}(y) d\lambda_{8N}(x), \end{aligned} \tag{6.20}$$

gdje je $\aleph''_{\varepsilon_N^H} \equiv \aleph'_{\varepsilon_N^H} Đ(\eta)^{8N}$. Karakteristična funkcija $Z_{\eta N}$ se redefinira u $\zeta_{\eta N} \colon \mathbb{R}^{8N} \times \mathbb{R}^{8N} \to \mathbb{C}$ dodavanjem faze $\exp\left[i\left(K \cdot y\right)\right]$ unutar integrala tako da vrijedi

$$\begin{aligned} \zeta_{\eta N}(W, K) &:= \aleph''_{\varepsilon_N^H} \int_{\mathbb{R}^{8N}} \int_{\mathbb{R}^{8N}} \exp\left(i(W \cdot x + K \cdot y)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} y \cdot \operatorname{var}\left(\hat{\varepsilon}_N^H\right) y + i(y \cdot \mathcal{L}_{\eta N} x) + S_N(x, y)\right) d\lambda_{8N}(y) d\lambda_{8N}(x) \end{aligned} \tag{6.21}$$

pa je veza sa $Z_{\eta N}$

$$\zeta_{\eta N}(W, 0) = Z_{\eta N}(W). \tag{6.22}$$

Komentar 6.2 Vrlo sličan potez je učinjen u metodi 2, kao što možemo vidjeti uspoređujući formule (6.21) i (6.22) s (4.13) i (4.12), no tamo je motivacija bila pojava dodatnog stohastičkog polja $\hat{\chi}$. Ovdje se funkcija $\zeta_{\eta N}$ uvodi isključivo zbog specifičnog načina izračuna doprinosa iz višeg reda računa smetnje u nastavku rada. Štoviše, integracijska varijabla y u integralu (6.21) uopće nije opterećena interpretacijom da je stohastičko polje, nema razloga za to tvrditi pa tako niti potrebe za stohastičkim poljem poput $\hat{\chi}$ u metodi 3. Slijedno tome, metodom 3 sigurno nije moguće zaključiti Kontradikciju 4.1.

Eksponencijalni faktor s nelinearnim dijelom S_N se razvija u sumu potencija. Za potrebe ovog rada, zadržavaju se prva dva doprinosa:

$$\exp(S_N(x, y)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} S_N(x, y)^l \approx 1 + S_N(x, y). \tag{6.23}$$

Prvi doprinos je ekvivalentan najnižem redu računa smetnje koji je prezentiran u prethodnim poglavljima. Drugi doprinos odgovara samo djelomično prvom višem redu računa smetnje na (FT-)evolucijskim jednadžbama, kao što je pokazano u nastavku. Dakle, ovaj korak je ekvivalent računa smetnje na (FT-)evolucijskim jed-

nadžbama pa se može govoriti o *računu smetnje na karakterističnim funkcijama* $(\zeta_{\eta N})$. To je matematička alternativa koja se nudi ovim radom umjesto rješavanja evolucijskih jednadžbi računom smetnje. U poglavlju 4 takav račun smetnje nije demonstriran jer je razmatranje već bilo ograničeno samo na najniži red.

6.1 Najniži red računa smetnje

U ovoj sekciji se nastavlja dalje uzimajući u obzir samo prvi doprinos iz relacije (6.23). Taj dio funkcije $\zeta_{\eta N}$ se označava simbolom $\zeta_{\eta N0}$. Drugim rječima, želi se izvrijedniti integral (6.21) bez S_N. U tu svrhu se koriste supstitucije poput one u poglavlju 4 na integralu (4.13):

$$(y')^{(A)}_{a(l)} \equiv y^{(A)}_{a(l)} - i \sum_{\substack{j=-N \\ j\neq 0}}^{N} \sum_{b,B=1}^{2} M^{(AB)}_{Na(l)b(j)} \left[R_\eta(K,x)\right]^{(B)}_{b(j)}, \tag{6.24}$$

za svaki $A, a \in \{1,2\}$ i $l \in \{-N, -N+1, ..., -1, 1, ..., N\}$, pri čemu je $R_\eta(K,x) \equiv K + \mathcal{L}_{\eta N} x$, a koristi se i pokrata $M_N \equiv \text{var}\left(\hat{\varepsilon}^H_N\right)^{-1}$ pa je $M^{(AB)}_{Na(l)b(j)}$ A,B-ti element u a,b-tom 2×2 bloku l,j-tog 4×4 bloka. Ako se pripazi na promjene u konstanti normiranja $\aleph''_{\varepsilon^H_N}$, dobiva se

$$\zeta_{\eta N0}(W,K) = \frac{\int_{\mathbb{R}^{8N}} \exp\left[i(W\cdot x) - \frac{1}{2}R_\eta(K,x)\cdot M_N R_\eta(K,x)\right] d\lambda_{8N}(x)}{\int_{\mathbb{R}^{8N}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\eta N}x)\cdot M_N \mathcal{L}_{\eta N} x\right) d\lambda_{8N}(x)}. \tag{6.25}$$

Za posljednji integral se ponovno mogu iskoristiti odgovarajuće supstitucije slične onima pod (6.24). Konačno se dobiva izraz

$$\zeta_{\eta N0}(W,K) = \exp\left(-i\left(W\cdot \mathcal{L}^{-1}_{\eta N}K\right) - \frac{1}{2}W\cdot \mathcal{L}^{-1}_{\eta N}\,\text{var}\left(\hat{\varepsilon}^H_N\right)\left(\mathcal{L}^T_{\eta N}\right)^{-1} W\right). \tag{6.26}$$

U tom izrazu stoje matrični inverzi od $\mathcal{L}_{\eta N}$ i moguće je uvjeriti se kroz postupak izračuna od izraza (6.21), bez S_N, do (6.26) da se ti inverzi mogu smatrati desnim. Matrična Greenova funkcija je desni inverz od diferencijalnih preslikavanja L_η i izraz (6.26) je dobra prilika za napustiti matricu $\tilde{L}_\eta$ koja je privremeno uvedena prema

argumentima u odlomku iznad (6.13). Novi zapis izraza (6.26) je onda

$$\begin{aligned}\zeta_{\eta N0}(W,K) &= \exp\left(-i\sum_{\substack{l=-N\\ l\neq 0}}^{N}\sum_{\substack{a,A,\\ b=1}}^{2} W^{(A)}_{a(l)}G_{ab}(\eta,\eta_i)K^{(A)}_{b(l)}\right)\\ &\times\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\substack{l,j=-N\\ l,j\neq 0}}^{N}\sum_{\substack{a,c,\\ d,b=1}}^{2} G_{ac}(\eta,\eta_i)W_{a(l)}\cdot\mathrm{cov}\left(\hat{\varepsilon}_{c\boldsymbol{k}_l},\hat{\varepsilon}_{d\boldsymbol{k}_j}\right)W_{b(j)}G_{bd}(\eta,\eta_i)\right).\end{aligned} \tag{6.27}$$

Preostaje u formuli (6.27) odrediti 2×2 matrice kovarijance* $\mathrm{cov}\left(\hat{\varepsilon}_{c\boldsymbol{k}_l},\hat{\varepsilon}_{d\boldsymbol{k}_j}\right)$ od kombinacija kompleksnih stohastičkih polja $\hat{\varepsilon}_1$ i $\hat{\varepsilon}_2$ u hvatištima. Pod "odrediti" se misli na zapis s pomoću spektara snage, kako je i običaj u kozmologiji. U odlomku iznad izraza (6.2), već su uvedeni izvorni članovi ϵ_1 i ϵ_2 od zadane linearne evolucije raspodjele tvari. Neka su $\hat{\epsilon}_1$ i $\hat{\epsilon}_2$ stohastičke verzije tih izvornih članova, a $\hat{\tilde{\epsilon}}_1$ i $\hat{\tilde{\epsilon}}_2$ neka su pripadni Fourierovi transformati. Stohastička polja $\hat{\varepsilon}_1$ i $\hat{\varepsilon}_2$ su restrikcije od $\hat{\tilde{\epsilon}}_1$ i $\hat{\tilde{\epsilon}}_2$ na domenu $\overline{B}_{k_0}\times\Omega_{|k_0}$.

Notacija 6.2 Za integrale po prostoru događaja $\Omega_{|k_0}$ do skale k_0 se koristi sljedeća oznaka:

$$\langle ...\rangle_{k_0} \equiv \int_{\Omega_{|k_0}} ...\, d\mu. \tag{6.28}$$

Potom, neka su $P_{11}, P_{22}\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ spektri snage od stohastičkih polja $\hat{\epsilon}_1$ i $\hat{\epsilon}_2$, respektivno, a $P_{12}\equiv P_{21}\colon \mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ neka je njihov zajednički spektar snage. I u ovom slučaju vrijedi identitet oblika (3.15):

$$\langle\hat{\varepsilon}_{a\boldsymbol{k}}\hat{\varepsilon}_{b\boldsymbol{q}}\rangle_{k_0} = (2\pi)^3\delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})P_{ab}(|\boldsymbol{k}|), \tag{6.29}$$

za svaki $a,b\in\{1,2\}$ i svaki par Fourierovih modova $\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}\in\overline{B}_{k_0}$. Stohastička polja u ovom identitetu (6.28) se kompleksno množe. S time se mogu odrediti tražene matrice kovarijance jer vrijedi sljedeći identitet.

Tvrdnja 6.1 Neka je Γ prostor događaja, a $\hat{X},\hat{Y}\colon\Gamma\to\mathbb{R}^2$ neka su slučajni vektori s isčezavajućim očekivanjem. Nadalje, neka su poznata očekivanja kompleksnih

*Iz svih definicija i formula u poglavljima 5 i 6, trebalo bi biti jasno da se u ovom radu kompleksna stohastička polja tretiraju kao da su sastavljena od realnih slučajnih vektora, a ne kompleksnih slučajnih varijabli. Oba pristupa su dozvoljena. Odabir utječe na definiciju matrica kovarijance.

umnožaka $\left\langle \hat{X}\hat{Y} \right\rangle$ i $\left\langle \hat{X}\hat{Y}^* \right\rangle$.
Matrica kovarijance od slučajnih vektora $\hat{X}$ i $\hat{Y}$ ima formulu

$$\operatorname{cov}\left(\hat{X}, \hat{Y}\right) = \frac{1}{2}\left(\left\langle \hat{X}\hat{Y}^* \right\rangle_M + \left\langle \hat{X}\hat{Y} \right\rangle_M \sigma_3\right), \tag{6.30}$$

gdje indeks M označava matrični zapis kompleksnog broja, a σ_3 je treća Paulijeva matrica.

Prijedlog dokaza Najprije zapišemo poznata očekivanja umnožaka u matričnom obliku:

$$\left\langle \hat{X}\hat{Y} \right\rangle_M := \begin{bmatrix} \left\langle \Re\left(\hat{X}\hat{Y}\right) \right\rangle & \left\langle -\Im\left(\hat{X}\hat{Y}\right) \right\rangle \\ \left\langle \Im\left(\hat{X}\hat{Y}\right) \right\rangle & \left\langle \Re\left(\hat{X}\hat{Y}\right) \right\rangle \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

i slično za $\left\langle \hat{X}\hat{Y}^* \right\rangle_M$. Potom, raspisivanjem (6.31) uz upotrebu definicije matrice kovarijance od $\hat{X}$ i $\hat{Y}$, pokažemo da vrijedi

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{X}\hat{Y}^* \right\rangle_M J &= \operatorname{cov}\left(\hat{X}, \hat{Y}\right) J + J \operatorname{cov}\left(\hat{X}, \hat{Y}\right), \\ \left\langle \hat{X}\hat{Y} \right\rangle_M \sigma_1 &= \operatorname{cov}\left(\hat{X}, \hat{Y}\right) J^{-1} + J \operatorname{cov}\left(\hat{X}, \hat{Y}\right), \end{aligned} \tag{6.32}$$

pri čemu je σ_1 prva Paulijeva matrica, a

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.33}$$

Iz jednadžbi (6.32) možemo izraziti matricu kovarijance upravo kao u (6.30).

■

Budući da je prostor događaja $\Omega_{|k_0}$ izgrađen od skupa R_-^*, poznavanjem identiteta (6.29) su ispunjeni uvjeti iz Tvrdnje 6.1 pa se prema njoj zaključuje

$$\operatorname{cov}(\hat{\varepsilon}_{a\boldsymbol{k}}, \hat{\varepsilon}_{b\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2} P_{ab}(|\boldsymbol{k}|)\left[\delta_D(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\mathbb{1}_2 + \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\sigma_3\right], \tag{6.34}$$

za svaki $a, b \in \{1, 2\}$ i svaki par Fourierovih modova $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} \in \overline{B}_{k_0}$. Simbol $\mathbb{1}_2$ predstavlja 2×2 jediničnu matricu. Koristeći ovu formulu, moguće je pokazati da u okviru metode 3, postupak sličan onome s kojim je zaključena Kontradikcija 4.2 ne rezultira kontradikcijom. Dakle, metoda 3 je nepovezana s dvije kontradikcije iz poglavlja 4.

Konačno se mogu odrediti korelatori metodom 3. Kao primjer, izračunat je općeniti 2-korelator dubleta strukture u najnižem redu računa smetnje. Izabiru se dva proizvoljna hvatišta iz H_{2N}: $\boldsymbol{k}_n$ i $\boldsymbol{k}_m$. S pomoću Tvrdnje 5.1 se zaključuje

$$\left\langle \hat{\phi}_{a\eta\boldsymbol{k}_n} \hat{\phi}_{b\eta\boldsymbol{k}_m} \right\rangle_{k_0,N0} = \sum_{c,d=1}^{2} G_{ac}(\eta,\eta_i) \left\langle \hat{\varepsilon}_{c\boldsymbol{k}_n} \hat{\varepsilon}_{d\boldsymbol{k}_m} \right\rangle_{k_0} G_{bd}(\eta,\eta_i), \tag{6.35}$$

za svaki $a, b \in \{1, 2\}$ i odabrani $\eta \in I$. Na oznaci za očekivanje, indeks N podsjeća da je u obzir uzeta samo kolekcija hvatišta H_{2N}, a 0 (nula) znači da je uračunat samo najniži red računa smetnje. To nije krajnji rezultat jer se mogu promotriti još neki limesi. Naime, želi se uzeti u obzir stohastička polja u svim točkama iz $\overline{B}_{k_0}$, te isto tako cijeli skup Ω. Smatra se da je u metodi 3 to moguće jedino s limesima. Neka je $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}_n$ i $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{k}_m$. Definira se

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\phi}_{a\eta\boldsymbol{k}}\, \hat{\phi}_{b\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle_0 &:= \lim_{k_0\to\infty} \lim_{N\to\infty} \left\langle \hat{\phi}_{a\eta\boldsymbol{k}}\, \hat{\phi}_{b\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle_{k_0,N0} \\
&= \lim_{k_0\to\infty} \left\langle \sum_{c=1}^{2} (G_+)_{ac}(\eta,\eta_i) \hat{\varepsilon}_{c\boldsymbol{k}} \sum_{d=1}^{2} (G_+)_{bd}(\eta,\eta_i) \hat{\varepsilon}_{d\boldsymbol{q}} \right\rangle_{k_0} \\
&= (2\pi)^3\, \delta_D(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\, \pi^{(L)}_{ab}(\eta, |\boldsymbol{k}|),
\end{aligned} \tag{6.36}$$

za svaki $a, b \in \{1, 2\}$, a po definiciji se uzima da posljednja jednakost vrijedi za svaki par Fourierovih modova $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Kao i obično, zbog zadanih početnih i rubnih uvjeta oblika (5.4), relevantan je samo rastući mod G_+ matrične Greenove funkcije. Izračunate relacije (6.36) su ekvivalentne statističkim svojstvima (3.16), tako se i željelo postići.

Za kraj ove sekcije, recimo da se inzistira protivno Komentaru 6.2 i želi se izračunati miješani 2-korelator kao u (4.26). Ako se zadrži notacija $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}_n$ i $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{k}_m$ za neka hvatišta iz H_{2N}, to bi se metodom 3 učinilo ovako:

$$\left\langle \hat{\chi}_{a\eta\boldsymbol{k}}\, \hat{\phi}_{b\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle_0 := \lim_{k_0\to\infty} \lim_{N\to\infty} -4\, \partial^2_{W^*_{b(m)} K^*_{a(n)}} \zeta_{\eta N0}(0) = 0, \tag{6.37}$$

za svaki $a, b \in \{1, 2\}$ i po definiciji za svaki par Fourierovih modova $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. Ovaj rezultat se ne poklapa s rezultatom (4.26) dobivenim metodom 2. Razlog zašto se metodom 3 dobiva nula za miješani 2-korelator (6.37) jest upotreba Tvrdnje 5.1, odnosno Wirtingerovih derivacija. Mogućnost greške u funkciji $\zeta_{\eta N0}$ je isključena jer su iz nje izvedena ispravna statistička svojstva dubleta strukture. Može se postaviti

pitanje koji je od dvaju oprečnih rezultata točan? Izraz (4.26) potječe iz izraza (4.24) koji je predmet Kontradikcije 4.1 i zato se smatra da svakako ne može biti točan. S druge strane, za Tvrdnju 5.1 je predložen dokaz pa nije jasan razlog zašto bi (6.37) bilo krivo. Međutim, u ovom radu se i dalje inzistira na tvrdnji iz Komentara 6.2, o ne postojanju stohastičkog polja poput $\hat{\chi}$ u okviru metode 3. Stoga, ono što se smatra krivim u relaciji (6.37) jest interpretacija da je nula jednaka nekom 2-korelatoru.

6.2 Prvi viši red računa smetnje

Nadalje, prvi puta u ovom radu se izračunava doprinos nekog višeg reda računa smetnje statističkim svojstvima raspodjele tvari. Uračunava se drugi član iz razvoja (6.23). Tada vrijedi sljedeći izraz:

$$\zeta_{\eta N}(W,K) \approx \zeta_{\eta N0}(W,K) + \zeta_{\eta N1}(W,K), \tag{6.38}$$

gdje je

$$\begin{aligned}\zeta_{\eta N1}(W,\,K) := i\,\aleph''_{\varepsilon_N^H} \sum_{\substack{l,j,n=-N\\ l,j,n\neq 0}}^{N} \sum_{a=1}^{2} \gamma_{aN}(\boldsymbol{k}_l,\boldsymbol{k}_j)\delta_{\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_l-\boldsymbol{k}_j} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2}\dots\int_{\mathbb{R}^2}}_{8N\text{ puta}} \left(y_{a(l)}\cdot x_{a(j)}x_{2(n)}\right)\\ \times \exp\left(i\sum_{\substack{m=-N\\ m\neq 0}}^{N}\sum_{b=1}^{2}\left(W_{b(m)}\cdot x_{b(m)} + K_{b(m)}\cdot y_{b(m)}\right)\right)\\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\substack{m,p=-N\\ m,p\neq 0}}^{N}\sum_{b,c=1}^{2} y_{b(m)}\cdot \mathrm{cov}\left(\hat{\varepsilon}_{b\boldsymbol{k}_m},\hat{\varepsilon}_{c\boldsymbol{k}_p}\right) y_{c(p)}\right)\\ \times \exp\left(i\sum_{\substack{m,p=-N\\ m,p\neq 0}}^{N}\sum_{b,c=1}^{2}\left(y_{b(m)}\cdot \mathcal{L}_{\eta Nb(m)c(p)}x_{c(p)}\right)\right) d\lambda_2\left(x_{1(-N)}\right)\dots d\lambda_2\left(y_{2(N)}\right).\end{aligned} \tag{6.39}$$

Ako se napravi transformacija

$$y_{a(l)}\cdot x_{a(j)}x_{2(n)} = \Re\left(y^*_{a(l)}x_{a(j)}x_{2(n)}\right) = \frac{1}{2}\left(y^*_{a(l)}x_{a(j)}x_{2(n)} + y_{a(l)}x^*_{a(j)}x^*_{2(n)}\right), \tag{6.40}$$

onda se može primjetiti jednostavniji zapis formule (6.39) s pomoću Wirtingerovih derivacija:

$$\zeta_{\eta N1}(W,K) = -4 \sum_{\substack{l,j,n=-N \\ l,j,n\neq 0}}^{N} \sum_{a=1}^{2} \gamma_{aN}(\boldsymbol{k}_l, \boldsymbol{k}_j)\delta_{\boldsymbol{k}_n,\boldsymbol{k}_l-\boldsymbol{k}_j} \\ \times \left(\partial^3_{W^*_{2(n)}W^*_{a(j)}K_{a(l)}}\zeta_{\eta N0}(W,K) + \partial^3_{W_{2(n)}W_{a(j)}K^*_{a(l)}}\zeta_{\eta N0}(W,K)\right). \tag{6.41}$$

Upravo je mogućnost ovog zapisa razlog uvođenja funkcije $\zeta_{\eta N}$.

Kao i u prethodnoj sekciji, uporabom Tvrdnje 5.1 se iz funkcije (6.41) mogu izračunati korelatori, ali to su doprinosi iz višeg reda računa smetnje. Primjerice, uz odabir nekih hvatišta $\boldsymbol{k} \equiv \boldsymbol{k}_n$ i $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{k}_m$ iz kolekcije H_{2N}, 2-korelatori dubleta strukture su

$$\left\langle \hat{\phi}_{a\eta\boldsymbol{k}}\, \hat{\phi}_{b\eta\boldsymbol{q}} \right\rangle_1 := \lim_{k_0\to\infty} \lim_{N\to\infty} -4\, \partial^2_{W^*_{b(m)}W^*_{a(n)}} \zeta_{\eta N1}(0) = 0, \tag{6.42}$$

za svaki $a, b \in \{1,2\}$ i po definiciji za svaki par Fourierovih modova $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ te za odabrani horizont $\eta \in I$, pri čemu indeks "1" na oznaci za očekivanje simbolizira da se radi o doprinosu iz prvog višeg reda računa smetnje. Dakle, ovaj doprinos ne popravlja 2-korelatore dubleta strukture. Zbog toga je u prethodnom dijelu teksta napisano da prvi viši red računa smetnje na funkciji $\zeta_{\eta N}$ odgovara samo djelomično prvom višem redu na (FT-)evolucijskim jednadžbama, odnosno numeracija redova se ne poklapa. Potonji sadrži popravku 2-korelatora i očekivanja stohastičkih polja. Da bi se provjerila ispravnost metode 3 u višim redovima, izračunata je popravka očekivanja dubleta strukture:

$$\left\langle \hat{\phi}_{a\eta\boldsymbol{k}_n} \right\rangle_{k_0,N1} = -\sum_{\substack{l,j=-N \\ l,j\neq 0}}^{N} \sum_{b=1}^{2} \gamma_{bN}(\boldsymbol{k}_n, \boldsymbol{k}_j)\delta_{\boldsymbol{k}_l,\boldsymbol{k}_n-\boldsymbol{k}_j} \left(G_+\right)_{ab}(\eta,\eta_i) \left\langle \hat{\phi}_{b\eta\boldsymbol{k}_j} \hat{\phi}_{2\eta\boldsymbol{k}_l} \right\rangle_{k_0,N0}, \tag{6.43}$$

a primjenom limesa kao i prije, zaključuje se

$$\begin{aligned} &\left\langle \hat{\phi}_{a\eta\boldsymbol{k}} \right\rangle_1 := \lim_{k_0\to\infty} \lim_{N\to\infty} \left\langle \hat{\phi}_{a\eta\boldsymbol{k}_n} \right\rangle_{k_0,N1} = \\ &= -\lim_{k_0\to\infty} \sum_{\substack{l,j=-\infty \\ l,j\neq 0}}^{\infty} \sum_{b=1}^{2} \gamma_{bk_0}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_j)\delta_{\boldsymbol{k}_l,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_j} \left(G_+\right)_{ab}(\eta,\eta_i) \lim_{N\to\infty} \left\langle \hat{\phi}_{b\eta\boldsymbol{k}_j} \hat{\phi}_{2\eta\boldsymbol{k}_l} \right\rangle_{k_0,N0} \\ &= -\delta_D(\boldsymbol{k}) \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\alpha\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\right) \left(G_+\right)_{a1}(\eta,\eta_i) \pi^{(L)}_{12}(\eta, |\boldsymbol{w}|) \\ &+ \beta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\right) \left(G_+\right)_{a2}(\eta,\eta_i) \pi^{(L)}_{22}(\eta, |\boldsymbol{w}|) \Big)\, d\lambda_3(\boldsymbol{w}) = 0, \end{aligned} \tag{6.44}$$

za svaki $a \in \{1,2\}$, po definiciji za svaki $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ i uz odabrani $\eta \in I$. I ovaj rezultat je nula, ali je izračunat izraz koji se može usporediti s onima u literaturi. Može se primjetiti da rastući mod G_+ matrične Greenove funkcije nije pomnožen sa stohastičkim verzijama izvornih članova pa se ne može iskoristiti definicijska relacija (3.29), već je potrebno izračunati G_+, no to ovisi o modelu svemira. U ovom radu je sve pisano s obzirom na ΛCDM model, ali najjednostavniji model koji je sadržan u ΛCDM-u i koji je dobro pokriven u literaturi je *Einstein-de Sitterov* pa se odabire usporediti očekivanje (6.44) s literaturnim rezultatom za taj model.

Matrična Greenova funkcija G (3.23) je odrediva iz jednadžbi (3.24). U Einstein-de Sitterovom modelu svemira, te jednadžbe poprimaju oblik Eulerovih običnih diferencijalnih jednadžbi i G je

$$G(\eta,\eta_i) = \frac{\theta_H(\eta-\eta_i)}{5}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -\eta_i \\ -\frac{6}{\eta} & \frac{2\eta_i}{\eta} \end{bmatrix}\frac{\eta^2}{\eta_i^2}}_{\sim\, G_+(\eta,\eta_i)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & \eta_i \\ \frac{6}{\eta} & \frac{3\eta_i}{\eta} \end{bmatrix}\frac{\eta_i^3}{\eta^3}}_{\sim\, G_-(\eta,\eta_i)}\right), \tag{6.45}$$

za zadani početni horizont η_i i svaki kasniji horizont $\eta \in I$, a θ_H je Heavisideova *step* funkcija. To implicira da je očekivanje stohastičkog polja $\hat{\phi}_1$ prema formuli (6.44)

$$\left\langle \hat{\phi}_{1\eta\boldsymbol{k}} \right\rangle_1 = \delta_D(\boldsymbol{k}) \int_{\boldsymbol{w}} \frac{P_\delta^{(L)}(\eta,|\boldsymbol{w}|)}{\eta_i^2}\left(\frac{6\eta}{5}\alpha\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\right) + \frac{4\eta_i}{5}\beta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}\right)\right) = 0, \tag{6.46}$$

za sve $\eta \in I$ i Fourierove modove $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$. Iz [6] i [1] se može isčitati formula* za isto očekivanje:

$$\begin{aligned} &\left\langle \delta^{(1)}(\eta,\boldsymbol{k}) \right\rangle = \\ &= \delta_D(\boldsymbol{k}) \int_{\boldsymbol{w}} P_\delta^{(L)}(\eta,|\boldsymbol{w}|)\left(\frac{5}{14}\left[\alpha(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}) + \alpha(\boldsymbol{w},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{w})\right] + \frac{2}{7}\beta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Formule (6.46) i (6.47) se nažalost očito ne podudaraju, iako je njihova numerička vrijednost jednaka. Samo jedno pojavljivanje funkcije α u izrazu (6.46) nije problem jer se radi samo o nesimetriziranoj verziji integralne jezgre uz spektar snage $P_\delta^{(L)}$. Problem su horizontni faktori kojih u formuli (6.47) nema. Budući da je metodom 3

*Notacija unutar oznake za očekivanje je u skladu s [6].

dobiven krivi rezultat već za prvi viši red računa smetnje, za očekivati je da metoda generira neispravna rješenja i u ostalim višim redovima.

Očito je negdje napravljena greška u izračunu, samo je pitanje radi li se o tipfeleru ili konceptualnoj pogrešci? Metoda 3 je slojevita, a sami izračuni su dugi s puno derivacija i indeksa pa je razumno uzeti u obzir mogućnost postojanja krive derivacije ili zagubljenog matematičkog člana. U prilog tome ide opservacija da su formule (6.46) i (6.47) zapravo slične unatoč nepodudarnosti te imaju istu numeričku vrijednost. S druge strane, izračun je ponovljen tri puta s istim rezultatom i to daje za naslutiti da je potencijalna greška konceptualnog tipa umjesto pukog previda prilikom uređivanja matematičkih izraza. Dodatna indicija u tom smjeru je činjenica da je varijacijom metode 2, slično kao u sekciji 4.1, izračunata formula identična ovoj pod (6.46). Taj izračun nije pokazan u ovom radu zbog zaključivosti Kontradikcije 4.2 tom metodom. Također, spomenuta kontradikcija ne može biti uzrok ovom krivom rezultatu ako se prihvati argument napisan ispod izraza (6.34) - da sličan postupak kojim se zaključuje Kontradikcija 4.2, u okviru metode 3 ne rezultira kontradikcijom. Dakle, konceptualna greška mora biti onaj dio izračuna koji je prisutan u metodi 3 i u varijaciji metode 2, a da pritom ne utječe na rezultat u najnižem redu računa smetnje koji je ispravan. S toliko razlika u tim metodama, nije teško pronaći kandidata. Naime, ističe se Pretpostavka 6.1. Ako je ta pretpostavka zaista kriva, onda je upitno da li je moguće izračunavati statistička svojstva raspodjele tvari iz (FT-)evolucijskih jednadžbi bez rješavanja istih.

7 Zaključak

U poglavlju 3 je napravljen pregled metode 1, koja se može pronaći u odgovarajućoj literaturi za fiziku. Istaknute su neke nepreciznosti u matematičkom izrijeku i dana pojašnjenja koja ne narušavaju uobičajene zaključke i fizikalna tumačenja (sekcija 3.1). Potom je Definicijom 3.3 uspješno uvedena ideja izvornih članova. Oni ne mijenjaju rješenja najnižeg reda računa smetnje na evolucijskim jednadžbama, kao što je pokazano predloženim dokazom Tvrdnje 3.2. Izvorni članovi su bitna matematička finesa koja se iskorištava u metodama 2 i 3.

Poglavlje 4 je posvećeno prezentaciji metode 2. Njome nije postignut cilj zaobilaska rješavanja evolucijskih jednadžbi jer su izračuni zadržani u okviru najnižeg reda računa smetnje u sklopu kojeg je i dalje potrebno iz evolucijskih jednadžbi odrediti izvorne članove za odabrani model svemira. Drugim riječima, potencijalnu moć metoda 2 i 3 je moguće vidjeti tek u višim redovima računa smetnje, dok su u najnižem redu redundantne. Razlog nerazmatranja viših redova s metodom 2 su matematičke teškoće s diferencijabilnim funkcijama i to je detaljnije objašnjeno u sekciji 5.1. Vrijednost poglavlja 4 je u demonstraciji netrivijalnog integriranja po prostoru događaja, u ovom slučaju skupu funkcija koje predstavljaju skup mogućih početnih raspodjela tvari. Takav integral spada u one koji se u literaturi za fiziku nazivaju funkcionalni integrali ili *path* integrali. Na taj način su uspješno izračunata statistička svojstva (4.2) raspodjela tvari u najnižem redu računa smetnje, dakle, u skladu s referentnom literaturom. Ipak, unatoč tom uspjehu, postupkom integriranja u metodi 2 je dopušteno zaključiti Kontradikciju 4.1. Problem izvire iz pretpostavljene generalizacije Hubbard-Stratonovichevog integrala (4.11), u kojoj se pojavljuje interpretacija da se integral izvodi po argumentu nekog dodatnog stohastičkog polja s dvije realne komponente. S ovime dolaze do izražaja komentari iz poglavlja 4 o nedorečenosti nekih matematičkih aspekata funkcionalnih integrala u referentnoj literaturi za fiziku. Naposljetku, u sekciji 4.1 se prezentira varijacija metode 2 s kojom se želi postići direktni izračun statističkih svojstava u ovisnosti o prostornim skalama umjesto u ovisnosti o položaju u prostoru. Slijedi se razumna ideja spomenuta u [6]. Dobivaju se neki konzistentni i ispravni rezultati, ali se i zaključuje još jedna kontradikcija (Kontradikcija 4.2). Zajednički nazivnik potencijalnih uzroka je opet nepoznavanje nekih svojstava funkcionalnih integrala, kakvi se pojavljuju u literaturi za fiziku. Zbog

Kontradikcije 4.2, u ostatku rada se odbija koristiti prezentiranu varijaciju metode 2.

Poglavlje 5 započinje kritikom "fizičarskih" funkcionalnih integrala, koja je pronađena u matematičkoj literaturi. Prema napisanom, potvrđuju se prije nakupljene sumnje da nije pouzdano operirati s funkcionalnim integralima kao u 4. poglavlju. Postaje i jasno da je za pokušaj postizanja matematičke korektnosti potrebno oponašati integral po skupu funkcija s obzirom na Wienerovu Gausijansku mjeru. Potom se u sekciji 5.2 motivira rad s Fourier-transformiranim evolucijskim jednadžbama. Njihova rješenja ne moraju biti diferencijabilna po prostornim koordinatama pa se očekuje netrivijalno ponašanje s obzirom na mjeru poput Wienerove Gausijanske. U sekciji 5.3 se onda uvodi sve potrebno za oponašanje integracije u odnosu na Wienerovu Gausijansku mjeru (Pretpostavka 5.1). Ta potreba rezultira popriličnom promjenom matematičkih objekata u odnosu na prethodna poglavlja. Kao dodatni korak se eksplicitno konstruira prostor događaja. Konačno, Tvrdnjom 5.1 se pronalazi primjena Wirtingerovih derivacija.

Posljednje poglavlje je demonstracija metode 3, koja je izvedbeno kompliciranija, slojevita je i puna detalja. Mogu se uočiti poneke sličnosti s metodom 2, unatoč različitosti matematičkih objekata poput integrala po prostoru događaja, koji se ovdje svodi na realne integrale. Zbog toga je moguće upotrijebiti *matričnu* generaliziranu varijantu Hubbard-Stratonovichevog integrala. U njoj integracijska varijabla nije opterećena interpretacijom da je argument stohastičkog polja pa nema potrebe za dodatnim stohastičkim poljem kao u metodi 2 i zato sigurno nije moguće zaključiti Kontradikciju 4.1 metodom 3 (Komentar 6.2). Nadalje se provodi razvoj integranda karakteristične funkcije u sumu potencija i to se identificira kao račun smetnje na karakterističnoj funkciji. Radi se o ekvivalentu računa smetnje na (FT-)evolucijskim jednadžbama do na numeraciju redova i kao takav bi trebao predstavljati matematičku alternativu koja se ovim radom nudi umjesto rješavanja evolucijskih jednadžbi računom smetnje. U sekciji 6.1, metodom 3 se računaju statistička svojstva raspodjela tvari u najnižem redu računa smetnje. Tvrdnjom 6.1 se uvodi izraz (6.34) zbog kojeg u okviru metode 3, postupak sličan onome s kojim je zaključena Kontradikcija 4.2 ne rezultira više kontradikcijom. Zbog prije napisanog, metoda 3 je onda nepovezana s Kontradikcijom 4.1 i 4.2. Izračunata statistička svojstva u najnižem redu se poklapaju s literaturnim. Za kraj, u sekciji 6.2 se konačno izračunavaju statistička svojstva raspodjela tvari u prvom višem redu računa smetnje. Tu se može

vidjeti beneficija ideje koja se želi postići. Naime, umjesto rješavanja evolucijskih jednadžbi u višem redu, postupak se svodi na uzastopno određivanje Wirtingerovih derivacija. Nažalost, u promatranom redu nema korekcije za 2-korelatore dubleta strukture, a formula za očekivanje dubleta strukture se ne poklapa s literaturnom verzijom u slučaju Einstein-de Sitterovog modela svemira. To je dovoljno za očekivati neslaganje i u ostalim višim redovima računa smetnje. Smatra se da je razlog neki propust u dugačkom i složenom postupku ili konceptualna greška. U prilog propustu ide činjenica da su formule (6.46) i (6.47) slične i imaju istu numeričku vrijednost. Konceptualna greška je pak plauzibilna ako se uzme u obzir:

a) Postupak izračuna je ponovljen tri puta;

b) Upravo je rezultat (6.46) dobiven i varijacijom metode 2, ali to nije pokazano u ovom radu zbog postojanja Kontradikcije 4.2.

Uzevši sve u obzir, kao moguća konceptualna pogreška se ističe Pretpostavka 6.1, ali u tom slučaju ostaje upitno da li je moguće postići cilj ovog istraživanja - izračun statističkih svojstava raspodjela tvari bez rješavanja (FT-)evolucijskih jednadžbi.

Bibliography

[1] Bernardeau, F.; Colombi, S.; Gaztañaga, E.; Scoccimarro, R. Large-Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory, (1. 12. 2001.), arXiv, https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0112551, 6. 7. 2024.

[2] Desjacques, V.; Jeong, D.; Schmidt, F. Large-Scale Galaxy Bias, (15. 1. 2019.), arXiv, https://arxiv.org/pdf/1611.09787, 23. 10. 2023.

[3] Dodelson, S.; Schmidt, F. Modern Cosmology. 2nd ed. Academic Press, 2021.

[4] Gabrielli, A.; Sylos Labini, F.; Joyce, M.; Pietronero, L. Statistical Physics for Cosmic Structures. Springer, 2005.

[5] Hall, B. C. Quantum Theory for Mathematicians. Springer, 2013.

[6] Jeong, D. Cosmology with high ($z > 1$) redshift galaxy surveys. Doktorski rad. Austin : Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin, 2010.

[7] Wiener, N. Generalized harmonic analysis. // Acta Mathematica. Vol. 55, 4(1930), str. 117-258.

[8] Common integrals in quantum field theory, (24. 4. 2024.), Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Common_integrals_in_quantum_field_theory, 16. 12. 2024.

[9] Wiener integral, (6. 6. 2020.), Encyclopedia of Mathematics, https://encyclopediaofmath.org/wiki/Wiener_integral, 17. 7. 2024.