

Supravodljivost i primjene

Svirčić, Mateo

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:406447>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Mateo Svirčić

SUPRAVODLJIVOST I PRIMJENE

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Mateo Svirčić

Diplomski rad

Supravodljivost i primjene

Voditelj diplomskog rada: prof. dr. sc. Danko Radić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2024.

Prva i posebna zahvala ide mentoru, prof. dr. sc. Danku Radiću. Hvala Vam što ste mi omogućili da zagrebem površinu fizike čvrstog stanja i što ste uvijek dali savjet i odgovor na pitanje. Imate zaista nevjerojatnu količinu strpljenja.

Želim zahvaliti obitelji koja je tu bespogovorno bila uz mene kroz cijelo obrazovanje - bez njih ovo ne bi bilo moguće.

Veliku zahvalu zaslužuju kolege s fakulteta te prijatelji, uz koje je učenje bilo olakšano, i koji su uvijek bili spremni pomoći. Također, zahvaljujem i dr. sc. Petri Đurkas Grozić na iznenadnom prijateljstvu i tome što mi je dala ohrabrenje za izradu ovog diplomskog rada.

Sažetak

U ovom diplomskom radu izrađen je pregled otkrića i razumijevanja supravodljivosti kao pojave u fizici čvrstog stanja. Heike Kamerlingh Onnes i njegovo otkriće supravodljivosti 1911. godine su započeli niz eksperimentalnih i teorijskih napora za objašnjavanjem otkrivene pojave, koja je i dan danas predmet istraživanja. Proučen je razvoj teorija supravodljivosti, od elektrodinamičkog pristupa braće London, koji su postavili prvu jednadžbu koja objašnjava dio pojave, i Ginzburg-Landau modela do BCS teorije i njene matematičke formulacije. Proučen je i glavni primjer primjene supravodljivosti u obliku Josephsonovog efekta te SQUID-a, koji je nezamjenjiv uređaj u eksperimentalnim istraživanjima.

Ključne riječi: supravodljivost, parametar uređenja, procijep

Superconductivity and applications

Abstract

In this master's thesis I made a review of the discovery and understanding of superconductivity as a phenomenon in solid state physics. Heike Kamerlingh Onnes and his discovery of superconductivity in 1911 were the beginning of a great deal of experimental and theoretical attempts at explaining the phenomenon. Multiple theories were studied, including the electrodynamics of superconductors and the London brothers' equation, the Ginzburg-Landau model and the BCS theory and its formalism. The Josephson effect was studied as well as the SQUID, with it being an important application of our knowledge of superconductivity and an irreplaceable experimental research tool.

Keywords: superconductivity, order parameter, gap

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Elektrodinamika supravodiča	2
2.1	Otpornost supravodiča	2
2.2	Meissner-Ochsenfeldov efekt i savršeni dijamagnetizam	3
2.2.1	Londonova jednažba	5
2.3	Supravodiči tipa I i II	6
3	Ginzburg-Landauov model i Abrikozovljevi virovi	8
3.1	Ginzburg-Landauov model	8
3.2	Abrikozovljevi virovi	10
3.2.1	Kvantizacija toka	10
3.2.2	Abrikozovljeva rešetka	12
4	BCS teorija supravodljivosti	15
4.1	Privlačna elektron-elektron interakcija	15
4.2	Cooperovi parovi	19
4.3	BCS valna funkcija	22
4.4	BCS hamiltonijan i supravodljivi procijep	23
4.4.1	Supravodljivi procijep na konačnoj temperaturi	27
5	Primjene teorije supravodljivosti	31
5.1	Josephsonov efekt	31
5.1.1	SQUID	33
6	Zaključak	36
	Literatura	37

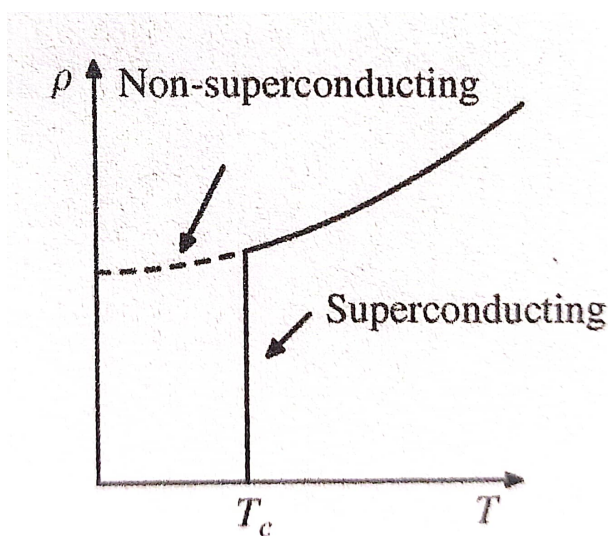
1 Uvod

Otkriće metode ukapljivanja helija 1908. godine je omogućilo istraživanje otpora (otpornosti) materijala na vrlo niskim temperaturama. Tako je Heike Kamerlingh Onnes 1911. godine tijekom istraživanja Drudeovog modela došao do začuđujućeg otkrića da otpornost žive ne pada postupno sa padom temperature, već naglo padne na nemjerljivo malu vrijednost na temperaturi od oko 4.2 K. Nakon toga otkrivena je cijela klasa metala koji imaju takvo ponašanje - otpornost im padne na nulu na nekoj temperaturi T_C koju nazivamo kritičnom temperaturom, te ih je Onnes nazvao *supravodičima*, a pojavu *supravodljivosti*.

2 Elektrodinamika supravodiča

2.1 Otpornost supravodiča

Nakon što je Onnes otkrio da otpor žive naglo pada na nulu na temperaturi od 4.2K, nešto kasnije je pokazao da se isti fenomen događa za različite metale na temperaturama $T < T_C$, gdje se T_C naziva *kritičnom temperaturom*. Neki od tih metala su niobij ($T_C = 9.2K$), aluminij ($T_C = 1.2K$), kositar ($T_C = 3.7K$) i olovo ($T_C = 7.2K$).



Slika 2.1: Otpornost normalnog metala u usporedbi s otpornošću supravodiča kao funkcija temperature, preuzeto iz [1], str. 51

Daljnje značenje ove pojave za supravodiče možemo iščitati ako to pogledamo sa stajališta Ohmovog zakona

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.1)$$

Vidimo da električno polje u svim unutarnjim točkama supravodiča mora biti jednako nuli da bi struja bila konačna - vodljivost mora ići u beskonačnost, ako otpornost ide u nulu.

Dokaz da supravodiči zaista imaju otpornost točno jednaku nuli je primjer supravodljivog prstena u kojem struje ne prestaju teći u odsustvu vanjskog električnog polja. Ako imamo zatvoren prsten supravodljive žice, kojim teče struja I , možemo pogledati kako se ponaša magnetski tok kroz prsten:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2)$$

gdje je dS normala na ravninu čiji iznos je infinitezimalni dio površine koju omeđuje prsten.

Iz Maxwellove jednačbe

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

primjenom Stokesovog teorema možemo dobiti relaciju za promjenu toka

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} . \quad (2.4)$$

Znamo da je $\mathbf{E} = 0$, pa zaključujemo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 . \quad (2.5)$$

Tok magnetskog polja kroz supravodljivi prsten je konstantan u vremenu, što nam daje sljedeće objašnjenje za pokrenutu supravodljivu struju (uz uzimanje koncepata iz sljedećeg potpoglavlja)- ako supravodljivi prsten na $T > T_c$ stavimo u vanjsko magnetsko polje $\mathbf{B}_{ext}$, ono će lagano prodrijeti u taj prsten. Hlađenjem tog prstena na temperaturu manju od T_c , imamo neki tok magnetskog polja Φ kroz prsten. Ako isključimo vanjsko magnetsko polje, po jednačbi (2.5) znamo da tok mora biti konstantan - jedino kako se tok može održati je tako da prsten stvara svoje magnetsko polje kroz centar, što može napraviti strujom I koja će teći njime. Time smo dobili tu perzistentnu supravodljivu struju.

2.2 Meissner-Ochsenfeldov efekt i savršeni dijamagnetizam

Meissner i Ochsenfeld su 1933. otkrili da supravodič istiskuje vanjsko magnetsko polje iz sebe. To možemo protumačiti na sljedeći način: ako ohladimo uzorak na $T < T_c$ te ga stavimo u magnetsko polje, unutar supravodiča magnetsko polje će i dalje biti nula - on ne dopušta magnetskom polju da potpuno uđe u njega, ali imamo i "suprotni slučaj"; ako u magnetskom polju imamo uzorak na $T > T_c$, u njega magnetsko polje može lagano prodrijeti, te ako ga lagano hladimo, s padom temperature ispod T_c taj supravodič će opet iz sebe istisnuti magnetsko polje, što je neočekivano.

Prvi slučaj možemo pokazati matematički iz jednačbe (2.3) i činjenice da u supra-

vodiču električno polje mora biti nula

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0 . \quad (2.6)$$

Da bi se polje u supravodiču održalo kao $\mathbf{B} = 0$, moramo imati neke struje koje će svojim učinkom (stvaranjem magnetskog polja) zasjeniti vanjsko polje. To ćemo učiniti primjenom Maxwellovih jednažbi u makroskopskom mediju. Ukupnu struju kroz uzorak možemo razdijeliti na j_f , slobodnu struju, te vezanu struju j_b , koja će u ovom slučaju biti jednaka internim strujama odgovornima za zasjenjenje. To možemo zapisati kao

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b . \quad (2.7)$$

Pošto su vezane struje odgovorne za zasjenjenje vanjskog magnetskog polja, one proizvode magnetizaciju po jediničnom volumenu uzorka, što prikazujemo jednažbom

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_b . \quad (2.8)$$

Možemo iskoristiti i Maxwellovu jednažbu za pomoćno polje $\mathbf{H}$ koje je definirano slobodnim strujama

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f . \quad (2.9)$$

Ove tri veličine povezane su relacijom

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) . \quad (2.10)$$

Ako u (2.10) uvrstimo uvjet da $\mathbf{B} = 0$, direktno dobivamo

$$\mathbf{M} = -\mathbf{H} . \quad (2.11)$$

Iz definicije dijamagnetske susceptibilnosti $\chi_d = \frac{M}{H}$, dobivamo

$$\chi_d = -1 . \quad (2.12)$$

Inače je dijamagnet materijal koji ima $\chi < 0$, a pošto je supravodiču susceptibilnost jednaka -1, tj. vanjsko polje je sasvim zasjenjeno, nazivamo ga *savršenim dijamagne-*

tom.

2.2.1 Londonova jednađžba

Londonova jednađžba je prvi dobar teorijski pokušaj objašnjavanja Meissnerovog efekta, te ona izvire iz modela dva fluida, tj. razdvajanja ukupne gustoće elektrona u supravodiču na supravodljive i normalne elektrone. Kratko ćemo izvesti Londonovu jednađžbu iz par razmatranja.

Iz Drudeove teorije vodljivosti možemo dobiti kompleksnu vodljivost kao

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} . \quad (2.13)$$

Ako razmatramo slučaj savršenog vodiča (supravodič ćemo smatrati savršenim vodičem), on ima savršenu vodljivost, to jest vrijeme relaksacije mora limesom ići u beskonačnost. Drukčije rečeno, $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$. Računanjem limesa dobijemo vodljivost kao

$$\sigma(\omega) = -\frac{ne^2}{i\omega m} \quad (2.14)$$

gdje nam n predstavlja gustoću supravodljivih elektrona, te ćemo koristiti oznaku n_s . Masu ćemo interpretirati kao masu elektrona te joj dati oznaku m_e . Izrazu (2.14) trebalo bi zbog pravila suma dodati član

$$\frac{\pi n_s e^2}{m_e} \delta(\omega) . \quad (2.15)$$

Krenimo od Ohmovog zakona. Uzet ćemo rotaciju izraza (2.1) pri konačnoj frekvenciji

$$(\nabla \times \mathbf{j})e^{-i\omega t} = \sigma(\omega)(\nabla \times \mathbf{E})e^{i\omega t} . \quad (2.16)$$

Uvrštavanjem vodljivosti (2.14) dobivamo oblik Londonove jednađžbe u granici $\omega = 0$

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{B} . \quad (2.17)$$

Ovu jednađžbu možemo povezati s Maxwelllovom jednađžbom

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.18)$$

te dobivamo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{B} = -\frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} . \quad (2.19)$$

Definiramo *penetracijsku dubinu* λ koja predstavlja dubinu prodiranja vanjskog magnetskog polja u supravodljivi uzorak:

$$\lambda = \left(\frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (2.20)$$

Daljnim raspisom jednadžbe možemo naći i oblik jednadžbe za polje

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B} = 0 \quad (2.21)$$

te dobivamo polje

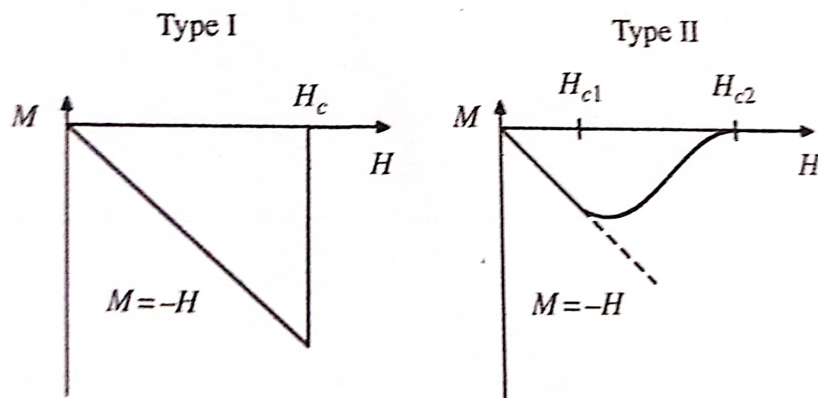
$$B = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (2.22)$$

gdje je x koordinata okomita na površinu supravodiča koja mjeri dubinu. Rješenje nam govori da je magnetsko polje zasjenjeno unutar supravodiča, tj. da može prodrijeti u njega na dubinu reda veličine λ .

2.3 Supravodiči tipa I i II

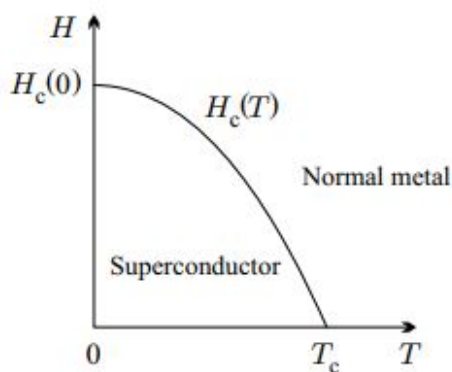
Valja spomenuti da se Meissner-Ochsenfeldov efekt vidi na relativno malim vanjskim poljima - dovoljno jako polje će uništiti supravodljivo stanje te će se metal ponašati normalno. Po tome kako se supravodljivi materijali ponašaju pri povećanju vanjskog polja, kategoriziramo ih u supravodiče tipa I i supravodiče tipa II. Do sad diskutirana otkrića su zapravo otkrića supravodiča tipa I: supravodiči tipa II su otkriveni 1937. godine pri istraživanju ponašanja supravodiča u magnetskim poljima.

U slučaju supravodiča tipa I, magnetsko polje unutar uzorka ostaje nula kako vanjsko polje raste, dok vanjsko polje ne postane dovoljno jako da naglo uništi supravodljivo stanje. Vanjsko polje na kojem se uništava supravodljivo stanje nazivamo *kritično polje* te ga označavamo sa H_C . Za supravodiče tipa II prijelaz iz supravodljivog u normalno stanje se komplicira - imamo dva kritična polja te miješano stanje između njih. U razmatranjima magnetizacije to prikazujemo grafovima (slika 2.2.).

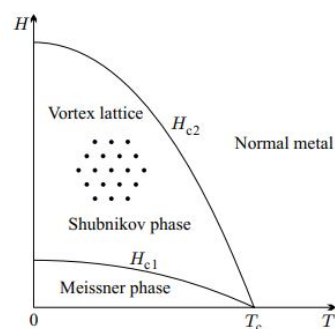


Slika 2.2: Magnetizacija kao funkcija H za supravodiče tipa I i II, preuzeto iz [1], str. 57

Ovu razliku možemo prikazati i povišenjem temperature, gdje supravodiči tipa II opet pokazuju kompleksnije ponašanje (vidi sliku 2.3 i 2.4).



Slika 2.3: Fazni dijagram supravodiča tipa I, preuzeto iz [2], str. 456



Slika 2.4: Fazni dijagram supravodiča tipa II, preuzeto iz [2], str. 457

Kritična polja kao funkcije temperature mijenjaju se s njenim rastom, i padaju na nulu na T_C .

Objašnjenje ponašanja supravodiča tipa II, tj. termodinamičkog faznog prijelaza između H_{C1} i H_{C2} dao je Abrikozov 1957. godine kad je pokazao da magnetsko polje može ući u supravodič u obliku virova, čija središta su u fazi normalnog metala. Njegovo rješenje raspravit će se detaljnije u sljedećem poglavlju.

3 Ginzburg-Landauov model i Abrikozovljevi virovi

3.1 Ginzburg-Landauov model

Ginzburg i Landau su 1950. godine iznijeli svoju teoriju supravodljivosti koja opisuje fazni prijelaz iz normalnog u supravodljivo stanje sa termodinamičkog stajališta. Pretpostavili su da se taj fazni prijelaz može opisati nekim *parametrom uređenja* ψ koji je nula u normalnom stanju, a ima neku konačnu vrijednost u supravodljivom stanju, odnosno jednak je nuli iznad T_C , a ima konačnu vrijednost ispod T_C . Pretpostavljeno je i da slobodna energija supravodiča mora ovisiti o parametru uređenja ψ , no pošto je postulirano da je on po prirodi kompleksan, tj. da ima amplitudu i fazu,

$$\psi = |\psi|e^{i\varphi} \quad (3.1)$$

a energija mora biti realna, ona može ovisiti samo o apsolutnoj vrijednosti parametra uređenja $|\psi|$, odnosno o njegovoj amplitudi. Tada energiju supravodljivog stanja možemo opisati Landauovim razvojem

$$f_s(T) = f_n(T) + a(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi|^4 + \dots \quad (3.2)$$

gdje su f_s i f_n gustoće slobodne energije supravodljivog i normalnog stanja, $f = \frac{F}{V}$, a parametri $a(T)$ i $b(T)$ fenomenološki parametri koji ovise o temperaturi. Potrebno je uvesti oblike tih parametara blizu T_C , pa možemo napraviti razvoj

$$a(T) \approx a(T - T_C) + \dots \quad (3.3)$$

$$b(T) \approx b \quad (3.4)$$

gdje su a i b konstantni fenomenološki parametri. Moramo spomenuti dodatne pretpostavke modela. Unutar Ginzburg-Landauove teorije dozvoljeno je da parametar uređenja ovisi o položaju, $\psi(\mathbf{r})$, pa će slobodna energija ovisiti o gradijentu takvog parametra uređenja. U ožbir moramo uzeti i energiju magnetskog polja te da učinci magnetskog polja moraju imati utjecaj na pojavu. Postulirali su da magnetsko polje u jednadžbu ulazi kao da je $\psi(\mathbf{r})$ valna funkcija za nabijene čestice, odnosno da možemo napraviti Peierlsovu supstituciju

$$\frac{\hbar}{i}\nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A} \quad (3.5)$$

gdje je $\mathbf{A}$ magnetski vektorski potencijal, a q naboj. Za sve supravodiče nalazi se da je taj naboj jednak $-2e$.

Kada sve navedeno uzmemo u obzir, dolazimo do izlaza za slobodnu energiju

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + a|\psi|^2 + \frac{1}{2}b|\psi|^4 \quad (3.6)$$

gdje je m^* parametar koji igra ulogu efektivne mase sustava s makroskopskom valnom funkcijom $\psi(\mathbf{r})$. Iz slobodne energije želimo naći rješenje za parametar uređenja, te za to moramo minimizirati energiju sustava. To ćemo napraviti varijacijskim računom, gledanjem infinitezimalne varijacije u parametru uređenja $\psi(\mathbf{r})$. Time dolazimo do Ginzburg-Landau jednadžbe

$$\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla + 2e\mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + a\psi(\mathbf{r}) + b|\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.7)$$

Promotrit ćemo kakvo ponašanje ima parametar uređenja pri površini supravodiča. Uzmimo Ginzburg-Landau jednadžbu u odsustvu magnetskog polja u jednoj dimenziji, te da je normalan metal u području $x < 0$, a supravodič u $x > 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + a\psi(x) + b|\psi(x)|^2 \psi(x) = 0 \quad (3.8)$$

Rješenje ove jednadžbe uz rubni uvjet $\psi(0) = 0$ je

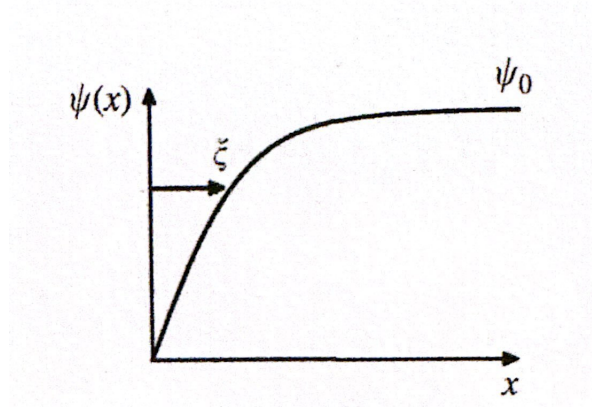
$$\psi(x) = \psi_0 \operatorname{th} \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi(T)} \right) \quad (3.9)$$

gdje je ψ_0 vrijednost parametra uređenja u unutrašnjosti supravodiča, daleko od površine. Definiramo karakterističnu prostornu duljinu ξ koju nazivamo *Ginzburg-Landauova duljina koherencije*,

$$\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*|a(T)|} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

Duljina koherencije nam predstavlja duljinu od površine preko koje se parametar uređenja vrati na svoju vrijednost u dubljoj unutrašnjosti supravodiča, odnosno na toj duljini nestaje ovisnost parametra uređenja o položaju, te ima stalnu vrijednost

ψ_0 . Kasnije će se pokazati da duljina koherencije odgovara veličini Cooperovog para, isto kao što parametar uređenja odgovara valnoj funkciji Cooperovog para.



Slika 3.1: Prostorna ovisnost parametra uređenja s označenom skalom duljine koherencije, preuzeto iz [1] str. 76.

Sada imamo dva bitna parametra koji opisuju supravodič, dubinu penetracije λ i duljinu koherencije ξ . Možemo definirati *Ginzburg-Landauov parametar*

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} \quad (3.11)$$

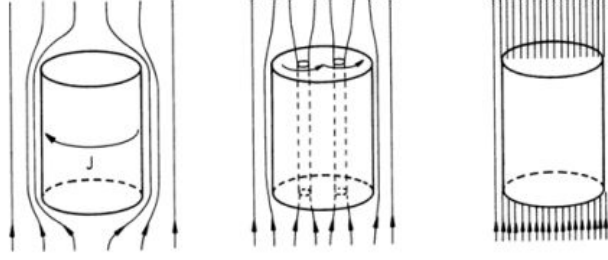
koji karakterizira supravodiče tipa I i II i neovisan je o temperaturi u okviru Ginzburg-Landau teorije. Supravodiči tipa I imaju $0 < \kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$, a tipa II $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.2 Abrikozovljevi virovi

Ginzburg-Landauova teorija omogućuje objašnjenje, odnosno nalaženje rješenja za supravodiče tipa II. Abrikozov je našao rješenje za Ginzburg-Landauove jednadžbe u slučaju supravodiča u magnetskom polju - malo ispod H_{C2} parametar uređenja tvori periodičnu strukturu virova, dvodimenzionalnu heksagonalnu rešetku (u stabilnom stanju) koju nazivamo *Abrikozovljeva rešetka*. Svaki vir nosi određeni magnetski tok što objašnjava kako magnetsko polje ulazi u supravodič, tj. objašnjava miješano stanje između H_{C1} i H_{C2} .

3.2.1 Kvantizacija toka

Primijenimo Ginzburg-Landau model na supravodljivi prsten, opisan polarnim koordinatama $\mathbf{r} = (r, \phi, z)$. Parametar uređenja onda mora biti periodičan s obzirom na kut ϕ ,



Slika 3.2: Prikaz supravodljivog, miješanog i normalnog stanja, preuzeto iz [4] str. 6.

$$\psi(r, \phi, z) = \psi(r, \phi + 2\pi, z) \quad (3.12)$$

Zanemarimo male promjene $\psi(\mathbf{r})$ kroz presjek prstena, dakle zanemarimo ovisnost o r i z . To nam daje oblik parametra uređenja

$$\psi(\phi) = \psi_0 e^{in\phi} \quad (3.13)$$

gdje n shvaćamo kao određeni broj namotaja makroskopske valne funkcije.

Kroz supravodljivi prsten teče supravodljiva struja koja će inducirati magnetsko polje, te će postojati magnetski tok kroz taj prsten. Možemo definirati magnetski vektorski potencijal u $\mathbf{e}_\phi$ smjeru

$$A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi R} \quad (3.14)$$

gdje je R radijus površine omeđene prstenom. Iz definicije magnetskog toka i odnosom $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ nalazimo

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi R A_\phi \quad (3.15)$$

Slobodnu energiju možemo dobiti iz njene gustoće integriranjem po volumenu prstena, te izraziti:

$$F_s(T) = F_{s0}(T) + V \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \frac{in}{R} - \frac{2ei\Phi}{2\pi\hbar R} \right|^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d^3r \quad (3.16)$$

gdje je $F_{s0}(T)$ energija prstena bez ikakvih struja ili magnetskih tokova, a V ukupni volumen prstena.

Vidimo da izraz za energiju ima član koji ovisi i o Φ i o n , pa ga možemo preurediti u

$$V \frac{\hbar^2}{2m^* R^2} |\psi|^2 (\Phi - n\Phi_0)^2 \quad (3.17)$$

gdje definiramo *kvant toka* $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$. Magnetski tok kroz supravodljivi prsten (ili vir) ne može imati bilo koju proizvoljnu vrijednost, već mora imati vrijednost $n\Phi_0$, odnosno mora biti kvantiziran.

3.2.2 Abrikozovljeva rešetka

Abrikozovljeva rešetka karakteristika je supravodiča tipa II. Fazni prijelaz iz miješanog u normalno stanje na H_{C2} je fazni prijelaz drugog reda, pa možemo pretpostaviti da je parametar uređenja relativno mali u blizini kritične točke. Zbog toga, i gustoća supravodljivih elektrona će biti mala, te će posljedično i struje koje zasjenjuju polje biti male. To nas dovodi do zaključka da će i magnetizacija iznosom biti mala, pa možemo pisati

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} . \quad (3.18)$$

Dovoljno blizu H_{C2} polje B onda možemo tretirati kao konstantu

$$\mathbf{B} = (0, 0, B) . \quad (3.19)$$

Pripadajući vektorski potencijal možemo izraziti Laundauovim baždarenjem

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, Bx, 0) . \quad (3.20)$$

Jednadžbu (3.7) onda možemo zapisati kao

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla + \frac{2eBi}{\hbar} x \mathbf{e}_y \right) \left(\nabla + \frac{2eBi}{\hbar} x \mathbf{e}_y \right) \psi(\mathbf{r}) + a(T)\psi + b|\psi|^2\psi = 0 . \quad (3.21)$$

U slučaju kada smo infinitezimalno ispod H_{C2} , jednadžba bi se linearizirala, mogli bismo odbaciti zadnji član iz razmatranja da bi i parametar uređenja bio vrlo blizu nule, te bismo rješenja te linearne jednadžbe našli kao Landauove nivoe s valnom funkcijom

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i(k_y y + k_z z)} f(x) . \quad (3.22)$$

Moramo naći nepoznatu funkciju $f(x)$, te u tu svrhu rješenje supstituiramo u linearnu jednadžbu. Dobivamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{m^* \omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 f = \left(|a| - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right) f \quad (3.23)$$

što prepoznamo kao jednadžbu za kvantni harmonički oscilator, uz jednu razliku - ishodište je pomaknuto iz 0 u x_0 ,

$$x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m^* \omega_C} , \quad (3.24)$$

gdje je ω_C ciklotronska frekvencija

$$\omega_C = \frac{2eB}{m^*} . \quad (3.25)$$

Funkcija f nam predstavlja valnu funkciju harmoničkog oscilatora. Član u zagradi s desne strane predstavlja energiju oscilatora

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} = a(T_C - T) . \quad (3.26)$$

Vidimo da na $T = T_C$ nije moguće zadovoljiti ovu jednadžbu. Moramo hladiti uzorak dovoljno ispod T_C da dobijemo rješenje najniže moguće energije, $n = 0$, $k_z = 0$

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_c = a(T_C - T) . \quad (3.27)$$

Ipak, nas zanima slučaj kada smo ispod T_C , a ne infinitezimalno blizu. Za to se mora riješiti nelinearna jednadžba (3.21). Abrikozovljevo rješenje ima dva dijela: prvo je pretpostavio da će samo osnovna stanja harmoničkog oscilatora biti bitna, pa je parametar uređenja oblika

$$\psi(\mathbf{r}) = C e^{ik_y y} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\xi^2(T)}} . \quad (3.28)$$

Pretpostavio je da ta rješenja možemo spojiti u periodičnu rešetku: ako tražimo rješenje koje je periodično u y sa periodom l_y , vrijednosti k_y moraju biti

$$k_y = \frac{2\pi}{l_y} n . \quad (3.29)$$

Pomak "težišta" valne funkcije Landauovih nivoaa će biti

$$x_0 = -\frac{\Phi_0}{Bl_y} n \quad (3.30)$$

Pokušavamo periodičnim rješenjem

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi ny}{l_y}} e^{-(x+\frac{n\Phi_0}{Bl_y})^2 \frac{1}{\xi^2(T)}} \quad (3.31)$$

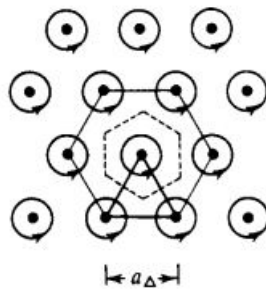
koje je periodično u y, ali ne nužno u x. Abrikosov daje popravku: rješenje može biti periodično u x ako ograničimo kakvi koeficijenti smiju biti

$$C_{n+\nu} = C_n \quad (3.32)$$

za neki cijeli broj ν . Period je l_x ,

$$l_x = \nu \frac{\Phi_0}{Bl_y} \quad (3.33)$$

čime imamo opisanu rešetku. Pokazano je da se najniža ukupna energija dobiva za $\nu = 2$, što odgovara jednostavnoj heksagonalnoj rešetci. Parametar uređenja u jednoj točki u ćeliji jednak je nuli, i imamo jedan kvant toka po ćeliji, te je rješenje periodična rešetka (vidi sliku 3.3).



Slika 3.3: Virovi u heksagonalnoj rešetci, preuzeto iz [2], str. 496.

4 BCS teorija supravodljivosti

Godine 1957. John Bardeen, Leon Cooper i John Robert Schrieffer objavljuju svoju teoriju supravodljivosti (BCS), koja je prva mikroskopska teorija supravodljivosti. Ona je davala objašnjenja eksperimentalnih rezultata, ponajviše mjerenja energetskog procijepa 2Δ . Godine 1960. iz BCS teorije izvedene su jednadžbe Ginzburg-Landau modela, kad je i pokazano da Ginzburg-Landau parametar uređenja ima ulogu valne funkcije Cooperovih parova.

BCS teorija također je točno objasnila izotopni efekt, koji govori o mijenjanju kritične temperature supravodiča s masom iona kristalne rešetke.

BCS teorija se zasniva na tri glavne postavke, tj. tri glavna koraka:

- efektivne interakcije između elektrona mogu biti privlačne, kao posljedica elektron-fonon vezanja
- dva elektrona u supravodiču tvore par, tzv. Cooperov par, koji je stabilno vezano stanje ta dva elektrona, neovisno o tome koliko je privlačna sila između njih slaba na dovoljno niskoj temperaturi
- BCS valna funkcija, koja je mnogočestična valna funkcija, ima oblik koherentnog stanja

4.1 Privlačna elektron-elektron interakcija

Znamo da se elektroni općenito odbijaju kulonskom interakcijom

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.1)$$

no u metalima možemo razmišljati na drukčiji način: kada se elektron pomakne, ostali elektroni se moraju od njega odbiti. To za sobom ostavlja posebnu vrstu šupljine, zbog prisustva pozitivno nabijene rešetke - homogene ionske pozadine koju razmatramo u modelu želea, koja je posljedica i kulonske interakcije i Paulijevog principa. Gibajući elektron i tako nastalu šupljinu zajedno nazivamo kvazičesticom. Ako razmotrimo te kvazičestice, vidimo da će odbojna kulonska interakcija među elektronima biti zasjenjena. To zasjenjenje možemo izraziti Thomas-Fermijevim modelom, pa će onda efektivna interakcija biti oblika

$$V_{TF}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{r_{TF}}} . \quad (4.2)$$

Iz jednadžbe vidimo da odbojna interakcija nestaje na $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > r_{TF}$. Iz prisustva eksponencijalne funkcije u jednadžbi možemo zaključiti da je kulonska interakcija značajno zasjenjena.

Osim direktno, elektroni u metalu mogu međusobno interagirati i preko fonona kristalne rešetke. Da bismo opisali takvu interakciju među elektronima, prvo trebamo opisati elektron-fonon interakciju.

Uzmimo fonon valnog vektora $\mathbf{q}$ u nekom metalu. Ukupni hamiltonijan tih fonona će biti suma energija kvantnih harmoničkih oscilatora, sumirano po valnim vektorima i polarizacijama tih fonona:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{q}\lambda} \left(a_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{q}\lambda} + \frac{1}{2} \right) . \quad (4.3)$$

Hamiltonijan je zapisan formalizmom druge kvantizacije, odnosno preko operatora stvaranja i poništenja fonona, $a_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger$ i $a_{\mathbf{q}\lambda}$, (valnog vektora $\mathbf{q}$ u modu λ).

Ako pretpostavimo da u jediničnoj ćeliji kristalne rešetke imamo jedan atom, imat ćemo tri akustična fononska moda, dva transverzalna i jedan longitudinalni.

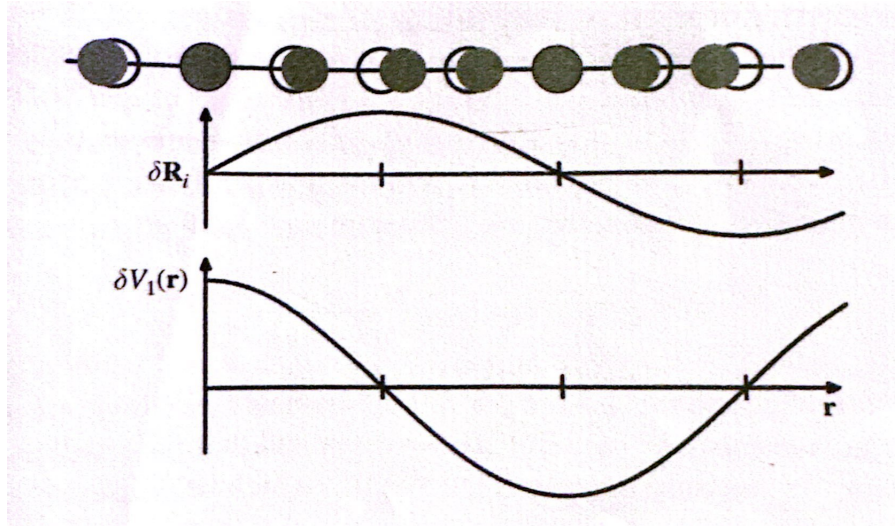
Moramo na isti način izraziti pomak atoma, pa će atomi koji se nalaze na položaju $\mathbf{R}_i$ biti pomaknuti za

$$\delta \mathbf{R}_i = \sum_{\mathbf{q}\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda} \left(\frac{\hbar}{2M\omega_{\mathbf{q}\lambda}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(a_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger + a_{-\mathbf{q}\lambda} \right) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i} \quad (4.4)$$

gdje je vektor $\mathbf{e}_{\mathbf{q}\lambda}$ jedinični vektor u smjeru pomaka atoma za fononski mod $\mathbf{q}\lambda$. Pomak kristalne rešetke koji smo opisali će rezultirati preraspodjelom naboja, odnosno efektivnog potencijala elektrona u metalu. Možemo definirati deformacijski potencijal

$$\delta V_1(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{\partial V_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{R}_i} \delta \mathbf{R}_i . \quad (4.5)$$

Potencijal se modulirao zbog fonona, pa će i on imati valnu duljinu $\frac{2\pi}{q}$. To se može prikazati slikom 4.1.



Slika 4.1: Pomaci atoma u rešetci zbog fonona i deformacijski potencijal, preuzeto iz [1], str. 129.

Slika 4.1. nam pokazuje kako se zapravo i naboj preraspodjeljuje. Vidimo da tamo gdje funkcija pomaka atoma ima maksimum, atom je najviše pomaknut iz svog originalnog položaja, dok gdje funkcija ima minimum, tamo je atom ostao u svom originalnom položaju. To rezultira lokalno većom ili manjom gustoćom naboja.

Elektron koji putuje kroz kristalnu rešetku će podleći tom potencijalu, te biti raspršen. Ako gledamo elektrone u periodičnom potencijalu, znamo da njihove valne funkcije možemo opisati Blochovim teoremom, pa ćemo ta stanja nazivati Blochova stanja. Elektron koji promatramo bit će raspršen iz stanja $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ u stanje $\psi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(\mathbf{r})$, odnosno zbog fonona će mu se impuls promijeniti iz $\hbar\mathbf{k}$ u $\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{q})$.

To je moguća efektivna interakcija između elektrona: ovaj proces možemo shvatiti kao da elektron emitira virtualni fonon, koji se propagira kroz kristalnu rešetku, pa ga neki drugi elektron eventualno apsorbira, što insinuira prijenos impulsa $\hbar\mathbf{q}$ s jednog elektrona na drugi. Takvu efektivnu interakciju možemo zapisati kao

$$V_{eff}(\mathbf{q}, \omega) = |g_{\mathbf{q}\lambda}|^2 \frac{1}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{q}\lambda}^2} \quad (4.6)$$

gdje imamo konstantu elektron-fonon vezanja $g_{\mathbf{q}\lambda}$ koja je povezana s matričnim elementom koji opisuje raspršenje elektrona iz stanja $\mathbf{k}$ u stanje $\mathbf{k} + \mathbf{q}$ na fononu valnog vektora $\mathbf{q}$ i frekvencije $\omega_{\mathbf{q}\lambda}$. Možemo dodatno pojednostaviti oblik ove efektivne interakcije; pretpostaviti ćemo da interakcija ne ovisi o valnom vektoru $\mathbf{q}$ i polarizaciji

λ , a ovisi samo o tipičnoj frekvenciji fonona, odnosno Debyevoj frekvenciji ω_D . Zbog toga će i $g_{q\lambda}$ biti aproksimiran konstantom g_{eff} :

$$V_{eff}(\mathbf{q}, \omega) = |g_{eff}|^2 \frac{1}{\omega^2 - \omega_D^2} . \quad (4.7)$$

Ova interakcija će biti privlačna za frekvencije fonona $\omega < \omega_D$, jer je onda i $V_{eff} < 0$. Privlačni dio ove interakcije nije bitan, jer i radimo u režimu energija unutar $2\hbar\omega_D$ od Fermijeve energije, pa mora vrijediti i $\hbar\omega_D \gg k_B T$. Iz tog razloga možemo tu interakciju zapisati na jednostavan način

$$V_{eff}(\mathbf{q}, \omega) = |g_{eff}|^2 , \quad |\omega| < \omega_D . \quad (4.8)$$

Hamiltonijan efektivne privlačne elektron-elektron interakcije finalno možemo zapisati u formalizmu druge kvantizacije

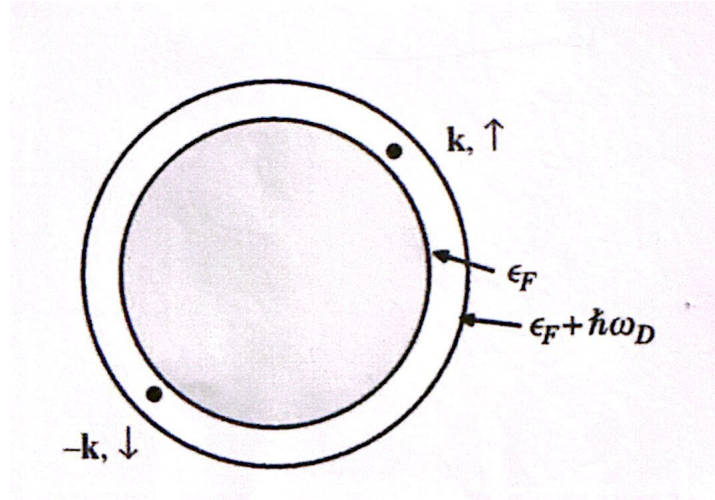
$$\hat{H} = -|g_{eff}|^2 \sum c_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}\sigma_1}^\dagger c_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q}\sigma_2}^\dagger c_{\mathbf{k}_1\sigma_1} c_{\mathbf{k}_2\sigma_2} \quad (4.9)$$

gdje su $c^\dagger$ i c operatori stvaranja i uništenja elektronskih stanja karakteriziranih valnim vektorima $\mathbf{k}_1$ i $\mathbf{k}_2$ te spinovima σ_1 i σ_2 .

4.2 Cooperovi parovi

Nakon pokazivanja da je privlačna interakcija između elektronima moguća, treba pokazati da ona može dva elektrona spojiti u vezano stanje.

Uzmimo jedan par elektrona dodan izvan sferne Fermijeve plohe na $T = 0$, gdje su sva stanja $k < k_F$ zauzeta (vidi sliku 4.2). Pretpostavimo da ti elektroni interagiraju elektron-fonon interakcijom, ali ne s onima unutar Fermijeve plohe - s njima interagiraju samo Paulijevim principom.



Slika 4.2: Vizualni prikaz Cooperovog problema, preuzeto iz [1], str. 131.

Da bismo našli njihovu energiju vezanja, trebamo naći njihovu valnu funkciju, tj. tražimo dvočestičnu valnu funkciju elektrona. U obzir moramo uzeti i njihov spin, pa će valna funkcija imati oblik:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = e^{i\mathbf{k}_{CM} \cdot \mathbf{R}_{CM}} \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Phi_{\sigma_1, \sigma_2}^{spin} . \quad (4.10)$$

Definiramo R_{CM} kao koordinatu centra mase ta dva elektrona, $\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$, pa je i ukupni impuls ta dva elektrona dan kao $\hbar \mathbf{k}_{CM}$. Pokazuje se da će energija sustava ta dva elektrona biti minimalna kada nemaju gibanje centra mase, pa razmatramo $\mathbf{k}_{CM} = 0$. Valnu funkciju tih elektrona sada možemo zapisati kao

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Phi_{\sigma_1, \sigma_2}^{spin} \quad (4.11)$$

te moramo razmotriti dva preostala dijela funkcije. Spinski dio valne funkcije može biti spinski singlet ili spinski triplet, no veliku većinu supravodiča karakterizira valna funkcija sa spinskim singletom

$$\Phi_{\sigma_1, \sigma_2}^{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) . \quad (4.12)$$

Znamo da cjelovita valna funkcija fermiona mora biti antisimetrična, te da je spinski dio valne funkcije neparan. To znači da koordinatni dio $\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ mora biti paran, odnosno

$$\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \varphi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) , \quad (4.13)$$

pa ga možemo pisati pomoću Blochovih stanja koja se u ovom slučaju reduciraju na ravne valove

$$\varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} . \quad (4.14)$$

U ovoj jednadžbi sa $\varphi_{\mathbf{k}}$ smo označili koeficijente u razvoju ovisne o $\mathbf{k}$.

Cjelovitu valnu funkciju onda možemo zapisati u obliku

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} \psi_{\mathbf{k}\uparrow}(\mathbf{r}_1) & \psi_{\mathbf{k}\downarrow}(\mathbf{r}_2) \\ \psi_{-\mathbf{k}\uparrow}(\mathbf{r}_1) & \psi_{-\mathbf{k}\downarrow}(\mathbf{r}_2) \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

gdje smo za zapis koristili Slaterovu determinantu, koja opisuje i jednadžbu (4.12), a $\psi_{\mathbf{k}}$ je jednočestično Blochovo stanje.

Kada imamo konstruiranu funkciju elektrona, potrebno je izračunati njihovu energiju vezanja. To možemo učiniti pomoću Schrödingerove jednadžbe

$$\hat{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle . \quad (4.16)$$

Hamiltonijan para elektrona sadržavat će doprinose njihovih energija $2\varepsilon_{\mathbf{k}}$ te efektivne elektron-elektron interakcije $-|g_{eff}|^2$. Kao energiju vezanja dva elektrona onda dobivamo

$$E\varphi_{\mathbf{k}} = 2\varepsilon_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}} - |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}'} \varphi_{\mathbf{k}'} \quad (4.17)$$

gdje jednoelektronsku energiju $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ radi jednostavnosti mjerimo od Fermijeve energije ε_F . Izravan izraz za energiju možemo naći iz argumenta samosuglasnosti

$$C = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} . \quad (4.18)$$

Iz (4.17) i (4.18) dobivamo

$$1 = -|g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{E - 2\varepsilon(\mathbf{k})} . \quad (4.19)$$

Sumu po valnim vektorima, odnosno stanjima, možemo transformirati u integral po energiji na način

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow g(\varepsilon_F) \int d\varepsilon \quad (4.20)$$

gdje je $g(\varepsilon_F)$ gustoća stanja slobodnog elektronskog plina, po jednoj projekciji spina, na Fermijevoj energiji, te dobivamo

$$1 = -|g_{eff}|^2 g(\varepsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{E - 2\varepsilon} . \quad (4.21)$$

Energiju mjerimo od razine Fermijeve energije, pa se to i očituje u granicama integrala - on ima granice nula i $\hbar\omega_D$, a ne ε_F i $\varepsilon_F + \hbar\omega_D$. Rješavanjem integrala nalazimo

$$E = \frac{2\hbar\omega_D}{1 - e^{\frac{2}{|g_{eff}|^2 g(\varepsilon_F)}}} . \quad (4.22)$$

Definiramo *elektron-fonon parametar vezanja* λ ,

$$\lambda = |g_{eff}|^2 g(\varepsilon_F) \quad (4.23)$$

za koji smatramo da je puno manji od 1, odnosno $\lambda \ll 1$. Ovaj uvjet još nazivamo i *granica slabog vezanja*. Ako to uzmemo u obzir, energiju (4.22) možemo zapisati na način

$$E = -2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{\lambda}} . \quad (4.24)$$

Vidimo da energija vezanja Cooperovog para postoji, koliko god malen bio λ . Također, energija Cooperovog para je negativna, pa možemo reći da zaista postoji vezano sta-

nje.

4.3 BCS valna funkcija

Kada je konstruiran model privlačne interakcije između elektronima i pokazano da dva elektrona mogu tvoriti vezano stanje, treba napisati mnogočestičnu valnu funkciju koja bi opisivala sustav tako uparenih elektrona.

Schrieffer je to učinio tako da je zapisao koherentno stanje Cooperovih parova. Općenito, koherentno stanje je stanje oblika

$$|\psi_{coh}\rangle = C \left(\psi_0 + \frac{\alpha}{1!^{\frac{1}{2}}} \psi_1(x) + \frac{\alpha^2}{2!^{\frac{1}{2}}} \psi_2(x) + \dots \right) \quad (4.25)$$

u kojem je α proizvoljan kompleksan broj a C normalizacijska konstanta.

Definiramo operatore stvaranja i poništenja Cooperovih parova

$$\hat{P}_{\mathbf{k}}^\dagger = c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \quad (4.26)$$

$$\hat{P}_{\mathbf{k}} = c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \quad (4.27)$$

te pomoću njih možemo zapisati BCS valnu funkciju u obliku koherentnog stanja

$$|\Psi_{BCS}\rangle = K \exp \left(\sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} \hat{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) |0\rangle \quad (4.28)$$

u kojem je K normalizacijska konstanta, a $\alpha_{\mathbf{k}}$ ima ulogu varijacijskog parametra koji se koristi za minimizaciju energije. Iz definicije operatora stvaranja Cooperovih parova možemo zaključiti neka njegova svojstva,

$$\left[\hat{P}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{P}_{\mathbf{k}'}^\dagger \right] = 0, \quad (4.29)$$

ako govorimo o dva različita valna vektora, $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$. Iz toga slijedi

$$\left(\hat{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \right)^2 = 0. \quad (4.30)$$

Umjesto preko sume po valnim vektorima, možemo stoga funkciju (4.28) zapisati preko umnoška eksponencijalnih funkcija

$$|\Psi_{BCS}\rangle = K \prod_{\mathbf{k}} \exp\left(\alpha_{\mathbf{k}} \hat{P}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right) |0\rangle . \quad (4.31)$$

Tu eksponencijalnu funkciju možemo razviti u Taylorov red

$$\exp\left(\alpha_{\mathbf{k}} \hat{P}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right) = 1 + \frac{\alpha_{\mathbf{k}} \hat{P}_{\mathbf{k}}^{\dagger}}{1!} + \frac{\left(\alpha_{\mathbf{k}} \hat{P}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right)^2}{2!} + \dots \quad (4.32)$$

Svi članovi s potencijom dva i višom će iščeznuti zbog (4.30), pa BCS valnu funkciju možemo zapisati kao

$$|\Psi_{BCS}\rangle = K \prod_{\mathbf{k}} \left(1 + \alpha_{\mathbf{k}} \hat{P}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right) |0\rangle . \quad (4.33)$$

Nalaženjem konstante normalizacije K , BCS valnu funkciju prikazujemo kao

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}}^* + v_{\mathbf{k}}^* \hat{P}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right) |0\rangle . \quad (4.34)$$

Definiramo $u_{\mathbf{k}}$ i $v_{\mathbf{k}}$:

$$u_{\mathbf{k}}^* = \frac{1}{1 + |\alpha_{\mathbf{k}}|^2} \quad (4.35)$$

$$v_{\mathbf{k}}^* = \frac{\alpha_{\mathbf{k}}}{1 + |\alpha_{\mathbf{k}}|^2} \quad (4.36)$$

i vidimo da vrijedi relacija

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1 . \quad (4.37)$$

4.4 BCS hamiltonijan i supravodljivi procijep

Cilj nam je minimizirati energiju BCS stanja, za što je potrebno odrediti parametre $u_{\mathbf{k}}^*$ i $v_{\mathbf{k}}^*$. Možemo krenuti od zapisivanja BCS hamiltonijana. On će se sastojati od kinetičkog dijela i od dijela efektivne interakcije elektrona:

$$\hat{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} c_{\mathbf{k}\sigma} - |g_{eff}|^2 \sum c_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}\sigma_1}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}\sigma_2}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_1\sigma_1} c_{\mathbf{k}_2\sigma_2} . \quad (4.38)$$

Iz razmatranja Cooperovih parova možemo zaključiti da ovaj hamiltonijan možemo malo modificirati. Zato što je slučaj minimalne energije Cooperovog para onaj kada gibanja centra mase nema, Cooperov par je takav da količine gibanja elektrona, tj. njihovi valni vektori moraju biti suprotni, $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$, isto kao i spinovi $\sigma_1 = -\sigma_2$.

Onda možemo promijeniti indekse operatora

$$\hat{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} - |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{\mathbf{k}'\uparrow} \quad (4.39)$$

odnosno pisati:

$$\hat{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} - |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{P}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{P}_{\mathbf{k}'} \quad (4.40)$$

Energiju ćemo naći preko očekivane vrijednosti hamiltonijana:

$$E = \langle \Psi_{BCS} | \hat{H}_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle \quad (4.41)$$

Prvo, iz računanja očekivane vrijednosti operatora broja čestica $\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}$ i $\hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow}$, možemo zapisati ukupni broj elektrona kao

$$\langle \hat{N} \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 \quad (4.42)$$

Možemo dobiti i oblike kinetičkog i interakcijskog člana, pa će energija imati oblik

$$E = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} |v_{\mathbf{k}}|^2 - |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}^* u_{\mathbf{k}'}^* u_{\mathbf{k}} \quad (4.43)$$

Parametri $v_{\mathbf{k}}$ i $u_{\mathbf{k}}$ će nam poslužiti za minimizaciju energije. Rješenje ćemo naći metodom Lagrangeovih multiplikatora; derivirat ćemo po $u_{\mathbf{k}}^*$ i $v_{\mathbf{k}}^*$

$$\frac{\partial E}{\partial u_{\mathbf{k}}^*} - \mu \frac{\partial N}{\partial u_{\mathbf{k}}^*} + E_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} = 0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v_{\mathbf{k}}^*} - \mu \frac{\partial N}{\partial v_{\mathbf{k}}^*} + E_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = 0 \quad (4.45)$$

Deriviranjem dobivamo sustav od dvije linearne jednačbe

$$(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)u_{\mathbf{k}} + \Delta v_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}} \quad (4.46)$$

$$\Delta^* u_{\mathbf{k}} - (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)v_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} \quad (4.47)$$

gdje smo definirali parametar Δ koji želimo naći,

$$\Delta = |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* = |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} \langle c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle . \quad (4.48)$$

Sustav jednažbi (4.46) i (4.47) možemo prikazati u matričnom zapisu

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = E_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} . \quad (4.49)$$

Prepoznavamo ovaj oblik jednažbe, te zaključujemo da će $E_{\mathbf{k}}$ biti svojstvena vrijednost matrice.

Determinanta homogenog sustava (4.49) mora iščezavati, te računanjem determinante dobivamo $E_{\mathbf{k}}$ kao

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + |\Delta|^2} \quad (4.50)$$

s tim da moramo uzeti u obzir da je svojstvena vrijednost $\pm E_{\mathbf{k}}$. Ova vrijednost ima značenje spektra energije kvazičestica u supravodljivom stanju.

Može se pokazati da vrijedi

$$u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* = \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (4.51)$$

što možemo uvrstiti u (4.48) te pomoću (4.50) raspisati:

$$1 = \frac{1}{2} |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{((\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + |\Delta|^2)^{\frac{1}{2}}} . \quad (4.52)$$

Sumu po stanjima opet možemo transformirati u integral

$$1 = \frac{\lambda}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2 + |\Delta|^2)^{\frac{1}{2}}} . \quad (4.53)$$

Rješavanjem, koristeći simetriju integranda oko nule, dobivamo

$$1 = \lambda \ln \left(\frac{\hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + |\Delta|^2}}{|\Delta|} \right) . \quad (4.54)$$

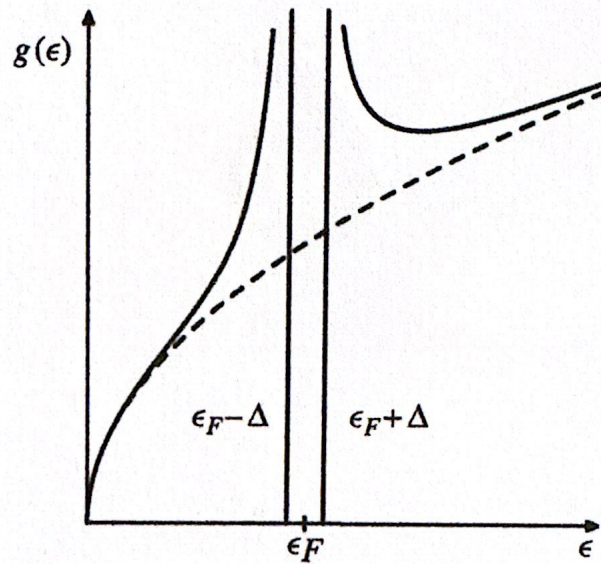
Zbog logaritamske divergencije integrala oko gornje granice možemo približno pisati

$$1 = \lambda \ln \left(\frac{2\hbar\omega_D}{|\Delta|} \right) . \quad (4.55)$$

Finalno, dobivamo Δ kao

$$|\Delta| = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}} . \quad (4.56)$$

Parametru Δ možemo dati značenje *supravodljivog procijepa*, na $T = 0$. Uviđamo sličnost sa energijom vezanja jednog Cooperovog para (4.24), bitna energijska skala je $\hbar\omega_D$. Supravodljivi procijep u energiji se najbolje vidi kada pogledamo gustoću stanja u supravodljivom stanju (vidi sliku 4.3).



Slika 4.3: BCS energijski procijep u supravodiču, preuzeto iz [1], str. 128.

Procijep je širine 2Δ oko Fermijeve energije, i u tom području nema dostupnih stanja. U normalnom stanju metala elektronska stanja su popunjena do Fermijeve energije, i postoji neka gustoća stanja na Fermijevoj energiji (gustoća stanja 3D plina slobodnih elektrona $g(E) \sim \sqrt{E}$, što je i prikazano na slici 4.3 iscrtkanom krivuljom).

U supravodljivom stanju se ispod T_C otvori procijep u gustoći stanja koji razdvaja zauzeta i nezauzeta stanja.

4.4.1 Supravodljivi procijep na konačnoj temperaturi

Našli smo kako izgleda procijep na $T = 0$, no za realna svojstva supravodiča treba naći oblik procijepa na konačnim temperaturama, da bi se pomoću BCS teorije mogla raditi predviđanja o svojstvima supravodiča.

To možemo učiniti tako da $|\Psi_{BCS}\rangle$ smatramo osnovnim stanjem te gledamo mala pobuđenja, kao što su dodavanje dodatne čestice, nad njim.

Interakcijski član BCS hamiltonijana moramo modificirati aproksimacijom; skup od četiri operatora stvaranja i poništenja možemo prikazati usrednjenjima po parovima tih operatora.

BCS hamiltonijan onda možemo zapisati kao

$$\hat{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \left(\Delta^* c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}\uparrow} + \Delta c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) \quad (4.57)$$

gdje je

$$\Delta = |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} \langle c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle \quad (4.58)$$

a μ je kemijski potencijal. Ovaj hamiltonijan ćemo dijagonalizirati Bogoljubov-Valatin transformacijom. Metoda je slična onoj koja je korištena prije, no uz bitnu razliku da uvodimo nove fermionske operatore za stvaranje ili poništenje malih pobuđenja koji čine hamiltonijan dijagonalnim.

Hamiltonijan možemo zapisati u matričnom obliku

$$\hat{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger & c_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu & \Delta \\ -\Delta^* & -(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Istim postupkom kao i prije možemo dobiti svojstvene vrijednosti središnje matrice u hamiltonijanu, te nalazimo da su iste, $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + |\Delta|^2}$, opet uz napomenu $\pm E_{\mathbf{k}}$.

Cilj nam je promatranu matricu dijagonalizirati. Uvodimo novu unitarnu matricu, koja je u našem slučaju jednaka

$$U = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} & v_{\mathbf{k}}^* \\ -v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} . \quad (4.60)$$

Potrebna nam je i njoj hermitski konjugirana matrica:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}^* & -v_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} & u_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

za koje vrijedi $UU^\dagger = I$, zbog uvjeta $|u_{\mathbf{k}}|^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$.

Ako matricu hamiltonijana iz (4.59) s obje strane pomnožimo matricama U i $U^\dagger$, dobit ćemo dijagonalni oblik

$$U^\dagger \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu & \Delta \\ -\Delta^* & -(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} . \quad (4.62)$$

Tako dobivenu dijagonalnu matricu možemo prikazati pomoću originalne matrice, pa uvrstiti u hamiltonijan (4.59)

$$\hat{H}_{BCS} = \sum_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger & c_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & -E_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} U^\dagger \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} . \quad (4.63)$$

Iz ove jednadžbe definiramo nove fermionske operatore stvaranja i uništenja pobuđenja, $b_{\mathbf{k}\uparrow}$ i $b_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$:

$$\begin{pmatrix} b_{\mathbf{k}\uparrow} \\ b_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} . \quad (4.64)$$

Množenjem možemo dobiti i eksplicitan zapis novih operatora:

$$b_{\mathbf{k}\uparrow} = u_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}\uparrow} - v_{\mathbf{k}}^* c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \quad (4.65)$$

$$b_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger = v_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\uparrow} + u_{\mathbf{k}} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger . \quad (4.66)$$

Operatori $b_{\mathbf{k}\uparrow}$ i $b_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$ su mješavina operatora $c_{-\mathbf{k}}^\dagger$ i $c_{\mathbf{k}\uparrow}$.

To nam govori da stanja koja ti operatori stvaraju i uništavaju nisu u cijelosti stanja elektrona niti stanja šupljina, već je to stanje superpozicije elektrona i šupljine.

Vrijednosti u i v imaju značenje vjerojatnosti, $|u|^2$ je vjerojatnost da će pobuđenje biti elektron, a $|v|^2$ da će pobuđenje biti šupljina. Te čestice su kvazičestice, te se može i pokazati da one ne postoje u BCS osnovnom stanju,

$$b_{\mathbf{k}\uparrow} |\Psi_{BCS}\rangle = 0 \quad (4.67)$$

$$b_{-\mathbf{k}\downarrow} |\Psi_{BCS}\rangle = 0 \quad (4.68)$$

te osnovno stanje smatramo vakuumom za te čestice. Pobuđenja su onda dodavanja ili micanja kvazičestica nad osnovnim stanjem, za što je potrebna energija $E_{\mathbf{k}}$ odnosno $-E_{\mathbf{k}}$.

Uvedeni operatori su fermionski, te su i kvazičestice fermioni. Vjerojatnost da je stanje $E_{\mathbf{k}}$ na konačnoj temperaturi popunjeno je dana Fermijevom funkcijom:

$$f(E_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + 1} \quad (4.69)$$

gdje je $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Sad možemo naći i očekivane vrijednosti zaposjednuća

$$\langle b_{\mathbf{k}\uparrow} b_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \rangle = f(E_{\mathbf{k}}) \quad (4.70)$$

$$\langle b_{-\mathbf{k}\downarrow} b_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \rangle = 1 - f(E_{\mathbf{k}}) \quad (4.71)$$

Procijep (4.58) možemo raspisati drukčije:

$$\Delta = |g_{eff}|^2 u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* (1 - 2f(E_{\mathbf{k}})) \quad (4.72)$$

Iz (4.51) znamo izraz za $u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^*$, a $(1 - 2f(E_{\mathbf{k}}))$ možemo prikazati pomoću tangensa hiperbolnog. Općenito:

$$\text{th } x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (4.73)$$

Raspisivanjem dobivamo,

$$1 - 2f(E_{\mathbf{k}}) = \frac{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} - 1}{e^{\beta E_{\mathbf{k}}} + 1} \quad (4.74)$$

što nam daje

$$(1 - 2f(E_{\mathbf{k}})) = \text{th} \frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T} . \quad (4.75)$$

Uvrštavanjem u izraz za procijep dobivamo

$$\Delta = |g_{eff}|^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta}{2E_{\mathbf{k}}} \text{th} \left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T} \right) . \quad (4.76)$$

Transformiranjem sume u integral dolazimo do poznate BCS jednađbe procijepa

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{E} \text{th} \left(\frac{E}{2k_B T} \right) \quad (4.77)$$

u kojoj je $\lambda = |g_{eff}|^2 g(\varepsilon_F)$ i $E = \sqrt{\varepsilon^2 + |\Delta|^2}$.

Ova jednađžba implicitno određuje temperaturnu ovisnost $\Delta(T)$.

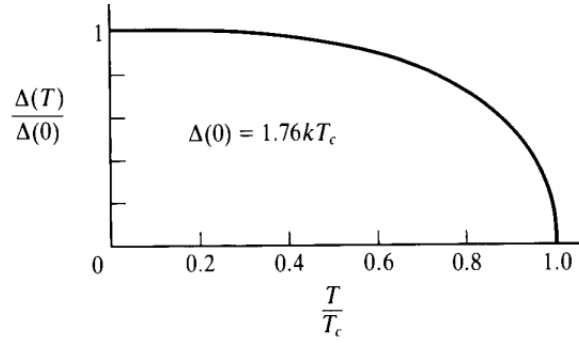
Iz jednađžbe procijepa možemo dobiti jednađžbu za kritičnu temperaturu, ako uzmemo limes $\Delta \rightarrow 0$

$$k_B T_C = 1.13 \hbar \omega_D e^{-\frac{1}{\lambda}} \quad (4.78)$$

Također, možemo naći i procijep na $\Delta(0)$, na $T = 0$, i vidjeti kako ovisi o kritičnoj temperaturi

$$2\Delta(0) = 3.52 k_B T_C \quad (4.79)$$

a ovisnost $\Delta(T)$ prikazana je na slici (4.4).

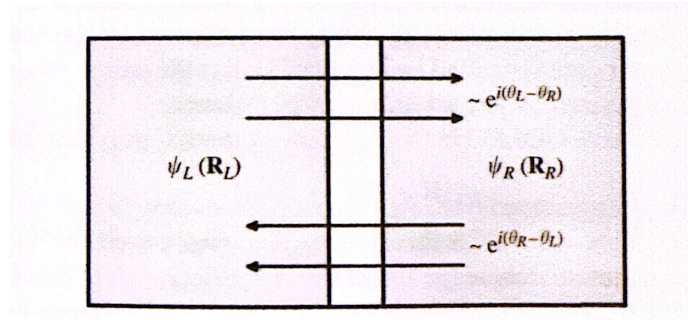


Slika 4.4: Temperaturna ovisnost procijepa u BCS teoriji, preuzeto iz [5], str. 64.

5 Primjene teorije supravodljivosti

5.1 Josephsonov efekt

Uzmimo spoj dva jednaka supravodiča razdvojena tankim izolatorom (debljina izolatora mora biti puno manja od duljine koherencije, $d \ll \xi$ - vidi sliku 5.1).



Slika 5.1: Prikaz Josephsonovog spoja, preuzeto iz [1], str. 116.

Iz Ginzburg-Landau teorije znamo da je makroskopsko supravodljivo stanje određeno nekom fazom φ

$$\Psi = |\Psi|e^{i\varphi} \quad (5.1)$$

Kako lijeva i desna strana Josephsonovog spoja imaju različite faze,

$$\Psi_L = |\Psi_L|e^{i\varphi_L} \quad (5.2)$$

$$\Psi_R = |\Psi_R|e^{i\varphi_R} \quad (5.3)$$

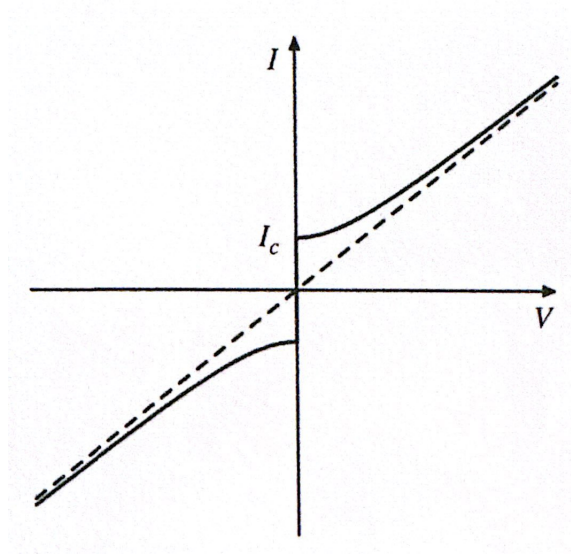
a izolator je vrlo tanak, Cooperovi parovi žele promijeniti fazu, a to mogu jedino

tuneliranjem.

Josephson je našao da u tom slučaju u spoju teče supravodljiva struja,

$$I = I_C \sin(\varphi_L - \varphi_R) \quad (5.4)$$

Iz ove jednađbe vidimo da postojanje struje ovisi o postojanju razlike u fazi supravodiča s lijeve i desne strane. I_C nazivamo *kritičnom strujom* (minimalna struja koja teče spojem).



Slika 5.2: Strujno-naponska karakteristika Josephsonovog spoja, preuzeto iz [1], str. 118.

Iz slike (5.2.) vidimo da ispod kritične struje nemamo pad napona, $V = 0$, no ako fiksiramo neki konačni napon V , dolazi do drukčijeg efekta, pad napona $V = V_L - V_R$ vodi do toga da promjena faze linearno raste

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\varphi(0) + \frac{2eV}{\hbar}t \quad (5.5)$$

što vodi na oscilirajuću struju

$$I(t) = I_C \sin\left(\Delta\varphi(0) + \frac{2eV}{\hbar}t\right) . \quad (5.6)$$

Iz jednađbe (5.6.) možemo iščitati frekvenciju tog osciliranja

$$\omega = \frac{2eV}{\hbar} , \quad (5.7)$$

odnosno

$$\nu = \frac{2eV}{h} . \quad (5.8)$$

Efekt između $-I_C$ i I_C nazivamo *DC Josephsonov efekt*, a za $I > I_C$ *AC Josephsonov efekt*. Veličinu $\frac{2e}{h}$ nazivamo *Josephsonovom konstantom*

$$K_J = \frac{2e}{h} = 483597.9 \frac{GHz}{V} \quad (5.9)$$

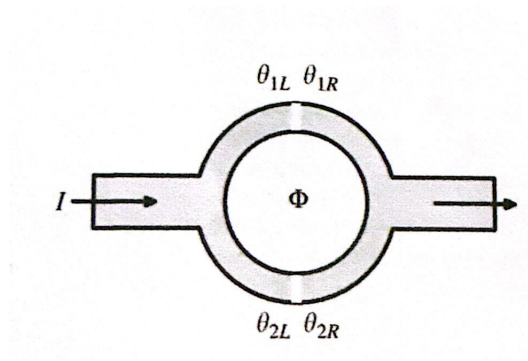
te vidimo da ona ne ovisi o svojstvima materijala, odnosno supravodiča, već o temeljnim konstantama - elementarnom naboju i Planckovoj konstanti.

Ovaj efekt pokazuje da bitan naboj u pojavi nije e , već $2e$, što ide u prilog BCS teoriji, odnosno Cooperovim parovima.

5.1.1 SQUID

SQUID, skraćeno za *Superconducting Quantum Interference Device*, jedan je od uređaja gdje je supravodljivost, odnosno Josephsonov efekt, u praktičnoj primjeni.

Radi se o dva Josephsonova spoja stavljena paralelno i zavijena u kružni oblik (vidi sliku 5.3).



Slika 5.3: Shematski prikaz SQUID-a, preuzeto iz [1], str. 118.

Kroz dva Josephsonova spoja teku struje koje ovise o razlici faza supravodiča u njima, $\Delta\varphi_1$ i $\Delta\varphi_2$.

Zbroj tih struja je onda

$$I_{tot} = I_{C1} \sin(\Delta\varphi_1) + I_{C2} \sin(\Delta\varphi_2) . \quad (5.10)$$

Uz uvjet da $I_{C1} = I_{C2}$, možemo razmotriti tok kroz prsten

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} . \quad (5.11)$$

Iz baždarenja potencijala dobivamo

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \quad (5.12)$$

$$\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} . \quad (5.13)$$

Onda je totalna struja u SQUID-u:

$$I = I_C \sin\left(\Delta\varphi + \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + I_C \sin\left(\Delta\varphi - \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (5.14)$$

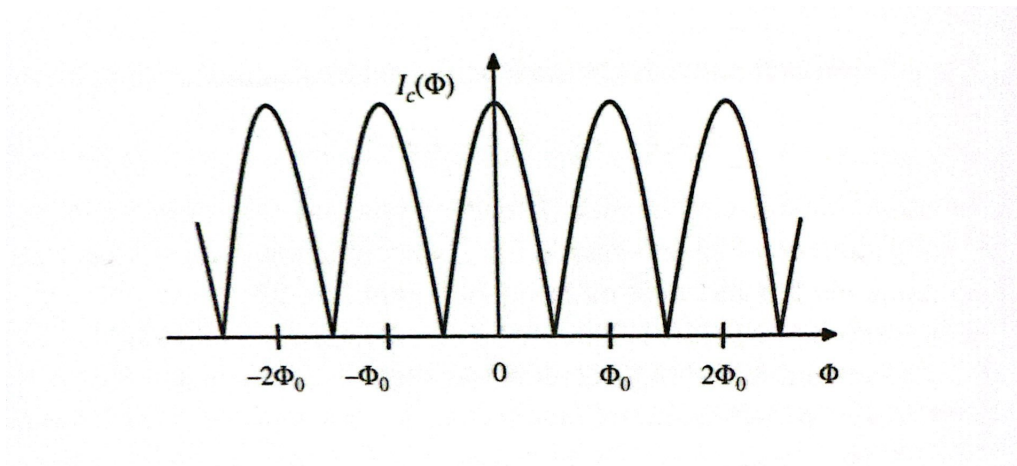
iz čega dobivamo

$$I = 2I_C \sin(\Delta\varphi) \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) . \quad (5.15)$$

Kritična struja će ovisiti o ukupnom toku kroz prsten

$$I_C(\Phi) = I_0 \left| \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \right| . \quad (5.16)$$

To možemo prikazati grafom na slici 5.4.



Slika 5.4: Ovisnost kritične struje o magnetskom toku, preuzeto iz [1], str. 120.

Na ovo možemo gledati kao na interferentni uzorak u pokusu s dvije pukotine - dva Josephsonova spoja igraju ulogu pukotina, a struje koje njima prolaze međusobno interferiraju.

SQUID je vrlo točan mjerni instrument za mjerenje magnetskog toka. Iz (5.15) vidimo da će period oscilacija ukupne struje ovisiti o magnetskom polju, odnosno magnetskom toku kroz petlju. Mjerenjem tih oscilacija možemo dobiti vrlo točne rezultate promjena toka i magnetskog polja.

6 Zaključak

Supravodljivost je pojava koja se očituje u padu otpornosti materijala na nulu na niskim temperaturama, te u pojavi Meissner-Ochsenfeldovog efekta. Proučeni su neki eksperimentalni rezultati te kako su se teorije supravodljivosti razvijale kroz 20. st. Objašnjena je elektrodinamika supravodiča koja rezultira Londonovom jednačbom koja objašnjava Meissner-Ochsenfeldov efekt te termodinamički pristup Ginzburg-Landau modela koji je bio vrlo uspješan u objašnjavanju supravodiča tipa II preko Abrikozovljevih virova. To nas vodi do mikroskopske BCS teorije supravodljivosti koja daje potpuni uvid u ponašanje većine supravodiča, te se temelji na ideji privlačne elektron-elektron interakcije i Cooperovih parova te njihove mnogočestične valne funkcije s koherentnom fazom.

Za kraj, proučen je Josephsonov efekt i SQUID kao važne primjene fenomena supravodljivosti.

Literatura

- [1] Annett, J., *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, 2004.
- [2] Solyom, J. *Fundamentals of the Physics of Solids, Volume II*, Springer, 2009.
- [3] Solyom, J. *Fundamentals of the Physics of Solids, Volume III*, Springer, 2009.
- [4] Flükiger, R. (2012). *Overview of Superconductivity and Challenges in Applications*. Reviews of Accelerator Science and Technology. 05. 1-23. 10.1142/S1793626812300010.
- [5] Tinkham, M., *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill, 1996., International Edition