Računanje vjerojatnosti u kritičnim sustavima

Šaravanja, Lovro

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:709192

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-23**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Lovro Šaravanja

RAČUNANJE VJEROJATNOSTI U KRITIČNIM SUSTAVIMA

Diplomski rad

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Lovro Šaravanja

Diplomski rad

Računanje vjerojatnosti u kritičnim sustavima

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Ivan Balog

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____
Zagreb, 2024.

Zahvale mentoru dr. sc. Ivanu Balogu na iznimnoj susretljivosti, kao i nepresušnoj volji za prenošenjem znanja. Također hvala Institutu za fiziku koji mi je omogućio iskustvo rada u profesionalnom okruženju.
Ponajviše hvala roditeljima, ostaloj obitelji i prijateljima što su mi bili podrška kroz studijski put.

Računanje vjerojatnosti u kritičnim sustavima

Sažetak

U ovom radu analizira se vjerojatnosna raspodjela magnetizacije $O(N_s)$ modela analitičkim metodama neperturbativne renormalizacijske grupe (NPRG) kao i numerički, Monte-Carlo (MC) simulacijama. U uvodnom dijelu dan je pregled analitičkih metoda koje se temelje na pristupu renormalizacijske grupe. Predstavljen je NPRG pristup ili *formalizam efektivnog djelovanja*, koji je ishodište za postavljanje jednadžbe toka za vjerojatnosni potencijal, koji određuje vjerojatnosnu raspodjelu magnetizacije. Naglašavamo razlike između efektivnog i vjerojatnosnog potencijala. Fokusiramo se nadalje na $N \to \infty$ limes, u kojemu je moguće naći egzaktan izraz kako za efektivni potencijal, tako i za vjerojatnosni potencijal. Ti izrazi se uspoređuju i analiziraju u različitim režimima. Također diskutiramo kako se postiže limes centralnog graničnog teorema, u režimu daleko od prijelaza u uređenoj fazi. Tamo su efektivni stupnjevi slobode sustava grozdovi konačne veličine koji su statistički neovisni jedni od drugih. S druge strane u uređenoj fazi efektivni stupnjevi slobode su spinski valovi, čiji se potpis može vidjeti u vjerojatnosnom potencijalu. U konačnici dajemo kratak pregled Wolffovog algoritma kao MC koji se može koristiti za nalaženje vjerojatnosnog potencijala. Prezentirani su rezultatu za $N_s = 3, 4$ kao i usporedba s analitičkim $N_s \to \infty$.

Ključne riječi: kritični sustavi, statistička teorija polja, neperturbativna renormalizacijska grupa, fazni prijelazi, raspodjela magnetizacije

Calculation of probabilities in critical systems

Abstract

In this work, the probability distribution of the magnetization in the $O(N_s)$ model is analyzed using both analytical methods of the non-perturbative renormalization group (NPRG) and numerically, through Monte Carlo (MC) simulations. The introductory section provides an overview of analytical methods based on the renormalization group approach. The NPRG approach, or the *effective action formalism*, is presented as the foundation for deriving the flow equation for the probability potential, which determines the probability distribution of the magnetization. We emphasize the differences between the effective and probability potentials. We further focus on the $N \to \infty$ limit, where it is possible to find exact expressions for both the effective potential and the probability potential. These expressions are compared and analyzed in different regimes. Additionally, we discuss how the central limit theorem is approached, in the regime far from the transition to the ordered phase. In this regime, the systems effective degrees of freedom are clusters of finite size that are statistically independent of one another. On the other hand, in the ordered phase, the effective degrees of freedom are spin waves, whose signature can be observed in the probability potential. Finally, we provide a brief overview of the Wolff algorithm as an MC method that can be used to determine the probability potential. Results for $N_s = 3, 4$ are presented, along with a comparison to the analytical $N_s \to \infty$.

Keywords: critical systems, statistical field theory, non-perturbative renormalization group, phase transitions, magnetization distribution

Sadržaj

1 Uvod **1**

1.1 Kritični eksponenti i hipoteza o skaliranju 5

1.2 Renormalizacija i kritični sustavi 8

2 Neperturbativna renormalizacijska grupa **10**

2.1 Efektivno djelovanje i Legendreov transformat 11

2.2 Jednadžba toka 14

2.3 LPA pristup 16

3 Vjerojatnost **19**

3.1 Središnji granični teorem 19

3.2 NPRG pristup vjerojatnosti 21

3.2.1 Konačni izraz za vjerojatnost 23

4 Analitičko rješenje za $N \to \infty$ **25**

4.1 Efektivni potencijal 25

4.2 Vjerojatnosni potencijal 30

5 Numerička analiza za konačan N_s **33**

5.1 Primjenjivost Wolffovog algoritma 34

5.2 Analiza O(3) u 3D 36

5.3 Analiza O(4) u 3D 38

6 Zaključak **42**

Dodaci **43**

A Diskretni Fourierov razvoj **43**

A.1 Wiener-Khinchin teorem 45

B Hubbard-Stratonovich transformacija **46**

C Metoda najbržeg spusta **48**

1 Uvod

U cilju uvođenja motivacije za račun proveden u ovom radu dati će se pregled osnovnih pojmova i metoda koje se koriste u analizi statističkih sustava. Kao što je u literaturi uvriježeno pojmovi i metode će se predstaviti na primjeru Isingovog modela te se navedene metode lagano i prirodno poopćavaju na općenite klasične statističke sustave[1]. Početno potpoglavlje prati analizu iz [1].

Isingov model je statistički sustav definiran na rešetci koja u svakom svom čvoru ima *spin* kao stupanj slobode. Za danu konfiguraciju $\{S\}$ svakom čvoru $\mathbf{x}$ pridružena je vrijednost $\mathbf{S}_x = \pm 1$ te je Hamiltonijan tog modela u vanjskom magnetskom polju $\mathbf{h}$ dan sa:

$$H[\{S\}, h] = -J \sum_{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle} S_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{y}} - \sum_{\mathbf{x}} h_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}}$$

pri čemu $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ označava da se sumira po najbližim susjedima. Navedeni sustav se može generalizirati tako da se umjesto vrijednosti ± 1 svakom čvoru pridjeljuje normirani N_s-dimenzionalni vektor te se u Hamiltonijanu produkti zamjene sa skalarnim produktima, odnosno:

$$H[\{\mathbf{S}\}, \mathbf{h}] = -J \sum_{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle} \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}} - \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{h}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{x}}$$

te se ovakav sustav naziva $O(N_s)$ model i predstavlja osnovni model koji će se koristi u ovom radu.

Sva svojstva termostatiranog sustava pri temperaturi T sadržana su u particijskoj funkciji, koja je definirana kao:

$$\mathcal{Z}[h] = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H[\{S\},h]}$$

gdje je $\beta = 1/k_B T$. Članovi po kojima se sumira direktno su povezani sa vjerojatnošću da se termalizirani sustav inverzne temperature β nađe u konfiguraciji $\{S\}$. Odnosno

[1] Metode se lagano poopćavaju i na kvantne sustave samo što je u tom slučaju potrebno modificirati prebrojavanje stanja po faznom prostoru

navedena vjerojatnost je dana sa:

$$p(\{S\}) = \frac{e^{-\beta H[\{S\},h]}}{\mathcal{Z}[h]}$$

Navedene vjerojatnosti su bitne stoga što se svaka statistička veličina, predstavljena operatorom $\mathcal{O}(\{S\})$, može izračunati usrednjavanjem po mikroansamblu:

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \sum_{\{S\}} \mathcal{O}(\{S\}) p(\{S\})$$

Specifično na primjeru korelacijskih funkcija vrijedi:

$$\langle S_{\mathbf{x_1}} S_{\mathbf{x_2}} ... S_{\mathbf{x_n}} \rangle = \sum_{\{S\}} S_{\mathbf{x_1}} S_{\mathbf{x_2}} ... S_{\mathbf{x_n}} p(\{S\})$$

te slijedi da će se korelatori moći dobiti iz particijske funkcije na način:

$$\langle S_{\mathbf{x_1}} S_{\mathbf{x_2}} ... S_{\mathbf{x_n}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[h]} \frac{\partial}{\partial h_{\mathbf{x_1}}} \frac{\partial}{\partial h_{\mathbf{x_2}}} ... \frac{\partial}{\partial h_{\mathbf{x_n}}} \mathcal{Z}[h]$$

Stoga particijska funkcija vrlo elegantno daje poveznicu sa mjerljivim veličinama te se često uzima kao osnovni objekt u razmatranjima statističkih sustava.

U ovom radu namjera je particijsku funkciju predočiti u ovisnosti o magnetizaciji, a ne u ovisnosti o mikroskopskoj konfiguraciji. To je prirodan način zapisa s obzirom na observabilne veličine [2] te se takav pristup naziva Ginzburg-Landau teorija. U najjednostavnijem takvom pristupu uzima se da je magnetizacija uniformna kroz sustav te se takav pristup naziva aproksimacija srednjeg polja (*mean field approximation*).

Za danu konfiguraciju spinova $\{S\}$ definira se magnetizacija m kao usrednjenje svih spinova:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}} =: M[\{S\}]$$

pri čemu je uveden funkcional M koji svakoj konfiguraciji pridjeljuje pripadnu magnetizaciju. U limesu velikog broja čvorova magnetizacija postaje kontinuirana veličina

i poprima vrijednosti $m \in [-1, 1]$. Može se pisati:

$$\mathcal{Z}[h] = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H[\{S\}h} = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}m \sum_{M[\{S\}=m} e^{-\beta H[\{S\}h} =: \int_{-1}^{1} \mathrm{d}m e^{-\beta F(m)}$$

pri čemu je funkcional F implicitno definiran kroz navedene jednakosti te se naziva efektivna slobodna energija. U limesu velikog broja čvorova efektivna slobodna energija postaje termodinamička slobodna energija te je ekstenzivna veličina, odnosno može se definirati konačna veličina:

$$f(m) = \frac{F(m)}{N}$$

nadalje vrijedi:

$$\mathcal{Z}[h] = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}m e^{-\beta N f(m)} \approx e^{-\beta N f(m_{extr})} = e^{-\beta F(m_{extr})}$$

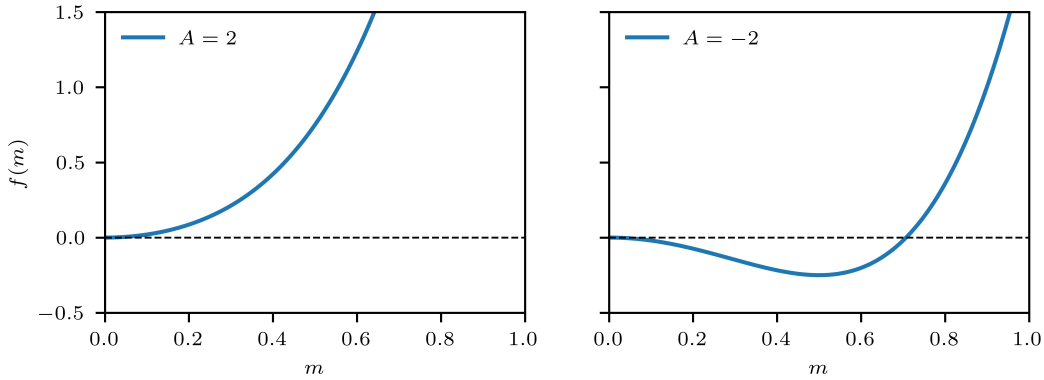
pri čemu je korištena metoda najbržega spusta (Dodatak C). Upravo ova relacija potvrđuje interpretaciju efektivne slobodne energije u termodinamičkoj granici te daje informaciju da u particijskoj funkciji najznačajniji doprinos daju konfiguracije čija magnetizacija odgovara ekstremu efektivne slobodne energije.

Bitan aspekt ovoga pristupa jest što uspijeva reproducirati fazne prijelaze. Fazni prijelazi u $O(N_s)$ modelima opisani su prelascima iz neuređene faze u uređenu, odnosno sustav prelazi iz stanja bez magnetizacije u stanje s konačnom magnetizacijom. Osnovna ideja pri opisu faznih prijelaza jest da se slobodna energija u blizini prijelaza može razviti po maloj magnetizaciji. Da bi se reproducirali fazni prijelazi drugog reda potrebno je uzeti članove do četvrtog reda:

$$f(m) = -hm + Am^2 + Bm^4$$

pri čemu se parametri A i B mogu procijeniti uzimanjem u obzir početni Hamiltonijan i definiciju slobodne energije [1]. Magnetizacija danog sustava bit će dana minimumom slobodne energije te se variranjem parametara A i B može postići skok u magnetizaciji sustava kao i kontinuirani rast magnetizacije (Slika 1.1). Drugim riječima ovakav pristup daje jednostavni opis faznih prijelaza prvog i drugog reda

[3].



Slika 1.1: Demonstracija faznog prijelaza drugog reda na $f(m) = Am^2 + 4m^4$

Ispostavlja de se da navedeni pristup za Isingov model ne daje dobre predikcije kada je dimenzija rešetke $d \leq 4$ odnosno konkretno ne daje dobre kritične eksponente o kojima će biti riječi u idućem potpoglavlju. Stoga potrebno je uvesti sofisticiraniji pristup [4].

Relativni uspjeh dosadašnjeg razmatranja može se interpretirati na način da pri faznom prijelazu nisu potrebni mikroskopski efekti za kvalitetan opis. Odnosno teorija se može formulirati uzimajući u obzir samo globalna svojstva sustava, kao što su simetrije parametra reda te dimenzionalnost. Takav će takav opis sustava biti dovoljan za opis makroskopskih pojava. To je u skladu s opažanjem da se klase mikroskopski različitih sustava u blizini faznog prijelaza ponašaju identično. Navedeni se zahtjev može shvatiti analogijom da pri korištenju raznih materijala u svakodnevici nije potrebno poznavanje *kemijske* strukture navedenog materijala već samo par parametara kao što su elastičnost, rastezljivost itd. Stoga teorija će biti formulirana kroz magnetizaciju, samo što će biti dopušteno da varira kroz sustav.

Magnetizacija se shvaća kao *lokalno* usrednjenje po mikroskopskim stupnjevima slobode te se može matematički opisati kao polje. Kao i ranije može se pisati:

$$m(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}} =: M[\{S\}](\mathbf{x})$$

te modificirati zapis particijske funkcije:

$$\mathcal{Z}[h] = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H[\{S\}h} = \int \mathcal{D}m \sum_{M[\{S\}](\mathbf{x})=m(\mathbf{x})} e^{-\beta H[\{S\}h]} =: \int \mathcal{D}m \; e^{-\beta F[m]}$$

pri čemu $\mathcal{D}m$ naznačava da se sumira po svim mogućim konfiguracijama polja. Kao i ranije ostaje problem naći pravi funkcional $F[m]$ koji će dati dobar opis sustava. Tu se pribjegava nametanjem raznih zahtjeva čime se značajno ograničava struktura funkcionala:

- **Lokalnost**: s obzirom na to da mikroskopske interakcije postoje samo među prvim susjedima tada se očekuje da će i njihovo lokalno usrednjenje - magnetizacija *interagirati* s neposrednom okolinom. Kada se uzme da je magnetizacija polje tada se to prevodi na zahtjev:

$$\beta F[m] = \int \mathrm{d}\mathbf{x}\ f[m(\mathbf{x})]$$

  pri čemu funkcional može sadržavati derivacije po argumentu.

- $\mathbb{Z}_2$ **simetrija**: iz invarijantnosti Hamiltonijana na zamjenu $S \to -S$ slijedi da će vrijediti $F[m] = F[-m]$.

- **Rotacijska simetrija u koordinati**: efekti rubova ne daju značajan doprinos opisu sustava te slijedi da je sustav invarijantan na rotacije u prostoru $\mathbf{x} \to R_d[\mathbf{x}]$.

Uzimajući u obzir sve zahtjeve slijedi da će slobodna energija imati oblik:

$$\beta F[m] = \int \mathrm{d}\mathbf{x}\ \gamma(\nabla m)^2 + \alpha_2 m^2 + \alpha_4 m^4 + ... \tag{1.1}$$

pri čemu se informacija o temperaturi pohranila u konstantama.

Prijelaz u formulaciju preko polja često za cijenu ima pojavu divergencija te je potrebno uvesti postupak renormalizacije kako bi teorija bila potpuna [4].

Također moguće je i formulirati teoriju polja iz mikroskopskog sustava, odnosno povezati konstante u slobodnoj energiji sa mikroskopskim konstantama. Takav postupak provodi se Hubbard-Stratonovich transformacijom te je postupak dan u (Dodatak B).

1.1 Kritični eksponenti i hipoteza o skaliranju

U blizini faznog prijelaza opaženo je da termodinamičke veličine imaju potencijsku (*power law*) ovisnost [5]. Ovisnosti se mogu mjeriti te se uz standardne pokrate može

pisati [6]:

$$
\begin{aligned}
C(t, h = 0) &\sim |t|^{-\alpha} \\
m(t < 0, h = 0) &\sim (-t)^{-\beta} \\
\chi(t, h = 0) &\sim |t|^{-\gamma} \\
m(t = 0, h) &\sim h^{1/\delta}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

pri čemu je $t = (T - T_c)/T_c$ dok je h vanjsko polje. Ovakvo ponašanje termodinamičkih veličina moguće je objasniti opažanjem da u blizini faznog prijelaza fluktuacije postaju jake odnosno doseg interakcija postaje sve veći. Karakteristična duljina korelacije i.e. korelacijska duljina tada divergira te također podliježe skaliranju:

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \tag{1.3}$$

Formalno je moguće definirati korelacijsku duljinu iz izraza za korelacijsku funkciju. U bazičnom računu, unutar GL pristupa gdje se uzimaju samo prva dva člana razvoja (1.1), za korelacijsku funkciju u asimptotskom području moguće je dobiti izraz [7]:

$$G(x, t) \sim \frac{e^{-x/\xi}}{x^{d-2}}$$

Navedeni oblik je zadržan i za sofisticiranije izračune te se stoga korelacijska duljina definira kao faktor ξ u eksponentu. Konačno u blizini faznog prijelaza, zbog divergencije korelacijske duljine, može se pisati:

$$G(x, t = 0) \sim x^{-d+2-\eta} \tag{1.4}$$

pri čemu je dodan faktor η kojeg navedeni račun ne uspijeva reproducirati, odnosno potrebno je uzeti više članove pri GL pristupu. Što je iznenađujuće jest da postoje relacije između navedenih koeficijenata koje su zadovoljene za čitav niz u potpunosti

različitih sustava:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 2 \\ \alpha + \beta(1+\delta) &= 2 \\ \gamma &= \nu(2-\eta) \\ \alpha &= 2 - d\nu \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pojavu ovakvih relacija moguće je objasniti hipotezom o skaliranju, odnosno pretpostavkom invarijantnosti sustava na promjenu skale. Pretpostavka se može opravdati u režimu blizu faznog prijelaza kada doseg međučestičnih interakcija, i.e. korelacijska duljina, značajno raste i postaje usporediva sa samim sustavom. Stoga hipoteza o skaliranju je pretpostavka da je korelacijska duljina u blizini faznog prijelaza jedini parametar o kojem dinamika može ovisiti. Stoga ako se pri opisu sustava definiranog parametrima t i h napravi skaliranje x/b tada će su u tom opisu korelacijska duljina transformirati kao $b\xi$. S obzirom na to da se pretpostavlja da je sustav u potpunosti opisan korelacijskom duljinom, opis bi bio isti kao i da su se varirali parametri t i h na način da se sustav približi kritičnoj točki pri čemu bi se korelacijska duljina povećala na $b\xi$. Formalno se takva transformacija može opisati na razini gustoće slobodne energije [8][9]:

$$f(t,h) \approx b^d f(b^{-y_t}t, b^{-y_h}h) \tag{1.6}$$

gdje se zbog ekstenzivnosti slobodne energije njena pripadna gustoća skalira kao b^d, a parametri y_t, y_h predstavljaju transformaciju potrebnu da sustav približi kritičnoj točki. Oblik potencijskog skaliranja moguće je objasniti zahtjevom da navedeni oblici vrijede i pri kompoziciji skaliranja. Odnosno analiza ne ovisi o tome je li napravljeno skaliranje faktorom ab ili uzastopnim skaliranjem faktorima a i b.

Relacija (1.6) predstavlja osnovnu relaciju iz koje je moguće izvesti sve zakonitosti dane u (1.2)(1.3)(1.4)(1.5) pomoću poznatih poveznica između slobodne energije i termodinamičkih observabli. Brzi način da se opravda istinitost ove tvrdnje jest činjenica da se pomoću dva parametra y_t i y_h može izvesti šest kritičnih eksponenata. Stoga slijedi da će postajati međusobne ovisnosti između njih, konkretno četiri jednadžbe (1.5).

1.2 Renormalizacija i kritični sustavi

Renormalizacija se najčešće spominje u kontekstu uklanjanja divergencija u perturbativnom računu u teoriji polja, no renormalizaciji se može pridijeliti interpretacija unutar statističke mehanike. Naime, ono što je bitno za primijetiti jest da se pri računima unutar teorije polja pojavljuju doprinosi od skala koje su daleko od relevantnih skala e.g. u QED-u se pojavljuju divergentni doprinosi od fotona velikih ili malih energija te prouzrokuju poznate UV ili IR divergencije respektivno [10]. Tada je potrebno nametnuti zahtjev na pripadne konstante u Lagrangianu na način da se zahtjeva da teorija neće generirati takve divergencije, odnosno zahtjeva se da procesi na određenoj skali ne ovisi o procesima na dalekim skalama. Analogan postupak se može provesti i u statističkoj mehanici gdje se zahtjeva da makroskopske pojave ne ovise o mikroskopskima što je i sugerirano pojavom kritičnih eksponenata. Taj zahtjev je blisko povezan sa formulacijom GL teorije. Bitnu ulogu u renormalizaciji uvelike igraju simetrije sustava koje daju neperturbativne rezultate. Jedan takav postupak je već dan pri izvodu kritičnih eksponenata i međusobnih im relacija pri čemu se izvod oslanja na invarijantnost promjene skale. Znatno opširnija diskusija o renormalizacijskoj grupi u statističkoj fizici i QFT-u je dana u prvom poglavlju u [11].

Jedan od prvih postupaka renormalizacije u statističkoj fizici dan je Wilsonovom renormalizacijskom grupom. Učestalo se postupak Wilsonove renormalizacije opisuje na Isingovom modelu. Na primjeru 2D Isingova modela [12] osnovni korak u renormalizaciji konceptualno se može predstaviti kao transformacija rešetke sa brojem čvorova 2^{2m} u rešetku sa 2^{2m-2}. Transformacija se provodi tako da se usrednji po nakupinama sačinjenim od 4 najbliža čvora tako da oni uz prigodne manipulacije postaju novi čvor. Tada transformacija generira novi Hamiltonijan na način:

$$\mathcal{H}_{m-1} = \mathcal{T}[\mathcal{H}_m]$$

pri čemu $\mathcal{T}$ označava transformaciju. Općenitiji pristup [13] moguće je dati kroz particijsku funkciju uzimajući u obzir da brzi, odnosno energetični stupnjevi slobode fluktuiraju na malim skalama. Tada se transformacija kojom se usrednjuje po maloj skali provodi kroz integriranje brzih stupnjeva slobode. Dakle za particijsku funkciju

se piše:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\phi \exp(-\mathcal{H}[\phi, \mathbf{K}]) = \int \mathcal{D}\phi_< \mathcal{D}\phi_> \exp(-\mathcal{H}[\phi_<, \phi_>, \mathbf{K}]) \\ &= \int \mathcal{D}\phi_< \exp(-\mathcal{H}[\phi_<, \mathbf{K}'])\end{aligned}$$

pri čemu je Hamiltonijan $\mathcal{H}[\phi, \mathbf{K}]$ definiran konstantama interakcije $\mathbf{K}$ te $\phi_{<,>}$ označava spore ili brze stupnjeve slobode. U zadnjoj jednakosti se prointegriralo po brzim stupnjevima slobode što je rezultiralo novim konstantama veze. Ako se pretpostavi da doprinosi na udaljenim skalama nisu relevantni za opis teorije tada navedena transformacija ne mijenja opis sustava. Taj zahtjev se formalno piše:

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{T}[\mathcal{H}^*]$$

te navedena jednadžba daje moguće renormalizirane Hamiltonijane, odnosno daje moguće konstante veze $\mathbf{K}^*$. Navedeni Hamiltonijani odnosno konstante veze nazivaju se fiksne točke renormalizacijske grupe.

2 Neperturbativna renormalizacijska grupa

Osnovna razmatranja o NPRG su preuzeta iz [13][14][15]. NPRG pristup je metoda kojom se postepeno uvode doprinosi od fluktuacija slobodnoj energiji. To se postiže s pomoću regulatora koji u početnom uvjetu zamrzava sve fluktuacije te je slobodna energija efektivno dana mikroskopskim djelovanjem. U rom režimu aproksimacija srednjeg polja je egzaktna [16]. U formalizmu se uvodi efektivno djelovanje kao analogon slobodne energije. Bitno za uočiti jest da mikroskopsko djelovanje nije nužno konveksna funkcija dok slobodna energija jest. Stoga potrebno je uzeti prigodnu definiciju efektivnog djelovanja tako da se omoguće navedeni zahtjevi. To će se postići definiranjem efektivnog djelovanja s pomoću pseudo Legendreovog transformata koji će za razliku od standardnog Legendreovog transformata omogućavati nekonveksnost efektivnog djelovanja u režimu gdje nisu uključeni doprinosi od fluktuacija.

Metoda se koristi u formalizmu teorije polja te omogućuje sistematsko reguliranje UV i IR divergencija koje se u statističkoj fizici pojavljuju kao artefakti aproksimacija sustava beskonačnim brojem konstituenata i kontinuiranom raspodjelom istih, respektivno. UV divergencija eliminira se postavljanjem *cutt off*-a u impulsnom prostoru dok je IR divergencija uklonjena regulatorom te se pomoću njega može pratiti uključivanje patoloških doprinosa. Formalizam će u ovom radu biti ograničen na polja cjelobrojnog spina iako to općenito nije slučaj [14]. Dakle ako definiramo particijsku funkciju na način:

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-S[\phi] + \int \mathrm{d}\mathbf{x} J(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x})\right]$$

pri čemu je $S[\phi]$ mikroskopsko djelovanje, a ϕ polje koje može biti i vektorsko, kao što je slučaj u $O(N_s)$ modelu. Tada se u eksponent integranda dodaje član:

$$S_k[\phi] := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{q}} \phi(\mathbf{q}) R_k(\mathbf{q}) \phi(-\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \phi(\mathbf{x}) R_k(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})$$

pri čemu funkcija $R_k(\cdot)$ predstavlja regulator i uzima se da ima sljedeća svojstva:

$$R_k(\mathbf{q}) = \begin{cases} k^2, & k^2 \gg \mathbf{q}^2 \\ 0, & k^2 \ll \mathbf{q}^2 \end{cases}$$

Drugim riječima regulator stupnju slobode $\phi(\mathbf{q})$ daje veliku masu ako mu je impuls manji od k te *zamrzava* navedeni mod umanjujući relativni utjecaj interakcijskih članova na njega. Primjer regulatorske funkcije je tzv. Wetterichov regulator [14]:

$$R_k(\mathbf{q}) \approx \frac{\mathbf{q}^2}{e^{\mathbf{q}^2/k^2} - 1}$$

Uvođenjem regulatora particijska funkcija dobiva ovisnost o parametru k:

$$\mathcal{Z}_k[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left[-S[\phi] + S_k[\phi] + \int \mathrm{d}\mathbf{x} J(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{x})\right]$$

te se početna particijska funkcija dobiva limesom:

$$\mathcal{Z}[J] = \lim_{k\to 0} \mathcal{Z}_k[J]$$

Analogno se uvodi ovisnost o k i u ostale termodinamičke veličine te se NPRG pristup temelji na proučavanju toka navedenih veličina pri promjeni parametra k.

Također uvodi se bitna veličina po uzoru na slobodnu energiju:

$$W_k[J] := \ln \mathcal{Z}_k[J] \tag{2.1}$$

2.1 Efektivno djelovanje i Legendreov transformat

Bitno je za primijetiti da je $W_k[J]$ konveksna funkcija u varijabli J. Dokaz ove tvrdnje [11] se temelji na tome da je funkcija konveksna ako joj je hessian pozitivno definitna matrica. U ovom slučaju hessian je dan sa $W_k^{(2)}$. Ako se definira produkt dvije kontinuirane funkcije:

$$A \cdot B := \int_{\mathbf{x}} A(\mathbf{x}) B(\mathbf{x})$$

te analogno i djelovanje operatora $W_k^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tada pozitivna definitnost zahtjeva:

$$A \cdot W_k^{(2)} \cdot A = \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} A(\mathbf{x}) W_k^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) A(\mathbf{y}) \geq 0 \qquad \forall A \in C^0$$

te se navedena nejednakost lako dokaže s pomoću jednakosti:

$$W_k^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\partial^2 W[J]}{\partial J(\mathbf{x})\partial J(\mathbf{y})} = \langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\rangle - \langle\phi(\mathbf{x})\rangle\langle\phi(\mathbf{y})\rangle$$
$$= \langle(\phi(\mathbf{x}) - \langle\phi(\mathbf{x})\rangle)(\phi(\mathbf{y}) - \langle\phi(\mathbf{y})\rangle)\rangle$$

iz čega slijedi:

$$A \cdot W_k^{(2)} \cdot A = \langle[A \cdot (\phi - \langle\phi\rangle)]^2\rangle \geq 0$$

te je tvrdnja o konveksnosti dokazana.

Svojstvo konveksnosti bitno je zbog toga što povlači da je prva derivacija $\frac{\partial W_k[J]}{\partial J(\mathbf{x})}$ monotona funkcija u varijabli J te je moguće formulirati funkcional u ovisnosti o prvoj derivaciji koji će sadržavati sve informacije početnog funkcionala [17]. Stoga definira se *konjugirana* varijabla:

$$M(\mathbf{x}) := \frac{\partial W_k[J]}{\partial J(\mathbf{x})} = \langle\phi(\mathbf{x})\rangle \tag{2.2}$$

te se vidi da ona predstavlja statističko usrednjenje stupnjeva slobode odnosno magnetizaciju. Iz ovakve definicije je jasno da će jedna od varijabli, J ili M, imati ovisnost o parametru k, odnosno ako držimo vanjsko polje konstantnim tada iz definicije slijedi da je to M i obratno. S obzirom na to da će u graničnom uvjetu efektivno djelovanje biti opisano mikroskopskim djelovanjem tada definicija s pomoću Legendreovog transformata nije dovoljna. Stoga definira se pseudo Legendreov transformat [13]:

$$W_k[J] + \Gamma_k[M] = \int_{\mathbf{x}} M(\mathbf{x})J(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} M(\mathbf{x})R_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})M(\mathbf{y}) \tag{2.3}$$

te se iz definicije lako pokaže da vrijedi:

$$\frac{\partial\Gamma_k[M]}{\partial M(\mathbf{x})} = J(\mathbf{x}) - \int_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})M(\mathbf{y}) \tag{2.4}$$

odnosno:

$$J(\mathbf{x}) = \frac{\partial\Gamma_k[M]}{\partial M(\mathbf{x})} + \int_{\mathbf{y}} R_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})M(\mathbf{y})$$

Jednostavno se pokaže da dok god regulator daje doprinos, ne postoji zahtjev konveksnosti na efektivno djelovanje. Kada se uzima limes $k \to 0$ jednostavno se pokaže da efektivno djelovanje postaje slobodna energija. S druge strane gornji rubni uvjet

$\Gamma_\Lambda[M]$ elegantno se računa iz definicijskih relacija (2.1)(2.4):

$$e^{-\Gamma_k[M]} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[\phi] + \int_{\mathbf{x}} \frac{\partial \Gamma_k[M]}{\partial M(\mathbf{x})} (\phi(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}))\right)$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} (\phi(\mathbf{x}) - M(\mathbf{x}))R_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\phi(\mathbf{y}) - M(\mathbf{y}))\right)$$

te u slučaju kada $k \to \Lambda$, pri čemu je Λ *cutt-off* u impulsnom prostoru, zbog *divergencije* regulatora slijedi da je jedini doprinos integrandu slučaj kada vrijedi $\phi(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x})$. Odnosno efektivno djelovanje jednako je mikroskopskom djelovanju:

$$\Gamma_\Lambda[M] = S[\phi = M]$$

kao što je i zahtijevano.

Također mogu se dobiti korisne relacije deriviranjem izraza (2.2)(2.4) po M čime se dobivaju jednadžbe:

$$\int_{\mathbf{y}} W_k^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\partial J(\mathbf{y})}{\partial M(\mathbf{z})} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial M(\mathbf{y})} = \Gamma_k^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + R_k(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (2.5) u (2.6) te uvođenjem Fourierovog transformata [11] uzimajući u obzir homogenost:

$$W_k^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} W_k^{(2)}(\mathbf{p})$$

te analognim zapisom za Γ_k i R_k dobiva se:

$$W_k^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}) + R_k(\mathbf{p})} \tag{2.7}$$

Odnosno s obzirom vrijedi $W^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\rangle_c$ korelacijska funkcija se može pisati:

$$\langle\phi_{\mathbf{0}}\phi_{\mathbf{x}}\rangle_c = \int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{p}) + R_k(\mathbf{p})} \tag{2.8}$$

U računu treba razlikovati različite Fourierove transformacije te je korisno napisati

iduću relaciju koja predstavlja odnos između njih:

$$\frac{\partial^2 W_k[J]}{\partial J(\mathbf{q})\partial J(\mathbf{p})} = W_k^{(2)}(\mathbf{q},\mathbf{p}) = (2\pi)^d \delta(\mathbf{q}+\mathbf{p}) W_k^{(2)}(\mathbf{q})$$

2.2 Jednadžba toka

Da bi se dobila jednadžba toka potrebno je izvrijedniti izraz:

$$\begin{aligned}\partial_k e^{W_k}|_J &= -\frac{1}{2}\int \mathcal{D}\phi \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \phi(\mathbf{x})\dot{R}_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\phi(\mathbf{y}) \exp\left[-S[\phi]+S_k[\phi]+\int \mathrm{d}\mathbf{x} J(\mathbf{x})\cdot\phi(\mathbf{x})\right]|_J \\ &= -\frac{1}{2}\left[\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \dot{R}_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial J(\mathbf{x})}\frac{\partial}{\partial J(\mathbf{y})}\right] e^{W_k}|_J\end{aligned}$$

te se dobiva:

$$\begin{aligned}\partial_k W_k|_J &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \dot{R}_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\left[\frac{\partial^2 W_k}{\partial J(\mathbf{x})\partial J(\mathbf{y})} + \frac{\partial W_k}{\partial J(\mathbf{x})}\frac{\partial W_k}{\partial J(\mathbf{y})}\right]|_J \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \dot{R}_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\left[W_k^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + M(\mathbf{x})M(\mathbf{y})\right]|_J\end{aligned}$$

Ovaj izraz predstavlja jednadžbu toka za slobodnu energiju. Ako se želi dobiti jednadžba toka za efektivno djelovanje potrebno je iskoristiti definiciju istog (2.3) te djelovati na nju operatorom $\partial_k|_J$:

$$\begin{aligned}\partial_k W_k[J]|_J + \partial_k \Gamma_k[M]|_J = &\int_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x})\partial_k M(\mathbf{x})|_J - \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} M(\mathbf{x})\dot{R}_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})M(\mathbf{y}) \\ &- \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} M(\mathbf{x})R_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_k M(\mathbf{y})|_J\end{aligned} \tag{2.9}$$

Iz lančanog pravila za funkcije više varijabli dobiva se identitet:

$$\partial_k \Gamma_k[M]|_J = \partial_k \Gamma_k[M]|_M + \int_{\mathbf{x}} \frac{\partial \Gamma_k[M]}{\partial M(\mathbf{x})}\partial_k M(\mathbf{x})|_J \tag{2.10}$$

Uvrštavajući jednadžbe (2.6)(2.10)(2.11) u (2.9) konačno se dobiva:

$$\partial_k \Gamma_k[M]|_M = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mathrm{Tr}\left[\dot{R}_k(\mathbf{x}-\mathbf{y})W_k^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right] \tag{2.11}$$

Ili u impulsnom prostoru:

$$\begin{aligned}\partial_k \Gamma_k[M]|_M &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left[\dot{R}_k(\mathbf{q}) W_k^{(2)}(\mathbf{q},-\mathbf{q})\right] = \frac{(2\pi)^d \delta(0)}{2}\int_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left[\dot{R}_k(\mathbf{q}) W_k^{(2)}(\mathbf{q})\right] \\ &= \frac{\Omega}{2}\int_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left[\dot{R}_k(\mathbf{q})\left(\Gamma_k^{(2)}(\mathbf{q}) + R_k(\mathbf{q})\right)^{-1}\right]\end{aligned} \tag{2.12}$$

pri čemu je Ω volumen koordinatnog prostora te je iskorištena relacija (2.7). U navedenim jednadžbama Tr označava trag po ostalim stupnjevima slobode, e.g. u slučaju vektorskih polja, te treba paziti na činjenicu da je drugi član u posljednjem integrandu također inverz i u ostalim stupnjevima slobode.

Bitna stvar za primijetiti jest da su navedene relacije istinite i kada se integrali po prostoru zamjene sumama po rešetci, i.e. nisu korištene derivacije po $\mathbf{x}$ prostoru, odnosno:

$$\partial_k \Gamma_k[M]|_M = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mathrm{Tr}\left[\dot{R}_{k:\mathbf{x}-\mathbf{y}} W_{k;\mathbf{x},\mathbf{y}}^{(2)}\right]$$

Za prelazak u diskretni impulsni prostor (Dodatak A) potrebno je prilagoditi normalizacije. Uzima se da za $\Gamma_{\mathbf{xy}}, W_{\mathbf{xy}}, R_{\mathbf{xy}} = R_{\mathbf{x}-\mathbf{y}}$ vrijedi:

$$X_{\mathbf{xy}} = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} X_{\mathbf{q}}$$

te se dobiva:

$$\partial_k \Gamma_k[M]|_M = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr}\left[\dot{R}_{k:\mathbf{q}}\left(\Gamma_{k;\mathbf{q}}^{(2)} + R_{k;\mathbf{q}}\right)^{-1}\right]$$

Kada se uspije izračunati efektivno djelovanje u limesu $k \to 0$ može se pisati odnos sa particijskom funkcijom:

$$\mathcal{Z}[J] = e^{-\Gamma[M_0]+M_0\cdot J} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial M}|_{M=M_0} = J$$

odnosno u odsustvu magnetskog polja particijska funkcija će biti opisana ekstremalnom vrijednošću efektivnog djelovanja, slično kao što je u (Poglavlje 1) opisana slobodnom energijom. Treba imati na umu da se pri računu slobodne energije govori o magnetizaciji kao prosjeku spinova po rešetci dok se pri efektivnom djelovanju o magnetizaciji govori kao o statističkom prosjeku u svakom čvoru, odnosno prosjeku po ansamblu.

2.3 LPA pristup

Osnova Local Phase Approximation (LPA) jest derivativni razvoj [14] efektivnog djelovanja pod kojim se podrazumijeva lokalnost te se dodatno radi razvoj po derivacijama efektivnog polja:

$$\Gamma_k[M] = \int_{\mathbf{x}} U_k(\rho) + \frac{1}{2} Z_k(\rho)(\nabla M)^2 + \frac{1}{4} Y_k(\rho)(\nabla \rho)^2 + O(\nabla^4)$$

pri čemu je korištena pokrata $\rho = M^2(\mathbf{x})/2$. Osnovna veličina koju je potrebno izračunati da bi se dobio propagator jest:

$$\Gamma^{(2)}_{k;ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta^2 \Gamma[M]}{\delta M^i(\mathbf{x}) \delta M^j(\mathbf{y})}$$

Pomoćna relacija koja se koristi pri izračunu jest:

$$\frac{\delta}{\delta M^i(\mathbf{x})} = \frac{\partial}{\partial M^i(\mathbf{x})} + \int_{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial \nabla^m M^n(\mathbf{y})} \frac{\partial \nabla^m M^n(\mathbf{y})}{\partial M^i(\mathbf{x})} + ...$$

S obzirom na to da su od interesa isključivo doprinosi koji ne sadrže derivativne članove tada se može pisati:

$$\Gamma^{(2)}_{k;ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial^2 \Gamma[M]}{\partial M^i(\mathbf{x}) \partial M^j(\mathbf{y})} + \int_{\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}} \frac{\partial^2 \Gamma[M]}{\partial \nabla^{m_1} M^{n_1}(\mathbf{z_1}) \partial \nabla^{m_2} M^{n_2}(\mathbf{z_2})} \frac{\partial \nabla^{m_1} M^{n_1}(\mathbf{z_1})}{\partial M^i(\mathbf{x})} \frac{\partial \nabla^{m_2} M^{n_2}(\mathbf{z_2})}{\partial M^j(\mathbf{y})} + O(\nabla)$$

Uz identitete:

$$\frac{\partial^2 \Gamma[M]}{\partial M^i(\mathbf{x}) \partial M^j(\mathbf{y})} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})[U''_k(\rho) M^i M^j + U'_k(\rho) \delta^{ij}]$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma[M]}{\partial \nabla^{m_1} M^{n_1}(\mathbf{z_1}) \partial \nabla^{m_2} M^{n_2}(\mathbf{z_2})} = \delta(\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2})[Z_k(\rho) \delta^{m_1 m_2} \delta^{n_1 n_2} + Y_k(\rho) M^{n_1} M^{n_2} \delta^{m_1 m_2}]$$

$$\frac{\partial \nabla^m M^n(\mathbf{z})}{\partial M^i(\mathbf{x})} = \frac{i \delta^{in}}{(2\pi)^d} \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, q_m e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{z})}$$

i pretpostavku da je M koordinatno nezavisna uzima se Fourierov transformat te se dobiva:

$$\Gamma^{(2)}_{k;ij}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (2\pi)^d \delta(p+q)[U''_k(\rho) M_i M_j + U'_k(\rho) \delta_{ij} + \mathbf{q}^2 Z_k(\rho) \delta_{ij} + \mathbf{q}^2 Y_k(\rho) M_i M_j]$$

te se iz ovog izraza može iščitati veličina:

$$\Gamma^{(2)}_{k,ij}(\mathbf{q}) = U''_k(\rho)M_iM_j + U'_k(\rho)\delta_{ij} + \mathbf{q}^2 Z_k(\rho)\delta_{ij} + \mathbf{q}^2 Y_k(\rho)M_iM_j$$

Razlika u kojoj se LPA odmiče od derivativnog razvoja jest pretpostavka:

$$Z_k(\rho) = 1 \qquad\qquad Y_k(\rho) = 0$$

Relevantna veličina za račune jest $[\Gamma^{(2)}+R_k]^{-1}$ te se ona uvijek pojavljuje unutar traga što dopušta da se slobodno radi transformacija sustava tako da vrijedi $M_i = \delta_{i0}M$. Time se dobiva:

$$[\Gamma^{(2)}_k(\mathbf{q}) + R_k(\mathbf{q})]_{ij} = [U'_k(\rho) + R_k(\mathbf{q}) + \mathbf{q}^2]\mathbb{I} + 2\rho U''_k(\rho)\delta_{0i}\delta_{0j}$$

odnosno inverz je dan sa:

$$[\Gamma^{(2)} + R_k]^{-1}_{ij} = \frac{1}{U'_k(\rho) + +2\rho U''_k(\rho)\delta_{0i}\delta_{0j} + R_k(\mathbf{q}) + \mathbf{q}^2}\delta_{ij} \tag{2.13}$$

Iz izraza (2.12) konačno se unutar LPA pristupa dobiva:

$$\partial_k U_k = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho U''(\rho) + U'(\rho)} + \frac{N_s - 1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + U'(\rho)} \tag{2.14}$$

pri čemu je N_s parametar modela $O(N_s)$. U diskretnom slučaju analogni postupkom se dobiva:

$$\partial_k U_k = \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}} \frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho U''(\rho) + U'(\rho)} + \frac{N_s - 1}{2N}\sum_{\mathbf{q}} \frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + U'(\rho)}$$

pri čemu $N = N_xN_y...$ označava broj čvorova rešetke. Prateći literaturu faktor N će biti zamijenjen s L^d uz ostale popratne zamjene koje će osigurati konzistentnost.

Nadalje bitna veličina jest korelacijska duljina te je ona definirana kao (Potpoglavlje 1.1):

$$\xi^{-1} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln G(x)}{x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\langle\phi_0\phi_x\rangle_c}{x}$$

te se može relativno jednostavno izračunati unutar LPA pristupa. Iz jednakosti (2.13)

i (2.8) može se zaključiti da će povezani dvočestični korelator biti oblika:

$$\lim_{x\to\infty}\langle\phi_0\phi_x\rangle_c = \lim_{x\to\infty}\int\frac{\mathrm{d}^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}\frac{e^{i\mathbf{xq}}}{\mathbf{q}^2+a^2}\sim e^{-xa} \qquad d<4$$

odnosno u svim navedenim dimenzijama $d < 4$ u asimptotskom području integral sadrži član e^{-ax} što rezultira time da u svim slučajevima vrijedi:

$$\xi = 1/a$$

Konačno u neuređenoj fazi $O(N_s)$ modela vrijedi:

$$\xi = 1/\sqrt{\rho U''(\rho)+U'(\rho)}|_{\rho=0} = 1/\sqrt{U'(0)} \tag{2.15}$$

3 Vjerojatnost

Pod vjerojatnost podrazumijeva se raspodjela vjerojatnosti ukupne magnetizacije u sustavu. Van kritičke točke raspodjela ima približno oblik delta funkcije, na nuli ili u konačnoj magnetizaciji ovisno je li sustav u uređenoj ili neuređenoj fazi. Cilj ovog rada jest pronaći raspodjelu u blizini fazne točke i.e. promatrati tranziciju iz jednog režima u drugi. U slučaju kada su konstituenti statističkog sustava nezavisni, odnosno neinteragirajući tada je raspodjela vjerojatnosti dana gausijanskom raspodjelom što je dana središnjim graničnim teoremom (*Central Limit Theorem - CLT*). Dokaz je moguće dati na razne načine [12] te je će se predstaviti dokaz temeljen na zbroju slučajnih varijabli.

3.1 Središnji granični teorem

Ako je dvije slučajne varijable imaju vjerojatnosti ishoda događaja t_1 i t_2 sa $\rho_1(t_1)$ i $\rho_2(t_2)$ respektivno, tada je vjerojatnost da se za zbroj tih varijabli dobije t dana sa:

$$\rho_{1+2}(t) = \int \mathrm{d}s \rho_1(s) \rho_2(t-s) \tag{3.1}$$

Zbroj slučajnih varijabli puno lakše se predočava preko Fourierovog transformata:

$$\tilde{\rho}(q) = \int \mathrm{d}t e^{-itq} \rho(t)$$

te se tada jednadžba (3.1) svodi na:

$$\tilde{\rho}_{1+2}(q) = \tilde{\rho}_1(q) \tilde{\rho}_2(q)$$

Odnosno ako imamo N identičnih slučajnih varijabli tada je njihova kumulativna raspodjela u inverznom prostoru dana sa:

$$\tilde{\Sigma}(q) = \tilde{\rho}^N(q) := e^{Nw(q)}$$

Nadalje potrebno je napraviti razvoj funkcije $w(q) = \ln \tilde{\rho}(q)$ odnosno postavlja se:

$$w(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} q^n$$

pri čemu su a_n koeficijenti u razvoju za koje vrijedi:

$$a_n = \frac{\partial^n}{\partial q^n} w(q)|_{q=0} = \frac{\partial^n}{\partial q^n} \ln \tilde{\rho(q)}|_{q=0}$$

Iz jednakosti:

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} \tilde{\rho}(q)|_{q=0} = (-i)^n \int \mathrm{d}t \; t^n \rho(t) = (-i)^n \langle t^n \rangle$$

moguće je dati interpretaciju koeficijentima u razvoju tako da se uvodi zamjena $a_n = (-i)^n w_n$ pri čemu se koeficijenti w_n nazivaju n-ti kumulanti i realne su veličine, a za parne n-ove su i nenegativni. Dakle razvoj se može pisati kao:

$$w(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n w_n}{n!} q^n$$

$$w_1 = \langle t \rangle \qquad w_2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 \qquad w_3 = \langle t^3 \rangle - 3\langle t^2 \rangle \langle t \rangle + 2\langle t \rangle^3 \qquad ....$$

Dakle za ukupnu raspodjelu vjerojatnosti može se pisati:

$$\Sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}q e^{itq} \tilde{\rho}^N(q) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}q \exp\left(itq - iNw_1 q - Nw_2/2q^2 + O(q^3)\right)$$

Pomoću metode najbržeg spusta (Dodatak C) u limesu velikog broja čestica dobiva se:

$$\Sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N w_2}} \exp\left[-N \frac{(t/N - w_1)^2}{2w_2}\right](1 + O(1/N))$$

Odnosno ako se promatra vjerojatnost prosjeka $\bar{t} = t/N$ u odnosnu na zbroj varijabli t tada se pripadna raspodjela uz prigodnu promjenu normalizacije svodi na:

$$\Sigma(\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\bar{t}-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \mu = w_1 \qquad \sigma^2 = w_2/N$$

čime je upravo potvrđen CLT uz jako općenite pretpostavke.

Kada je sustav daleko od faznog prijelaza tada se može aproksimirati neinteragirajućim stupnjevima slobode te pri približavanju faznom prijelazu raspodjela se modificira na način da efekti interakcije modificiraju parametre raspodjele no bez značajne morfološke promjene. Prolazak kroz fazni prijelaz upravo označava značajnu promjenu u sustavu pri čemu je u novoj fazi potrebno promijeniti opis sus-

tava odnosno definirati nove *neinteragirajuće* slučajne varijable.

3.2 NPRG pristup vjerojatnosti

U statističkim termaliziranim sustavima raspodjela vjerojatnosti može se izračunati iz particijske funkcije, odnosno vjerojatnost nalaženja sustava magnetizacije $s = \frac{1}{L^d}\int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x})$ dana je sa:

$$P(s) = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \delta\left(s - \frac{1}{L^d}\int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x})\right) e^{-S[\phi]} = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\, \delta\left(\frac{1}{L^d}(\tilde{s} - \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}))\right) e^{-S[\phi]}$$

gdje je uvedena pokrata $\tilde{s} = sL^d$. Delta funkcija se može interpretirati kao granični slučaj gausijana, odnosno:

$$\begin{aligned} P(s) &= \mathcal{N}'\int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S[\phi] - \frac{\lambda^2}{2}(\tilde{s} - \int_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}))^2\right) \\ &= \mathcal{N}'\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\left(-S[\tilde{\phi}] - \frac{\lambda^2}{2}(\tilde{s} - \tilde{\phi}(0))^2\right) \end{aligned}$$

Nadalje u eksponent može se dodati regulator i član na koji se veže vanjsko polje, analogno računu sa particijskom funkcijom u (Poglavlje 2):

$$P_k(s, J) = \mathcal{N}'\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\left(-S[\tilde{\phi}] + \frac{1}{2}\tilde{\phi}(\mathbf{q})R_k(\mathbf{q})\tilde{\phi}(-\mathbf{q}) - \frac{\lambda^2}{2}(\tilde{s} - \tilde{\phi}(0))^2 + J(\mathbf{q})\tilde{\phi}(\mathbf{q})\right)$$

te se dodatno definira veličina:

$$\widehat{W}_k[s, J] = \ln P_k(s, J) \tag{3.2}$$

Veličina $\widehat{W}_k$ je konveksan funkcional što se dobiva postupkom identičnom postupku (2.3) te se analogno radi i Legendreov transformat pri čemu se prvo modificira regulator na način $R_{\lambda,k}(\mathbf{q}) = R_k(\mathbf{q}) - \lambda^2\delta(\mathbf{q})$. Daljnji postupak je identičan kao i u (Poglavlje 2):

$$\widehat{\Gamma}_k[M] + \widehat{W}_k[J] = \frac{1}{2}M(\mathbf{q})R_{\lambda,k}(\mathbf{q})M(-\mathbf{q}) + \lambda^2\tilde{s}M(\mathbf{q})\delta(\mathbf{q}) - \frac{\lambda^2}{2}\tilde{s}^2 + J(\mathbf{q})M(\mathbf{q}) \tag{3.3}$$

$$M(\mathbf{q}) := \frac{\partial\widehat{W}_k[J]}{\partial J(\mathbf{q})}$$

pri čemu se u funkcionalima pretpostavlja implicitna ovisnost o varijablama s i λ.

Prateći postupak u (Poglavlje 2) jasno je da je izvod jednadžbe toka primjenjiv i na veličinu $\widehat{\Gamma}_k$ odnosno može se pisati:

$$\partial_k \widehat{\Gamma}_k[M]|_M = \frac{\Omega}{2} \int_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr} \left[\dot{R}_{\lambda,k}(\mathbf{q}) \left(\widehat{\Gamma}_k^{(2)}(\mathbf{q}) + R_{\lambda,k}(\mathbf{q}) \right)^{-1} \right]$$

odnosno u diskretnom slučaju:

$$\partial_k \widehat{\Gamma}_k[M]|_M = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \mathrm{Tr} \left[\dot{R}_{\lambda,k:\mathbf{q}} \left(\widehat{\Gamma}_{k;\mathbf{q}}^{(2)} + R_{\lambda,k;\mathbf{q}} \right)^{-1} \right]$$

Bitno je za primijetiti da vrijedi $\dot{R}_{\lambda,k} = \dot{R}_k$ te da će navedena modifikacija samo utjecati na član u sumi koji odgovara $\mathbf{q} = 0$. U tom članu u nazivniku pojavit će se dodatni član λ^2 koji dolazi iz novog regulatora te će u limesu $\lambda \to \infty$ nulti član ići u nulu, odnosno u tom slučaju može se pisati:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \partial_k \widehat{\Gamma}_k[M]|_M = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \mathrm{Tr} \left[\dot{R}_{k:\mathbf{q}} \left(\widehat{\Gamma}_{k;\mathbf{q}}^{(2)} + R_{k;\mathbf{q}} \right)^{-1} \right]$$

U navedenom rezultatu ogleda se bitnost zadržavanja diskretnosti s obzirom na to da bi u kontinuiram slučaju račun uključivao delta funkciju u nazivniku što nije dobro definirano dok se u diskretnom slučaju navedeni postupak prirodno provodi. Ako se i bi delta funkcija ozbiljno shvatila, tada bi se analogno mogla točka $\mathbf{q} = 0$ ukloniti iz domene integracije, no to ne bi imalo nikakav utjecaj. Odnosno efektivno vjerojatnosno djelovanje se u tom slučaju ne razlikuje od efektivnog djelovanja. To će se i pokazati na razini potencijala u (Potpoglavlje 4.2) uzimajući limes $L \to \infty$.

Radeći razvoj slobodne energije u $\widehat{\Gamma}_k = \sum_{\mathbf{q}} V_k + ...$ te koristeći LPA pristup, za *vjerojatnosni potencijal* V_k dobiva se:

$$\partial_k V_k = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho V''(\rho) + V'(\rho)} + \frac{N_s - 1}{2N} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + V'(\rho)}$$

Bitno za primijetiti je da za razliku od kontinuiranog sustava gdje se vjerojatnosti potencijal pojavljuje kao $\widehat{\Gamma}_{LPA} = L^d V$ u diskretnom se pojavljuje sa $\widehat{\Gamma}_{LPA} = NV$. Da bi se zadržala notacija kao u literaturi te postigla jedinstvenost pri zapisu može se napraviti zamjena $N \to L^d$ i $V \to \frac{1}{V_{cell}} V$ gdje je V_{cell} volumen jedinične ćelije. Time

se dobiva da se i u diskretnom slučaju može pisati $\widehat{\Gamma} = L^d V$. Vjerojatnosni potencijal se tada piše kao:

$$\partial_k V_k = \frac{1}{2L^d} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + 2\rho V''(\rho) + V'(\rho)} + \frac{N_s - 1}{2L^d} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\dot{R}_k(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + R_k(\mathbf{q}) + V'(\rho)}$$

3.2.1 Konačni izraz za vjerojatnost

Zaključno potrebno je izraziti vjerojatnost preko efektivnog *vjerojatnosnog* djelovanja. U limesu $k \to 0$ te u slučaju kada vrijedi $M(\mathbf{x}) = M$, $J(\mathbf{x}) = J$ iz definicijske relacije (3.3):

$$\widehat{W}[J] = -\widehat{\Gamma}[M] - \frac{\lambda^2}{2}\left(L^d M - \tilde{s}\right)^2 + J\left(L^d M - \tilde{s}\right) + J\tilde{s}$$

odnosno:

$$\widehat{W}[J] = -\widehat{\Gamma}[M] + \frac{\partial \widehat{\Gamma}}{\partial M}\left(L^d M - \tilde{s}\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(L^d M - \tilde{s}\right)^2 + J\tilde{s}$$

pri čemu su varijable M i J povezane izrazom:

$$\frac{\partial \widehat{\Gamma}}{\partial M} = -\lambda^2 (L^d M - \tilde{s}) + J \tag{3.4}$$

Potrebno je naći vrijednost M koja zadovoljava jednadžbu (3.4). Navedena jednadžba se rješava perturbativno, analogno perturbativnom računu u kvantnoj mehanici. Odnosno radi se razvoj:

$$M = M^{(0)} + \frac{1}{\lambda^2} M^{(1)} + ...$$

te se zahtjeva da je jednadžba zadovoljena u svakom redu računa smetnje. Zbog podesnog oblika trivijalno se dobije da u konačnici vrijedi:

$$\widehat{W}[J] = -\widehat{\Gamma}[s] + J \cdot s + O(1/\lambda^2)$$

gdje je iskorišten zapis $J \cdot s = \int_{\mathbf{x}} Js = L^d Js$.

Usporedbom sa definicijom funkcionala $\widehat{W}[J]$ (3.2) u konačnici se dobiva:

$$P[s, J] = e^{-\widehat{\Gamma}[s]+s\cdot J}$$

U $O(N_s)$ modelima s je N_s-dimenzionalni vektor te često nije potrebna informacija o smjeru magnetizacije tek jedino o iznosu. Stoga se definira vjerojatnost $\tilde{P}$ pronalaska iznosa magnetizacije $\rho = s^2/2$ kao veličina:

$$\tilde{P}[\rho, J] = \int \mathrm{d}\mathbf{s}\ \delta(\mathbf{s}^2/2 - \rho) P[\mathbf{s}, J]$$

S obzirom da $\widehat{\Gamma}_{LPA}$ u odsustvu vanjskog polja isključivo ovisi o članu ρ vrijedi da je vjerojatnost tada rotacijski invarijanta te se u tom slučaju može pisati:

$$\tilde{P}[\rho, 0] = s^{d-2} P[s, 0] \sim \exp\left[-L^d V[\rho] + \frac{N_s - 2}{2}\ln(\rho)\right] \tag{3.5}$$

Navedena veličina je upravo veličina koja će se numerički izračunavati u (Potpoglavlje 5).

4 Analitičko rješenje za $N \to \infty$

4.1 Efektivni potencijal

U slučaju $N \to \infty$ moguće je dobiti egzaktno rješenje za potencijal U_k. To je omogućeno time što u navedenom limesu LPA postaje egzaktan rezultat [12]. Početni korak sastoji se od deriviranja relacije (2.14) po magnetizaciji ρ te uzimanja u obzir da je drugi član u (2.14) dominantan s obzirom na faktor N_s:

$$\partial_k U'_k = -\frac{N_s}{2L^d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\dot{R}_k U''_k}{(R_k + \mathbf{q}^2 + U'_k)^2} \tag{4.1}$$

Postupak nalaženja egzaktnog rješenje oslanja se na definiciju funkcionala koji je inverzna funkcija u odnosnu na potencijal [18]:

$$F(k, U'_k) := \rho \tag{4.2}$$

Deriviranjem definicijske relacije (4.2) po varijabli toka i po magnetizaciji te korištenjem lančanoga pravila dobivaju se jednadžbe:

$$\partial_k F(k, U'_k) = \partial_k F(k,u)|_{u=U'_k} + \partial_u F(k,u)|_{u=U'_k} \partial_k U'_k = 0$$

$$\partial_u F(k,u)|_{u=U'_k} U''_k = 1$$

odnosno:

$$\partial_k U'_k = -U''_k \partial_k F(k,u)|_{u=U'_k}$$

U navedenu jednadžbu uvrštava se (4.1) iz čega slijedi jednakost:

$$\partial_k F(k,u) = \frac{N_s}{2L^d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\dot{R}_k}{(R_k + \mathbf{q}^2 + u)^2}$$

te je ovakvu jednadžbu moguće egzaktno integrirati po varijabli k:

$$F(k,u)|_{k=0}^{k=\Lambda} = -\frac{N_s}{2L^d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{R_\Lambda + \mathbf{q}^2 + u} + \frac{N_s}{2L^d} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{R_0 + \mathbf{q}^2 + u}$$

odnosno uzimajući u obzir definicijsku relaciju:

$$\rho - F(\Lambda, U') = -\frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{\mathbf{q}^2+U'} + \frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{R_\Lambda+\mathbf{q}^2+U'} \tag{4.3}$$

Prvi član sa desne strane jednakosti predstavlja osnovni oblik koji se pojavljuje u sljedećem računu te je metoda njegova približnog izvrednjavanja preuzeta iz [19]. Metoda se bazira na tome da se suma po konačnoj rešetci prevede u sumu po beskonačnoj rešetci pri čemu je dodan *regulator* koji brzo guši doprinose van početne rešetke te se dodatno koristi integracijski trik:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{\mathbf{q}^2+U'} &\approx \frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{q}\in\mathbb{Z}_d}\frac{e^{-\mathbf{q}^2/\Lambda^2}}{\mathbf{q}^2+U'} = \frac{e^{U'/\Lambda^2}}{L^d}\sum_{\mathbf{q}\in\mathbb{Z}_d}\frac{e^{-(\mathbf{q}^2+U')/\Lambda^2}}{\mathbf{q}^2+U'}\\ &= \frac{e^{U'/\Lambda^2}}{L^d}\int_{1/\Lambda^2}^{\infty}\mathrm{d}s e^{-U's}\sum_{\mathbf{q}\in\mathbb{Z}_d}e^{-\mathbf{q}^2 s}\end{aligned}$$

Nadalje definira se funkcija koja zapravo predstavlja specijalan slučaj eliptične theta funkcije:

$$\vartheta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$$

Pomoću diskretnog Fourierovog transformata na beskonačnoj rešetci moguće je dobiti identitet:

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\vartheta\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.4}$$

Navedeni identitet predstavlja osnovu za aproksimaciju theta funkcije te se u režimu velikih argumenata mogu uzeti samo prvi doprinosi u sumi dok se za male argumente koristi identitet (4.4) te se dobiva jako dobra aproksimacija [19]:

$$\vartheta(x) \approx \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x < 1 \\ 1 + 2e^{-\pi x}, & x > 1 \end{cases}$$

Vrlo bitno u aproksimaciji jest da je divergentni dio egzaktan što se ponovno lako vidi iz identiteta (4.4).

Jednostavnosti radi uzeto je da je sustav kubičan te dodatno da je i rešetka kubična što u blizini faznog prijelaza i nije bitno s obzirom na to da je korelacijska duljina značajno veća od udaljenosti između čvorova.

Dakle može se pisati:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{\mathbf{q}^2+U'} &= \frac{e^{U'/\Lambda^2}}{L^d}\int_{1/\Lambda^2}^{\infty}\mathrm{d}s e^{-U's}\vartheta\left(\frac{4\pi}{L^2}s\right)^d \\ &= \frac{e^{U'/\Lambda^2}}{4\pi L^{d-2}}\int_{\kappa^2/\Lambda^2}^{\infty}\mathrm{d}s e^{-\frac{U'}{\kappa^2}s}\vartheta\left(s\right)^d\end{aligned}$$

pri čemu je uvedena pokrata $\kappa^2 = 4\pi/L^2$ i napravljena supstitucija pri integraciji. Navedeni integral divergira kako $\Lambda \to \infty$ te se uvodi renormalizacija na način:

$$\frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{\mathbf{q}^2+U'} - r = \frac{e^{U'/\Lambda^2}}{4\pi L^{d-2}}\int_{\kappa^2/\Lambda^2}^{\infty}\mathrm{d}s\left[e^{-\frac{U'}{\kappa^2}s}\vartheta\left(s\right)^d - s^{-d/2}\right] \tag{4.5}$$

pri čemu je renormalizacijska član da sa:

$$r := \frac{e^{U'/\Lambda^2}}{4\pi L^{d-2}}\int_{\kappa^2/\Lambda^2}^{\infty}\mathrm{d}s\ s^{-d/2}$$

S obzirom na to da je jednadžba (4.5) dobro definirana kako $\Lambda \to \infty$ može se definirati funkcional:

$$\begin{aligned}F_{ren}\left[x\right] &= \lim_{\Lambda\to\infty} e^{x\kappa^2/\Lambda^2}\int_{\kappa^2/\Lambda^2}^{\infty}\mathrm{d}s\left[e^{-xs}\vartheta\left(s\right)^d - s^{-d/2}\right] \\ &= x^{d/2-1}\left[\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) - \Gamma\left(1-\frac{d}{2}, x\right)\right] + \sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}2^j\frac{e^{-x-j\pi}}{x+j\pi}\end{aligned} \tag{4.6}$$

U izvodu zadnje jednakosti korišten je razvoj nepotpune gamma funkcije:

$$\Gamma(a,x) = \Gamma(a) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+a}}{n!(n+a)} \tag{4.7}$$

te se vidi da upravo iz nepotpune gama funkcije se pojavljuju divergencije koje su pokraćene regulatorom [19]. Malo je neintuitivno da je nepotpuna gama funkcija divergentna, ali to se može objasniti činjenicom da je gama funkcija za nepozitivne argumente definirana kao analitičko produljenje standardne definicije na ravan $\mathbb{C}/\{0,-1,-2,...\}$. Za pozitivne vrijednosti parametra a vrijedi očekivani razvoj:

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(a,x) = \Gamma(a)$$

Konačno radi se modifikacija jednadžbe (4.3) na način:

$$\begin{aligned}\rho &= -\frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{\mathbf{q}^2+U'} + \frac{N_s}{2}r + \frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{R_\Lambda+\mathbf{q}^2+U'} + F(\Lambda,U') - \frac{N_s}{2}r \\ &= -\frac{N_s}{8\pi L^{d-2}}F_{ren}\left[\frac{U'(\rho)}{\kappa^2}\right] + \tau\end{aligned} \tag{4.8}$$

gdje je uvedena pokrata:

$$\tau := \frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{R_\Lambda+\mathbf{q}^2+U'} + F(\Lambda,U') - \frac{N_s}{2}r$$

Za τ se pretpostavlja da ne ovisi o ρ s obzirom na to da je ta ovisnost ugušena zbog pretpostavke $\Lambda \to \infty$. Nadalje moguće je dati izraz za τ iz jednadžbe (4.8):

$$\tau = \frac{N_s}{8\pi L^{d-2}}F_{ren}\left[\frac{U'(0)}{\kappa^2}\right]$$

Iz jednadžbe (2.15) poznato je da $U'(0)$ je povezan sa korelacijskom duljinom ξ te se dodatno može pisati:

$$\frac{U'(0)}{\kappa^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{L}{\xi}\right)^2$$

Drugim riječima τ nosi informaciju o korelacijskoj duljini.

U termodinamičkoj granici radi se razvoj po velikom L te se za funkcional F_{ren} dobiva:

$$-\frac{N_s}{8\pi L}F_{ren}\left[\frac{U'(\rho)}{\kappa^2}\right] \to \frac{N_s}{8\pi}U'(\rho)^{d/2-1}$$

Odnosno slijedi da se za τ može pisati:

$$\tau = -\frac{N_s}{8\pi}\frac{1}{\xi^{d-2}} \tag{4.9}$$

Dakle τ je negativna veličina te kako teži nuli tako se sustav približava faznom prijelazu ($\xi \to \infty$). Jasno se vidi da u slučaju $d = 2$ navedeni izrazi prestaju imati smisla. Odnosno u tom slučaju termodinamička granica ne postoji te je stoga i nemoguće opisati fazni prijelaz [18]. Navedeni zaključak može se interpretirati kao potvrda Mermin-Wagner teorema koji tvrdi da nema faznih prijelaza u sustavima sa

kontinuiranom simetrijom za dimenzije $d \leq 2$. Nadalje u $d = 4$ NPRG formalizam nije potreban s obzirom na to da aproksimacija srednjeg polja u tom režimu postaje egzaktna te se rezultati mogu dobiti trivijalno [20]. Stoga nadalje razmatranja su ograničena na $d = 3$ slučaj.

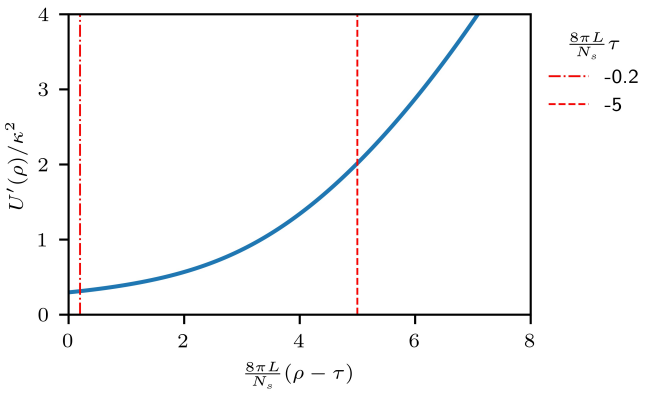
Pronalaženje efektivnog potencijala svodi se na rješavanje jednadžbe:

$$\rho - \tau = -\frac{N_s}{8\pi L} F_{ren}\left[\frac{U'(\rho)}{\kappa^2}\right]$$

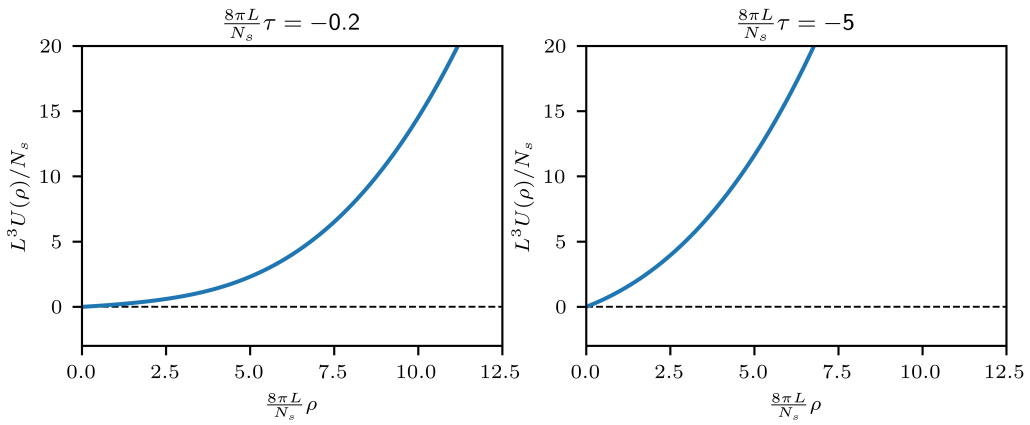
te pronalaženje $U'(\rho)$ iz kojega se integriranjem dobiva $U(\rho)$. Rješenja su karakterizirana parametrom τ kroz koji se daju informacije o temperaturi odnosno udaljenosti sustava od faznog prijelaza. Formalno, rješenje za potencijal može se pisati:

$$\frac{L^3}{N_s} U(\rho) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{8\pi L}{N_s}\rho} \mathrm{d}x \; F_{ren}^{-1}\left[x - \frac{8\pi L}{N_s}\tau\right] \tag{4.10}$$

Iz navedenog izraza vidi se da se članovi ovisni od veličini sustava pojavljuju isključivo u obliku $L^3 U(\rho)$, $L\rho$ ili $L\tau$. To naznačava postojanje univerzalnosti s obzirom na veličinu sustava. Drugim riječima ovisnosti između navedenih veličina će biti jednake za bilo koje dimenzije sustava. Iz toga se može zaključiti da će pravilno uzimanje termodinačke granice podrazumijevati $L\tau = const.$ što se prevodi u zahtijev $L/\xi = const.$ iz jednadžbe (4.9). Kada bi se pri limesu τ držao fiksiranim to bi rezultiralo značajnim odmakom sustava od faznog prijelaza.



Slika 4.1: Prva derivacija potencijala te odabiri dvaju ishodišta specificiranih odabirom parametra τ



Slika 4.2: Potencijali za dva odabira parametra τ

4.2 *Vjerojatnosni potencijal*

Izvod vjerojatnosnog potencijala provodi se na identičan način kao i u prethodnom dijelu poglavlja. Jednadžba za vjerojatnosni potencijal, kao što je već rečeno, se razlikuje od jednadžbe za efektivni potencijal 4.3 u tome što se su sumama ne pojavljuje nulti mod, odnosno:

$$\rho - F(\Lambda, V') = -\frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{1}{\mathbf{q}^2 + V'} + \frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{1}{R_\Lambda + \mathbf{q}^2 + V'}$$

Jednadžbu se može *nadopuniti* na način:

$$\rho - F(\Lambda, V') = -\frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{\mathbf{q}^2 + V'} + \frac{N_s}{2L^d}\sum_{\mathbf{q}}\frac{1}{R_\Lambda + \mathbf{q}^2 + V'} + \frac{N_s}{2L^d}\frac{1}{V'} - \frac{N_s}{2L^d}\frac{1}{\Lambda^2 + V'}$$

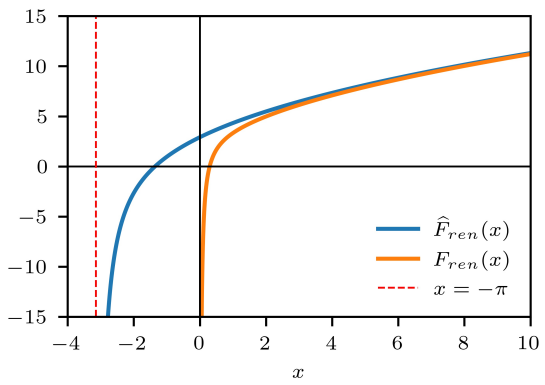
pri čemu se zadnji član zanemaruje zbog velikog nazivnika. Ovaj zapis omogućuje da se provede jednaka analiza kao i u prethodnom poglavlju za efektivni potencijal. Usporedbom sa jednadžbom (4.8) zaključuje se da vrijedi:

$$\rho - \tau = -\frac{N_s}{8\pi L^{d-2}}\widehat{F}_{ren}\left[\frac{V'(\rho)}{\kappa^2}\right] \tag{4.11}$$

gdje se funkcional $\widehat{F}_{ren}$ izvrednjava na analogan način kao i u prethodnom potpoglavlju samo što je iz računa izuzet nulti mod. Može se pisati:

$$
\begin{aligned}
\widehat{F}_{ren}[x] &= \lim_{\Lambda\to\infty} e^{x\kappa^2/\Lambda^2} \int_{\kappa^2/\Lambda^2}^{\infty} \mathrm{d}s \left[e^{-xs} \left(\vartheta(s)^d - 1 \right) - s^{-d/2} \right] \\
&= x^{d/2-1} \left[\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) - \Gamma\left(1-\frac{d}{2}, x\right) \right] + \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} 2^j \frac{e^{-x-j\pi}}{x+j\pi} - \frac{1}{x} \\
&= x^{d/2-1} \left[\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) - \Gamma\left(1-\frac{d}{2}, x\right) \right] + \sum_{j=1}^{d} \binom{d}{j} 2^j \frac{e^{-x-j\pi}}{x+j\pi} + \frac{e^{-x}-1}{x}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

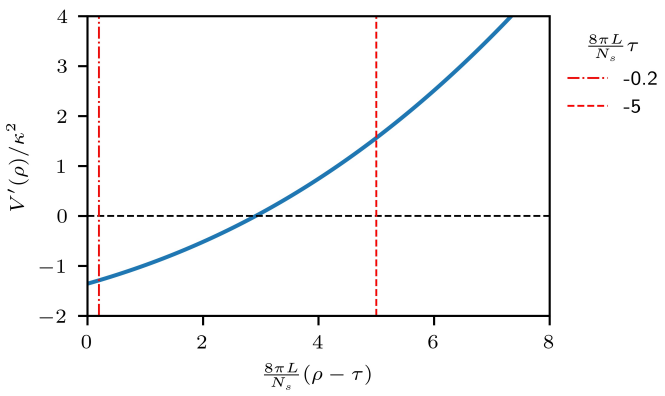
Iako je jednadžba (4.11) slična jednadžbi (4.8) postoji bitne razlike. Konkretno analizom funkcionala $F_{ren}(x)$ vidi se da član u raspisu (4.6) e^{-x}/x generira divergenciju za $x = 0$ što na koncu čuva konveksnost efektivnog potencijala $U(\rho)$. Dodavanjem člana κ^2/V' upravo se navedena divergencija poništava te se omogućuje da V' promijeni predznak, odnosno funkcija dobiva lokalni ekstrem. Gledajući razvoj (4.12) vidi se da će se divergencija u funkcije $\widehat{F}_{ren}(x)$ pojavljivati u argumentu $x = -\pi$.



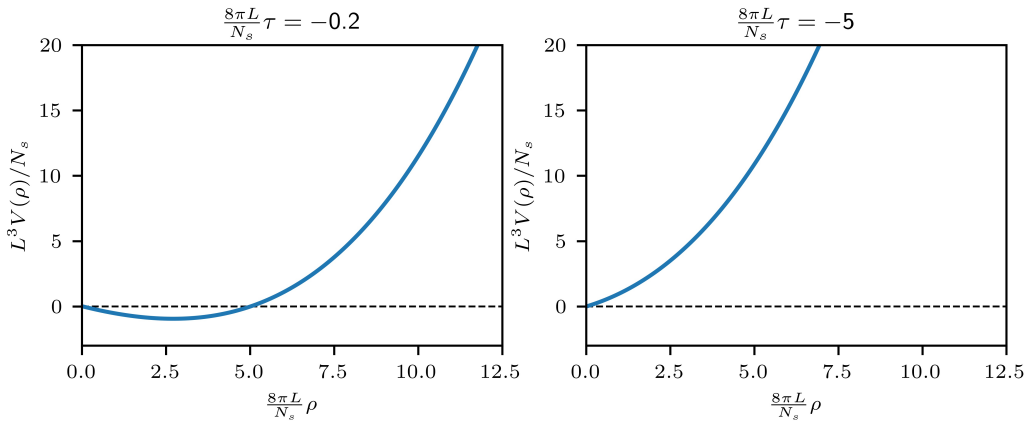
Slika 4.3: Usporedba dvaju funkcionala pri izračunu vjerojatnosnog i efektivnog potencijala

Zaključno, preteći izvod za efektivni i vjerojatnosni potencijal vidi se da su jedine varijabilne veličine o kojima potencijali ovise τ, L i N_s. Ovisnosti o L se pojavljuju isključivo u obliku $L^d U(\rho)$ odnosno $L^d V(\rho)$ ili $L^{d-2}\rho$. Stoga su navedene veličine univerzalne odnosno ne ovise o mikroskopskim detaljima sustava izuzev parametra N_s. Navedeni zaključak u suglasju je sa rezultatima danim u [21]. Usporedbom sa numeričkim rezultatima sugerirat će se da također postoji određena razina univerzalnosti s obzirom na parametar N_s (Poglavlje 5.3).

Također zanimljiv aspekt vjerojatnosnog potencijala predstavlja dubina jame u blizini kritičnosti. S obzirom na to da se u računima (3.5) vjerojatnosni potencijal pojavljuje kao bezdimenzionalna veličina $L^d V(\rho)$ promatrat će se minimum bezdi-



Slika 4.4: Prva derivacija vjerojatnosnog potencijala te odabiri dvaju ishodišta specificiranih odabirom parametra τ



Slika 4.5: Vjerojatnosni potencijali određeni odabirom parametra τ

menzionalnog potencijala. S obzirom na to da se magnetizacija u kojoj potencijal poprima minimum skalira sa $\rho_{min} \sim L^{-d+2}$ slijedi da će u termodinamičkoj granici jama beskonačno smanjivati. Kako jama nestaje tako se vjerojatnosni potencijal sve manje razlikuje od efektivnog te su u konačnici oba jednaka. To je u skladu sa izvodom vjerojatnosnog potencijala gdje se u kontinuiranoj granici izraz za vjerojatnosni potencijal ne razlikuje od izraza za efektivni potencijal, što je razmatrano u (Potpoglavlje 3.2). Dodatno može se pokazati da vrijedi $L^dV(\rho_{min}) \sim L^{d-2}$ [20]. Ono što je zanimljivo je da se takvo ponašanje može objasniti pojavom doprinosa energiji od valova magnetizacije [20].

5 Numerička analiza za konačan N_s

Numerička analiza $O(N_s)$ modela provodi se pomoću Monte Carlo simulacija. Najčešći algoritmi koji se koriste za analizu ovih i sličnih modela su *cluster* algoritmi među kojima se izdvajaju Swendsen-Wang algoritam i Wolff algoritam. Wolffov algoritam [22] je bolji u tome što simulacija brže konvergira termaliziranom stanju odnosno autokorelacija brže trne u odnosu na Swendsen-Wang algoritam.

Za $O(N_s)$ model particijska funkcija dana je sa:

$$\mathcal{Z} = \prod_{\mathbf{x}\in\Lambda} \int_{S_{n-1}} \mathrm{d}\mathbf{S_x} \exp\left[\beta \sum_{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle} \mathbf{S_x}\cdot\mathbf{S_y}\right]$$

pri čemu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ označava da se sumira po prvim susjedima. Također uvodi se operator $R(\mathbf{r}\in S_{n-1})$ za koji vrijedi:

$$R(\mathbf{r})\mathbf{S_x} = \mathbf{S_x} - 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{S_x})\mathbf{r}$$

tada se Wolffov algoritam definira kroz korake [23]:

- Odabire se nasumični vektor $\mathbf{r}\in S_{n-1}$ i nasumični čvor rešetke $x\in\Lambda$
- Čvor x se dodaje u skup c.
- Pronalaze se najbliži susjedi y od x te se veza $\langle xy\rangle$ aktivira sa vjerojatnošću[2] $P(\mathbf{S_x},\mathbf{S_y}) = 1-\exp[\min(0,\beta\mathbf{S_x}(R(\mathbf{r})-1)\mathbf{S_y})] = 1-\exp[\min(0,-2\beta(\mathbf{r}\cdot\mathbf{S_x})(\mathbf{r}\cdot\mathbf{S_y}))]$
- Ako je veza aktivirana tada se stavlja $y\in c$ te se ponavlja postupak za novododane članove u c tako da se pretražuju njihovi susjedi koji nisu već dodani u c.
- Postupak se ponavlja do koraka u kojem se ne doda nijedan novi član u c
- Konačno se radi transformacija za svaki $x\in c$ na način $\mathbf{S_x}\to R(\mathbf{r})\mathbf{S_x}$

Numerička analiza se provela na način da se nakon svakog generiranja klastera izračuna relevantna veličina $\langle\mathbf{S}\rangle_\Lambda$ pri čemu Λ označava da je riječ o prosjeku po rešetci te se izračunata vrijednost zabilježava. Očekivano je da se izračunata veličina

[2]Navedena vjerojatnost razlikuje se od one navedene u originalnom članku shodno zamjeni poretka koraka

značajno ne razlikuje nakon jednog koraka odnosno da postoji korelacija te je stoga potrebno odbaciti vrijednosti koje su u korelaciji. Da bi se odredilo vrijeme termalizacije signala $\lambda(t)$, pri čemu t označava redni broj koraka, definirao se autokorelator na sljedeći način:

$$A(\tau) = \sum_{t=1}^{T} \lambda[t] \cdot \lambda[(t+\tau) \bmod T]$$

pri čemu se operacija $\bmod T$ koristi iz praktičnih razloga i ne utječe na provedenu analizu te također treba uzeti u obzir da je u ovom slučaju signal vektorska veličina. Za signale koji sadrže veliki broj podataka autokorelacijska funkcija puno efektivnije se može računati s pomoću identiteta (Dodatak A.1):

$$A(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[\lambda] \cdot \mathcal{F}[\lambda]^*\right](\tau)$$

čijom se primjenom i implementacijom FFT-a vrijeme izračuna autokorelacijske funkcije značajno smanjuje. Navedeni matematički identitet jest iskaz Wiener-Khnichen teorema [24].

Autokorelator generično pokazuje snažan vrh oko ishodišta te pada i prelazi u režim koji odgovara bijelom šumu. Iz grafa vrijeme termalizacije očitava se kao interval širine vrha. Ako je vrijeme termalizacije usporedivo sa ukupnim vremenom simulacije tada je dobivena distribucija ovisna o početnim uvjetima, odnosno ne reprezentira termalizirani sustav.

5.1 Primjenjivost Wolffovog algoritma

Prateći korake Wolffovog algoritma može se zaključiti da su sve moguće konfiguracije dostupne odnosno algoritam osigurava ergodičnost. To se najbolje vidi iz činjenice da postoji konačna vjerojatnost da se generiraju jednočlani klasteri koji uz pravilno generirane vektore mogu odraditi transformaciju u bilo koju ciljanu konfiguraciju. Ergodičnost ne garantira da neće postojati autokorelacija između konfiguracija koje su vremenski[3] bliske te upravo autokorelacijska funkcija sadrži informaciju o karakterističnom (termalizacijskom) vremenu koji je potreban da bi sustav zaboravio iz koje je konfiguracije krenuo. Nadalje iz ergodičnosti slijedi da će distribucija dobivenih konfiguracija konvergirati te će se granična distribucija moći opažati ako je

[3]Vrijeme se odnosi na redni broj iteracije Wolffovog algoritma

broj iteracija znatno veći od termalizacijskog vremena. Konačno potrebno je odrediti granični oblik distribucije konfiguracija. Općenita jednadžba koja vrijedi i izvan stanja ravnoteže [25]:

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}t} = \sum_\nu \left[p_\nu P(\nu \to \mu) - p_\mu P(\mu \to \nu)\right]$$

pri čemu p_μ označava relativno zaposjednuće stanja μ u distribuciji te u graničnom odnosno statičkom slučaju ima interpretaciju vjerojatnosti nalaska sustava u stanju μ. $P(\mu \to \nu)$ predstavlja vjerojatnost prelaska sustava iz konfiguracije μ u konfiguraciju ν po jedinici vremena, odnosno u slučaju Wolffovog algoritma po jednoj iteraciji. Iz zahtjeva egzistencije graničnog oblika distribucije slijedi da će u vremenskom limesu vrijediti:

$$\sum_\nu p_\nu P(\nu \to \mu) = \sum_\nu p_\mu P(\mu \to \nu) \tag{5.1}$$

Poznavanje amplituda $P(\cdot \to \cdot)$ omoguće izračunavanje vjerojatnosti zaposjednuća p te je navedene amplitude moguće ekstrahirati iz koraka Wolffovog algoritma. Ipak puno jednostavnije je gledati omjer $P(\nu \to \mu)/P(\mu \to \nu)$ pri čemu se konfiguracije μ i ν razlikuju za zrcaljenje jednog klastera operatorom $R(\mathbf{r})$[4]. Time se zaobilazi poznavanje vjerojatnosti generiranja klastera koja je identična u oba smjera što je posljedica relacije $R\mathbf{a} \cdot R\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Jedini doprinosi koji se ne krate dolaze od vjerojatnosti da se klaster zaustavi na rubu [23]:

$$\begin{aligned}
\frac{P(\mu \to \nu)}{P(\nu \to \mu)} &= \frac{\prod_{\langle xy\rangle \in \partial c} 1 - P({\mathbf{S_x}}^\mu, {\mathbf{S_y}}^\mu)}{\prod_{\langle xy\rangle \in \partial c} 1 - P({\mathbf{S_x}}^\nu, {\mathbf{S_y}}^\nu)} = \frac{\prod_{\langle xy\rangle \in \partial c} 1 - P(\mathbf{S_x}, \mathbf{S_y})}{\prod_{\langle xy\rangle \in \partial c} 1 - P(R(\mathbf{r})\mathbf{S_x}, \mathbf{S_y})} \\
&= \frac{\prod_{\langle xy\rangle \in \partial c} \exp[\min(0, \beta \mathbf{S_x}(R(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{S_y})]}{\prod_{\langle xy\rangle \in \partial c} \exp[\min(0, \beta \mathbf{S_x}(1 - R(\mathbf{r}))\mathbf{S_y})]} \\
&= \exp\left[\beta \sum_{\langle xy\rangle \in \partial c} \mathbf{S_x}(R(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{S_y}\right] = \exp\left[\beta \sum_{\langle xy\rangle \in \partial c} {\mathbf{S_x}}^\nu {\mathbf{S_y}}^\nu - {\mathbf{S_x}}^\mu {\mathbf{S_y}}^\mu\right] \\
&= \exp\left[\beta \sum_{\langle xy\rangle \in \Lambda} {\mathbf{S_x}}^\nu {\mathbf{S_y}}^\nu - {\mathbf{S_x}}^\mu {\mathbf{S_y}}^\mu\right] = \exp\left[-\beta E_\nu + \beta E_\mu\right]
\end{aligned}$$

U navedenom računu uzeto je da vrijedi $x \in c$ i $y \notin c$. U zadnjem redu suma po rubu proširila se na sumu po čitavoj rešetci s obzirom na to da su članovi van ruba jednaki iznosom.

[4]Vjerojatnosti koje se ne mogu tako prikazati nemaju doprinose

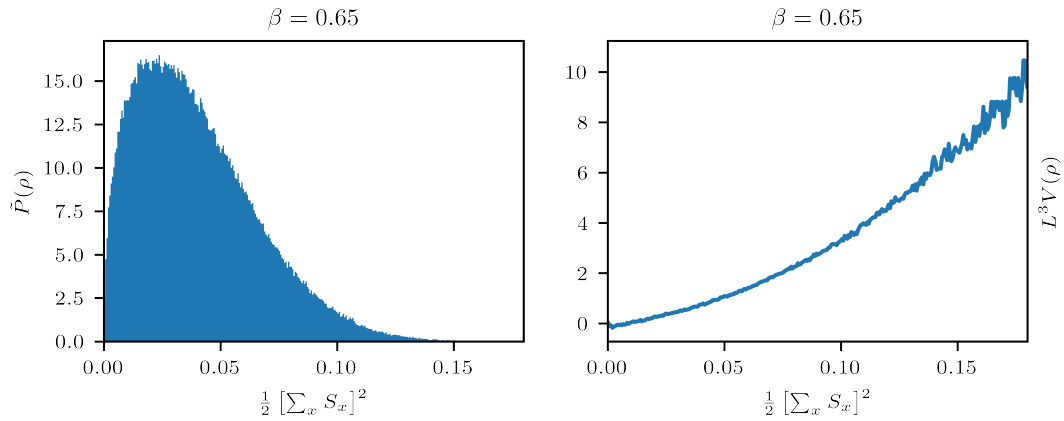
Kombiniranjem navedene relacije sa (5.1) dobiva se da vjerojatnosti u graničnoj raspodjeli podliježu Boltzmannovoj distribuciji odnosno distribuciji karakterističnoj termaliziranom sustavu.

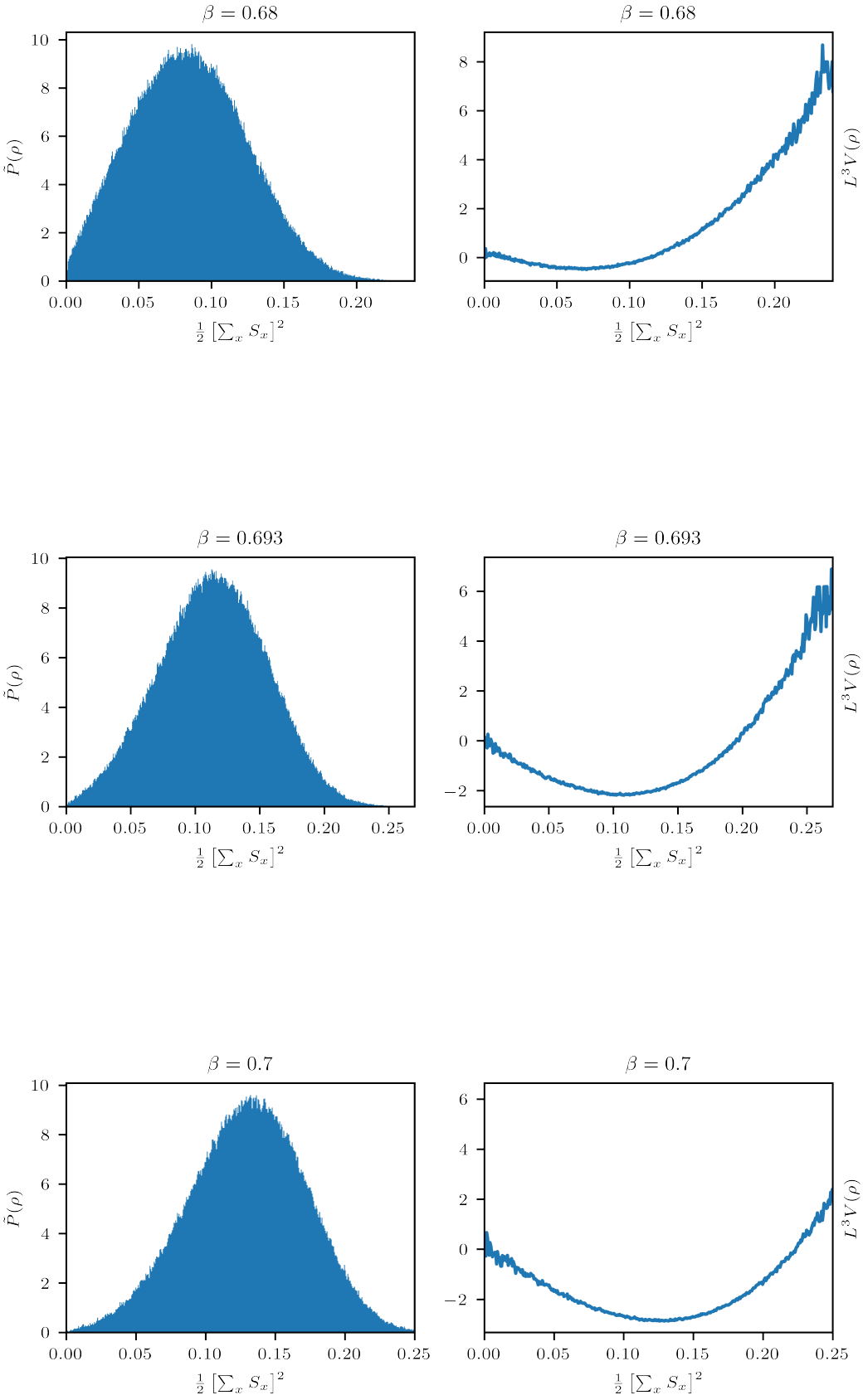
5.2 Analiza O(3) u 3D

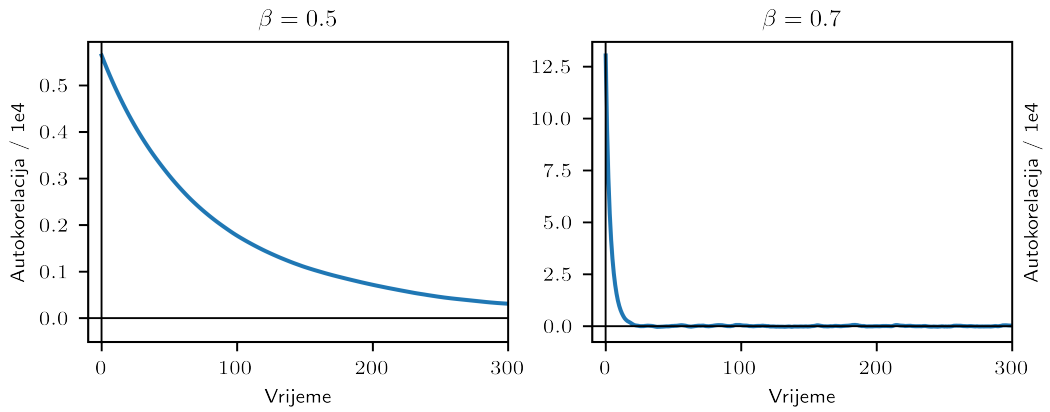
U sljedećim grafovima prezentirani su rezultati simulacije $O(3)$ modela na rešetci dimenzija $10 \times 10 \times 10$. Generirano je po 10^6 iteracija Wolffovog algoritma za svaki od odabira parametara te je simulacija rađena na rasponu inverznih temperatura $\beta = 0.5 - 0.7$. Inverzne temperature su odabrane na takav način da su blizu kritičnoj inverznoj temperaturi $\beta_c \approx 0.693(1)$ [26]. U navedenim grafovima je sa lijeve strane normalizirani histogram odnosno razdioba vjerojatnosti $\tilde{P}[\rho = \frac{s^2}{2}, 0]$ dok je sa desne pripadni vjerojatnosni potencijal. Kao što je već spomenuto u jednadžbi (3.5) vjerojatnosni potencijal može se dobiti na način:

$$L^d V(\rho) = -\ln \tilde{P}[\rho, 0] + \frac{N_s - 2}{2} \ln \rho \tag{5.2}$$

Iz grafova se opaža fazni prijelaz u vidu ubrzane promjene položaja vrha razdiobe te se za $\beta = 0.7$ već opaža kvadratični oblik oblik raspodjele u odnosu na prijašnje raspodjele koje su imale rep, odnosno CLT počinje biti ponovno primjenjiv. Također za upotpunjenje analize predstavljene su autokorelacije u graničnim slučajevima $\beta = 0.5, 0.7$. Opaža se snažno smanjenje vremena termalizacije što je posljedica činjenice da se porastom inverzne temperature povećavaju klasteri te će se u graničnom slučaju čitav sustav ponašati kao jedan klaster odnosno vrijeme termalizacije će težiti nuli.



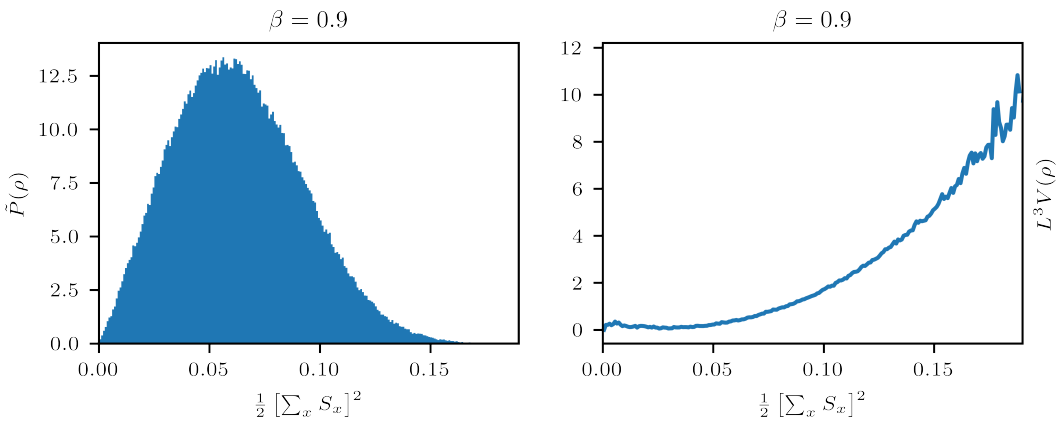

$\beta = 0.68$
$\beta = 0.68$
$\beta = 0.693$
$\beta = 0.693$
$\beta = 0.7$
$\beta = 0.7$
$\tilde{P}(\rho)$
$L^3 V(\rho)$
$\frac{1}{2}\left[\sum_x S_x\right]^2$

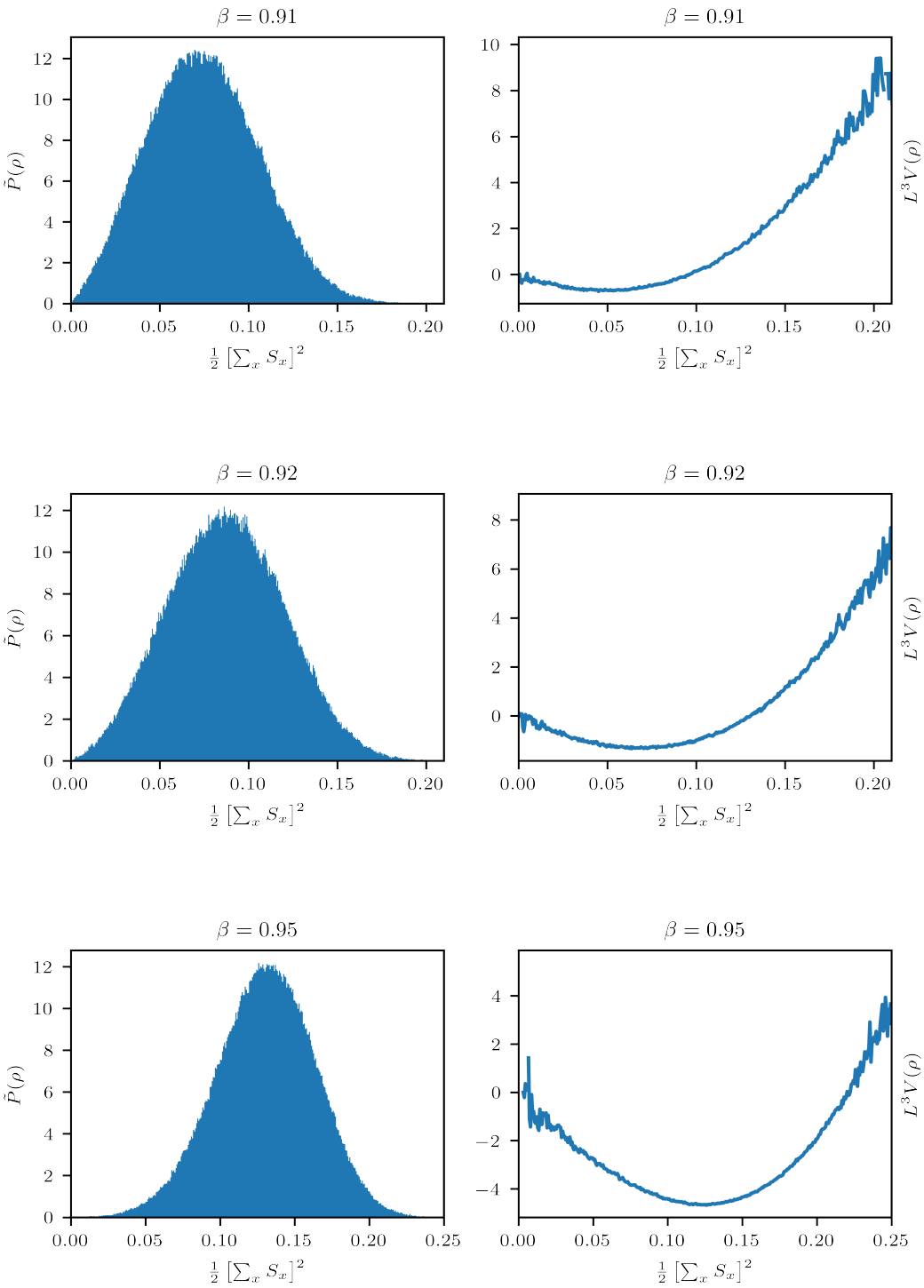


Slika 5.1: Autokorelacija rezultata za dvije rubne temperature

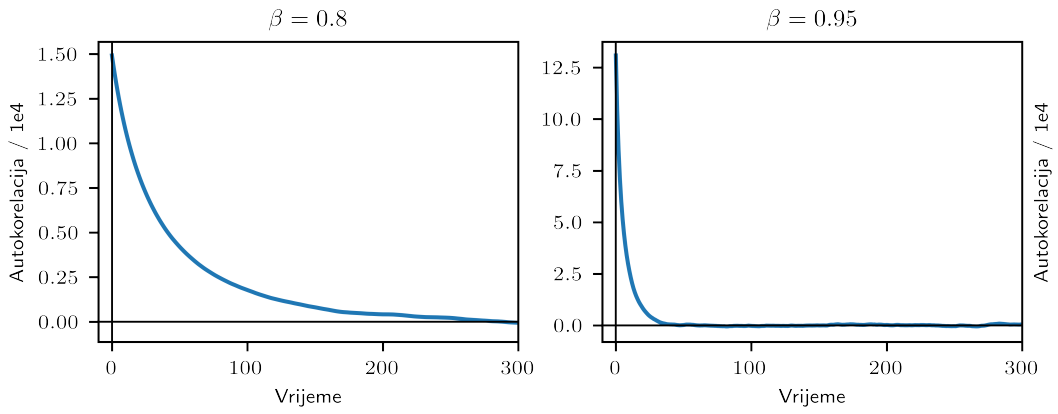
5.3 Analiza O(4) u 3D

Dani su rezultati simulacije $O(4)$ modela na $10 \times 10 \times 10$ rešetci pri čemu je generirano po 10^6 iteracija Wolffovog algoritma za svaki odabir parametara. Simulacije su rađene na rasponu inverznih temperatura $\beta = 0.8 - 0.95$ odnosno u blizini točke faznog prijelaza koji se nalazi u točki $\beta_c \approx 0.9360(1)$ [27]. Kao i u $O(3)$ slučaju opaža se promjena oblika distribucije van faznog prijelaza. Također dane su autokorelacije za rubne simulacije. Očekivano, ponovno se opaža jako smanjenje vremena termalizacije pri ulasku u uređenu fazu.





Konačno, moguće je dati usporedbu numeričkih rezultata za konačan N_s sa analitičkim rješenjem za limes $N_s \to \infty$. S obzirom na to se položaji minimuma razlikuju, grafovi su crtani na skali ρ/ρ_0 pri čemu ρ_0 označava točku u kojoj graf siječe x-os. Vidi se znatna sličnost što naznačuje da račun u prijašnjem poglavlju nije samo akademske prirode već pokazuje kvalitativno jednako ponašanje kao i sustavi sa konačnim N_s. Ono što je osobito zanimljivo jest da ako se funkcije skaliraju na takav način da su im i minimumi normalizirani, odnosno ako se nacrta ovisnost $V(\rho)/V_{min}$ linije

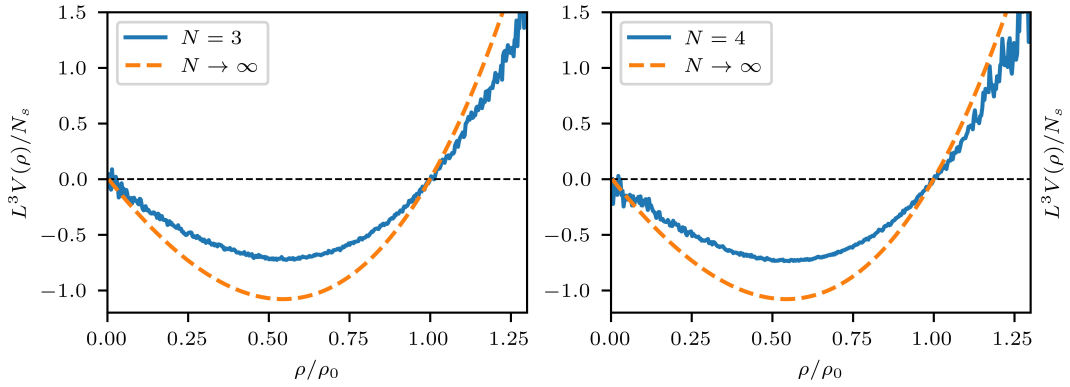


Slika 5.2: Autokorelacija rezultata za dvije rubne temperature

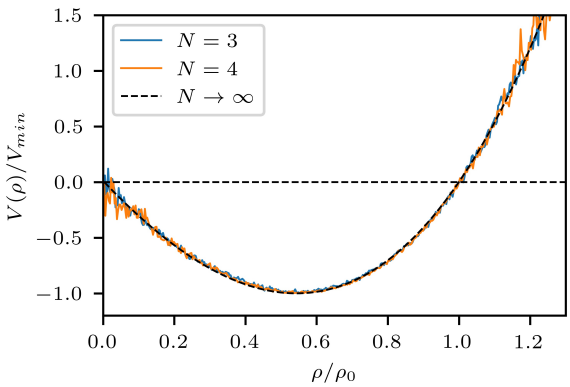
se u potpunosti podudaraju i.e. funkcija je univerzalna u odnosu na N_s. Ako se taj zaključak prihvati, na osnovu predstavljenih numeričkih rezultata, tada je egzaktni oblik navedene krivulje upravo dan računom vjerojatnosnog potencijala u $N_s \to \infty$. Stoga vjerojatnosni potencijal za svaki konačni N_s može se pisati:

$$L^d V(\rho) \approx N_s \alpha(N_s) F_{univ} \left[\frac{\rho}{\rho_0(N_s)} \right] \tag{5.3}$$

gdje funkcije $\alpha(N_s)$ i $\rho_0(N_s)$ nose glavne informacije o N_s koje sadrži vjerojatnosni potencijal u kritičnosti.



Slika 5.3: Vjerojatnosni potencijali u ovisnosti o skaliranoj varijabli za $\beta = \beta_c$



Slika 5.4: Skalirani vjerojatnosni potencijali u ovisnosti o skaliranoj varijabli za $\beta = \beta_c$

6 Zaključak

U ovom radu dan je pregled odabranih metoda koje se mogu koristiti za opis statističkih sustava. Posebna pozornost dana je NPRG pristupu koji daje dobar opis sustava u blizini kritičnosti što je postignuto postepenim dodavanjem doprinosa koji dolaze od fluktuacija. Centralni dio rada je pronalaženje distribucije vjerojatnosti magnetizacije u blizini kritičnosti te NPRG metoda daje nelinearnu diferencijalnu jednadžbu za navedenu veličinu, kroz jednadžbu toka. Navedena jednadžba nije trivijalna za riješiti, no u limesu $N_s \to \infty$ moguće je nalaženje egzaktnog rješenja. Za navedeni slučaj dan je analitički rezultat za relevantnu veličinu u računu distribucije vjerojatnosti - vjerojatnosni potencijal. U blizini kritičnosti vjerojatnosni potencijal bitno mijenja oblik i.e. pojavljuje se lokalni minimum. Pojava takvog ponašanja može se objasniti time da se u blizini kritičnosti generiraju klasteri usporedivi s veličinom sustava te se unutar njih pojavljuju efektivni stupnjevi slobode uređene faze, magnetizacijski valovi. Također demonstrirana je univerzalnost s obzirom na variranje veličine sustava. Pomoću navedene univerzalnosti pokazano je da u termodinamičkom limesu vjerojatnosni potencijal postaje efektivni potencijal te gubi minimum. Nadalje dan je kratki osvrt na Monte-Carlo metodu, odnosno Wolfftov algoritam, čijom su se implementacijom dali numerički rezultati za $N_s = 3, 4$. Konačno dana je usporedba numeričkih rezultata sa analitičkim te je pokazano da slučaj $N_s \to \infty$, uz prigodna skaliranja, u kritičnosti pokazuje identično ponašanje kao i numerički rezultati. To upućuje na određenu razinu univerzalnosti s obzirom na parametar N_s.

Dodaci

Dodatak A Diskretni Fourierov razvoj

Svrha sljedeće procedure jest generalizacija metoda Foureierovog transformata sa kontinuiranih funkcija na funkcije definirane na d dimenzionalnoj rešetci sa N čvorova $\phi_{\mathbf{x}}$. Sličan izvod urađen je u [28].

$$\phi_{\mathbf{x}} := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}$$

pri čemu je $N = \prod_i N_i$ dok su k vektori na još uvijek neodređenoj rešetci koja ima čvorova točno toliko koliko i početna rešetka što je dano zahtjevom da je navedena transformacija invertibilna. Dodatno se nameću von Karmanovi rubni uvjeti tj.:

$$\phi_{\mathbf{x}+N_i\mathbf{a_i}} = \phi_x$$

pri čemu su $\mathbf{a_i}$ bazni vektori početne rešetke. Navedeni zahtjev za sobom povlači:

$$e^{i\mathbf{ka_i}N_i} = 1$$

te se navedena jednadžba može razriješiti odabirom baze $\mathbf{b_i}$ recipročne rešetke tako da vrijedi:

$$\mathbf{a_i b_j} = \frac{2\pi}{N_i}\delta_{ij}$$

te se takvi vektori uvijek mogu definirati pri čemu vrijedi:

$$\mathbf{b_i} = \frac{1}{\mathcal{N}_i}\varepsilon_{k_1k_2\ldots k_d}\prod_{j\neq i} a_{k_j}^{(j)}$$

pri čemu je $a_j^{(i)}$ dano kao j-ta komponenta baznog vektora $\mathbf{a_i}$, $\mathcal{N}_i$ prigodna normalizacija te dodatno vrijedi sumacija u ponovljenim indeksima. Da bi se odredila širina recipročne rešetke uzima se u obzir da najmanja *valna duljina* koja ima smisla je ona koja je dvostruko veća od udaljenosti susjednih čvorova, odnosno u slučaju da je jednaka razdaljini susjednih čvora tada bi svi koeficijenti u razvoju bili identični odnosno ekvivalentni slučaju kada je valna duljina beskonačna. To se prevodi u zahtjev

da vrijedi:

$$\mathbf{k} = m_i \mathbf{b_i} \qquad \frac{N_i}{2} < m_i \leq \frac{N_i}{2}$$

Nadalje ako se uvede pomoćna notacija:

$$\phi_{n_i \mathbf{a}_i} = \phi_{n_1 n_2 \ldots n_d}$$

$$\tilde{\phi}_{m_i \mathbf{b}_i} = \tilde{\phi}_{m_1 m_2 \ldots m_d}$$

tada se transformacija između rešetki može zapisati u tenzorskom obliku:

$$\phi_{n_1 n_2 \ldots n_d} = \left[\prod_i T^{(i)}_{n_i m_i} \right] \tilde{\phi}_{m_1 m_2 \ldots m_d}$$

pri čemu vrijedi $\left[T^{(i)}\right]_{n_i m_i} = e^{i \frac{2\pi}{N_i} n_i m_i}$ te u matričnom zapisu navedena transformacija ima oblik Vandermondeove matrice. Nadalje može se pokazati da će determinanta navedene matrice biti različita od nule [29] ako i samo ako vrijedi:

$$n_i \neq n_i' \Longrightarrow e^{i \frac{2\pi}{N_i} n_i} \neq e^{i \frac{2\pi}{N_i} n_i'}$$

što je očito istina s obzirom na to da vrijedi $n_i \in \{0, 1, ..., N_i - 1\}$ čime se pokazalo da je navedena transformacija dobro definirana odnosno ima inverz te se može pokazati da je on egzaktno dan (neovisno o veličini rešetke) sa:

$$[T^{(i)-1}]_{m_i n_i} = e^{-i \frac{2\pi}{N_i} n_i m_i}$$

odnosno:

$$\tilde{\phi}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{x}} e^{-i \mathbf{k} \mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}}$$

Analogno se mogu raditi transformacije i na tenzorima definiranim na rešetci pri čemu će od važnosti biti tenzor invarijantan na translacije:

$$K_{\mathbf{x}+\mathbf{i}, \mathbf{y}+\mathbf{i}} = K_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$$

te se u tom slučaju transformacija može definirati kao:

$$K_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} e^{ik(x-y)} \tilde{K}_{\mathbf{k}}$$

Uz ovako definirane transformacije i pretpostavku da su varijable realne ($\phi* = \phi$) slijede identiteti:

$$\sum_{\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{x}} \phi_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\psi}_{\mathbf{k}} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}$$

$$\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \psi_{\mathbf{x}} K_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{y}} = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\psi}_{\mathbf{k}} \tilde{K}_{\mathbf{k}} \tilde{\phi}_{\mathbf{k}}$$

A.1 Wiener-Khinchin teorem

S obzirom na to da je se diskretni FFT u Python-ovoj biblioteci *scipy.fft* implementira uz normalizaciju:

$$x_{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{x}\mathbf{k}} \tilde{x}_{\mathbf{k}}$$

$$\tilde{x}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{x}\mathbf{k}} x_{\mathbf{x}}$$

tada slijedi da za DFT izraza:

$$A_{\tau} = \sum_{\mathbf{x}} \lambda_{\mathbf{x}} \lambda_{\mathbf{x}+\tau}$$

se dobiva:

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{q}} &= \sum_{\mathbf{x},\tau} e^{-i\mathbf{q}\tau} \lambda_{\mathbf{x}} \lambda_{\mathbf{x}+\tau} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{x},\tau,\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}} e^{-i\mathbf{q}\tau + i\mathbf{q_1}\mathbf{x} + i\mathbf{q_2}(\mathbf{x}+\tau)} \lambda_{\mathbf{q_1}} \lambda_{\mathbf{q_2}} \\ &= \sum_{\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q_2}} \delta_{\mathbf{q_1},-\mathbf{q_2}} \lambda_{\mathbf{q_1}} \lambda_{\mathbf{q_2}} \\ &= \lambda_{\mathbf{q}} \lambda_{-\mathbf{q}} = |\lambda_{\mathbf{q}}|^2 \end{aligned}$$

te upravo slijedi:

$$A(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}[\lambda] \cdot \mathcal{F}[\lambda]^* \right] (\tau)$$

Dodatak B Hubbard-Stratonovich transformacija

Hubbard-Stratonovich transformacija se esencijalno sastoji od primjene identiteta [5]:

$$\sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^N}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}x_i \exp\left(-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + x_i S_i\right) = \exp\left(\frac{1}{2} S_i A_{ij}^{-1} S_j\right)$$

pri čemu je A pozitivno definitna matrica, odnosno simetrična je i sve svojstvene vrijednosti su joj pozitivne iz čega se može pokazati da je i invertibilna. Nadalje ako se uzme particijska funkcija $O(N)$ modela:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \sum_{[\mathbf{S}]} \exp\left(-H_{\mathbf{h}}[\mathbf{S}]\right) = \prod_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \in S_{n-1}} \mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \exp\left(-H_{\mathbf{h}}[\mathbf{S}]\right)$$

pri čemu se sumira po svim konfiguracijama spinova tako da vrijedi ${\mathbf{S}_{\mathbf{x}}}^2 = 1$ pri čemu je hamiltonijan dan izrazom:

$$H_{\mathbf{h}}[\mathbf{S}] = -S_{\mathbf{x}}^i J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} S_{\mathbf{y}}^i - h_{\mathbf{x}}^i S_{\mathbf{x}}^i$$

pri čemu je $S_{\mathbf{x}}^i$ i-ta komponenta $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$ spina. Primjenom Hubbard-Stratonovich transformacije na Boltzmannove težine dobiva se izraz:

$$\exp\left(\frac{1}{2} S_{\mathbf{x}}^i J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} S_{\mathbf{y}}^i + h_{\mathbf{x}}^i S_{\mathbf{x}}^i\right) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^N \det J}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i,\mathbf{x}} \mathrm{d}\psi_{\mathbf{x}}^i \exp\left(-\frac{1}{2} \psi_{\mathbf{x}}^i J_{\mathbf{x},\mathbf{y}}^{-1} \psi_{\mathbf{y}}^i + (\psi_{\mathbf{x}}^i + h_{\mathbf{x}}^i) S_{\mathbf{x}}^i\right)$$

Nadalje radi se transformacija $\psi_{\mathbf{x}}^i = J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{y}}^i - h_{\mathbf{x}}^i$ čime se dobiva:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}] = \exp\left(-\frac{1}{2} h_{\mathbf{x}}^i J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} h_{\mathbf{y}}^i\right) \tilde{\mathcal{Z}}[\mathbf{h}] \tag{B.1}$$

$$\tilde{\mathcal{Z}}[\mathbf{h}] = \left[\prod_{\mathbf{x}} \int_{\mathbf{S}_{\mathbf{x}} \in S_{n-1}} \mathrm{d}\mathbf{S}_{\mathbf{x}}\right] \sqrt{\frac{\det J}{(2\pi)^N}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i,\mathbf{x}} \mathrm{d}\phi_{\mathbf{x}}^i \exp\left(-\frac{1}{2} \phi_{\mathbf{x}}^i J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{y}}^i + h_{\mathbf{x}}^i \phi_{\mathbf{x}}^i + \phi_{\mathbf{x}}^i J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} S_{\mathbf{y}}^i\right)$$

Nadalje zamjenom redoslijeda integracije te integriranjem po spinovima dobiva se:

$$\tilde{\mathcal{Z}}[\mathbf{h}] = \sqrt{\frac{(S_{n-2})^N \det J}{(2\pi)^N}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i,\mathbf{x}} \mathrm{d}\phi_{\mathbf{x}}^i \exp\left(-\frac{1}{2} \phi_{\mathbf{x}}^i J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{y}}^i + h_{\mathbf{x}}^i \phi_{\mathbf{x}}^i + \sum_{\overline{\mathbf{y}}} \ln F_{n-1}\left(A_{\overline{\mathbf{y}}}\right)\right)$$

pri čemu vrijedi:

$$A_{\mathbf{y}} = \sqrt{\sum_{\mathbf{x},\mathbf{x}',i} \phi^i_{\mathbf{x}} \phi^i_{\mathbf{x}'} J_{\mathbf{x},\mathbf{y}} J_{\mathbf{x}',\mathbf{y}}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i \left[\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}} \phi^i_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} \right]^2}$$

te je funkcija $F_{n-1}(a)$ dana izrazom:

$$F_{k\geq 2}(a) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x (1-x^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{ax} = \sum_{m-\text{paran}} a^m \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(m+1\right)\Gamma\left(\frac{k+m+1}{2}\right)}$$

Dok su $F_{0,1}$ različitog oblika, no i dalje parne funkcije.

Podesno je prijeći u $\mathbf{k}$ prostor te sve veličine transformirati na način dan u (Dodatak A) i iskoristiti prigodne identitete (Dodatak A) čime se dobiva:

$$\tilde{\mathcal{Z}}[\mathbf{h}] = \sqrt{\frac{(S_{n-2})^N \det J}{(2\pi)^N}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i,\mathbf{k}} \mathrm{d}\phi^i_{\mathbf{k}} \exp\left(-\frac{1}{2} \phi^i_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{k}} \phi^i_{\mathbf{k}} + h^i_{\mathbf{k}} \phi^i_{\mathbf{k}} + \sum_{\overline{\mathbf{y}}} \ln F_{n-1}\left(A_{\overline{\mathbf{y}}}\right) \right)$$

U aproksimaciji prvih susjeda vrijedi:

$$J_{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^{d} 2J_i \cos\left(\mathbf{k}\mathbf{a}_i\right)$$

pri čemu je J_i integral preskoka na prvog susjeda u smjeru $\mathbf{a}_i$.

Komplicirani član u eksponentu se može razviti te poprima oblik:

$$\sum_{\overline{\mathbf{y}}} \ln F\left(A_{\overline{\mathbf{y}}}\right) = c_0 + c_1 \phi^i_{\mathbf{k}} \phi^i_{\mathbf{k}} + c_2 \mathbf{k}^2 \phi^i_{\mathbf{k}} \phi^i_{\mathbf{k}} + c_3 \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}''+\mathbf{k}''',0} \phi^i_{\mathbf{k}} \phi^i_{\mathbf{k}'} \phi^j_{\mathbf{k}''} \phi^j_{\mathbf{k}'''} + \ldots$$

Razvojem čitavog eksponenta i prelskom u kontinuiranu granicu može se pisati

$$S[\phi, \mathbf{h}] = \int_{\mathbf{x}} \frac{Z}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}(\phi^2)^2 - h\phi + \ldots$$

pri čemu su uvedene konvencionalne pokrate za konstante. Zaključno, uz pokratu za mjeru, particijska funkcija poprima izraz:

$$\tilde{\mathcal{Z}}[\mathbf{h}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \ \exp\left(-S[\phi, \mathbf{h}]\right)$$

Potrebno je imati na umu da momenti distribucije varijable ϕ nisu jednaki momen-

tima distribucije magnetizacije zbog relacije (B.1). Svejedno u odsustvu vanjskoga polja vrijedi $\langle S \rangle = \langle \phi \rangle$.

Dodatak C Metoda najbržeg spusta

Metoda najbržega spusta esencijalno je razvoj integrala

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_a^b \mathrm{d}x \; e^{-\frac{1}{\lambda} f(x)}$$

po malom λ.

Metoda se temelji na Taylorovom razvoju funkcije $f(x)$ i uvođenju supstitucije $y = x/\sqrt{\lambda}$. Odnosno vrijedi:

$$-\frac{1}{\lambda} f(x) = -\frac{1}{\lambda} f(x_s) - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_s)}{\partial x^2} y^2 + O(\sqrt{\lambda})$$

Može se pisati:

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda} f(x_s)} \int_{(a-x_s)/\sqrt{\lambda}}^{(b-x_s)/\sqrt{\lambda}} \mathrm{d}x e^{-\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_s)}{\partial x^2} y^2 + O(\sqrt{\lambda})}$$

Razvojem eksponencijalne funkcije po $\sqrt{\lambda}$ uz pretpostavku da ostatak konvergira te uz pretpostavku da $x_s \in (a, b)$ dobiva se:

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{2\pi\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda} f(x_s)} [f''(x_s)]^{-1/2} + e^{-\frac{1}{\lambda} f(x_s)} O(\lambda)$$

Navedena metoda se prirodno generalizira i na slučaj kada se u integrandu nalazi funkcija g te općenitosti radi se uzima da su funkcije u pitanju funkcije više varijabli. Ako se integral definira kao:

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^d x \; e^{-\frac{1}{\lambda} f(x_1, ..., x_d)} g(x_1, ..., x_d)$$

tada vrijedi jednakost [12]:

$$\mathcal{I}(\lambda) = (2\pi\lambda)^{n/2} g(x_1^{(0)}, ..., x_d^{(0)}) e^{-\frac{1}{\lambda} f(x_1^{(0)}, ..., x_d^{(0)})} [\det H_f]^{-1/2} + O(\lambda^{(n+1)/2})$$

pri čemu je H_f hessian funkcije f dok su koordinate $x^{(0)}$ definirane na način:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^{(0)}, ..., x_d^{(0)}) = 0$$

te da bi aproksimacija vrijedila stacionarna točka se mora nalaziti unutar dome integracije $(x_1^{(0)}, ..., x_d^{(0)}) \in \mathcal{D}$.

Literatura

[1] David Tong. *Lectures on Statistical Field theory*. 2017. URL: https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/sft.html. (pristupljeno: 11.9.2024.)

[2] L D Landau i E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Elsevier, listopad 2013.

[3] Alexander Altland i Ben D. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, ožujak 2010.

[4] Kenneth G. Wilson. "Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior". *Phys. Rev. B* 4 (9 studeni 1971.), str. 3184–3205. DOI: 10.1103/PhysRevB.4.3184.

[5] Nigel Goldenfeld. *Lectures on phase transitions and the Renormalization Group*. CRC Press, ožujak 2018. DOI: 10.1201/9780429493492.

[6] Malte Henkel. *Conformal invariance and critical phenomena*. Springer Science & Business Media, ožujak 2013.

[7] Cheung. *Phase transitions and collective phenomena*. Siječanj 2021. URL: https://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~achc2/phase/notes.pdf. (pristupljeno: 11.9.2024.)

[8] Vladimir Privman. *Finite size scaling and numerical simulation of statistical systems*. World Scientific, siječanj 1990.

[9] Ivan Balog. "Kontinuirani fazni prijelaz induciran zamrznutim neredom". Disertacija. 2011.

[10] Steven Weinberg. *The quantum Theory of fields*. Cambridge University Press, lipanj 1995.

[11] Jean Zinn-Justin. *Quantum field theory and critical phenomena*. Oxford University Press, travanj 2021. DOI: 10.1093/oso/9780198834625.001.0001.

[12] Jean Zinn-Justin. *Phase Transitions and Renormalization Group*. Oxford University Press, srpanj 2007. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199227198.001.0001.

[13] Bertrand Delamotte. *An introduction to the Nonperturbative Renormalization Group*. Siječanj 2012., str. 49–132. DOI: 10.1007/978-3-642-27320-9_2.

[14] Jürgen Berges, Nikolaos Tetradis i Christof Wetterich. “Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics”. *Physics Reports* 363.4-6 (lipanj 2002.), str. 223–386. DOI: 10.1016/s0370-1573(01)00098-9.

[15] N. Dupuis i dr. “The nonperturbative functional renormalization group and its applications”. *Physics Reports* 910 (svibanj 2021.), str. 1–114. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.01.001.

[16] Lucija Nora Farkaš. “Strongly nonuniform fluctuations within the Functional Renormalisation Group”. Disertacija. 2023.

[17] R. K. P. Zia, Edward F. Redish i Susan R. McKay. “Making sense of the Legendre transform”. *American Journal of Physics* 77.7 (srpanj 2009.), str. 614–622. DOI: 10.1119/1.3119512.

[18] Marcela Peláez i Nicolás Wschebor. “Ordered phase of the O(N) model within the nonperturbative renormalization group”. *Physical review. E* 94.4 (listopad 2016.). DOI: 10.1103/physreve.94.042136.

[19] I. Balog, A. Rançon i B. Delamotte. “Critical Probability Distributions of the Order Parameter from the Functional Renormalization Group”. *Phys. Rev. Lett.* 129 (21 2022.). DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.210602.

[20] Hisamitsu Mukaida i Yujiro Shimada. “Convex effective potential of $O(N)$-symmetric ϕ^4 theory for large N”. *Nuclear Physics B* 479.3 (studeni 1996.), str. 663–682. DOI: 10.1016/0550-3213(96)00403-8.

[21] Vladimir Privman i Michael E. Fisher. “Universal critical amplitudes in finite-size scaling”. *Physical review. B, Condensed matter* 30.1 (srpanj 1984.), str. 322–327. DOI: 10.1103/physrevb.30.322.

[22] David P. Landau i Kurt Binder. *A guide to Monte Carlo simulations in Statistical Physics*. Studeni 2014. DOI: 10.1017/cbo9781139696463. URL: https://doi.org/10.1017/cbo9781139696463.

[23] Ulli Wolff. “Collective Monte Carlo updating for spin systems”. *Physical Review Letters* 62.4 (siječanj 1989.), str. 361–364. DOI: 10.1103/physrevlett.62.361.

[24] Charles Kittel. *Elementary Statistical Physics*. Courier Corporation, travanj 2012.

[25] Filippo Perani. “Cluster Monte-Carlo for Random-Bond ising model”. Mag. rad. 2020.

[26] C. Holm i W. Janke. “High precision single-cluster Monte Carlo measurement of the critical exponents of the classical 3D Heisenberg model”. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 30 (ožujak 1993.), str. 846–849. DOI: 10.1016/0920-5632(93)90340-c.

[27] K. Kanaya i S. Kaya. “Critical exponents of a three-dimensional O(4) spin model”. *Physical review. D. Particles, fields, gravitation, and cosmology/Physical review. D. Particles and fields* 51.5 (ožujak 1995.), str. 2404–2410. DOI: 10.1103/physrevd.51.2404.

[28] Gerald D. Mahan. *Many-Particle Physics*. Springer Science & Business Media, travanj 2013.

[29] Krešimir Horvatić. *Linearna algebra*. Golden marketing - Tehnička knjiga, 2004.