Cijeli brojevi i algebra u nastavi matematike

Ban, Karla

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Karla Ban

CIJELI BROJEVI I ALGEBRA U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Matija Bašić

Zagreb, rujan, 2024.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Matematika je temeljna znanost čija primjena ima veliku, iako ponekad neprimjetnu, ulogu u svakodnevnom životu, te je ključna za obrazovanje svakog pojedinca. Razumijevanje matematičkih koncepata od ranih školskih dana postavlja temelje za kasnije učenje i primjenu stečenog znanja u različitim područjima. Među osnovnim matematičkim pojmovima, cijeli brojevi i algebra zauzimaju posebno mjesto zbog svoje apstraktnosti i važnosti u razvoju matematičkih kompetencija.

Cijeli brojevi, kao skup brojeva koji uključuje prirodne brojeve, njihove negativne vrijednosti i nulu, često predstavljaju izazov za učenike. Njihovo pravilno razumijevanje i primjena zahtijevaju ne samo poznavanje osnovnih aritmetičkih operacija, već i sposobnost apstraktnog razmišljanja. Algebra, s druge strane, predstavlja korak dalje u apstraktnom razmišljanju, uvodeći pojmove varijabli, nepoznanica i jednadžbi. Algebarsko mišljenje omogućava učenicima da generaliziraju aritmetičke operacije i razviju sposobnosti rješavanja problema. Međutim, prijelaz s aritmetike na algebru često donosi brojne matematičke poteškoće koje mogu otežati daljnje učenje.

U ovom radu predstavit ćemo metode poučavanja cijelih brojeva i algebarskih izraza u nastavi matematike, uobičajene poteškoće i miskoncepcije učenika te učinkovite pristupe za njihovo prevladavanje kroz različite didaktičke modele i aktivnosti. Prvo poglavlje pružit će formalnu definiciju cijelih brojeva, opisati načine njihovog uvođenja u nastavu te prikazati različite modele koji se koriste za njihovo poučavanje. Drugo poglavlje analizirat će značaj i ulogu algebarskog mišljenja u obrazovanju, uključujući načine na koje se algebarski koncepti uvode u nastavu te manipulativne modele za rad s algebarskim izrazima. U trećem poglavlju razmotrit ćemo razliku konceptualnog i proceduralnog znanja te kako njihova neravnoteža može dovesti do poteškoća u učenju. Također, analizirat ćemo najčešće pogreške i miskoncepcije koje se javljaju pri radu s cijelim brojevima i algebarskim izrazima te ćemo u posljednjem poglavlju predložiti konkretne aktivnosti za adresiranje i prevladavanje navedenih miskoncepcija.

Poglavlje 1

Cijeli brojevi u nastavi matematike

1.1 Cijeli brojevi

Potreba za proširenjem skupa prirodnih brojeva proizašla je iz nedostatka zatvorenosti operacije oduzimanja unutar skupa $\mathbb{N}$. Ako zbrojimo ili pomnožimo dva prirodna broja, rezultat će biti prirodan broj. Stoga, kažemo da je skup prirodnih brojeva zatvoren u odnosu na zbrajanje i množenje. Međutim, u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, operacija oduzimanja može rezultirati negativnim vrijednostima koje nisu obuhvaćene tim skupom, odnosno kažemo da je operacija oduzimanja parcijalno definirana.

Cijele brojeve možemo formalno definirati koristeći aksiome prstena i model klase ekvivalencije. Prema aksiomima prstena, skup cijelih brojeva zajedno s operacijama zbrajanja i množenja čini komutativni prsten s jedinicom što znači da su operacije zbrajanja i množenja definirane tako da zadovoljavaju svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, te da postoji inverzni element za zbrajanje i neutralni elementi za zbrajanje i množenje.

Definicija 1.1.1. *Neka je R neprazan skup na kojem su definirane dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$. Kažemo da je uređena trojka $(R, +, \cdot)$ prsten ako vrijedi:*

i. $(R, +)$ *je Abelova grupa,*

ii. $(R, \cdot)$ *je polugrupa,*

iii. Distributivnost operacije $\cdot$ obzirom na operaciju $+$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad i \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

za sve $a, b, c \in R$.

Neutralni element grupe $(R, +)$ naziva se nula i označava s 0. Ako postoji neutralni element strukture $(R, \cdot)$ onda se on naziva jedinica i označava s 1, a $(R, +, \cdot)$ se tada naziva prsten s jedinicom. Ako je operacija $\cdot$ komutativna, onda govorimo o komutativnom prstenu. [4]

Svaki cijeli broj može se prikazati kao razlika dva prirodna broja $m-n$ pri čemu su m i n elementi skupa prirodnih brojeva. Ova karakteristika sugerira da cijele brojeve možemo interpretirati kao uređene parove (m, n) pri čemu dva uređena para $(m, n), (p, q)$ predstavljaju isti broj $m - n = p - q$ ako i samo ako vrijedi $m + q = p + n$. U nastavku, želimo konstruirati model klase ekvivalencije koja zadovoljava prethodno navedena svojstva (aksiome prstena), stoga definiramo sljedeću relaciju.

Definicija 1.1.2. *Neka je $\sim$ relacija na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirana s:*

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = n + p$$

Navedena relacija je relacija ekvivalencije, odnosno zadovoljava svojstva refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti:

- **Refleksivnost**: $(m, n) \sim (m, n)$

  Za svaki uređen par (m, n) iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, vrijedi $m + n = m + n$. Dakle, $(m, n) \sim (m, n)$.

- **Simetričnost**: Ako je $(m, n) \sim (p, q)$, onda je $(p, q) \sim (m, n)$.

  Pretpostavimo da je $(m, n) \sim (p, q)$, što znači $m+q = p+n$. Očito vrijedi $p+n = m+q$. Stoga je $(p, q) \sim (m, n)$.

- **Tranzitivnost**: Ako je $(m, n) \sim (p, q)$ i $(p, q) \sim (r, s)$, onda je $(m, n) \sim (r, s)$.

  Pretpostavimo da je $(m, n) \sim (p, q)$ i $(p, q) \sim (r, s)$. Tada vrijedi $m + q = p + n$ i $p + s = r + q$. Zbrajanjem prve jednadžbe s drugom, dobivamo:

  $$m + q + s = p + n + s = n + p + s = n + q + r$$

  Oduzimanjem q s obje strane dobivamo:

  $$m + s = n + r$$

  Stoga je $(m, n) \sim (r, s)$.

Definicija 1.1.3. *Skup cijelih brojeva definiramo kao kvocijentni skup, odnosno skup svih klasa ekvivalencije*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/_\sim$$

- Predstavnici klasa za pozitivan cijeli broj $n = [(n + x, x)]$

- Predstavnici klasa za negativan cijeli broj $-n = [(x, n + x)]$
- Predstavnici klasa za nulu $0 = [(x, x)]$

Definicija 1.1.4. *Na skupu cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ definiramo operacije zbrajanja i množenja koristeći predstavnike klasa ekvivalencije:*

$$[(m,n)] + [(p,q)] = [(m+p, n+q)]$$
$$[(m,n)] \cdot [(p,q)] = [(mp+nq, mq+np)]$$

Navedene operacije su "dobro definirane", tj. ne ovise o izboru predstavnika klasa, što se lako može dokazati. U nastavku ćemo dokazati da skup $\mathbb{Z}$ sa definiranim operacijama zadovoljava sve aksiome prstena.

Teorem 1.1.5. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *je komutativni prsten s jedinicom.*

Dokaz. $(\mathbb{Z}, +)$ **je Abelova grupa**

(1) Zbrajanje je binarna operacija na $\mathbb{Z}$:

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$. Tada postoje uređenih parovi (m, n) i (p, q) iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takvi da je $a = [(m, n)]$ i $b = [(p, q)]$.

$$a + b = [(m,n)] + [(p,q)] = [(m+p, n+q)]$$

Budući da su $m + p$ i $n + q$ prirodni brojevi, to znači da je $(m + p, n + q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pa je $a + b \in \mathbb{Z}$.

(2) Asocijativnost: $[(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)]) = ([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)]$

$$[(a,b)] + ([(c,d)] + [(e,f)]) = [(a,b)] + [(c+e, d+f)] = [(a+c+e, b+d+f)]$$

$$([(a,b)] + [(c,d)]) + [(e,f)] = [(a+c, b+d)] + [(e,f)] = [(a+c+e, b+d+f)]$$

(3) Postojanje neutralnog elementa: $[(a,b)] + [(0,0)] = [(a,b)]$

$$[(a,b)] + [(0,0)] = [(a+0, b+0)] = [(a,b)]$$

(4) Postojanje inverza: Za svaki $[(a,b)]$ postoji suprotni element $-[(a,b)] := [(b,a)]$ takav da je $[(a,b)] + [(b,a)] = [(0,0)]$

$$[(a,b)] + [(b,a)] = [(a+b, b+a)] = [(a+b, a+b)] = [(0,0)]$$

(5) Komutativnost: $[(a,b)] + [(c,d)] = [(c,d)] + [(a,b)]$

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$$

$$[(c,d)] + [(a,b)] = [(c+a, d+b)] = [(a+c, b+d)]$$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ **je polugrupa**

(1) Množenje je binarna operacija na $\mathbb{Z}$:

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$. Tada postoje uređenih parovi (m,n) i (p,q) iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takvi da je $a = [(m,n)]$ i $b = [(p,q)]$.

$$a \cdot b = [(m,n)] \cdot [(p,q)] = [(mp + nq, mq + np)]$$

Budući da su $mp+nq$ i $mq+np$ prirodni brojevi, to znači da je $(mp+nq, mq+np) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pa je $a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

(2) Asocijativnost: $[(a,b)] \cdot ([(c,d)] \cdot [(e,f)]) = ([(a,b)] \cdot [(c,d)]) \cdot [(e,f)]$

$$\begin{aligned}
[(a,b)] \cdot ([(c,d)] \cdot [(e,f)]) &= [(a,b)] \cdot [(ce+df, cf+de)] \\
&= [(a(ce+df) + b(cf+de), b(ce+df) + a(cf+de))] \\
&= [(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
([(a,b)] \cdot [(c,d)]) \cdot [(e,f)] &= [(ac+bd, ad+bc)] \cdot [(e,f)] \\
&= [(ac+bd)e + (ad+bc)f, (ac+bd)f + (ad+bc)e] \\
&= [(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)]
\end{aligned}$$

Dodatno vrijedi

(3) Postojanje neutralnog elementa: $[(a,b)] \cdot [(1,0)] = [(a,b)]$

$$[(a,b)] \cdot [(1,0)] = [(a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1)] = [(a,b)]$$

(4) Komutativnost: $[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(c,d)] \cdot [(a,b)]$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]$$

$$[(c,d)] \cdot [(a,b)] = [(ca+db, cb+da)] = [(ac+bd, ad+bc)]$$

Distributivnost operacije $\cdot$ obzirom na operaciju $+$:

(1) Lijeva distributivnost: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$\begin{aligned}[(a,b)] \cdot ([(c,d)] + [(e,f)]) &= [(a,b)] \cdot [(c+e, d+f)] \\ &= [(a(c+e) + b(d+f), b(c+e) + a(d+f))]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([(a,b)] \cdot [(c,d)]) + ([(a,b)] \cdot [(e,f)]) &= [(ac+bd, ad+bc)] + [(ae+bf, af+be)] \\ &= [(ac+bd+ae+bf, ad+bc+af+be)]\end{aligned}$$

(2) Desna distributivnost: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

$$\begin{aligned}([(a,b)] + [(c,d)]) \cdot [(e,f)] &= [(a+c, b+d)] \cdot [(e,f)] \\ &= [((a+c)e + (b+d)f, (a+c)f + (b+d)e)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}([(a,b)] \cdot [(e,f)]) + ([(c,d)] \cdot [(e,f)]) &= [(ae+bf, af+be)] + [(ce+df, cf+de)] \\ &= [(ae+bf+ce+df, af+be+cf+de)]\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa, $(\mathbb{Z}, \cdot)$ komutativni monoid i da vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju, čime je $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ komutativni prsten s jedinicom.

□

Unutar navedenog modela mogu se dokazati svojstva prstena koja koristimo prilikom izvođenja računskih operacija s cijelim brojevima, no u ovom radu usredotočili smo se na dokazivanje specifičnih svojstava koja ćemo kasnije metodički objasniti. Pri ovim dokazima polazimo od aksioma prstena.

Teorem 1.1.6. *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$. Tada vrijedi:*

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}a \cdot b + (-a) \cdot b &= b \cdot (a + (-a)) \\ &= b \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Dakle,

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$$

Odavde zaključujemo da je $(-a) \cdot b$ aditivan inverz elementa $a \cdot b$, što znači:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

□

Korolar 1.1.7. *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$. Tada vrijedi:*

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}(-a) \cdot (-b) + (-a \cdot b) &= (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b \\ &= (-a) \cdot ((-b) + b) \\ &= (-a) \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Dakle,

$$(-a) \cdot (-b) + (-a \cdot b) = 0$$

Odavde zaključujemo da je $(-a) \cdot (-b)$ aditivan inverz elementa $-a \cdot b$. No, budući da znamo da je $-(-a \cdot b) = a \cdot b$ slijedi tvrdnja.

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

□

Kako uvodimo cijele brojeve?

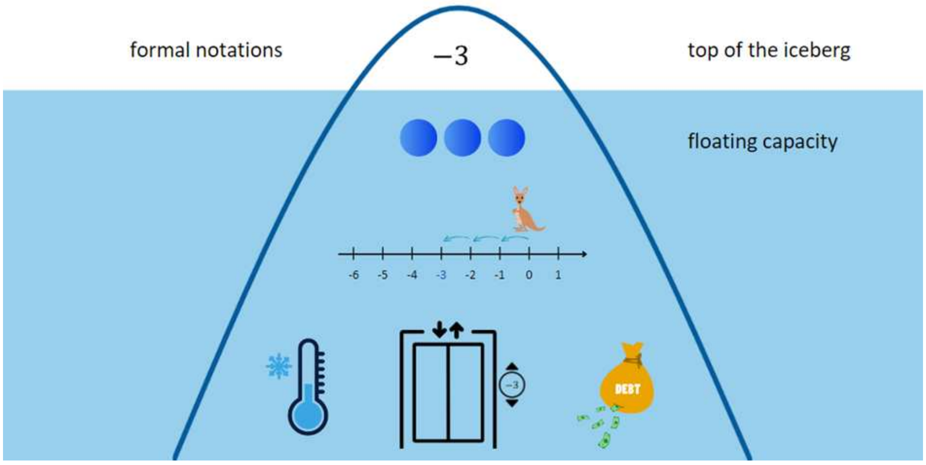
Cijeli brojevi počinju se sustavno uvoditi u nastavu matematike u šestom razredu osnovne škole te se često uvode kroz svakodnevne situacije koje su učenicima poznate, poput temperature, razina lifta ili novčanih transakcija. Analizom tri udžbenika [3, 16, 23] vidimo da se pojmu cijelih brojeva većinom pristupa kroz praktične primjere temperature. Učenici se susreću s konceptom temperature ispod i iznad nule, što im pomaže da intuitivno razumiju pojam negativnih brojeva. Primjeri uključuju grafičke prikaze termometara s temperaturama te realne situacije kao što su zimske temperature u različitim gradovima. Ovi primjeri smatraju se učinkovitima jer omogućuju učenicima da povežu apstraktne matematičke koncepte s realnim životom, olakšavajući im shvaćanje značenja negativnih brojeva i njihovog odnosa s pozitivnim brojevima.

Međutim, u ovom radu opisat ćemo metodu toplih i hladnih žetona, koja se rjeđe pojavljuje u hrvatskim udžbenicima. Ova metoda potiče iz rada Hansa Freudenthala [5] i nudi drugačiji pristup razumijevanju negativnih brojeva. Tradicionalne metode često se oslanjaju na svakodnevne primjere, koji se temelje na predkoncepcijama oblikovanim životnim iskustvima. Primjerice, roditelji često daju objašnjenja negativnih brojeva koja mogu biti netočna, ali ipak značajna za početno razumijevanje učenika. U nastavi radimo na identifikaciji i korekciji tih predkoncepcija, osiguravajući da svi učenici dosegnu jednaku razinu razumijevanja, čemu spomenuta metoda može značajno pridonijeti.

Model toplih i hladnih žetona

Jedan od načina metodičkog uvođenja cijelih brojeva je uvođenje dvije vrste brojeva – pozitivnih i negativnih, pri čemu je njihovo glavno definirajuće svojstvo da se međusobno poništavaju. Na primjer, broj -3 je onaj broj koji se „poništava“ s 3 i daje nulu. Kako bismo ovaj koncept učinili jasnim i razumljivim, možemo koristiti dvije boje: crvenu za pozitivne brojeve i plavu za negativne brojeve. Uz boje, često se koriste žetoni kao vizualno sredstvo koje pomaže učenicima u shvaćanju ovog principa. Pritom crveni žeton može predstavljati $+1$, dok plavi žeton predstavlja -1 te učenici tada jasno vide kako se pozitivni i negativni brojevi međusobno poništavaju, što je ključno za razumijevanje cijelih brojeva. Na ovu metodu prirodno se nadovezuje korištenje modela toplih i hladnih žetona za izvođenje računskih operacija s cijelim brojevima, posebno zbrajanja i oduzimanja, što ćemo detaljno objasniti u sljedećem potpoglavlju.

Ova metoda naglašava međusobnu suprotnost pozitivnih i negativnih brojeva bez potrebe da ih smještamo na određene pozicije (lijevo-desno ili gore-dolje), već se fokusira na njihovo svojstvo poništavanja. Time učenicima dajemo ”pravila igre” koja definiraju što smiju raditi u matematici. Općenito, kada uvodimo novi pojam, objašnjavamo što s njim smijemo raditi i koja svojstva smijemo koristiti. Iako ta svojstva ne nazivamo nužno aksiomima ili definicijama, ona su ključna za način na koji učenici prihvaćaju i razumiju matematiku. Ovaj metodički pristup omogućuje nastavnicima da učenike vode kroz proces otkrivanja i razumijevanja matematičkih koncepata na konkretan i vizualno bogat način. On se prirodno nadovezuje na ideju realističnog matematičkog obrazovanja, koje se temelji na dva ključna načela: matematika kao ljudska djelatnost i smislena matematika koja proizlazi iz bogatih konteksta ([17]). Realistično matematičko obrazovanje naglašava važnost pružanja učenicima prilike da sami otkriju činjenice i definicije uz stručno usmjeravanje nastavnika, čime učenici postaju odgovorni za svoje učenje. U takvom pristupu nastavi naglasak je na razumijevanju sadržaja, a ne na jednostavnom usvajanju postupaka i algoritama. Hans Freudenthal, začetnik realističnog matematičkog obrazovanja, smatrao je da proces učenja treba započeti s konkretnim i učenicima poznatim kontekstom. Upravo kroz postupno razvijanje vlastitih metoda i kroz dobro dizajniran niz primjera te intervencije nastavnika, učenici postupno stječu formalno znanje. Ovaj proces naziva se progresivna formalizacija te se može prikazati modelom ledenjaka, gdje vidljivi dio predstavlja formalno znanje, dok su ispod površine skriveni svi neformalni primjeri, koncepti i ideje koji su učenike postupno doveli do tog znanja.



Slika 1.1: Model ledenjaka za koncept negativnog broja

Na taj način želimo razvijati koncept negativnog broja. Kao što smo već spomenuli, učenici su već upoznati s negativnim brojevima kroz konkretne primjere iz svakodnevnog života, poput temperature ispod nule, razina lifta ispod zemlje ili dugovanja. Zatim kroz niz primjera i didaktičkih modela dolazimo do formalnog razumijevanja ujedno im omogućujući da zaključuju koristeći formalni jezik bez potrebe za referenciranjem na modele.

1.2 Različiti modeli za cijele brojeve

U nastavi matematike koriste se različiti modeli za prikazivanje i razumijevanje cijelih brojeva. Iako ne primjenjujemo formalni model s klasama ekvivalencije zbog njegove apstraktnosti, koristimo druge pristupe koji omogućuju lakšu vizualizaciju matematičkih operacija. Svaki od tih modela ima svoje prednosti i ograničenja, no svi su osmišljeni kako bi učenicima olakšali razumijevanje složenih ideja kroz konkretne primjere i vizualne prikaze. U nastavku ćemo detaljno opisati nekoliko različitih modela, pri čemu svaki zahtijeva rješavanje većeg broja primjera kako bi učenici putem induktivnog zaključivanja usvojili pravila za cijele brojeve.

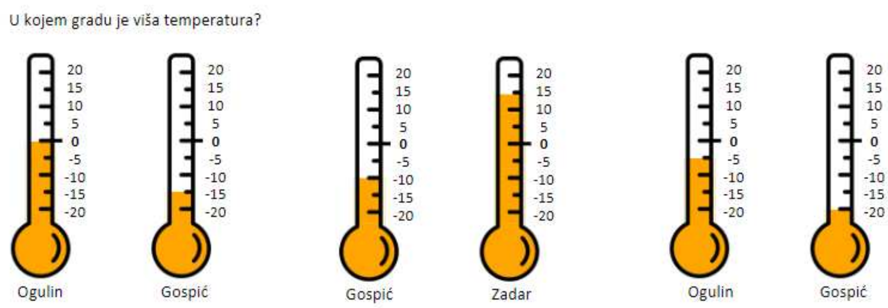
Model lifta najčešće se koristi za ilustraciju uspoređivanja cijelih brojeva kroz kretanje lifta između različitih razina zgrade. Zgrada je prikazana kao vertikalni brojevni pravac gdje je prizemlje označeno s 0, katovi iznad prizemlja su označeni pozitivnim cijelim brojevima, a garaža ispod razine zemlje negativnim cijelim brojevima. Ovaj model omogućuje učvršćivanje razumijevanja uspoređivanja pozitivnih cijelih brojeva, odnosa između pozitivnih brojeva i nule te između negativnih brojeva i nule. Također, pomaže u uspoređivanju negativnih cijelih brojeva.

Primjenom ovog modela možemo postavljati pitanja poput: „Jesmo li na višoj razini ako se nalazimo na -1. katu (jedna razina ispod zemlje) ili na -2. katu (dvije razine ispod zemlje)?“ Ovim pitanjima kod učenika potičemo konceptualno razumijevanje uspoređivanja cijelih brojeva.

Slika 1.2: Model lifta

Slično prethodno spomenutom modelu, **model temperature** mjerene u stupnjevima Celzijusa koristi se za uspoređivanje cijelih brojeva pomoću termometra. Termometar je također prikazan kao vertikalni brojevni pravac gdje su temperature iznad nule pozitivne, a ispod nule negativne. Pitanjima poput ”U kojem gradu je viša temperatura?” ili ”Je li hladnije ako je temperatura $-20°$ ili $-5°$?” potičemo učenike na konceptualno razumijevanje uspoređivanja cijelih brojeva.

Modeli koji koriste vertikalne brojevne pravce umjesto horizontalnih mogu biti intuitivno jasniji učenicima jer mogu lakše povezati da od dvaju brojeva na termometru, gornji broj uvijek pokazuje višu, a donji nižu temperaturu. Na taj način učenici jednostavnije zaključuju da je -20 manje od -5, iako je 20 veće od 5.



Slika 1.3: Model temperature

Model klase ekvivalencije formalno zadovoljava sva svojstva i omogućuje njihovu jednostavnu provjeru. Nasuprot tome, provjera svojstava u drugim modelima može biti teža zbog njihovih specifičnih ograničenja. Na primjer, u modelu lifta i modelu temperature teško je zamisliti beskonačnost u oba smjera. Zbog toga za vizualizaciju zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva koristimo model brojevnog pravca i toplih i hladnih žetona. Brojevni pravac je široko prihvaćen kao osnovni model za uvođenje negativnih brojeva i operacija zbrajanja i oduzimanja. S druge strane, model toplih i hladnih žetona, koji Freudenthal naziva model neutralizacije, rijetko se koristi u učionicama zbog složenosti pripreme i upotrebe, kao i nedostatka znanja i razumijevanja među nastavnicima. Istraživanja su pokazala da model žetona pruža dublje i smislenije razumijevanje koncepata negativnih brojeva i operacija u usporedbi s modelom brojevnog pravca. [7]. Ova dva modela ključni su za razumijevanje operacija s cijelim brojevima te ćemo u nastavku opisati kako se svaki model može primijeniti u nastavi.

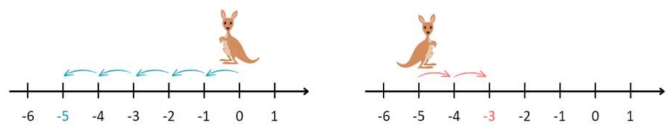
Model brojevnog pravca predstavlja učinkovit alat za vizualizaciju zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva, omogućujući učenicima da lakše shvate ove operacije pomoću jednostavnih pomaka na brojevnom pravcu. Učenicima podijelimo nastavne listiće s brojevnim pravcem i figuricu kojom će se kretati po njemu. Bitno je da učenici figuricu, koju ćemo nazvati klokan, mogu okretati tako da on gleda udesno i ulijevo. Klokanov početni položaj uvijek je u ishodištu brojevnog pravca.

Zbrajanje i oduzimanje interpretiramo kao kretanje po pravcu. Ako zbrajamo dva cijela broja, klokan se kreće naprijed, dok se prilikom oduzimanja klokan kreće unatrag. Predznak brojeva određuje smjer u koji klokan gleda – pozitivan predznak znači da gleda udesno, a negativan predznak znači da gleda ulijevo.

U sljedećim primjerima prikazat ćemo kako ovaj model funkcionira na zadacima s kojima su učenici imali najviše poteškoća, spomenutim u trećem poglavlju.

$$-5 + 2 = -3$$

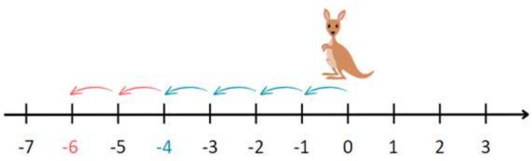
Prvi broj je negativan, stoga klokan gleda ulijevo i kreće se 5 koraka naprijed do broja -5. Drugi broj je pozitivan pa se klokan okreće udesno i kreće 2 koraka naprijed. Klokan završava na broju -3. Dakle, rezultat zbrajanja $-5 + 2$ je -3.



Slika 1.4: $-5 + 2 = -3$

$$-4 + (-2) = -6$$

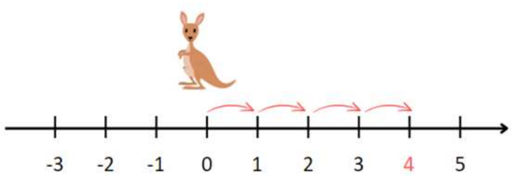
Budući da je prvi broj negativan, klokan gleda ulijevo i kreće se 4 koraka naprijed do broja -4. Drugi broj je također negativan pa se klokan pomiče još 2 koraka naprijed do broja -6. Klokan završava na broju -6. Dakle, rezultat zbrajanja $(-4) + (-2)$ je -6.



Slika 1.5: $-4 + (-2) = -6$

$$0 - (-4) = 4$$

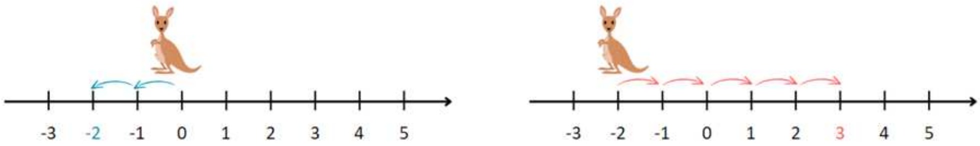
Budući da je prvi broj 0, klokan ostaje u ishodištu. Zatim se okreće ulijevo jer je drugi broj negativan, ali se zbog oduzimanja kreće unatrag, čime završava na broju 4. Dakle, rezultat oduzimanja $0 - (-4)$ je 4.



Slika 1.6: $0 - (-4) = 4$

$$-2 - (-5) = 3$$

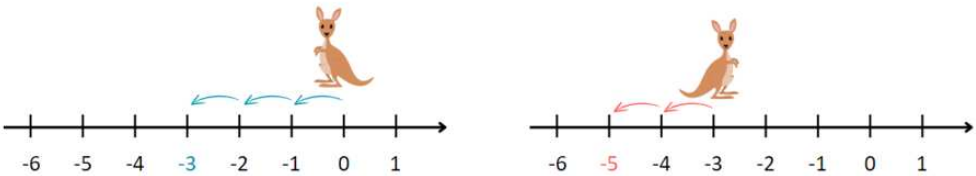
Prvi broj je negativan pa klokan gleda ulijevo i kreće se naprijed dva koraka. Drugi broj je također negativan pa i dalje gleda ulijevo, ali se zbog oduzimanja kreće unatrag završavajući na broju 3. Dakle, rezultat oduzimanja $-2 - (-5)$ je 3.



Slika 1.7: $-2 - (-5) = 3$

$$-3 - 2 = -5$$

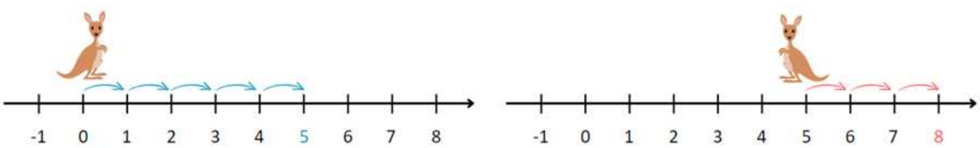
Prvi broj je negativan, pa klokan gleda ulijevo i kreće se naprijed 3 koraka. Zatim se okreće desno jer je drugi broj pozitivan, ali se zbog oduzimanja kreće unatrag. Klokan završava na broju -5. Dakle, rezultat oduzimanja $-3 - 2$ je -5.



Slika 1.8: $-3 - 2 = -5$

$$5 - (-3) = 8$$

Prvi broj je pozitivan pa klokan gleda udesno i kreće se naprijed 5 koraka. Drugi broj je negativan pa se okreće ulijevo i kreće se unatrag jer je zadana operacija oduzimanja. Klokan završava na broju -8. Dakle, rezultat oduzimanja $5 - (-3)$ je 8.



Slika 1.9: $5 - (-3) = 8$

Model toplih i hladnih žetona koristi se za vizualizaciju zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva putem koncepta temperature mjerene u stupnjevima Celzijusa. Ovaj model uključuje posudu i žetone u dvije boje: crvenoj i plavoj. Zbog njihovog utjecaja na promjenu temperature, crvene žetone nazivamo toplim, a plave hladnim. Polazna pretpostavka modela je da je temperatura u praznoj posudi 0°C.

Slika 1.10: Model toplih i hladnih žetona

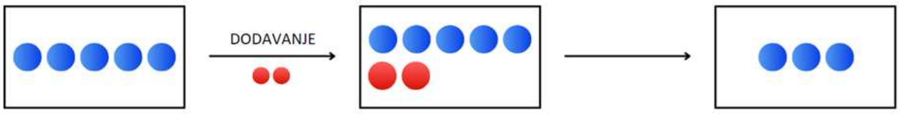
Jedna od glavnih prednosti korištenja modela je da pruža operacijama s cijelim brojevima konkretnu i lako upravljivu fizičku i vizualnu reprezentaciju, koristeći interpretaciju zbrajanja kao dodavanje žetona u posudu i oduzimanja kao vađenje žetona iz posude.

Dodavanjem jednog crvenog žetona u posudu, temperatura u posudi se povećava za 1°C, dok dodavanjem jednog plavog žetona temperatura opada za 1°C. Ako iz posude izvadimo jedan crveni žeton, temperatura u posudi se smanjuje za 1°C, dok vađenjem jednog plavog žetona temperatura raste za 1°C. Važno je napomenuti da dodavanje ili vađenje para crvenog i plavog žetona u posudu ne mijenja temperaturu jer se oni međusobno poništavaju. Ovaj model se prirodno nadovezuje na ranije opisanu alternativnu metodu uvođenja cijelih brojeva, koja također naglašava međusobno poništavanje pozitivnih i negativnih brojeva.

Slično kao kod prethodnog modela, opisat ćemo primjenu ovog modela na zadacima koji su učenicima predstavljali najveće izazove.

$$-5 + 2 = -3$$

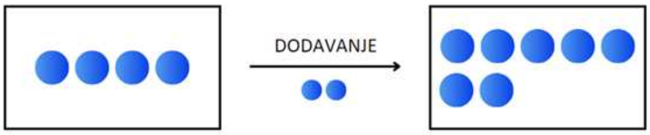
Zbrajanje $-5 + 2$ možemo vizualizirati dodavanjem 5 plavih i 2 crvena žetona u posudu. Dodavanje 5 plavih žetona smanjuje temperaturu za 5°C, dok dodavanje 2 crvena žetona povećava temperaturu za 2°C. Ukupna promjena temperature u posudi je -3°C, što odgovara rezultatu -3.



Slika 1.11: $-5 + 2 = -3$

$$-4 + (-2) = -6$$

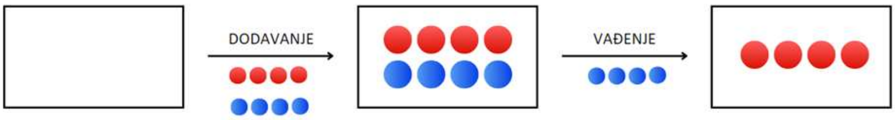
Zbrajanje $-4 + (-2)$ može se prikazati dodavanjem 4 plavih plava žetona i 2 dodatna plava žetona u posudu. Ukupno dodavanje 6 plavih žetona smanjuje temperaturu u posudi za 6°C, što rezultira ukupnom temperaturom od -6.



Slika 1.12: $-4 + (-2) = -6$

$$0 - (-4) = 4$$

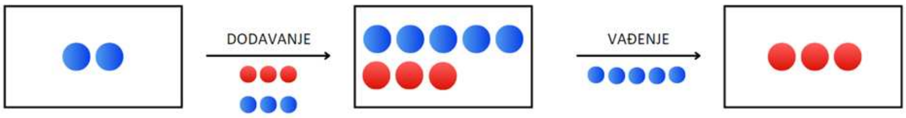
Oduzimanje $0 - (-4)$ može se interpretirati kao vađenje 4 plava žetona iz prazne posude. Početna temperatura je 0°C. Da bi se moglo izvršiti oduzimanje, u posudu se prvo moraju dodati 4 crvena i 4 plava žetona kako bi temperatura ostala nepromijenjena (0°C). Nakon vađenja 4 plava žetona iz posude, ostaju 4 crvena žetona, što rezultira ukupnom temperaturom od 4°C. Dakle, rezultat je 4.



Slika 1.13: $0 - (-4) = 4$

$$-2 - (-5) = 3$$

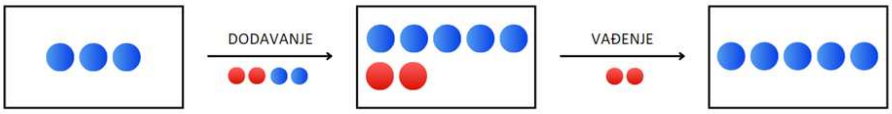
Oduzimanje $-2 - (-5)$ možemo interpretirati dodavanjem 2 plava žetona u posudu, što smanjuje temperaturu za 2°C. Da bismo mogli izvršiti vađenje, dodajemo 3 crvena i 3 plava žetona kako bi temperatura ostala nepromijenjena. Nakon toga, vađenjem 5 plavih žetona iz posude, u posudi ostaju 3 crvena žetona te je ukupna temperatura u posudi 3°C, što odgovara rezultatu 3.



Slika 1.14: $-2-(-5)=3$

$$-3-2=-5$$

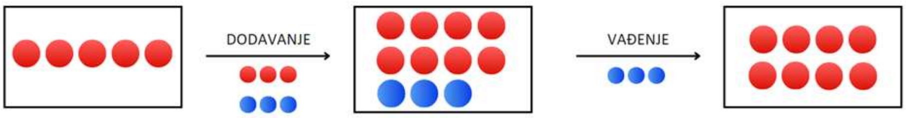
Oduzimanje $-3-2$ može se vizualizirati dodavanjem 3 plava žetona u posudu, što smanjuje temperaturu za 3°C. Kako bismo mogli izvršiti vađenje 2 crvena žetona, dodajemo 2 crvena i 2 plava žetona kako bi temperatura ostala nepromijenjena. Zatim, vađenjem 2 crvena žetona iz posude, temperatura se smanjuje za dodatnih 2°C, što ukupno daje rezultat -5.



Slika 1.15: $-3-2=-5$

$$5-(-3)=8$$

Oduzimanje $5-(-3)$ može se vizualizirati dodavanjem 5 crvenih žetona u posudu, što povećava temperaturu za 5°C. Dodajemo 3 crvena i 3 plava žetona kako bi temperatura ostala nepromijenjena i obavimo vađenje. Nakon vađenja 3 plava žetona iz posude, temperatura se povećava za 3°C, što ukupno daje rezultat 8.



Slika 1.16: $5-(-3)=8$

U nastavku ćemo opisati modele koji omogućuju interpretaciju množenja cijelih brojeva. Do sada je množenje bilo uvedeno kao uzastopno zbrajanje, no s obzirom na uvođenje negativnih brojeva, primjeri poput $-3 \cdot 4$ ili $-3 \cdot (-4)$ nisu intuitivno jasni kroz uzastopno zbrajanje. Stoga koristimo različite modele za njihovo objašnjenje. Poseban fokus ćemo staviti na modele koji objašnjavaju zašto je rezultat množenja dvaju negativnih brojeva pozitivan, odnosno zašto „minus puta minus daje plus".

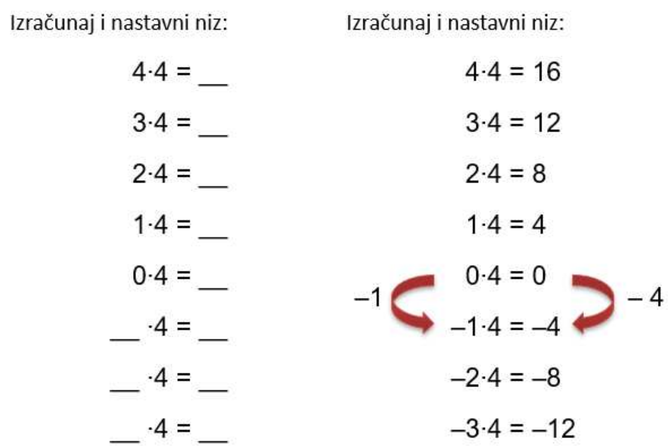
Jedan od najčešće korištenih pristupa u nastavi za objašnjenje zašto „minus puta minus daje plus" je **metoda niza.** Ovaj pristup često započinje praktičnim primjerima iz svakodnevnog života pomoću kojih dolazimo do zaključka da je rezultat množenja dva pozitivna cijela broja pozitivan cijeli broj, dok je rezultat množenja pozitivnog i negativnog cijelog broja negativan cijeli broj. Na sljedećem primjeru ćemo opisati ovu ideju.

Primjer 1.2.1. *Mama treba kupiti tri čokolade za kolač, pri čemu svaka čokolada košta četiri eura. Koliko joj novaca treba?*
Učenici će računati trošak zbrajajući tri puta četiri eura: $4 + 4 + 4 = 12$. *Budući da je množenje kraći način zapisivanja zbrajanja istog pribrojnika, zapisujemo* $3 \cdot 4 = 12$.

Primjer 1.2.2. *Leon posuđuje od tate četiri eura svaki dan. Nakon tri dana, koliko će ukupno eura biti dužan tati?*
Učenici će zbrajati dug: $(-4) + (-4) + (-4) = -12$. *Ovo pomoću množenja zapisujemo kao* $3 \cdot (-4) = -12$.

Preostala dva slučaja, $-3 \cdot 4$ i $-3 \cdot (-4)$, ne možemo prikazati primjerima iz svakodnevnog života, pa se primjenjuje metoda niza. Ako su učenici već upoznati s ovakvim načinom aktivnosti, mogu raditi u parovima kako bi uočili pravilnosti, a ako se prvi put susreću s ovakvom aktivnošću, nastavnik može voditi proces otkrivanja pravilnosti.

Pitamo se koliko je $-3 \cdot 4$.

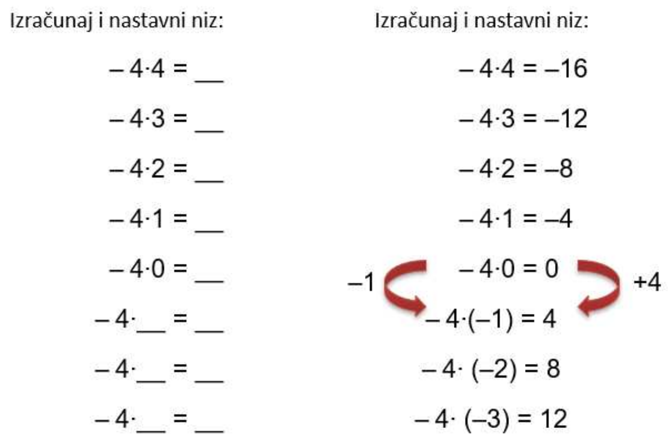


Slika 1.17: Primjer i rješenje nastavnog listića

Pitanja koja možemo postaviti učenicima tijekom aktivnosti:
Kakav je prvi faktor u svakoj od jednakosti? Mijenja li se?
Što se događa s drugim faktorom?
Što se događa s vrijednošću umnoška?

Učenici će zaključiti: ako smanjujemo prvi faktor za jedan, umnožak se smanjuje za četiri. Tako nastavljanjem niza dolazimo do zaključka da je umnožak negativnog i pozitivnog cijelog broja negativan cijeli broj.

Nakon toga, pitamo se što se događa kada množimo negativan broj negativnim brojem. Vođeni sličnim pitanjima i metodom niza, učenici će zaključiti da ako smanjujemo prvi faktor za jedan, umnožak se povećava za četiri, što vodi do zaključka da je umnožak dvaju negativnih brojeva pozitivan.



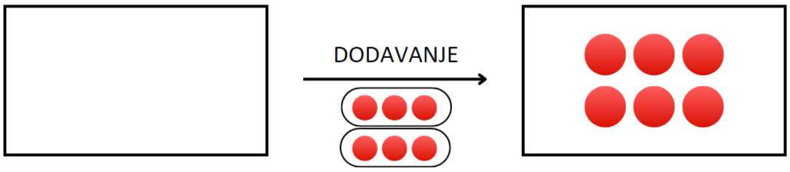
Slika 1.18: Primjer i rješenje nastavnog listića

Ovaj pristup omogućava učenicima da kroz postupno otkrivanje i logičko zaključivanje sami dođu do zaključka da je rezultat množenja dvaju negativnih cijelih brojeva pozitivan cijeli broj.

Drugi model kojim možemo vizualizirati množenje cijelih brojeva je **model toplih i hladnih žetona**. Ovaj model je već objašnjen kod zbrajanja i oduzimanja cijelih brojeva, pa ćemo sada samo opisati kako on funkcionira u kontekstu množenja.

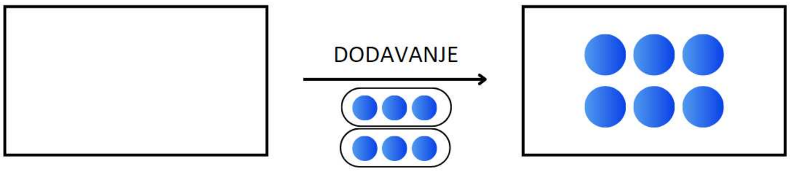
Operacija množenja je predstavljena dodavanjem žetona u posudu i vađenjem iz posude pri čemu predznak prvog faktora označava radi li se o dodavanju (+) ili vađenju (−), a predznak drugog faktora određuje radi li se o crvenom (+) ili plavom (−) žetonu. Sljedeći primjeri opisuju množenje pomoću spomenutog modela.

Množenje $2 \cdot 3$ predstavljeno je dodavanjem 2 puta po 3 crvena žetona u posudu. U posudi se tada nalazi 6 crvenih žetona te je ukupna temperatura u posudi 6°C. Dakle, rezultat je +6.



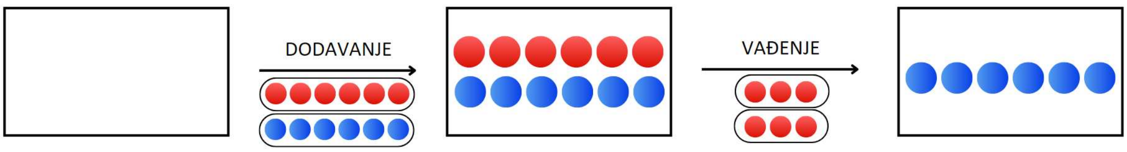
Slika 1.19: Pozitivan cijeli broj · pozitivan cijeli broj

Množenje $2 \cdot (-3)$ predstavljeno je dodavanjem 2 puta po 3 plava žetona u posudu. U posudi se tada nalazi 6 plavih žetona te je ukupna temperatura u posudi −6°C. Dakle, rezultat je −6.



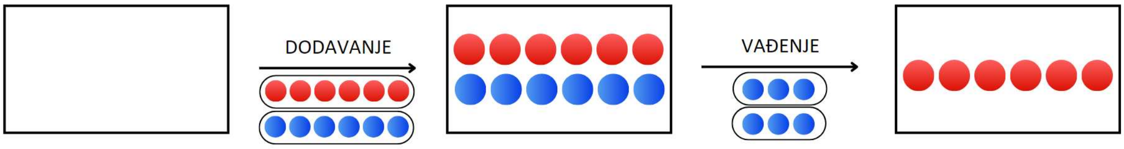
Slika 1.20: Pozitivan cijeli broj · negativan cijeli broj

Množenje $(-2) \cdot 3$ je predstavljeno vađenjem 2 puta po 3 crvena žetona iz posude. Budući da je posuda prazna, temperatura je 0°C. Da bismo mogli obaviti vađenje, prvo u nju dodajemo 6 crvenih i 6 plavih žetona kako bi temperatura ostala nepromijenjena tj. 0°C. Zatim obavimo vađenje. U posudi se tada nalazi 6 plavih žetona te je ukupna temperatura u posudi −6°C. Dakle, rezultat je −6.



Slika 1.21: Negativan cijeli broj · pozitivan cijeli broj

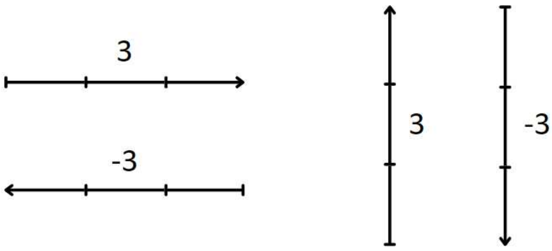
Zadnji slučaj, množenje $(-2) \cdot (-3)$ predstavljeno je vađenjem 2 puta po 3 plava žetona iz posude. Ponovno, budući da je posuda prazna, temperatura u posudi iznosi 0°C. Prvo u nju dodajemo 6 crvenih i 6 plavih žetona, a zatim obavimo vađenje. U posudi se tada nalazi 6 crvenih žetona te je ukupna temperatura u posudi 6°C. Dakle, rezultat je +6.



Slika 1.22: Negativan cijeli broj · negativan cijeli broj

Ovaj model jasno prikazuje kako množenje pozitivnih i negativnih brojeva utječe na ukupnu temperaturu u posudi, pomažući učenicima da intuitivno shvate kako se mijenja rezultat množenja ovisno o predznaku brojeva koji se množe.

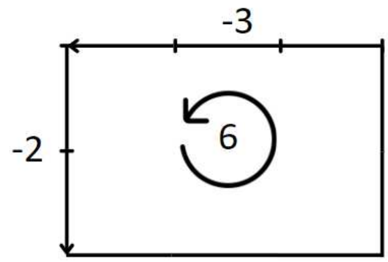
Prema [22], postoji alternativni način prikazivanja operacija s cijelim brojevima. Pozitivne brojeve možemo vizualizirati kao pomake slijeva nadesno ili odozdo prema gore, dok negativne brojeve zamišljamo kao pomake u suprotnome smjeru, zdesna nalijevo ili odozgo prema dolje.



Slika 1.23: Prikazivanje cijelih brojeva

Kako bismo objasnili množenje cijelih brojeva na ovom modelu, promotrimo pravokutnik sa stranicama duljina x i y. Površina tog pravokutnika iznosi $x \cdot y$, pri čemu te stranice nisu pomaci i nemaju dva moguća smjera (slijeva nadesno ili zdesna nalijevo, te odozdo nagore ili odozgo nadolje). Stoga, želimo li množiti cijele brojeve, promatramo pravokutnike čije su stranice pomaci. Osim površine, takav pravokutnik ima i smjer pri čemu ćemo smjer kazaljke na satu smatrati negativnim, a smjer obrnut smjeru kazaljke na satu pozitivnim.

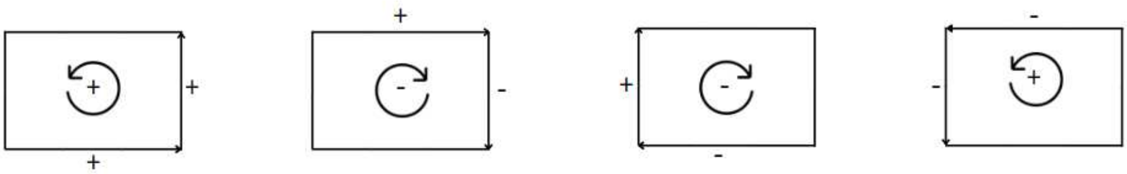
Pogledajmo sada što se događa kod množenja ”minus puta minus”, koristeći primjer pravokutnika koji predstavlja umnožak $(-3) \cdot (-2)$.



Slika 1.24: Množenje na modelu

Smjer tog pravokutnika je suprotan smjeru kazaljke na satu, što znači da je pozitivan: $(-3) \cdot (-2) = 6$. Dakle, ”minus puta minus je plus”.

Sva četiri moguća slučaja možemo prikazati sljedećim dijagramima:



Slika 1.25: Prikaz sva četiri moguća slučaja pomoću dijagrama

Ovaj model omogućava učenicima jednostavno vizualno razumijevanje zašto je umnožak dvaju negativnih brojeva pozitivan.

Posljednji model koji ćemo spomenuti u kontekstu množenja cijelih brojeva rijetko se koristi u praksi, ali može se provesti kao zanimljiva aktivnost na satu. Osnovna ideja ovog modela je vizualizirati kako različiti smjerovi kretanja i načini puštanja videa mogu pomoći u razumijevanju množenja cijelih brojeva.

Predznak prvog faktora predstavlja smjer u kojem osoba trči: osoba trči naprijed (+) ili osoba trči unazad (-). Predznak drugog faktora predstavlja kako se pušta video: video je normalan (+) ili video je pušten unatrag (-).

Model možemo opisati na sljedeći način:

Ako snimimo osobu kako trči naprijed (pozitivno) i zatim pustimo video normalno (pozitivno), tada osoba trči naprijed (pozitivno). To možemo prikazati kao $(+1)\cdot(+1) = +1$.

Ako snimimo osobu kako trči naprijed (pozitivno) i pustimo video unatrag (negativno), tada izgleda kao da osoba trči unatrag. To možemo prikazati kao $(+1) \cdot (-1) = -1$.

Isto vrijedi i ako snimimo osobu kako trči unazad (negativno) i zatim pustimo video normalno (pozitivno), tada vidimo osobu kako trči unazad (negativno). To možemo prikazati kao $(-1) \cdot (+1) = -1$.

S druge strane, ako snimimo nekoga kako trči unazad (negativno) i pustimo snimku unatrag (negativno), čini se da osoba trči naprijed (pozitivno). To možemo prikazati kao $(-1) \cdot (-1) = +1$.

Ovi rezultati ostaju isti neovisno o brzini osobe ili premotavanja videa.

Poglavlje 2

Algebra u nastavi matematike

Algebra predstavlja prirodni nastavak i proširenje aritmetike pružajući nam mogućnost da generaliziramo aritmetičke operacije i zakonitosti. Dok se aritmetika bavi konkretnim brojevima i operacijama nad njima, algebra se fokusira na manipulaciju simbolima, pravila i svojstva, što nam omogućava rad s općim brojevima i nepoznanicama.

U ovom radu usredotočit ćemo se na školsku algebru koja se razlikuje od one koja se izučava na višim razinama matematičkog obrazovanja. Prema kurikulumu, algebra se opisuje kao jezik za opisivanje pravilnosti u kojem slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije, a varijable se koriste pri rješavanju matematičkih problema.

2.1 Algebarsko mišljenje u nastavi matematike

Algebarsko mišljenje ili algebarsko zaključivanje prisutno je u svim dijelovima matematike i predstavlja ključnu komponentu matematičkog obrazovanja koja omogućuje učenicima razumijevanje i primjenu apstraktnih matematičkih koncepata u svakodnevnom životu. Unutar matematičkog obrazovanja ne postoji jedinstvena definicija koja opisuje što je algebarsko mišljenje. Ono zapravo nije pojam koji obuhvaća samo jednu ideju, već se sastoji od razumijevanja simboličkog formalnog jezika i različitih vrsta mišljenja. Algebarsko mišljenje uključuje stvaranje generalizacija na osnovi iskustva računanja i manipulacije brojevima, formaliziranje tih ideja pomoću simbola te upotrebu funkcija, što je sve uključeno u proces modeliranja ([12]).

Prema Usiskinu [21], razvoj algebarskog mišljenja u obrazovanju javlja se i razvija kroz nekoliko ključnih aspekata koji koreliraju s različitim načinima korištenja varijabli i nepoznanica: algebra kao generalizirana aritmetika, algebra kao proučavanje postupaka za rješavanje određenih vrsta problema, algebra kao proučavanje odnosa među veličinama te algebra kao proučavanje struktura. U nastavku ćemo detaljnije razmotriti svaki od ovih aspekata.

Algebra kao generalizirana aritmetika

Algebra se u obrazovanju često smatra generalizacijom aritmetike u kojoj se pravila i operacije primjenjuju na opće brojeve. Generalizacija ili poopćavanje je proces prijelaza s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegova nadskupa ([9]). Kreće se od pojma kojem je pridružen određeni skup objekata i njegov opseg, te se utvrđuje neko svojstvo koje vrijedi za sve elemente zadanog skupa. Potom se razmatra općenitiji pojam, a svojstvo se prenosi na sve elemente dobivenog nadskupa ili se izgrađuje općenitije svojstvo. Generalizacija ima široku primjenu u nastavi matematike koja je većinom induktivna, pri čemu učenici na temelju određenih primjera zaključuju pravila, odnosno dolaze do generalizacija. Na taj način ova metoda postaje važan i bogat izvor novih saznanja. Generalizacija, odnosno prijelaz s konkretnog i pojedinačnog k općem, je složen misaoni proces koji dopušta učenicima da razmišljaju izvan okvira posebnosti matematičke situacije.

Jedan od primjera u kojim se učenici susreću s generalizacijom opisan je u prvom poglavlju. Primjenom metode niza, učenici otkrivaju pravilo da množenje negativnog i pozitivnog broja daje pozitivan rezultat. Na primjer:

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$0 \cdot 5 = 0$$

$$-1 \cdot 5 = -5$$

$$-2 \cdot 5 = -10$$

Ova ideja generalizira sljedeće svojstvo: $-x \cdot y = -xy$.

Ključne upute za učenike u ovom pristupu algebri su prevođenje i generalizacija pri čemu varijable promatramo kao generalizaciju određenih uzoraka.

Algebra kao proučavanje postupaka za rješavanje određenih vrsta problema

Promotrimo sljedeći problem: *Ako broj* 3 *dodamo nekom broju pomnoženom s* 5*, zbroj je* 43*. Koji je to broj?*

Ovaj problem lako se prevodi na jezik algebre: $5x + 3 = 43$.

Pristupamo li algebri kao generalizaciji aritmetike, ne koristimo pojam nepoznanica, te stoga problem smatramo riješenim jer smo pronašli traženi uzorak. Međutim, gledamo li na algebru kao proučavanje postupaka, želimo pronaći konkretno rješenje jednadžbe.

Rješavanje jednadžbi najčešće podrazumijeva izvođenje uvježbanih postupaka i procedura, no važno je da učenici razumiju osnovne korake u njihovom rješavanju. Jedan od pristupa rješavanja jednadžbi je metoda *otkrivanja smisla* pri čemu učenici vježbaju matematičko izražavanje. Manipulacija simbolima često se oslanja samo na proceduralno razumijevanje, što može dovesti do negativnog stava prema matematici. Učenicima treba predstaviti algebru kao dio matematike s praktičnom svrhom i primjenom u svakodnevnom životu, gdje njihovi postupci imaju jasno značenje i nisu samo beznačajno baratanje simbolima.

Primjer rješavanja metodom *otkrivanja smisla* je da učenici razmisle o tome koji broj zbrojen s 3 daje 43? To je broj 40. Dakle, $5x = 40$. Zatim se pitamo koji broj pomnožen s 5 daje 40. To je broj 8. Stoga, rješenje polazne jednadžbe je $x = 8$, što je lako provjeriti. U nastavi trebamo poticati ovakav način razmišljanja kako bi učenici razvili vještine potrebne za rješavanje jednadžbi.

Mnogi učenici nailaze na poteškoće prilikom prelaska s aritmetičkog na algebarski način rješavanja problema. Dok aritmetičko rješenje uključuje oduzimanje 3 i dijeljenje s 5, postavljanje izraza koji opisuje problem uključuje dodavanje 3 i množenje s 5, što su inverzne operacije. To znači da moramo razmišljati suprotno od načina kako bismo inače riješili zadatak koristeći aritmetiku. Usiskin ističe da je u ovom pristupu algebri ključni koncept nepoznanica, a osnovne upute pojednostavi i riješi.

Algebra kao poučavanje odnosa među veličinama

Formulom za površinu pravokutnika $P = a \cdot b$ opisujemo odnos između triju veličina. Temeljna razlika između ovog i prethodnih pristupa je u tome što ovdje varijable variraju, a ne generaliziramo aritmetički uzorak niti tražimo nepoznanicu. Formula poput ove razlikuje se od generalizacije $-x \cdot y = -xy$, iako se formule mogu smatrati specifičnim slučajevima generalizacije.

Promatramo li algebru kao proučavanje odnosa među veličinama, varijabla može imati ulogu argumenta ili parametra. Kao argument, varijabla predstavlja vrijednost domene funkcije, dok kao parametar označava broj o kojem ovise drugi brojevi. Ova specifičnost uvodi pojmove zavisne i nezavisne varijable. U ovom kontekstu, nezavisne varijable su one koje djeluju kao argumenti funkcije, određujući vrijednosti koje funkcija može primiti, dok su zavisne varijable one čije se vrijednosti izračunavaju na temelju nezavisnih varijabli. Takav pristup omogućuje jasnije razumijevanje kako promjene u jednoj veličini mogu utjecati na promjene u drugoj, čime se ističe dinamična priroda matematičkih odnosa i funkcija. Dakle, u ovom aspektu bavimo se funkcijskim vezama i ovisnostima, kao i općenitim vezama među veličinama pri čemu su ključne upute za učenike poveži i grafički prikaži.

Algebra kao proučavanje struktura

Učenje algebre na visokoškolskoj razini uključuje proučavanje algebarskih struktura kao što su grupe, prstenovi, polja i vektorski prostori. Na prvi pogled, čini se da nema puno sličnosti s algebrom koja se uči u srednjoj školi. Međutim, polja realnih i kompleksnih brojeva te različiti prstenovi polinoma predstavljaju dobru podlogu za teoriju algebre, dok svojstva grupa objašnjavaju zašto se neke jednadžbe mogu riješiti, a druge ne. Algebru prepoznajemo kao proučavanje struktura kroz svojstva koja pripisujemo operacijama nad realnim brojevima i polinomima. Promotrimo sljedeći primjer: Faktoriziraj $3x^2 + 4ax - 132a^2$.

Pojam varijable u ovom primjeru tumačimo drugačije nego u prethodnim slučajevima. Ovdje ne razmatramo funkcije ili relacije, pa varijablu ne promatramo kao argument. Također, nema jednadžbe koja se rješava niti aritmetičkog uzorka koji se generalizira. Rješenje problema je: $(3x + 22a)(x - 6a)$.

U ovom kontekstu algebre, od učenika se očekuje da faktoriziraju zadani izraz. Često, u takvim zadacima, učenici tretiraju varijable kao oznake na papiru, bez pridavanja stvarnog značenja ili vrijednosti. Iako ne želimo da učenici uvijek razmišljaju o varijablama kao o konkretnim brojevima, važno je da razumiju kako varijable predstavljaju više od običnih simbola.

Cilj je da učenici koriste varijable s razumijevanjem njihove referentne vrijednosti, obično realnih brojeva, ali također da mogu računati s varijablama bez uvijek pozivanja na te vrijednosti. Na primjer, kada radimo s trigonometrijskim identitetima, ne želimo da učenici razmišljaju o sinusu i kosinusu određenog broja ili o funkcijama sinus i kosinus kao ni o omjerima u trokutu. Želimo na drugačiji način zapisati $\sin x$ i $\cos x$ koristeći svojstva koja su jednako apstraktna kao i identiteti koje želimo izvesti. U ovakvom pristupu algebri, upute za učenike su manipuliraj i opravdaj, a varijabla je objekt u strukturi povezanoj određenim svojstvima, što odražava način na koji se varijablama pristupa u apstraktnoj algebri.

2.2 Varijable i nepoznanice

Školska algebra je usko povezana s razumijevanjem simbola i njihovih operacija, a smatra se da učenici počinju učiti algebru kada se prvi put susreću sa slovima u matematici. Međutim, budući da je sam koncept zamjene broja slovom višeznačan, svođenje algebre na proučavanje simbola ne daje potpun odgovor na pitanje "što je školska algebra?". U nastavi matematike, apstraktni pojmovi poput varijabli i nepoznanica igraju ključnu ulogu u razvoju algebarskog mišljenja. Takvi koncepti predstavljaju izazov za učenike jer zahtijevaju pomak od konkretnih i vizualno shvatljivih pojmova prema apstraktnim i simboličkim reprezentacijama.

Postoje dva osnovna aspekta zamjene broja slovom u matematici koja se značajno razlikuju: varijable i nepoznanice. Varijable se mogu razumjeti kao vrijednosti koje se mijenjaju i koriste za izražavanje generalizacija u matematici, omogućujući istraživanje odnosa među brojevima i formuliranje općih matematičkih pravila. One ne označavaju specifičnu numeričku vrijednost, već generaliziraju skup brojeva na koje se svojstva primjenjuju. Nepoznanice, s druge strane, predstavljaju specifičnu vrijednost koju treba odrediti. Osim ovih osnovnih aspekata, slova u matematici mogu predstavljati i druge pojmove kao što su parametri, konstante i koeficijenti.

Razvoj zamjene broja slovom u nastavi započinje prikrivanjem broja u jednakosti, a zatim zamjenom broja znakom uz pitanje „s kojim brojem treba zamijeniti znak kako bismo dobili istinitu jednakost?“. Ovaj korak zahtjeva oslonac na relacijsko razumijevanje znaka jednakosti, koje se izgrađuje kroz razrednu nastavu s ciljem pomicanja učenika od operativnog doživljavanja znaka = kao upute „izvedi operaciju“.

Primjer 2.2.1.

$$2 + \square = 5 \qquad\qquad 7 - \square = -2$$
$$\square + 9 = 13 \qquad\qquad \square - 3 = 17$$

Uvođenje slova umjesto brojeva dolazi s predmetnom nastavom te potiče učenike na apstraktno razmišljanje i simboličku reprezentaciju matematičkih problema. Pritom je važno da shvate kako slova mogu jednostavno zamijeniti kvadratiće bez promjene suštine zadatka. Na ovaj način razvijamo koncept jednadžbe u školi.

Razmotrimo sljedeće jednadžbe, od kojih sve imaju isti oblik: umnožak dva broja jednak je trećem.

$$P = a \cdot b$$
$$40 = 5x$$
$$\sin x = \cos x \cdot \tan x$$
$$1 = n \cdot \frac{1}{n}$$
$$y = k \cdot x$$

Svaka od ovih matematičkih jednakosti ima različitu ulogu. Prva se obično naziva formulom, druga linearnom jednadžbom, treća identitetom, četvrta svojstvom, a peta jednadžbom linearne funkcije. Ovi različiti nazivi odražavaju raznolike načine na koje se koristi koncept slova u matematici. U prvoj jednakosti, odnosno formuli, P, a i b predstavljaju površinu, duljinu i širinu te se smatraju poznatim vrijednostima. U drugoj, linearnoj jednadžbi, x je nepoznanica koju treba odrediti. U identitetu, x je argument funkcije. Četvrta jednakost, za razliku od ostalih, generalizira aritmetički uzorak. U petoj jednadžbi, x je ponovno argument funkcije, y je vrijednost, a k je konstanta (ili parametar, ovisno o uporabi). Samo kod pete jednadžbe postoji osjećaj „varijabilnosti“, odakle i dolazi termin varijabla. Ipak, taj osjećaj nestaje ako tu jednadžbu smatramo jednadžbom pravca s nagibom k ([21]).

2.3 Algebarski izrazi

Matematički izrazi koji uključuju kombinacije brojeva, varijabli i aritmetičkih operacija nazivaju se algebarski izrazi. Ovi izrazi ne samo da omogućuju opisivanje matematičkih problema, već i pružaju alat za manipulaciju nepoznatim veličinama. Uvođenjem varijabli u nastavi matematike, učenici se postupno upoznaju s konceptom algebarskih izraza koji ih prati kroz cijelo osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. U petom i šestom razredu osnovne škole uče izračunavati vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza za zadane vrijednosti, a u sedmom i osmom razredu uče opisivati monome i binome te postupke pojednostavljivanja izraza. Poseban naglasak na rad s algebarskim izrazima stavlja se u prvom razredu srednje škole, gdje se nastavlja s obradom algebarskih izraza i operacijama nad njima te se uvode algebarski razlomci.

Algebarske izraze možemo klasificirati prema broju članova koje sadrže. Monom je najjednostavniji oblik algebarskog izraza, koji se sastoji od jednog člana i predstavlja produkt konstante i varijable, na primjer $3x$ ili $7ab$. Binom se sastoji od dva člana povezana operacijama zbrajanja ili oduzimanja, kao što su $-17x+29$ ili x^3y+xy. Polinom je složeniji oblik algebarskog izraza te uključuje operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja, primjerice $2x^3 + 9x^2$ ili $y^3 + xy^2 - x^2$. Polinome dijelimo na one s jednom varijablom i one s više varijabli, ovisno o broju varijabli koje sadrže. Poseban oblik algebarskih izraza su algebarski razlomci, gdje su brojnik i nazivnik također algebarski izrazi. Njih u ovom radu nećemo pokrivati, već ćemo se fokusirati na generaliziranu aritmetiku bez dijeljenja.

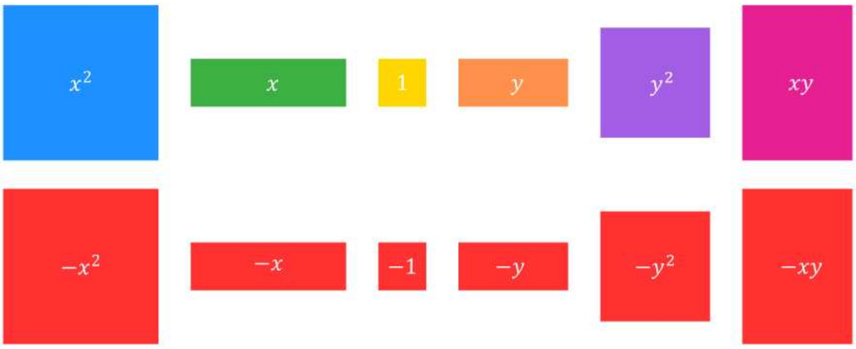
Algebarski izrazi dobivaju specifične numeričke vrijednosti ako se varijable zamijene brojevima i provedu računske operacije naznačene simbolima. Taj rezultat nazivamo vrijednošću algebarskog izraza. Uvrštavanjem različitih brojeva umjesto varijabli, dobivamo različite vrijednosti algebarskog izraza. Iako toga možda nisu svjesni, učenici se s algebarskim izrazima susreću kroz razne formule koje koriste tijekom obrazovanja, kao što su formule za izračunavanje opsega, površine i volumena.

Formalno, algebarski izraz je polinom u više varijabli te skup svih polinoma s operacijama zbrajanja i množenja čini komutativni prsten s jedinicom. U ovom radu fokusiramo se na način kako se koncept algebarskog izraza gradi kod učenika u osnovnoj i srednjoj školi, dok se u matematičkoj literaturi može pronaći apstraktni pristup.

2.4 Algebarske pločice

Algebarske pločice su vrlo učinkovit vizualni i manipulativni alat koji olakšava reprezentaciju operacija s algebarskim izrazima te učenicima pruža priliku za poboljšanje njihovih vještina u algebri. Većina učenika će koncept algebarskog izraza lakše shvatiti i usvojiti korištenjem konkretnih primjera prikazanim algebarskim pločicama pomoću kojih mogu zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, pojednostavljivati i faktorizirati algebarske izraze, tj.

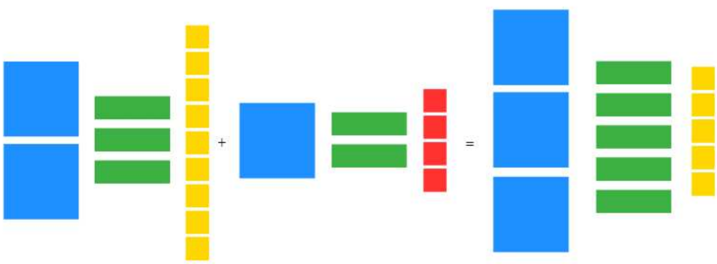
algebarske operacije prikazati geometrijski. Ove dvodimenzionalne pločice temelje se na modelu površine te se koriste za reprezentaciju varijabli i konstanti. Standardni skup algebarskih pločica sastoji se od četiri boje: plave, zelene, žute i crvene. Plava pločica predstavlja kvadrat površine x^2, zelena pločica predstavlja pravokutnik površine x, dok žuta pločica predstavlja kvadratnu pločicu jedinične površine i predstavlja broj 1. Te pločice simboliziraju pozitivne vrijednosti, dok crvene pločice predstavljaju negativne vrijednosti. U kasnijim fazama uvode se i druge pločice, omogućujući rad s algebarskim izrazima s više varijabli. Boje i oblici različitih algebarskih pločica prikazani su na sljedećoj slici. 2.1



Slika 2.1: Algebarske pločice

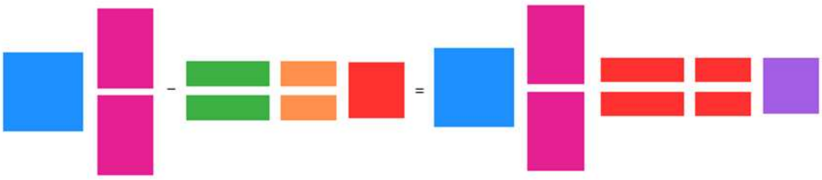
Prikazat ćemo kako se algebarske pločice koriste za zbrajanje i oduzimanje algebarskih izraza.

$$(2x^2 + 3x + 9) + (x^2 + 2x - 4) = 3x^2 + 5x + 5$$



Slika 2.2: Zbrajanje algebarskim pločicama

$$(x^2 + 2xy) - (2x + 2y - y^2) = x^2 + 2xy - 2x - 2y + y^2$$



Slika 2.3: Oduzimanje algebarskim pločicama

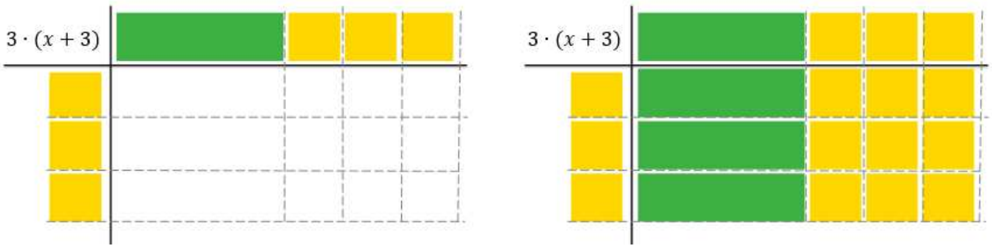
Jedna od čestih miskoncepcija učenika je pogrešno pojednostavljivanje algebarskih izraza, primjerice, zapisuju $3x + 2x = 5x^2$ ili $2x + 2y = 4xy$. Algebarske pločice omogućuju učenicima da fizički manipuliraju članovima izraza, što smanjuje učestalost ovih pogrešaka jer se oslanjaju na vizualne prikaze.

Za izvođenje složenijih algebarskih operacija, poput množenja binoma, koristi se predložak nalik tablici množenja koji nam pomaže pravilno postaviti i organizirati pločice na odgovarajuća mjesta.

Slika 2.4: Primjer predložka

Množenje algebarskih izraza možemo interpretirati kao računanje površine pravokutnika pri čemu su stranice duljina danih algebarskih izraza. Algebarske izraze množimo tako da uz vertikalnu os predloška postavimo pločice koje predstavljaju prvi faktor u umnošku, a uz horizontalnu os predloška pločice koje predstavljaju drugi faktor u umnošku. Na taj način, faktori definiraju duljine stranica pravokutnika. Zatim algebarskim pločicama popunjavamo prostor unutar pravokutnika. Kako bismo dobili traženi umnožak, računamo površinu pravokutnika zbrajanjem svih pločica od kojih je sastavljen dobiveni pravokutnik. Kako bi učenici pravilno rasporedili pločice na danom predlošku mogu nacrtati mrežu koja im olakšava vizualizaciju i postavljanje pločica na odgovarajuća mjesta. Pokažimo to na primjeru.

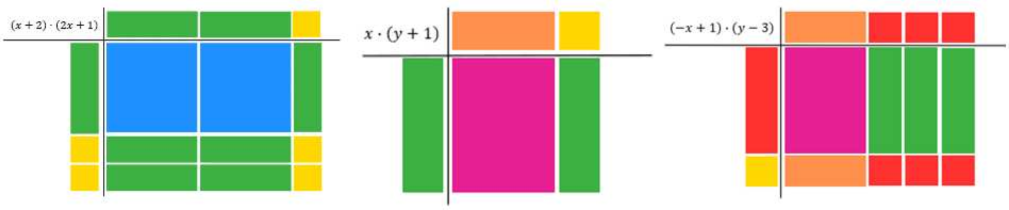
$$3 \cdot (x+3) = 3x + 9$$



Slika 2.5: Množenje algebarskim pločicama

Iz slike primjećujemo da smo površinu pravokutnika stranica duljina 3 i $x+3$ popločili s 3 pravokutnika površine x i 9 jediničnih kvadrata pa je rješenje $3 \cdot (x+3) = 3x+9$. Također primijetimo da broj pločica korištenih za popločavanje odgovara koeficijentima u rezultirajućem izrazu.

Na sljedećoj slici 2.6 prikazani su još neki primjeri kako algebarskim pločicama možemo vizualizirati množenje algebarskih izraza.



Slika 2.6: Množenje algebarskim pločicama

Poglavlje 3

Matematičke poteškoće

Učenje matematike može predstavljati značajan izazov za mnoge učenike, osobito kada se suočavaju s apstraktnim konceptima. U literaturi o matematičkom obrazovanju često se koriste izrazi poput poteškoća, pogrešaka i miskoncepcija kako bi se opisali različiti problemi koji se pojavljuju tijekom usvajanja matematičkih sadržaja. Poteškoće su opći pojam koji obuhvaća sve vrste izazova s kojima se učenici susreću, uključujući i pogreške te miskoncepcije.

U ovom poglavlju analizirat ćemo razlike između konceptualnog i proceduralnog znanja te kako nedostatak u jednom ili oba područja može dovesti do poteškoća u učenju matematike. Također ćemo se osvrnuti na specifične pogreške i miskoncepcije koje se pojavljuju pri radu s cijelim brojevima i algebarskim izrazima. Razumijevanje ovih izazova ključno je za razvoj učinkovitih nastavnih strategija koje mogu pomoći učenicima u njihovom prevladavanju.

3.1 Konceptualno i proceduralno znanje u učenju matematike

Jedan od ključnih aspekata matematičkog obrazovanja je razumijevanje razlike između konceptualnog i proceduralnog znanja. Konceptualno znanje omogućava učenicima da shvate matematičke ideje i odnose među njima, dok proceduralno znanje obuhvaća korake i algoritme potrebne za rješavanje matematičkih zadataka. Iako su ova dva oblika znanja usko povezana i zajedno doprinose dubljem matematičkom razumijevanju, svaki od njih ima svoju specifičnu ulogu u procesu učenja i primjene matematičkih koncepata.

Ideja o različitim vrstama matematičkog znanja potječe iz ranih radova u području kognitivne psihologije i obrazovanja. Richard Skemp je prvi uveo pojmove instrumentalnog i relacijskog znanja. Instrumentalno znanje odnosi se na poznavanje pravila i procedura bez dubljeg razumijevanja razloga zašto ta pravila funkcioniraju. Relacijsko znanje, s druge strane, podrazumijeva razumijevanje matematičkih odnosa i principa koji stoje iza tih pravila. [18]

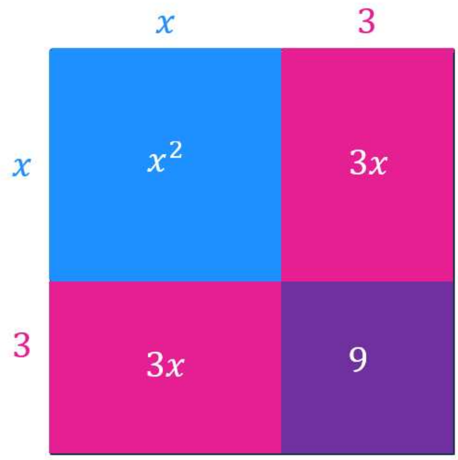
Nastavljajući na ovu podjelu, Hiebert i Lefevre [8] uvode klasifikaciju matematičkog znanja na konceptualno i proceduralno, opisujući ih na sljedeći način:
Konceptualno znanje karakterizira se kao znanje bogato u odnosima. Možemo ga shvatiti kao mrežu znanja koja povezuje odvojene dijelove informacija. Ti su odnosi prožeti pojedinačnim činjenicama i pravilima tako da smisleno umrežavaju sve dijelove informacija.
Proceduralno znanje sastoji se od dva različita dijela. Prvi dio odnosi se na formalni jezik, odnosno uporabu matematičkih simbola. Drugi dio proceduralnog znanja sastoji se od pravila i algoritama kojima se rješava matematički zadatak. To su korak-po-korak upute koje propisuju kako riješiti zadatak. Ključna značajka tih postupaka je da se provode unaprijed određenim linearnim slijedom.

Iako se u današnjem obrazovnom kontekstu često naglašava važnost razumijevanja matematike iznad čiste primjene procedura, često se susrećemo s praksom koja ipak više naglašava proceduralno razumijevanje.

Interakcija između konceptualnog i proceduralnog znanja ima ključnu ulogu u matematičkom obrazovanju. Matematičko znanje, u svojem punom smislu, obuhvaća temeljne odnose između konceptualnog i proceduralnog znanja. Učenici nisu u potpunosti kompetentni u matematici ako je bilo koji od ovih tipova znanja nedostatan ili ako su oba stečena, ali ostaju odvojene cjeline. Kada koncepti i postupci nisu povezani, učenici mogu imati dobar intuitivni osjećaj za matematiku, ali ne uspijevaju rješavati probleme ili mogu generirati odgovore, ali ne razumjeti što rade ([8]). Sposobnost pravilnog izvođenja postupaka nesumnjivo je ključna komponenta uspjeha u matematici, no učenici koji razviju samo proceduralno znanje često se mogu osjećati nesigurno kada se suoče s netipičnim problemima ili kada pokušavaju primijeniti svoje znanje u novim kontekstima. S druge strane, učenici s jakim konceptualnim znanjem imaju bolje temelje za razumijevanje novih matematičkih ideja i fleksibilniji su u rješavanju problema.

Da bismo razumjeli razliku između proceduralnog i konceptualnog razumijevanja, možemo promotriti primjer algebarskih izraza. Proceduralni pristup učenju algebarskih izraza fokusira se na manipulaciju izrazima i primjenu pravila za rješavanje zadatka. Na primjer, učenik može znati pravila proširivanja izraza i primijeniti ih na konkretne primjere bez dubljeg razumijevanja zašto su ta pravila ispravna. Tako učenici mogu koristiti formulu za kvadrat zbroja $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i primijeniti je za pojednostavljivanje izraza poput $(x + 3)^2$.

S druge strane, konceptualni pristup potiče učenike da razumiju zašto i kako određene algebarske operacije funkcioniraju. To može uključivati geometrijsku interpretaciju algebarskih izraza. Kroz konceptualno razumijevanje, učenici razvijaju dublje znanje koje im omogućuje primjenu naučenih koncepata u različitim situacijama i problemima, umjesto da se oslanjaju isključivo na memorizaciju postupaka. Na primjer, izraz $(x + 3)^2$ može se geometrijski interpretirati kao površina kvadrata s duljinom stranice $x + 3$.



Slika 3.1: Geometrijska interpretacija algebarskog izraza $(x + 3)^2$

Važno je naglasiti da oba tipa znanja imaju svoje mjesto u nastavi matematike i da su međusobno povezana. Učenici moraju postići ravnotežu između konceptualnog razumijevanja i proceduralne točnosti u svim područjima matematike. Proceduralna točnost potrebna je kako bi učenici radili učinkovito i precizno, dok je konceptualno razumijevanje ključno za povezivanje, opravdavanje i provjeru matematičkih postupaka ([2]).

3.2 Pogreške i miskoncepcije

Pogreške u učenju matematike mogu nastati iz raznih razloga. Neke su rezultat nepažnje, krivog tumačenja simbola ili teksta, dok druge proizlaze iz nerazumijevanja zadatka, pogrešaka u pretvaranju problemske situacije u matematički problem, korištenja neadekvatnih operacija ili računskih pogrešaka. Ponekad učenici naprave pogrešku koja ukazuje na neispravno razumijevanje matematičkih koncepata, što nazivamo miskoncepcijama.

Razumijevanje načina na koji učenici uče matematiku ključno je za prepoznavanje pogrešaka i miskoncepcija te prilagodbu poučavanja. Učenici dolaze u učionicu s određenim predznanjem koje može, ali i ne mora biti ispravno. Takvo prethodno znanje nazivamo predkoncepcijama i ono proizlazi iz osobnog iskustva ili prethodnog učenja, igrajući ključnu ulogu u oblikovanju njihovog učenja. Ako su predkoncepcije ispravne, one omogućuju nadogradnju znanja, dok netočne predkoncepcije mogu dovesti do razvoja miskoncepcija.

Iako su pogreške i miskoncepcije povezane, one se razlikuju. Višestruke pogreške mogu rezultirati miskoncepcijama koje ukazuju na konceptualno nerazumijevanje, a miskoncepcije pak mogu dovesti do višestrukih pogrešaka.

Pogreške su proceduralne prirode i obično nastaju zbog nepažnje, nedostatka vježbe ili nesigurnosti u primjeni pravila. One su povezane s proceduralnim razumijevanjem te su obično lako uočljive u učeničkim radovima i ispravljive kroz dodatnu praksu i povratne informacije. Manje pogreške, koje često nazivamo omaškama ili propustima, također spadaju u ovu kategoriju.

S druge strane, miskoncepcije su pogrešna shvaćanja koja se javljaju kada učenici imaju iskrivljeno ili nepotpuno razumijevanje matematičkih koncepata. One su povezane s konceptualnim razumijevanjem matematičkog pojma i često su jednostavna, iako netočna objašnjenja koja učenici lakše i brže usvajaju, ali mogu postati duboko ukorijenjena, otežavajući ispravljanje i promjenu.

TIPIČNA POGREŠKA	TIPIČNA MISKONCEPCIJA
Slučajna pogreška u računu $-7 + 5 = -3$ umjesto -2	Vjerovanje da je zbroj uvijek veći od bilo kojeg pribrojnika $-7 + 5 = 12$

Tablica 3.1: Tipična pogrešaka i miskoncepcija

Prepoznavanje i ispravljanje miskoncepcija ključno je za osiguranje uspjeha učenika u matematici. Da bi nastavnici mogli učinkovito ispraviti miskoncepciju, moraju je najprije prepoznati. Stoga ćemo dati pregled najčešćih miskoncepcija koje se javljaju pri radu s cijelim brojevima i algebarskim izrazima. Za adresiranje miskoncepcija korisne su različite aktivnosti formativnog vrednovanja koje imaju za cilj otkrivanje i ispravljanje zabluda. No, miskoncepcije se ponekad mogu pojaviti i u točnim odgovorima kada su točni odgovori slučajni. Zato je važno je potaknuti diskusiju s učenicima, pažljivo slušati i analizirati njihove odgovore kako bi pravilno razumjeli njihovo razmišljanje i pratili njihove zaključke.

Jednom kada je miskoncepcija identificirana, nastavnici trebaju popuniti praznine u znanju koristeći različite didaktičke modele. Primjeri takvih modela za cijele brojeve i algebarske izraze opisani su u prethodnim poglavljima. Ključno je da ispravljanje bude pravovremeno i prilagođeno specifičnim potrebama učenika. Nakon ispravljanja miskoncepcije, nastavnik treba procijeniti razumijevanje učenika. To se može postići postavljanjem dodatnih pitanja sličnih originalnim ili traženjem od učenika da ponovno objasne koncept. Ako se zabluda i dalje javlja, potrebno je dodatno istražiti praznine u znanju i prilagoditi metode podučavanja kako bi se osiguralo potpuno razumijevanje.

Prepoznavanje i ispravljanje miskoncepcija ne samo da poboljšava matematičko razumijevanje učenika, već osigurava njihov dugoročni uspjeh u učenju matematike.

Miskoncepcije vezane uz cijele brojeve

Razumijevanje cijelih brojeva često predstavlja izazov za učenike, posebice u kontekstu operacija i uspoređivanja. U istraživanju o miskoncepcijama vezanim uz cijele brojeve 83.3% ispitanika pokazalo je da ima miskoncepcije, dok 16.7% pokazuje proceduralne pogreške [10]. Prema istraživanjima [10, 7], izdvojit ćemo ključne miskoncepcije koje učenici imaju u radu s cijelim brojevima.

U oba istraživanja pokazalo se da **uspoređivanje cijelih brojeva** često predstavlja problem učenicima. Iako učenici obično nemaju problema s uspoređivanjem pozitivnih brojeva i znaju da su negativni brojevi manji od pozitivnih, izazov nastaje kada trebaju usporediti dva negativna broja. Učenici često koriste svoje prethodno znanje gdje su naučili da je 9 veće od 3, pa stoga pogrešno vjeruju da je -9 veće od -3.

Pri **zbrajanju cijelih brojeva**, učenici imaju tendenciju zbrajati brojeve bez obzira na njihove predznake. Ako je jedan od brojeva negativan, pretpostavljaju da će i rezultat biti negativan. Slično tome, ako su oba broja negativna, pogrešno misle da će rezultat biti pozitivan. Ova miskoncepcija proizlazi iz činjenice da su učenici navikli na pravila zbrajanja pozitivnih brojeva te vjeruju da je zbroj uvijek veći od oba pribrojnika. Međutim, ta pravila ne vrijede kada zbrajamo cijele brojeve.

Na primjer, kod zbrajanja $-5 + 2$ neki učenici zaključuju da je rezultat -7 ili potpuno zanemare negativan predznak i daju rezultat 7. Slično tome, kod zbrajanja $-4 + (-2)$, učenici daju rezultat 6, često objašnjavajući to i kao ”minus i minus daju plus” što nam pokazuje da učenici pogrešno tumače pravila množenja negativnih brojeva.

Prilikom adresiranja miskoncepcija **oduzimanja cijelih brojeva**, uočeno je mnoštvo različitih netočnih odgovora u svakom zadatku. Ovo ukazuje na nesposobnost učenika da pravilno tumače matematičke izraze, nedostatak razumijevanja osnovnih koncepta i vjerojatnu zbunjenost pravilima oduzimanja. Učenici često samo promatraju operaciju oduzimanja između brojeva i oduzimaju manji broj od većeg, bez obzira na predznake. Osim toga, određivanje predznaka rezultata predstavlja poseban izazov. Uočeno je da nema jasne metode ili pravila koje učenici slijede prilikom određivanja predznaka rezultata, što dovodi do čestih pogrešaka.

Najniži rezultati, prema [7] postignuti su na zadatku $0-(-4)$ gdje su učenici često davali odgovor -4 ili 0. Ovo može biti posljedica intuicije da je nemoguće oduzeti negativni broj od nule.

Primjećuje se da učenici imaju značajne poteškoće prilikom oduzimanja dva negativna broja. Na primjer, izraz $-6 - (-4)$ rezultirao je mnogim netočnim odgovorima, kao i izraz $-2 - (-5)$. Najčešći netočni odgovori su -10 i -7 zbog tumačenja i računanja izraza $-6 - (-4)$ kao $-(6 - (-4)) = -(6 + 4)$, što su neki učenici objasnili kao ”dva minusa čine plus, pa je $6 + 4 = 10$, a minus ispred daje odgovor minus”. Isto objašnjenje dano je za drugi primjer.

Množenje cijelih brojeva također predstavlja izazov za učenike. Učenici često kao rezultat daju točan broj, ali pogrešan predznak. Na primjer, za zadatak $-2 \cdot -7$ mnogi učenici dali su odgovor -14. Ovo ukazuje na to da mnogi učenici ne vladaju pravilima o predznacima.

Usporedba podataka pokazuje da mnogi učenici imaju više poteškoća s oduzimanjem cijelih brojeva od zbrajanja i množenja. Oduzimanje koje uključuje negativne brojeve pruža više mogućnosti za pogrešno tumačenje i stoga veći raspon netočnih odgovora. Također, ovi podaci ukazuju na značajnu potrebu za poboljšanjem poučavanja ovih koncepata kako bi se smanjile pogreške i miskoncepcije. Prema [10] ističe se da se miskoncepcije često javljaju zbog nedostatka konceptualnog razumijevanja i preuranjene uporabe kalkulatora. Učenici koji se oslanjaju na kalkulatore često ne razvijaju razumijevanje operacija s negativnim brojevima, što dovodi do proceduralnog, a ne konceptualnog razumijevanja.

Istaknimo još da prema istraživanju [7], učenici koji koriste model neutralizacije, poznat kao model toplih i hladnih žetona, za učenje cijelih brojeva postižu bolje rezultate u kratkoročnim i dugoročnim vještinama rada s negativnim brojevima u usporedbi s učenicima koji su poučavani modelom brojevnog pravca. Eksperimentalna skupina, koja je koristila model toplih i hladnih žetona, postigla je bolje rezultate prilikom rješavanja svih tipova zadataka.

Miskoncepcije vezane uz algebarske izraze

Mnogi učenici imaju problema s razumijevanjem koncepta varijable čim se uvede u nastavu, koristeći slova u algebri bez stvarnog razumijevanja njihovog značenja. Prema radovima [1, 19], opisat ćemo miskoncepcije koje se javljaju u radu s algebarskim izrazima. Pri prvom susretu s algebarskim konceptima učenici svoja početna tumačenja slova i algebarskih izraza temelje na intuiciji, nagađanju ili analogijama s drugim sustavima simbola koje poznaju. Primjerice, izraz $17m$ tumače kao 17 metara, umjesto kao 17 puta broj m. Pretpostavljaju da slovo b ima vrijednost 2 jer je b drugo slovo abecede, ili vjeruju da, ako žele prikazati neku veličinu poput sati, moraju koristiti slovo h. Uobičajene miskoncepcije uključuju i vjerovanja da jedno slovo može predstavljati samo jedan određeni broj, da različita slova moraju predstavljati različite brojeve ili da slova mogu predstavljati samo cijele brojeve. Smatraju da je nemoguće da $a + b$ bude jednako $a + c$ jer slova nisu ista. U izrazima poput $3x - 7$, misle da x mora biti cijeli broj jer se u izrazu nalaze samo cijeli brojevi.

Ove miskoncepcije jasno ukazuju na manjak razumijevanja pojma varijable. Nastavnici koji razumiju da ova prethodna razumijevanja ometaju učenje algebre te prepoznaju ove poteškoće mogu odmah intervenirati i ispraviti učenike, ili čak preventivno objasniti ove pogreške kako bi ih izbjegli.

Prevođenje algebarskih izraza iz svakodnevnog jezika u simbole i obrnuto također predstavlja izazov učenicima. Važno je da učenici ovladaju prevođenjem svakodnevnog jezika u matematički zapis simbolima, ali i obrnutim procesom. Prevođenje algebarskih izraza iz riječi u simbole djelomično se oslanja na proceduralni pristup, pri čemu nastavnici obično učenicima daju popis ključnih riječi koje ukazuju na različite matematičke operacije. Na primjer, izraz "za pet veći" predstavlja zbrajanje s 5, „za pet manji" predstavlja oduzimanje s 5, "pet puta veći" predstavlja množenje s 5, "peterostruko manji" predstavlja dijeljenje s 5. Međutim, jedna od najčešćih pogrešaka koju učenici čine je zamjena algebarskog izraza "oduzmi broj od 7" za "oduzmi 7 od broja". Ovaj problem često nastaje zbog redoslijeda riječi u izrazu jer učenici automatski zapisuju onako kako čitaju pa "oduzmi broj od 7" mnogi netočno zapišu kao $x - 7$ umjesto $7 - x$. Zbog toga je bitno da nastavnici naglase važnost čitanja s razumijevanjem te potaknu učenike da uvijek provjere algebarski izraz kako bi se uvjerili da odgovara značenju teksta.

Nerazumijevanje pojma istoimenih izraza je još jedna česta miskoncepcija. Učenici često pogrešno pojednostavljuju izraze poput $3c + 7d$ kao $10cd$ ili $8x + 6$ kao $14x$.

Umjesto množenja, često zbrajaju članove, što pokazuje netočno primjenjivanje prethodno naučenih procedura. Na primjer, umjesto da ispravno pomnože $4m \cdot m$ i dobiju $4m^2$, učenici rezultat zapišu kao $5m$.

Često se događa da učenici pogrešno primjenjuju pravilo distribucije. Primjeri takvih pogrešaka uključuju izraze poput $2(3a + 4) = 6a + 4$ ili $(2m - n) + n = 2mn - n^2$.

Također, učenici pogrešno množe binome tako da kvadriraju prvi i zadnji član. Na primjer, izraz $(x + 2)^2$ često pojednostavljuju kao $x^2 + 4$, što je netočno.

Problemi s radom s cijelim brojevima i nerazumijevanje operacija također su česti. U prethodno spomenutom radu [7] testiralo se korištenje negativnih brojeva u algebarskim kontekstima. Mi ćemo izdvojiti one koji se odnose na algebarske izraze.

Učenici imaju poteškoće s evaluacijom algebarskih izraza. Najčešće pogreške uglavnom su posljedica nepravilnih operacija s cijelim brojevima. Ostale pogreške proizlaze iz pogrešnog tumačenja algebarskih izraza ili neopreznosti. Na primjer, za zadane $a = 2$, $b = -3$, $c = -4$, neki učenici su interpretirali izraz $-2c$ kao $-2 + c = -2 + -4$. Zamjenjivanje slova bez izvođenja operacija množenja rezultiralo je vrijednostima kao što su -234 za abc, -24 za $-2c$ i -323 za $3ab$.

Jedna od najčešćih pogreška kod proširivanja algebarskih izraza bila je izvođenje aritmetičke operacije prije proširivanja zagrada. Na primjer, $7 - 2(x + 3)$ često je pojednostavljeno kao $5(x + 3)$, što je zatim pojednostavljeno kao $5x + 15$. Učenici također imaju poteškoća s pravilnim primjenjivanjem pravila distribucije i operacija s cijelim brojevima. Na primjer, izraz $3(x-2y)-2(x-y)$ često je pogrešno pojednostavljen kao $x-7y$ ili $x-8y$.

Ovi primjeri jasno pokazuju da učenici imaju značajne miskoncepcije i proceduralne pogreške u radu s algebarskim izrazima, posebno kada su uključeni negativni brojevi. Kako bi se poboljšalo razumijevanje, važno je koristiti vizualne alate i konkretne primjere koji jasno prikazuju pravila i korake potrebne za pravilno izvođenje ovih operacija.

Poglavlje 4

Aktivnosti za adresiranje miskoncepcija

Nakon analize najčešćih pogrešaka i miskoncepcija koje se javljaju pri učenju cijelih brojeva i algebarskih izraza, važno je usredotočiti se na strategije i aktivnosti koje mogu pomoći učenicima u njihovom prevladavanju. Fokusiranje na interaktivne i praktične metode učenja ključno je za razumijevanje matematičkih koncepata. Uzevši to u obzir, predložit ćemo razne aktivnosti koje nastavnici mogu primijeniti kako bi adresirali i ispravili postojeće poteškoće te primjenom modela opisanih u prvom i drugom poglavlju ojačali temeljne matematičke vještine i konceptualno razumijevanje.

4.1 Cijeli brojevi

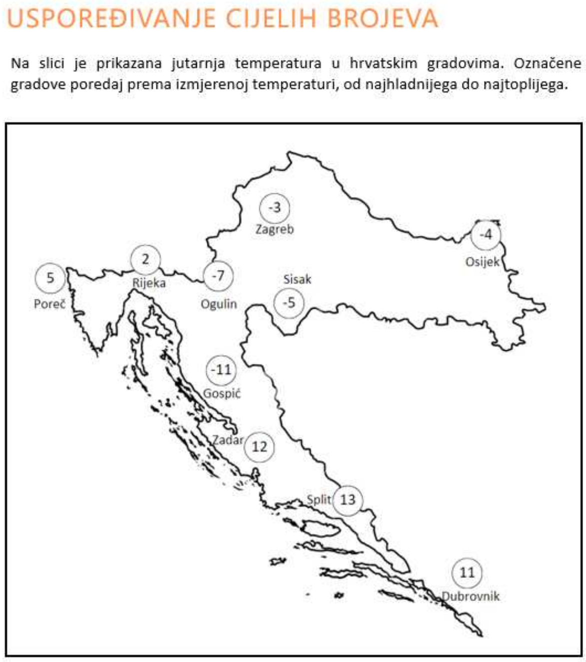
Uspoređivanje cijelih brojeva

AKTIVNOST 1. Temperaturna karta
Cilj aktivnosti: : Učenici će uspoređivati cijele brojeve na modelu karte koja prikazuje temperaturu zraka u različitim geografskim položajima.
Potrebni materijal: Nastavni listić *Temperaturna karta*

U prethodnom poglavlju detaljno smo opisali miskoncepcije učenika vezane uz uspoređivanje cijelih brojeva. Iako učenici često pravilno uspoređuju pozitivne cijele brojeve, susreću se s poteškoćama kada trebaju usporediti negativne brojeve. Kako bismo primijetili ove poteškoće, osmislili smo aktivnost koja za cilj ima adresiranje učeničkih miskoncepcija vezanih uz uspoređivanje cijelih brojeva s posebnim naglaskom na negativne brojeve.

Učenici će na nastavnom listiću samostalno poredati označene gradove prema izmjerenoj temperaturi, od najhladnijeg do najtoplijeg. Kako bismo osigurali raznolikost zadataka i primjera, možemo pripremiti različite karte s označenim temperaturama koje prikazuju i pozitivne i negativne vrijednosti. Nakon što učenici završe zadatak, provest ćemo diskusiju

tijekom koje će imati priliku objasniti svoje razloge za odabir određenog poretka gradova, čime se potiče kritičko razmišljanje i verbalizacija matematičkih odluka.
Pitanja koja možemo postaviti učenicima tijekom diskusije:
Koji grad je najhladniji? Koji je najtopliji?
U kojem gradu je niža temperatura, Ogulinu ili Zagrebu? Kolika je temperatura u tim gradovima? Zašto ste određeni grad postavili na određeno mjesto?



Slika 4.1: Nastavni listić *Temperaturna karta*

Ova aktivnost omogućava učenicima da prevladaju miskoncepcije o negativnim brojevima kroz praktičan i vizualan pristup. Redanje gradova prema temperaturama pruža im kontekst koji je blizak stvarnom životu, što dodatno olakšava razumijevanje. Kroz diskusiju, učenici ne samo da vježbaju svoje vještine uspoređivanja brojeva, već također uče kako verbalizirati i obraniti svoje matematičke odluke. Na ovaj način, jačaju svoje razumijevanje matematičkih koncepata i njihovu primjenu u svakodnevnim situacijama. Osim matematičkog znanja, kroz rad s kartama učenici razvijaju i svoje geografsko znanje te sposobnost povezivanja matematičkih koncepata s realnim svijetom. Ova integracija različitih područja znanja doprinosi cjelovitom obrazovanju i boljoj pripremljenosti učenika za buduće izazove.

Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva

AKTIVNOST 2. Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva
Cilj aktivnosti: Učenici će zbrajati i oduzimati cijele brojeve.
Potrebni materijal: Nastavni listić *Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva*

Jedan od osnovnih izazova učenja u osnovnoj i srednjoj školi je pravilno razumijevanje cijelih brojeva i operacija s njima, posebno zbrajanja i oduzimanja. Učenici često nailaze na poteškoće i razvijaju miskoncepcije koje ih mogu ometati u daljnjem učenju. Aktivnost *zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva* osmišljena je kako bi pomogla učenicima prevladati ove izazove kroz strukturiranu, interaktivnu metodu koja uključuje dijagnostička pitanja i diskusiju. Cilj ove aktivnosti je adresiranje učeničkih miskoncepcija vezanih uz zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva.

Aktivnost započinje podjelom nastavnih listića učenicima. Svaki učenik samostalno rješava listić koji sadrži devet pitanja s višestrukim izborom. Svako pitanje ima jedan točan odgovor i tri pažljivo odabrana netočna odgovora koja su osmišljena kako bi identificirala i istaknula temeljne miskoncepcije. Kada odgovaraju na ova pitanja, učenike treba poticati da objasne zašto su odabrali određeni odgovor i zašto su ostala tri odgovora netočna. To možemo učiniti usmeno u malim grupama ili pisanjem na nastavnom listiću.

Kroz rad u grupama i objašnjenje zašto su ostali odgovori netočni, učenici mogu prepoznati svoje pogreške i pogrešno zaključivanje. Također, kako bi prevladali miskoncepcije u zadacima s kojima imaju poteškoće, učenike možemo potaknuti na korištenje modela opisanih u prvom poglavlju. Vizualni prikazi, poput brojevnog pravca ili toplih i hladnih žetona, mogu im pomoći da bolje razumiju zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva.

Dijagnostička pitanja omogućuju nastavnicima brzo i efikasno procjenjivanje znanja i razumijevanja učenika o specifičnoj temi. Ova pitanja su pažljivo osmišljena kako bi ne samo provjerila točnost odgovora, već i omogućila nastavniku identifikaciju specifičnih miskoncepcija koje učenici mogu imati. Na primjer, kada učenik odabere netočan odgovor, nastavnik može odmah uočiti o kojoj se miskoncepciji radi, bilo da je riječ o pogrešnom razumijevanju pravila operacija ili o netočnom radu s negativnim brojevima. Ova saznanja omogućuju nastavniku da ciljano intervenira i dodatno objasni koncepte koji učenicima stvaraju poteškoće.

ZBRAJANJE I ODUZIMANJE CIJELIH BROJEVA

Izračunajte i odaberite točan odgovor

$-5+2$	a. -7	b. -3	c. 3	d. 7
$-4+(-2)$	a. -2	b. -6	c. 2	d. 6
$8+(-8)$	a. -16	b. 16	c. 8	d. 0
$-2-(-5)$	a. -7	b. 3	c. 7	d. -3
$-6-(-4)$	a. -2	b. -10	c. 10	d. 2
$-3-(-3)$	a. -6	b. 0	c. -3	d. 6
$8-(-6)$	a. -2	b. -14	c. 2	d. 14
$0-(-4)$	a. -4	b. 4	c. 0	d. 2
$-3+(-5)$	a. -2	b. -8	c. 2	d. 8

Slika 4.2: Nastavni listić *Zbrajanje i oduzimanje cijelih brojeva*

Množenje cijelih brojeva

AKTIVNOST 3. Minus i minus daju plus
Cilj aktivnosti: Učenici će dati objašnjenje za pravilo „minus i minus daju plus“.
Potrebni materijal: olovka i papir, ploča i online alati za dijeljenje odgovora

Učenici u srednju školu dolaze s puno znanja koje su stekli tijekom osnovne škole. Dio tog matematičkog znanja treba prilagoditi i učiniti preciznijim. Jedan primjer toga je pravilo „minus i minus daje plus” koje učenici često koriste kada izvode matematičke operacije koje uključuju negativne brojeve. Unatoč poznavanju ovog pravila ili možda upravo zbog neprecizne formulacije samog pravila, nastavnici često primjećuju da učenici imaju poteškoća s računanjem kada su u pitanju negativni brojevi te da učenici pogrešno primjenjuju ovo pravilo jer im nije očito da se ono odnosi na množenje.

Kako bismo pomogli učenicima da bolje razumiju ovo pravilo opisat ćemo aktivnost koja je provedena u Danskoj u sklopu projekta TIME [20] pod nazivom „Minus and minus gives plus: Making sense of a principle learnt by heart". Aktivnost je provedena u prvom razredu srednje škole s ciljem da učenici bolje razumiju negativne brojeve i množenje koje uključuje negativne brojeve.

Aktivnost je započela provjerom sposobnosti učenika za računanje s negativnim brojevima kroz zadatke poput $3+(-5)$, $3\cdot(-5)$ i $(-3)\cdot(-5)$. Nakon toga, nastavnik je učenicima predao problem: „Prisjećamo se aritmetičkog pravila iz osnovne škole da *minus i minus daju plus*. Što to zapravo znači? Kako biste objasnili zašto je to tako?" Učenici su trebali sami pronaći objašnjenje za pravilo „minus i minus daju plus" i dati argument zašto to pravilo funkcionira. Učenici su potom raspravljali o problemu i unosili svoje prijedloge u OneNote kako bi njihova razmatranja bila vidljiva nastavniku i drugim učenicima, a predstavnici odabranih grupa prezentirali su svoj rad dok su ostali učenici slušali i postavljali pitanja.

Analiza odgovora pokazala je da učenici prilikom rada s cijelim brojevima nisu koristili modele, već su se oslanjali na kalkulator. Većina grupa koristila je CAS (Computer Algebra System) alate za izvođenje računa, dok su neki pokušavali koristiti te alate za grafička objašnjenja, ali su imali poteškoća s davanjem jasnih objašnjenja. Neki učenici su koristili usmene argumente ili primjere, poput: „Ne ne odmarati se isto je kao odmarati se". Tijekom aktivnosti moglo se primijetiti da učenici nisu osjećali potrebu za dodatnim argumentom zašto množenje dva negativna broja daje pozitivan rezultat. Oni su to prihvaćali kao nešto što znaju od prije. Za većinu njih bilo je dovoljno što su računajući kalkulatorom potvrdili pravilo na nekoliko primjera, dok su neki opravdavali pravilo pozivajući se na svog učitelja u osnovnoj školi kao izvor istine.

Ova aktivnost može se provesti na različite načine, ovisno o kontekstu i dostupnim resursima. U Danskoj su se učenici oslanjali na tehnologiju, dok se u drugim kontekstima može naglasiti korištenje modela za objašnjavanje. U prvom poglavlju formalno smo dokazali da minus puta minus daje plus, ali smo također uveli konkretne modele za vizualizaciju množenja cijelih brojeva, poput premotavanja videa unazad i prikaza pravokutnika. Sada očekujemo da učenici pruže alternativne dokaze i argumentaciju koristeći ove modele.

4.2 Algebarski izrazi

Prevođenje algebarskih izraza

AKTIVNOST 4. Algebarski izrazi
Cilj aktivnosti: Učenici će prelaziti iz prikaza algebarskih izraza riječima u simbole i obratno.
Potrebni materijal: Nastavni listić *Algebarski izrazi*

Jedan od ključnih aspekata učenja algebre u osnovnoj i srednjoj školi je sposobnost prevođenja algebarskih izraza iz prikaza riječima u simbole i obrnuto. Učenici često nailaze na poteškoće u razumijevanju i pravilnom zapisu ovih izraza zbog različitih miskoncepcija. Aktivnost *algebarski izrazi* osmišljena je kako bi pomogla učenicima da prevladaju te izazove kroz strukturiran, dvosmjerni pristup koji uključuje prevođenje izraza zadanih riječima u simbole i obratno.

Aktivnost je podijeljena u dva dijela. Prvi dio se fokusira na prevođenje izraza zadanih riječima u algebarske izraze, dok se drugi dio fokusira na prevođenje algebarskih izraza u izraze riječima. Nastavnik aktivnost može započeti s kratkim objašnjenjem važnosti razumijevanja prevođenja izraza riječima u algebarske izraze i obrnuto te na ploči prikazati nekoliko primjera kako bi učenici dobili osnovnu ideju o zadatku koji ih čeka. Nakon toga, svakom učeniku podijeli nastavni listić koji rješava samostalno. Primjeri izraza mogu uključivati jednostavne operacije, kao i složenije izraze koji zahtijevaju pravilno postavljanje zagrada.

Nakon što završe s rješavanjem listića, nastavnik vodi zajedničku diskusiju o svakom zadatku, a učenici dijele svoja rješenja i objašnjavaju svoje postupke.

Očekujemo da će neki učenici izraze krivo zapisati simbolima jer često zapisuju izraze kako čitaju (s lijeva na desno), ne pokazujući razumijevanje redoslijeda operacija koji je impliciran ili mogu pogrešno postaviti zagrade, što može rezultirati netočnim rješenjima.

Razgovor između nastavnika i učenika može biti ključan za razjašnjavanje nesporazuma i učenje preciznog izražavanja algebarskih izraza. Kroz dijalog, učenici mogu razviti bolje razumijevanje kako verbalizirati matematičke izraze na način koji je jasan i nedvosmislen. Na primjer, prilikom provjere zadnjeg zadatka u drugom dijelu aktivnosti moguće je da učenici krivo verbaliziraju zadani matematički izraz. Očekivani odgovor učenika je: „tri plus n podijeljeno s 2." Nastavnik tada na ploču piše izraz $\frac{3+n}{2}$ i pita učenike kako bi onda pročitali ovaj izraz. Očekuje se isti odgovor: „Tri plus n podijeljeno s dva, ali u drugom izrazu sve dijelimo s dva." Nastavnik tada može učenicima dati uputu da pokušaju ponovno pročitati prvi izraz tako da zvuči drugačije od drugog. Mogući odgovori mogu biti: „Tri plus ... n podijeljeno s dva" ili „n podijeljeno s dva, zatim dodaj tri."

ALGEBARSKI IZRAZI

Zapišite pomoću simbola, odnosno brojeva i varijabli izraze zadane riječima:	Zadane izraze riječima zapišite pomoću simbola:
1. Pomnoži n brojem 3, zatim dodaj 7. ______	$6n + 2$ ______
2. Dodaj 2 broju n, zatim pomnoži s 5. ______	$8 - 10n$ ______
3. Dodaj 7 broju n, zatim podijeli s 5. ______	$n^2 - 5$ ______
4. Pomnoži n s n, zatim pomnoži s 3. ______	$3 + \frac{n}{2}$ ______
5. Pomnoži n s 2, zatim kvadriraj rezultat. ______	
6. Oduzmi broj 5 od umnoška brojeva 3 i n. ______	
7. Pomnoži s 2 zbroj brojeva n i 5. ______	

Slika 4.3: Nastavni listić *Algebarski izrazi*

Algebarske operacije

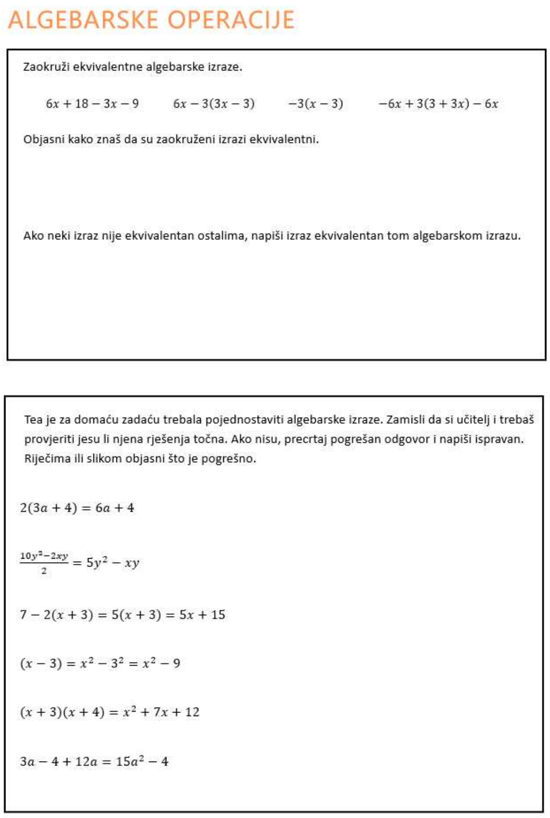
AKTIVNOST 5. Algebarske operacije
Cilj aktivnosti: Učenici će pojednostavljivanjem algebarskih izraza prepoznati ekvivalentne razlomke te će kroz prepoznavanje i ispravljanje grešaka izvoditi algebarske operacije.
Potrebni materijal: Nastavni listić *Algebarske operacije*

Učenje algebre često uključuje suočavanje s kompleksnim izrazima i pravilima za njihovo pojednostavljivanje. Učenici ponekad razvijaju miskoncepcije koje mogu ometati njihovo razumijevanje. Cilj ove aktivnosti je omogućiti učenicima da kroz praktične primjere i rad u paru identificiraju i isprave te greške, što će im pomoći da bolje razumiju algebarske operacije. Kroz aktivnost učenici će prepoznati ekvivalentne izraze, objasniti zašto su ekvivalentni te ispraviti pogreške u pojednostavljivanju izraza, čime će poboljšati svoje razumijevanje i točnost u izvođenju algebarskih operacija.

Na početku sata nastavnik podijeli nastavni listić svakom učeniku, a zadatke rješavaju u paru dok nastavnik prati njihov rad. Rad u paru omogućava učenicima da aktivno sudjeluju u procesu učenja. Dok surađuju učenici mogu razmjenjivati ideje, objašnjavati jedni drugima postupke te zajedno rješavati probleme. Ovakva interakcija pomaže učenicima da prepoznaju vlastite i tuđe greške te uče iz njih. U situacijama kada učenici naiđu na poteškoće, rad u paru omogućuje im da dobiju pomoć od svog partnera.

Jedan od zadataka na nastavnom listiću uključuje prepoznavanje i zaokruživanje ekvivalentnih algebarskih izraza. Ova vrsta zadatka je ključna za razvijanje sposobnosti učenika da prepoznaju različite oblike istog algebarskog izraza. Prepoznavanje ekvivalentnih izraza pomaže učenicima da razumiju da se različiti algebarski izrazi mogu zapisati na više različitih načina. Nakon što učenici zaokruže ekvivalentne izraze, morat će objasniti svoje postupke i kako su došli do zaključka da su izrazi ekvivalentni. Ovo će pomoći nastavniku da razumije njihove misaone procese i prepozna bilo kakve miskoncepcije koje učenici mogu imati. Ako neki izraz nije ekvivalentan ostalima, učenici će morati napisati izraz ekvivalentan tom algebarskom izrazu.

U zadacima u kojima učenici trebaju ispraviti pogreške, zadane su uobičajene pogreške koje učenici često čine. Učenici će trebati prepoznati pogreške u ovim izrazima, precrtati pogrešan odgovor i napisati ispravan. Također će morati riječima ili slikom objasniti što je pogrešno. Ovaj zadatak pomaže učenicima da razviju dublje razumijevanje algebarskih operacija jer moraju analizirati i ispraviti greške. Ako učenici napišu da je pojednostavljen izraz točan, a nije, to može ukazivati na određene miskoncepcije. Ova aktivnost omogućuje nastavniku da identificira i adresira te miskoncepcije. Također je često da učenici identificiraju pogreške, ali ne daju objašnjenja, što može ukazivati na proceduralno razumijevanje, ali nedostatak konceptualnog razumijevanja.


ALGEBARSKE OPERACIJE

Zaokruži ekvivalentne algebarske izraze.

$6x + 18 - 3x - 9$ $\quad 6x - 3(3x - 3)$ $\quad -3(x - 3)$ $\quad -6x + 3(3 + 3x) - 6x$

Objasni kako znaš da su zaokruženi izrazi ekvivalentni.

Ako neki izraz nije ekvivalentan ostalima, napiši izraz ekvivalentan tom algebarskom izrazu.

Tea je za domaću zadaću trebala pojednostaviti algebarske izraze. Zamisli da si učitelj i trebaš provjeriti jesu li njena rješenja točna. Ako nisu, precrtaj pogrešan odgovor i napiši ispravan. Riječima ili slikom objasni što je pogrešno.

$2(3a + 4) = 6a + 4$

$\frac{10y^2 - 2xy}{2} = 5y^2 - xy$

$7 - 2(x + 3) = 5(x + 3) = 5x + 15$

$(x - 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$

$3a - 4 + 12a = 15a^2 - 4$

Slika 4.4: Nastavni listić *Algebarske operacije*

Bibliografija

[1] A. Arcavi, P. Drijvers i K. Stacey, *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights, and Activities*, Routledge, 2017.

[2] M. M. Capraro i H. Joffrion, *Algebraic Equations: Can Middle-School Students Meaningfully Translate from Words to Mathematical Symbols?*, Reading Psychology **27** (2006), 147–164.

[3] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović i S. Varošanec, *MATEMATIKA 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole, 1. dio*, Element, Zagreb, 2019.

[4] Z. Franušić i J. Šiftar, *LINEARNA ALGEBRA 1, skripta za nastavničke studije na PMF-MO*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf`, (srpanj, 2024.).

[5] H. Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

[6] A. Hansen, D. Drews, J. Dudgeon, F. Lawton i L. Surtees, *Children's Errors in Mathematics*, 5th., SAGE Publications, London, 2020.

[7] B. Hayes i K. Stacey, *Teaching Negative Number Operations: A Comparative Study of the Neutralisation Model Using Integer Tiles*, University of Melbourne, 1998.

[8] J. Hiebert i P. Lefevre, *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis*, Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics (J. Hiebert, ur.), Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1986, str. 1–27.

[9] Z. Kurnik, *Generalizacija*, Matematika i škola (2000), 147–148.

[10] J. P. Makonye i J. Fakude, *A Study of Errors and Misconceptions in the Learning of Addition and Subtraction of Directed Numbers in Grade 8*, Sage Open **6** (2016), br. 4.

[11] Mathematics Assessment Project, *Interpreting Algebraic Expressions*, https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=9225&collection=8, (srpanj 2024.).

[12] M. Matić i T. Tutnjević, *Algebarski koncepti u nastavi matematike*, Poučak **14** (2013), br. 55, 33–34.

[13] Ž. Milin Šipuš, *Metodika nastave matematike 2: Algebra u nastavi matematike*, PMF-MO, Zagreb, 2023.

[14] ______, *Metodika nastave matematike 2: Cijeli brojevi*, PMF-MO, Zagreb, 2023.

[15] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html, 2019, (srpanj 2024.).

[16] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Kuliš, T. Rodiger i N. Zvelf, *Matematika 6, udžbenik matematike u šestom razredu osnovne škole sa zadacima za rješavanje, 1. dio*, Školska knjiga, d.d., Zagreb, 2020.

[17] Projekt MERIA, *Praktični MERIA vodič za istraživački usmjerenu nastavu matematike*, 2017.

[18] R. Skemp, *The Psychology of Learning Mathematics*, Erlbaum, 1987.

[19] B. P. Stemele i Z. J. Asvat, *Exploring Learner Errors and Misconceptions in Algebraic Expressions with Grade 9 Learners Through the use of Algebra Tiles*, African Journal of Research in Mathematics Science and Technology Education **28** (2024), br. 1, 1–18.

[20] TIME Project Team, *Project TIME*, https://time-project.math.hr/en.html, (srpanj 2024.).

[21] Z. Usiskin, *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables*, The Ideas of Algebra, K-12, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1988.

[22] Z. Šikić, *Stendhalovi problemi s negativnim brojevima*, Matka **2** (1993/94), 62–64.

[23] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, *MATEMATIKA 6, udžbenik za šesti razred osnovne škole, 1. svezak*, Profil, Zagreb, 2019.

Sažetak

Ovaj rad opisuje ključne aspekte poučavanja cijelih brojeva i algebarskih izraza u nastavi matematike s naglaskom na prevladavanje uobičajenih poteškoća i miskoncepcija koje učenici susreću pri učenju ovih temeljnih koncepata. Algebarsko mišljenje, koje se uvodi postupno, često zahtijeva od učenika da savladaju apstraktne koncepte poput negativnih brojeva i nepoznanica, što može dovesti do različitih miskoncepcija i poteškoća u razumijevanju. Rad obuhvaća metode i didaktičke pristupe za uvođenje cijelih brojeva, poput modela toplih i hladnih žetona te upotrebu algebarskih pločica za vizualizaciju algebarskih izraza. Također se opisuje kako uravnotežen pristup konceptualnom i proceduralnom znanju može doprinijeti učinkovitijem učenju matematike te pruža pregled aktivnosti kojima se ove miskoncepcije mogu adresirati.

Summary

In this thesis, key aspects of teaching integers and algebraic expressions in mathematics education are described, with a focus on overcoming common difficulties and misconceptions that students encounter when learning these fundamental concepts. Algebraic thinking, which is introduced gradually, often requires students to master abstract concepts such as negative numbers and variables, which can lead to various misconceptions and difficulties in understanding. The thesis covers methods and didactic approaches for introducing integers, such as the use of the neutralisation model, as well as the use of algebra tiles for visualizing algebraic expressions. It also describes how a balanced approach to conceptual and procedural knowledge can contribute to more effective learning of mathematics and provides an overview of activities that can address these misconceptions.

Životopis

Rođena sam 3. ožujka 2001. u Zagrebu. Osnovnu školu Bedekovčina završila sam 2015. godine, nakon čega sam upisala prirodoslovno-matematički smjer Gimnazije Antuna Gustava Matoša u Zaboku. Nakon položene mature, 2019. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu te sam 2022. godine stekla titulu sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste godine nastavila sam svoje obrazovanje na nastavničkom smjeru diplomskog studija matematike. Od rujna 2024. godine radim u Srednjoj školi Bedekovčina kao nastavnica matematike.