Eulerovi brojevi

Vinković, Filip

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Filip Vinković

Eulerovi brojevi

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, veljača 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Kombinatorika je grana diskretne matematike koja se bavi problemima prebrojavanja, svrstavanja i rasporeda, tj. prebrojavanjem elemenata konačnih skupova i načina da te elemente poredamo. Jednostavnije rečeno, bavi se diskretnim strukturama koje su konačne ili se mogu brojiti. Ona je povezana s brojnim drugim granama matematike kao što su algebra, geometrija i teorija vjerojatnosti, ali i raznim područjima računarstva. No, primjena kombinatorike sveobuhvatna je i u svakodnevnom životu, gdje nam pomaže optimizirati rješenja nekih problema, a pomaže nam i naći rješenje nekog problema na lakši, brži i efikasniji način. Samu kombinatoriku možemo još podijeliti na neke grane kao što su enumerativna i algebarska kombinatorika. Interes za kombinatoriku pokazivao se već u antičkom svijetu, i to najviše u Grčkoj i Indiji, a njome su se bavili i Židovi u srednjem vijeku. Međutim, na njezin je razvoj najviše utjecao razvoj teorije vjerojatnosti u prvoj polovici 17. stoljeća, a za njega su zaslužni Blaise Pascal, Isaac Newton, Jacob Bernoulli te Leonhard Euler. Najbrži razvoj kombinatorike dogodio se u drugoj polovici 20. stoljeća, za što je zaslužan razvoj računala.

Jedna od najvažnijih osoba za razvoj kombinatorike bio je upravo švicarski matematičar Leonhard Euler (1717.-1783.) koji se, osim kombinatorike, bavio i brojnim drugim granama matematike, ali i fizikom te astronomijom. On je do kasnije nazvanih Eulerovih brojeva došao tražeći formulu za alternirajuću sumu potencija $1^n - 2^n + 3^n - \cdots$ u knjizi *Institutiones calculi differentialis*, proučavajući diferencijalni račun. Kombinatorna interpretacija Eulerovih brojeva javlja se tek sredinom 20. stoljeća.

Kako se Euler bavio i drugim granama matematike, po njemu je nazvan i iracionalan broj $e \approx 2.71828$ koji je baza prirodnog logaritma, ali i brojevi koji se pojavljuju kod ekspanzije funkcije $(\mathrm{ch}\, t)^{-1} = \frac{2}{e^t+e^{-t}}$ u Taylorov red, no u ovom će se radu izraz Eulerovi brojevi (engl. Eulerian numbers) koristiti samo za kasnije definirane brojeve kojima se u ovom radu i bavimo.

Ovaj rad sastoji se od sedam poglavlja. Nakon uvoda, u drugom ćemo se poglavlju prisjetiti svih otprije poznatih definicija i tvrdnji potrebnih za lakše razumijevanje ostatka rada. U trećem poglavlju dolazimo do definicije samih Eulerovih brojeva, navodimo njihova osnovna svojstva te iskazujemo i dokazujemo neke identitete koje Eulerovi brojevi zadovoljavaju, među kojima je i eksplicitna formula za njihovo računanje. Ovdje valja napomenuti kako će se kombinatorni dokazi u ovom radu koristiti svugdje gdje je to moguće.

U četvrtom poglavlju prisjetit ćemo se Stirlingovih brojeva druge vrste i nekih osnovnih svojstava koje oni zadovoljavaju, a nakon toga ćemo iskazati i dokazati neke teoreme koji govore na koji su način Eulerovi i Stirlingovi brojevi povezani. U petom poglavlju definiramo funkcije izvodnice čiji su članovi određeni Eulerovi brojevi.

Šesto poglavlje posvećujemo nizovima Eulerovih brojeva gdje prvo navodimo neka općenita svojstva nizova pozitivnih realnih brojeva, a nakon toga dokazujemo da i nizovi Eulerovih brojeva zadovoljavaju neka od njih, pri čemu poseban naglasak stavljamo na svojstvo log-konkavnosti. U posljednjem poglavlju reći ćemo nešto o Eulerovim brojevima druge vrste te isto tako navesti njihova svojstva i eksplicitnu formulu koju zadovoljavaju.

2 Poznate definicije i rezultati

Na početku navodimo neke poznate definicije i tvrdnje koje ćemo koristiti u ovom radu.

2.1 Osnovni principi prebrojavanja

Navodimo nekoliko jednostavnih principa prebrojavanja koje ćemo koristiti u radu, i to kao propozicije bez dokaza.

Propozicija 2.1 (Princip bijekcije). *Neka su S i T konačni skupovi. Vrijedi $|S| = |T|$ ako postoji bijekcija između ta dva skupa.*

Propozicija 2.2 (Princip sume). *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni, u parovima disjunktni skupovi ($S_i \cap S_j = \emptyset$ za sve i, j takve da je $i \neq j$). Tada je $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ konačan skup i vrijedi*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} S_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| \, .$$

Propozicija 2.3 (Princip produkta). *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ konačni skupovi. Tada vrijedi*

$$\left| \prod_{i=1}^{n} S_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |S_i|$$

gdje je $\prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ Kartezijev produkt skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Za kraj ćemo još iskazati formulu uključivanja-isključivanja (FUI) koja se koristi kada nemamo međusobno disjunktne skupove te ne možemo iskoristiti princip sume.

Teorem 2.4 (Formula uključivanja-isključivanja). *Neka je $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ familija konačnih skupova te neka je $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ skup indeksa. Za podskup $I \subseteq N$ neka je $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$. Tada vrijedi*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq N} (-1)^{|I|-1} |A_I|.$$

Napomenimo još kako postoji analogni zapis gornje formule pomoću komplemenata. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi konačnog skupa X. Komplement S^c označava $X \setminus S$, dok je "prazan" presjek $A_\emptyset$ cijeli X. Tada vrijedi $|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$, odnosno

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^c| = \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I|.$$

2.2 Permutacije

Prvo ćemo navesti definiciju permutacije, zatim definiciju permutacije stupnja n (odnosno, n-permutacije), a nakon toga ćemo reći nešto o ciklusima.

Definicija 2.5. *Neka je S neprazni skup. Bijekciju $f : S \to S$ sa skupa S u samoga sebe nazivamo* permutacijom *skupa S.*

Definicija 2.6. *Kada je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, bijekciju $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ nazivamo* permutacijom stupnja n, *odnosno* n-permutacijom. *Skup svih permutacija $f : S \to S$ u slučaju kada je $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ označavamo S_n i nazivamo* simetričnom grupom stupnja n.

Alternativno, permutaciju stupnja n možemo definirati i kao uređenu n-torku različitih elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Permutaciju $p \in S_n$ možemo zapisati i kao

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}.$$

Permutaciju p najčešće prikazujemo kao samo donji redak gornje matrice, odnosno $p = p(1)p(2)\cdots p(n)$ ili $p = p_1 p_2 \cdots p_n$.

Propozicija 2.7. *Broj permutacija n-članog stupnja je $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.*

Dokaz. Imamo n mogućih odabira za prvi element permutacije. Za drugi element pertmuacije postoji $n - 1$ mogućih odabira, a to su svi elementi osim onog koji je već odabran na prvom mjestu. Za k-ti element permutacije možemo odabrati sve osim već prethodno odabranih $k-1$ članova. Iterirajući ovaj postupak, za predzadnji element preostaju nam 2 moguća odabira, dok nam za zadnji element ostaje samo jedan član. Sada je po principu produkta broj mogućih permutacija jednak $n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$. □

Postoji još jedan način zapisivanja permutacija i to kao produkt disjunktnih ciklusa.

Definicija 2.8. Ciklus *ili* ciklička permutacija *je permutacija koja preslikava $x_1 \mapsto x_2$, $x_2 \mapsto x_3$, ... , $x_d \mapsto x_1$, a ostale elemente iz $\{1, 2, \ldots, n\}$ preslikava u same sebe. Ovakav ciklus zapisujemo kao $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_d)$, a broj d nazivamo* duljinom ciklusa.

Ciklički zapis očito nije jedinstven. Na primjer, (1 2 3) je isti ciklus kao i (3 1 2). Ciklusi $\pi_1 = (i_1 \cdots i_d)$ i $\pi_2 = (j_1 \cdots j_e)$ su *disjunktni* ako vrijedi $\{i_1, \ldots, i_d\} \cap \{j_1, \ldots, j_e\} = \emptyset$. Sljedeću propoziciju navodimo bez dokaza.

Propozicija 2.9. *Svaka permutacija $p \in S_n$ može se zapisati kao kompozicija međusobno disjunktnih ciklusa. Taj zapis je jedinstven do na poredak ciklusa i odabira početnih točaka ciklusa.*

Primjer 2.10. *Permutacija*

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

u cikličkoj notaciji može se zapisati kao $p = (1\ 3\ 7\ 2)(4\ 6)(5)$ te je to jedan od 48 zapisa za ovu permutaciju. Naime, cikluse možemo posložiti na $3! = 6$ načina, dok početnu točku ciklusa možemo odabrati na $4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ načina.

2.3 Binomni koeficijenti

Definicija 2.11. *Neka je S neprazni konačni skup. Svaki k-člani podskup nekog skupa nazivamo* k-kombinacijom, *dok skup svih k-kombinacija skupa S označavamo $\binom{S}{k}$.*

Definicija 2.12. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ *označava broj k-članih podskupova n-članog skupa, odnosno broj k-kombinacija n-članog skupa.*

Vrlo je jednostavno pokazati da vrijedi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

za svaki prirodni n te svaki nenegativni cijeli broj k takav da je $k \leq n$. Budući da vrijedi $0! = 1$, imamo $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Prisjetimo se još kako je binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ jednak koeficijentu uz element x^k u razvoju polinoma $(1+x)^n$. Upravo te koeficijente možemo iščitavati iz Pascalovog trokuta.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Tablica 2.1. Binomni koeficijenti $\binom{n}{k}$ za $0 \leq k \leq n \leq 8$

Za konstrukciju Pascalovog trokuta koristi se sljedeća rekurzija koju ćemo dokazati kombinatorno.

Propozicija 2.13. *Za nenegativne cijele brojeve k i n, takve da je $0 \leq k \leq n$, vrijedi*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Lijeva strana jednakosti broji k-člane podskupove n-članog skupa. Na primjer, neka to u ovom slučaju bude odabir k učenika koji će ići na ekipno natjecanje iz matematike iz razreda u kojem je n učenika.

S desne strane također biramo k učenika koji će ići na natjecanje iz matematike, no imamo dva slučaja ovisno o tome je li u ekipi jedan konkretni učenik. Nazovimo ga Petar. Ako je Petar odabran u ekipu, tada nam preostaje odabrati još $k-1$ učenika od preostalih $n-1$, što možemo učiniti na $\binom{n-1}{k-1}$ načina. S druge strane, ako Petar nije odabran u ekipu, tada nam preostaje odabrati još svih k učenika od preostalih $n-1$, što se može učiniti na $\binom{n-1}{k}$ načina.

Sada tvrdnja propozicije očito vrijedi po principu sume te je kombinatorni dokaz gotov. □

3 Eulerovi brojevi

Ovo poglavlje započet ćemo definiranjem samih Eulerovih brojeva te ćemo zatim navesti neka od njihovih svojstava, no za to nam je najprije potrebna definicija padova.

3.1 Padovi permutacija

Definicija 3.1. *Neka je $p = p_1p_2\cdots p_n$ permutacija te $i < n$ prirodni broj. Kažemo da je i* pad *u permutaciji p ako vrijedi $p_i > p_{i+1}$. Skup padova u p označavamo*

$$\mathrm{Pad}(p) = \{i : p_i > p_{i+1}\}.$$

Nadalje, broj padova u p označavamo

$$\mathrm{pad}(p) = |\mathrm{Pad}(p)| = |\{i : p_i > p_{i+1}\}|.$$

Primjer 3.2. Neka je $p = 41782365$. Odmah uočavamo da imamo pad za $i = 1$ budući da je $p_1 = 4$, a $p_2 = 1$, odnosno $p_1 > p_2$. Promatrajući daljnje elemente permutacije, vidimo da imamo pad za $i = 4$, budući da je $p_4 > p_5$ jer je $8 > 2$ te za $i = 7$ jer je $p_7 > p_8$ (odnosno $6 > 5$). Dakle, u ovom primjeru vrijedi $\mathrm{Pad}(p) = \{1, 4, 7\}$ te $\mathrm{pad}(p) = 3$.

Znajući definiciju padova u permutacijama, pitanja koja se nameću te na koja ćemo dati odgovor u ovom radu su: koliko postoji permutacija p stupnja n sa zadanim skupom padova $\mathrm{Pad}(p)$, koliko postoji permutacija stupnja n sa zadanim brojem padova $\mathrm{pad}(p)$ te ako dvije permutacije stupnja n imaju jednak skup padova ili broj padova, imaju li jednaka i neka druga svojstva? Za odgovore na njih koristit ćemo upravo Eulerove brojeve, no prvo ćemo riješiti trivijalne slučajeve.

Slučaj $\mathrm{pad}(p) = 0$ imamo kod permutacije u kojoj za svaki $i < n$ vrijedi $p_i < p_{i+1}$, a to je slučaj samo kod identitete. Drugi trivijalni slučaj $\mathrm{pad}(p) = n-1$, s maksimalnim brojem padova, imamo za permutaciju u kojoj za svaki $i < n$ vrijedi $p_i > p_{i+1}$, a to je isključivo permutacija obrnuta identiteti, odnosno $p = n(n-1)(n-2)\cdots 21$.

Lema 3.3. *Neka je $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq [n-1]$ te $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$. Označimo s $\alpha(S)$ broj n-permutacija p čiji je skup padova sadržan u S, $\mathrm{Pad}(p) \subseteq S$. Tada vrijedi:*

$$\alpha(S) = \binom{n}{s_1}\binom{n-s_1}{s_2-s_1}\binom{n-s_2}{s_3-s_2}\cdots\binom{n-s_k}{n-s_k}.$$

Dokaz. Ključ ovog dokaza je rasporediti n elemenata u $k+1$ segmenata tako da prvih i segmenata zajedno sadrže s_i elemenata za svaki i. Nakon toga se, unutar svakog segmenta, elementi sortiraju uzlazno. Na taj način smo osigurali da se padovi ne mogu desiti unutar $k+1$ segmenata. Jedina mjesta gdje se padovi mogu dogoditi su na rubovima segmenata, a to su upravo $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Dakle, skup padova će svakako biti sadržan u S.

Preostaje nam izračunati na koliko načina možemo rasporediti n elemenata u $k+1$ ovako dobivenih segmenata. Prvi je segment duljine s_1 što znači da elemente koji će pripadati njemu možemo odabrati na $\binom{n}{s_1}$ načina. Drugi je segment duljine $s_2 - s_1$, a preostalo nam je $n - s_1$ elemenata, pa tako elemente za taj segment možemo odabrati na $\binom{n-s_1}{s_2-s_1}$ načina. Općenito, i-ti segment će biti duljine $s_i - s_{i-1}$ za $i < k+1$, a njegove elemente ćemo odabrati između preostalih $n-s_{i-1}$ elemenata što znači da to možemo učiniti na ukupno $\binom{n-s_{i-1}}{s_i-s_{i-1}}$ načina. Za zadnji segment koji je duljine $n - s_k$ imamo samo jednu mogućnost budući da je ostalo upravo toliko elemenata. Time smo dokazali tvrdnju leme. □

Sada možemo iskazati i dokazati formulu za broj n-permutacija uz zadani skup padova.

Lema 3.4. *Neka je $S \subseteq [n-1]$. Tada je broj n-permutacija sa skupom padova S jednak*

$$\beta(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S-T|}\alpha(T)$$

Dokaz. Ovaj rezultat zapravo je direktna posljedica formule uključivanja-isključivanja. Permutacije sa zadanim skupom padova $H \subseteq S$ veličine h se broje $a_h = \sum_{i=0}^{|S-H|}(-1)^i\binom{|S-H|}{i} = (1+(-1))^{|S-H|}$ puta na desnoj strani jednakosti iz iskaza leme. Vrijednost a_h jednaka je nuli u svim slučajevima osim kada je $|S-H| = 0$, odnosno $S = H$. Dakle, na desnoj strani se broje točno permutacije sa skupom padova S. $\square$

Sada smo spremni definirati Eulerove brojeve.

3.2 Definicija i osnovna svojstva Eulerovih brojeva

Definicija 3.5. *Uz zadane cijele brojeve k i n takve da je $0 \leq k < n$, Eulerov broj $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ je broj n-permutacija s točno k padova, odnosno*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left|\{p \in S_n : \mathrm{pad}(p) = k\}\right|.$$

Valja napomenuti kako je za $k < 0$ te $k \geq n$ Eulerov broj $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ jednak nuli što je u skladu s definicijom 3.5.

Napomena 3.6. U nekim knjigama Eulerovi se brojevi označavaju s $A(n,k)$ te su definirani kao broj n-permutacija koje sadrže točno $k+1$ rastućih nizova uzastopnih elemenata. Uočavamo kako je permutacija s k padova upravo podijeljena na točno $k+1$ rastućih nizova pa su ove dvije definicije ekvivalente. Neke tvrdnje bit će lakše dokazati pomoću ove definicije.

Napomena 3.7. Napomenimo još kako se u nekim izvorima Eulerov broj umjesto padovima definira rastovima. Broj i je rast u permutaciji p ako vrijedi $p_i < p_{i+1}$. Ove definicije su ekvivalente, a u radu ovu definiciju nećemo koristiti, već isključivo definiciju 3.5 te definiciju preko rastućih nizova uzastopnih elemenata.

Valja primjetiti kako je za $k = 0$ Eulerov broj $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ jednak 1 za svaki $n \in \mathbb{N}$ budući da postoji samo jedna permutacija bez padova, a to je identiteta. Isto tako, $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 1$.

Primjer 3.8. *Odredimo sada $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$, $\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle$ i $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle$. Kod $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle$ tražimo permutacije stupnja* 3 *s točno jednim padom. Tražene permutacije su* 132, 213, 231 *i* 312 *pa je $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 4$. Kod $\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle$ tražimo permutacije stupnja* 3 *s točno dva pada, a jedina takva mogućnost je* 321. *Dakle, $\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle = 1$. U zadnjem slučaju tražimo permutacije stupnja* 4 *s točno jednim padom. Sve takve permutacije su* 1243, 1324, 1342, 1423, 2134, 2341, 2314, 2413, 3124, 3412 *i* 4123. *Vidimo da je $\left\langle {4 \atop 1} \right\rangle = 11$.*

Općenito, $\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle = 1$ za svaki prirodni broj n. Naime, jedina n-permutacija s $n-1$ padova je $n(n-1)(n-2)\cdots 21$, odnosno permutacija obrnuta identiteti.

Propozicija 3.9. *Za sve nenegativne cijele brojeve n i k takve da je $0 \leq k < n$ vrijedi*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-k-1} \right\rangle.$$

Dokaz. Neka je $p = p_1 p_2 \cdots p_n$ permutacija stupnja n te pretpostavimo da ona ima k padova. Ona ima $(n-1)-k$ rastova zbog toga što se rast može dogoditi na $n-1$ mjesta te od tog broja oduzimamo broj padova. Označimo sa $p' = p_n \cdots p_2 p_1$ njenu obrnutu permutaciju. Ona ima padove na svim mjestima gdje p ima rastove, a takvih ima $n-k-1$. Dakle, za svaku permutaciju p stupnja n s k padova postoji njena jedinstvena suprotna permutacija p' s $n-k-1$ padova pa je time tvrdnja dokazana. $\square$

Eulerovi brojevi povećanjem n rastu vrlo brzo. Pomoću računala odredili smo njihove vrijednosti za $k < n \leq 9$ i prikazujemo ih u sljedećoj tablici, tzv. Eulerovom trokutu.

n	$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 5} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 6} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 7} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 8} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 9} \right\rangle$
0	1									
1	1	0								
2	1	1	0							
3	1	4	1	0						
4	1	11	11	1	0					
5	1	26	66	26	1	0				
6	1	57	302	302	57	1	0			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	0	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1	0

Tablica 3.1. Eulerovi brojevi $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ za $0 \leq k \leq n \leq 9$.

U nastavku ćemo objasniti kako do Eulerovih brojeva možemo doći na jednostavniji način, pomoću rekurzije. Primijetimo kako je sljedeći teorem analogon Pascalove rekurzije za binomne koeficijente.

Teorem 3.10. *Za sve pozitivne cijele brojeve k i n koji zadovoljavaju $k < n$, vrijedi identitet*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1) \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k) \left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

gdje je $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = 0$ za $n = 0$ (uz $k > 0$) ili $k < 0$ te $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = 1$.

Dokaz. Počnimo s $(n-1)$-permutacijom $p' = p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$ koja sadrži brojeve iz skupa $\{1, 2, ..., n-1\}$. Ubacivanjem elementa n u permutaciju p' broj padova može ostati isti ili se može povećati za jedan. Dakle, n-permutacija s k padova se iz $(n-1)$-permutacije može dobiti na dva načina. Prvi način je da p' ima k padova te se ubacivanjem elementa n taj broj neće promijeniti, dok je drugi način kad p' ima $k-1$ padova te se ubacivanjem n uzrokuje jedan novi pad tako da ih ima k.

Promotrimo prvi slučaj. Broj padova se neće promijeniti ako n stavimo ili na zadnje mjesto ili između dva elementa gdje je pad. Naime, očito je $p_{n-1} < n$, pa dodavanjem na zadnje mjesto nećemo dobiti novi pad. S druge strane, ubacivanjem između dva elementa p_i i p_{i+1}, za koje vrijedi $p_i > p_{i+1}$, u novoj permutaciji imat ćemo niz $..., p_i, n, p_{i+1}, ...$. Budući da je n veći od oba elementa, desit će se pad između n i p_{i+1}, dok će ostatak permutacije ostati nepromijenjen. Tako broj padova ostaje isti. Dakle, n možemo ubaciti na k mjesta gdje su padovi te na zadnje mjesto u $(n-1)$-permutaciju s k padova što nam daje prvi sumand, odnosno $(k+1) \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$.

U slučaju kada imamo $(n-1)$-permutaciju s $k-1$ padova, n možemo staviti ili na prvo mjesto ili između bilo koja dva elementa između kojih imamo rast. Naime, očito je $n > p_1$ dok s druge strane, za i takav da je $p_i < p_{i+1}$ imamo $p_i < n$ i $n > p_{i+1}$. Dakle, stvorili smo jedan novi pad između n i p_{i+1}. Ukupno postoji $1 + (n-2) - (k-1) = n-k$ mogućih pozicija za n u ovom slučaju, što nam daje drugi sumand, odnosno $(n-k) \left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$.

Sada po principu sume lako zaključujemo da identitet iz teorema zaista vrijedi. $\square$

Teorem 3.11 (Worpitzky)**.** *Za sve nenegativne cijele brojene n te za sve kompleksne brojeve z vrijedi*

$$z^n = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{z+n-k}{n}.$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je z prirodni broj. U tom slučaju, lijeva strana gornje jednakosti broji koliko ima nizova duljine n čiji su svi elementi iz skupa $\{1, 2, \ldots, z\}$. Moramo pokazati da desna strana broji iste takve nizove. Neka je $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ takav niz te neka je $a' = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n}$ presloženi neopadajući niz takav da je $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots \leq a_{i_n}$ uz uvjet da su jednaki elementi posloženi tako da su im indeksi sortirani uzlazno. Označimo s $p(a) = i_1 i_2 \cdots i_n$ n-permutaciju koja je jedinstveno određena sa zadanim nizom a. Broj i_1 označava poziciju u a iz koje dolazi prvi član a', i_2 poziciju u a iz koje dolazi drugi član a' te tako sve do n. Jednostavnije rečeno, i_k označava poziciju u a na kojoj se nalazi k-ti po redu član niza a'. Na primjer, neka je $a = 231143$. Tada je $a' = 112334$, a permutacija je $p(a) = 341265$.

Ako dokažemo da se svaka na gore prikazan način dobivena permutacija s $k-1$ padova dobiva iz točno $\binom{z+n-k}{n}$ nizova a, dokazali smo teorem jer nam upravo to prikazuje desna strana identiteta.

Zamijetimo prvo da ako vrijedi $a_{i_j} = a_{i_{j+1}}$ u a', tada je $i_j < i_{j+1}$ u $p(a)$. Po kontrapoziciji, ako je $i_j > i_{j+1}$, odnosno ako je j pad u $p(a)$, tada vrijedi $a_{i_j} < a_{i_{j+1}}$ u a'. Ova opservacija pokazuje nam da je a' strogo rastuća kad je j pad u $p(a)$. Ako pogledamo naš primjer, $p(a)$ ima padove u 2 i 5 te je a' na tim pozicijama zaista strogo rastuća, no važno je za zamijetiti kako a' nije strogo rastuća isključivo na tim pozicijama.

Promotrimo sada iz koliko nizova a možemo dobiti permutaciju $p(a) = 341265$, kao u našem primjeru. Iz gornjeg argumenta o padovima zaključujemo da mora vrijediti slijedeći niz nejednakosti.

$$1 \leq a_3 \leq a_4 < a_1 \leq a_2 \leq a_6 < a_5 \leq z$$

Strogu nejednakost imamo na mjestima gdje se u permutaciji dogodio pad. Gornji niz nejednakosti ekvivalentan je s

$$1 \leq a_3 < a_4 + 1 < a_1 + 1 < a_2 + 2 < a_6 + 3 < a_5 + 3 \leq z + 3.$$

Broj nizova koji zadovoljavaju gore navedene stroge jednakosti računa se pomoću formule za kombinacije, odnosno binomnih koeficijenata te ih ima $\binom{z+3}{6}$ za naš konkretan $p(a)$. Naime, korištenjem supstitucije $x_3 = a_3, x_4 = a_4 + 1, \ldots, x_5 = a_5 + 3$ imamo niz strogih nejednakosti

$$1 \leq x_3 < x_4 < x_1 < x_2 < x_6 < x_5 \leq z + 3$$

odnosno moramo odabrati 6 od mogućih $z + 3$ pozicija koje zadovoljavaju gornji niz nejednakosti, a to je upravo broj kombinacija $\binom{z+3}{6}$.

Ako generaliziramo gornji postupak za za bilo koji n te za bilo koju permutaciju i s $k-1$ padova, dobijemo da se svaka takva n-permutacija može dobiti iz $\binom{z+(n-1)-(k-1)}{n} = \binom{z+n-k}{n}$ nizova a. Naime, u nizu nejednakosti

$$1 \leq a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \cdots \leq a_{i_n} \leq z$$

sve nejednakosti moramo pretvoriti tako da budu stroge te nakon toga možemo izračunati traženi broj nizova tako da izračunamo broj kombinacija, odnosno binomni koeficijent, analogno kao u našem gornjem primjeru. Broj nejednakosti koje nisu stroge je $(n-1)-(k-1)$ jer ima $n-1$ nejednakosti između svih a_{i_j} te od njih oduzimamo $k-1$ strogih jednakosti na mjestima gdje su padovi. Upravo taj broj ćemo pribrojiti z u zadnjoj nejednakosti zbog toga te ćemo u njoj dobiti $1 \leq \cdots \leq z+(n-1)-(k-1) = z+n-k$.

Ako z nije prirodni broj, obje strane jednakosti iz teorema možemo gledati kao polinome s varijablom z. No, budući da se ta dva polinoma konačnog stupnja podudaraju u beskonačno mnogo točaka (za sve $z \in \mathbb{N}$), oni moraju biti identični čime je dokaz gotov. $\square$

Primjer 3.12. *Neka je n=3. Znamo da je* $\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle = \left\langle {3 \atop 2} \right\rangle = 1$ *te* $\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle = 4$. *Dakle, na desnoj strani identiteta dobivamo izraz*

$$\binom{z+2}{3} + 4\binom{z+1}{3} + \binom{z}{3}$$

za koji jednostavnim raspisivanjem zaista dobivamo da je jednak z^3 *što teorem i tvrdi.*

Navest ćemo jednu jednostavnu posljedicu gornjeg teorema.

Korolar 3.13. *Za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi identitet*

$$z^n = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{z+k-1}{n}.$$

Dokaz. Zamijenimo li z sa $-z$ u rezultatu teorema 3.11, dobit ćemo

$$z^n(-1)^n = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{-z+n-k}{n}.$$

Primijetimo kako je

$$\begin{aligned}
\binom{-z+n-k}{n} &= \frac{(-z+n-k)(-z+n-k-1)\cdots(-z+1-k)}{n!} \\
&= (-1)^n \frac{(z+k-n)(z+k-n+1)\cdots(z+k-1)}{n!} \\
&= (-1)^n \binom{z+k-1}{n}
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$z^n(-1)^n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{z+k-1}{n}$$

te na kraju

$$z^n = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{z+k-1}{n}$$

što smo i trebali dobiti. $\square$

Napomena 3.14. Zamijetimo kako iz teorema 3.11 (a isto i iz korolara 3.13) možemo dobiti formulu za sumu prvih n kvadrata prirodnih brojeva. Naime, vrijedi

$$x^2 = \left\langle {2 \atop 0} \right\rangle \binom{x}{2} + \left\langle {2 \atop 1} \right\rangle \binom{x+1}{2} = \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2}.$$

Korištenjem ovog identiteta te preslagivanjem sumanada u dvije sume dobivamo

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots \\
&\quad + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} \\
&= \left(\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \cdots + \binom{n}{2} \right) \\
&\quad + \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n+1}{2} \right) \\
&= \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} \\
&= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

3.3 Eksplicitna formula za Eulerove brojeve

Nakon što smo definirali Eulerove brojeve, pokazali kako se do njih dolazi rekurzivno te dokazali nekoliko identiteta koje oni zadovoljavaju, zanima nas postoji li neka općenita formula pomoću koje možemo izračunati Eulerove brojeve. Odgovor na to pitanje pokazat će se potvrdnim, a sada ćemo iskazati i dokazati navedenu formulu.

Teorem 3.15. *Za sve nenegativne cijele brojeve k i n koji zadovoljavaju $k \le n$ vrijedi*

$$\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n.$$

Dokaz. Neka je $k > 0$ (za $k = 0$, tvrdnja je očita) te stavimo $k-1$ štapića sa k pretinaca između njih. Svaki element iz $\{1, 2, \cdots, n\}$ stavljamo u točno jedan pretinac. To možemo učiniti na k^n načina, što nam daje jedan član sume iz iskaza teorema za $i = 0$. Zatim ćemo unutar svakog pretinca elemente sortirati uzlazno. Na primjer, za $k = 5, n = 9$, jedan od valjanih rasporeda je

$$257|13||49|68 \tag{1}$$

Zanemarimo li štapiće, dobivamo n-permutaciju (u gornjem primjeru 257134968) s najviše $k-1$ padova, jer jedina mjesta gdje je pad moguć su ona između pretinaca.

U ovakvom pristupu imamo dva problema koji se javljaju. Naime, može se dogoditi da imamo prazan pretinac te da između dva susjedna pretinca nemamo pad. U tim slučajevima permutacija ima manje od $k-1$ padova te ćemo pokazati kako ćemo s takvim permutacijama postupiti.

Nazovimo *zidom* one štapiće nakon kojih neposredno ne slijedi sljedeći štapić, već neprazan pretinac. Zid je *irelevantan* ako njegovim uklanjanjem opet dobivamo valjan raspored elemenata, odnosno raspored gdje su u svakom pretincu elementi uzlazno sortirani. Na primjer, u (1) je treći štapić očito irelevantan zid budući da je pretinac prije njega prazan. Njegovim brisanjem dobijemo 257|13|49|68 iz čega vidimo da je i drugi štapić irelevantan zid jer ćemo njegovim brisanjem dobiti pretinac 1349 gdje su elementi sortirani uzlazno. Naš cilj je prebrojati sve rasporede bez irelevantnih zidova, jer su oni očito u bijekciji s permutacijom s $k-1$ padova, budući da će se između svaka dva pretinca dogoditi pad. U tome ćemo koristiti formulu uključivanja-isključivanja.

Nazovimo *pozicijom* mjesta između dva uzastopna elementa permutacije, kao i mjesto prije prvog te mjesto poslije zadnjeg elementa permutacije. Dakle, n-permutaciji pridružujemo $n+1$ pozicija. Neka je $S \subseteq [n+1]$ te A_S skup rasporeda u kojima se irelevantan zid nalazi na svakoj poziciji koja je u skupu S. Neka je $|S| = i \leq k-1$. Tvrdimo da tada vrijedi

$$|A_S| = (k-i)^n.$$

Promotrimo prvo bilo koji valjani raspored s $k-i-1$ štapića. Postoji $(k-i)^n$ rasporeda jer za svaki element od 1 do n možemo odabrati jedan od $k-i$ pretinaca u koji ćemo ga smjestiti. Sada želimo smjestiti još i štapića tako da stavimo po jedan na svaku poziciju iz S, a ako na nekoj od tih pozicija već postoji štapić, smještamo ga neposredno desno od njega. Rezultat ovog postupka je raspored koji se nalazi u A_S. Obrnuto, svaki raspored iz A_S ćemo dobiti točno jednom koristeći ovaj postupak. Doista, ako je $a \in A_S$, tada brisanjem i štapića koji su na pozicijama iz S dobijemo jedinstveni raspored s $k-i-1$ štapića kojim ćemo ultimativno dobiti upravo raspored a, i to dodavanjem i štapića na pozicije iz S.

Budući da postoji $\binom{n+1}{i}$ mogućnosti za odabir skupa S, dokaz teorema slijedni direktno iz formule uključivanja-isključivanja. $\square$

Teorem 3.15 dokazat ćemo na još jedan način, i to računski, u kojem nije potrebna ideja o štapićima i pretincima. No, za taj dokaz potreban je sljedeći identitet o binomnim koeficijentima kojeg ćemo vrlo jednostavno dokazati kombinatorno.

Lema 3.16 (Chu-Vandermonde)**.** *Svi $x, y \in \mathbb{C}$ te svaki nenegativni $n \in \mathbb{Z}$ zadovoljavaju identitet*

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}. \tag{2}$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo kako su x i y prirodni brojevi. Neka su X i Y disjunktni skupovi s različitim elementima, takvi da X sadrži x, a Y y članova. Tada lijeva strana označava broj n-članih podskupova skupa $X \cup Y$. No, desna strana broji istu stvar, ovisno o tome koliko od n čanova dolazi iz skupa X, a koliko iz skupa Y. Dakle, (2) vrijedi za prirodne x i y pa nam preostaje dokazati tvrdnju za realne brojeve.

Uočimo kako obje strane (2) možemo promatrati kao polinome u x i y. No, ti se polinomi podudaraju u beskonačno mnogo točaka (svi prirodni brojevi) pa oni moraju biti identični čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Sada smo spremni za alternativni dokaz u kojem ćemo koristiti gornju lemu.

Dokaz teorema 3.15. Prisjetimo se prvo Worpitzkyjevog teorema. Za sve nenegativne $n \in \mathbb{Z}$ i $z \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$z^n = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{z+n-k}{n}.$$

Uvrstimo li u to $z = 1$, zatim $z = 2$ te za $z = i$, $i \leq k$, dobijemo

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle {n \atop 0} \right\rangle \cdot \binom{n}{n}, \\ 2^n &= \left\langle {n \atop 1} \right\rangle \cdot \binom{n}{n} + \left\langle {n \atop 0} \right\rangle \cdot \binom{n+1}{n}, \end{aligned}$$

pri čemu je i-ta jednakost

$$i^n = \sum_{j=0}^{i-1} \left\langle {n \atop k-j-1} \right\rangle \binom{n+j-1}{n}$$

dok je zadnja (k-ta) jednakost

$$k^n = \sum_{j=0}^{k-1} \left\langle {n \atop k-j-1} \right\rangle \binom{n+j-1}{n}.$$

Sada ćemo pomoću naših k jednakosti dobiti izraz čija je lijeva strana upravo jednaka desnoj strani formule iz teorema 3.15. To radimo tako da svaku od prvih $k-1$ jednakosti pomnožimo određenim faktorom te ju zatim pribrojimo zadnjoj jednakosti. Pomnožimo $(k-i)$-tu jednakost sa $(-1)^i\binom{n+1}{i}$ te ju pribrojimo zadnjoj i tako za sve $0 \leq i < k$. Ovim postupkom dobijemo izraz

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k-i)^n = \sum_{j=1}^{k} \left\langle {n \atop j-1} \right\rangle \sum_{i=0}^{k-j} \binom{n+k-i-j}{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i. \tag{3}$$

Označimo s $a(n, j-1)$ pripadni koeficijent koji se javlja uz $\left\langle {n \atop j-1} \right\rangle$ na desnoj strani gornjeg izraza. Uočimo da je teorem dokazan ako vrijedi $a(n, j-1) = 0$ za $j < k$. Očito je $a(n, k-1) = 1$, te nam na desnoj strani ostaje samo $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ što i želimo dobiti.

Neka je $b = k - j$. Tada $a(n, k-1)$ možemo transformirati na sljedeći način:

$$a(n, k-1) = \sum_{i=0}^{b}(-1)^i\binom{n+1}{i}\binom{n-i+b}{n}.$$

Za pozitivni realni broj x vrijedi jednakost $\binom{-x}{a} = \binom{x+a-1}{a}(-1)^a$. Iz ovog te iz očite jednakosti $(-1)^b = (-1)^{b-2i}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
(-1)^b a(n, k-1) &= \sum_{i=0}^{b}(-1)^{b-i}\binom{n+1}{i}\binom{n-i+b}{n} \\
&= \sum_{i=0}^{b}(-1)^{b-i}\binom{n+1}{i}\binom{n-i+b}{b-i} \\
&= \sum_{i=0}^{b}\binom{n+1}{i}\binom{-1-n}{b-i} = \binom{0}{b} = 0.
\end{aligned}$$

Zadnja jednakost očito vrijedi za $b = k - j > 0$, dok predzadnja jednakost vrlo jednostavno slijedi iz Chu-Vandermondeove leme. Time smo pokazali da na desnoj strani (3) ostaje samo $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ pa je dokaz gotov. □

4 Stirlingovi i Eulerovi brojevi

U ovom poglavlju ćemo se prisjetiti Stirlingovih brojeva te proučiti na koji su način povezani s Eulerovim.

Definicija 4.1. Particija *skupa* $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ *u* k *blokova je familija nepraznih disjunktnih podskupova od* $[n]$ *čija je unija upravo* $[n]$ *i kojih ima točno* k*. Te podskupove nazivamo* blokovima.

Primjer 4.2. *Neka je* $n = 9$ *te* $k = 4$*. Primjeri dviju particija skupa* $[n]$ *u* 4 *bloka su* $\{\{1, 3, 9\}, \{2, 8\}, \{4\}, \{5, 6, 7\}\}$ *i* $\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}\}$.

Uočimo kako poredak blokova te poredak elemenata unutar bloka nije bitan. Na primjer, particija $\{\{6, 7, 5\}, \{1, 9, 3\}, \{4\}, \{8, 2\}\}$ jednaka je prvoj particiji iz prethodnog primjera, $\{\{1, 3, 9\}, \{2, 8\}, \{4\}, \{5, 6, 7\}\}$.

Definicija 4.3. *Broj mogućih particija* $[n]$ *u* k *blokova označavamo* $\left\{ n \atop k \right\}$ *te nazivamo* Stirlingovim brojem druge vrste.

Na primjer, $\left\{ n \atop 1 \right\} = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ jer moramo imati samo jedan blok, a to je $[n]$. Isto tako, $\left\{ n \atop n \right\} = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ jer postoji samo jena takva particija s n blokova, a to je $\{\{1\}, \{2\}, \cdots, \{n\}\}$. S druge strane, vrijedi na primjer $\left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3$ jer imamo 3 particije $[3] = \{1, 2, 3\}$ s 2 bloka, a to su: $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ i $\{\{2, 3\}, \{1\}\}$. Valja još napomenuti kako po dogovoru stavljamo $\left\{ n \atop 0 \right\} = 0$ za $n > 0$ te $\left\{ 0 \atop 0 \right\} = 1$.

n	$\left\{ n \atop 0 \right\}$	$\left\{ n \atop 1 \right\}$	$\left\{ n \atop 2 \right\}$	$\left\{ n \atop 3 \right\}$	$\left\{ n \atop 4 \right\}$	$\left\{ n \atop 5 \right\}$
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	15	25	10	1

Tablica 3.1. Trokut za Stirlingove brojeve druge vrste.

Napomenimo kako Stirlingovi brojevi druge vrste također zadovoljavaju rekurziju sličnu Pascalovoj. Ona glasi

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \cdot \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

za sve $n, k \in \mathbb{N}$. Sada ćemo navesti i dokazati eksplicitnu formulu za računanje Stirlingovih brojeva prve vrste.

Lema 4.4. *Za sve pozitivne cijele brojeve n i k vrijedi identitet*

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Dokaz. Neka je *uređena particija* skupa $[n]$ u k blokova takva particija u kojoj je redoslijed blokova bitan. Dakle, $(\{1,2\}, \{3\})$ i $(\{3\}, \{1,2\})$ su različite uređene particije $[n]$ u 2 bloka. Uočimo kako je uređena particija od $[n]$ u k blokova zapravo ekvivalentna surjekciji iz $[n]$ u $[k]$. Naime, kod uređene particije svaki element iz $[n]$ preslikavamo u točno jedan od k blokova, od čega nijedan blok ne smije ostati prazan. Isto tako, u surjekciji iz $[n]$ u $[k]$ preslikavamo svaki element iz $[n]$ u točno jedan element iz $[k]$, pri čemu za svaki element iz $[k]$ postoji barem jedan element iz $[n]$ koji se preslikava u njega. Dakle, uređenih particija skupa $[n]$ u k blokova ima isto koliko i surjekcija iz $[n]$ u $[k]$, a to je $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$, što se dokazuje pomoću formule uključivanja-isključivanja. Za kraj uočimo kako jedna uređena particija obuhvaća točno $k!$ ekvivalentnih particija pa stoga cijeli izraz moramo podijeliti upravo s $k!$. Time je dokaz gotov. $\square$

U sljedećem teoremu pokazati ćemo da su Eulerovi te Stirlingovi brojevi druge vrste blisko povezani.

Teorem 4.5. *Neka su n i k pozitivni cijeli brojevi. Tada vrijedi*

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \left\langle n \atop i-1 \right\rangle \binom{n-i}{k-i}. \tag{4}$$

Dokaz. Množenjem obje strane jednakosti sa $k!$ dobijemo

$$k! \left\{ n \atop k \right\} = \sum_{i=0}^{k} \left\langle n \atop i-1 \right\rangle \binom{n-i}{k-i}.$$

Ovdje je lijeva strana očito jednaka broju uređenih particija $[n]$ u k blokova budući da iz svake particije s k blokova permutacijama možemo dobiti upravo $k!$ različitih uređenih particija. Moramo dokazati da desna strana jednakosti broji istu stvar. Promotrimo permutaciju p koju broji $\left\langle n \atop i-1 \right\rangle$. Takva permutacija ima i rastućih nizova te ona prirodno definira uređenu particiju $[n]$ u i blokova. Za $i = k$ smo gotovi pa trebamo promotriti slučaj $i < k$. U tom slučaju ćemo razdijeliti neke od rastućih nizova u blokove tako da dobijemo upravo uređenu particiju s k blokova. Budući da trenutno postoji i blokova, trebamo dodati jos $k - i$ blokova da bismo ih dobili k. To ćemo učiniti tako da odaberemo upravo $k-i$ "praznih pozicija", odnosno pozicija između dva uzastopna elementa unutar istog bloka. Takvih pozicija ima $n-i$ te ih možemo odabrati na $\binom{n-i}{k-i}$ načina.

Ako sumiramo po svim $i \leq k$, vidimo da gornjim postupkom možemo dobiti upravo $\sum_{i=0}^{k} \left\langle {n \atop i-1} \right\rangle \binom{n-i}{k-i}$ uređenih particija $[n]$ u k blokova. Preostaje još samo dokazati da se svaka takva particija broji točno jednom. Naime, ako elemente unutar svakog bloka particije sortiramo uzlazno, tada cijelu particiju možemo iščitati s lijeva nadesno (zanemarujući blokove) tako da dobijemo jedinstvenu permutaciju s najviše k rastućih nizova. Nakon toga možemo jednostavno vratiti blokove da dobijemo uređenu particiju. Time je dokaz završen. $\square$

Ovaj rezultat ćemo invertirati tako da dobijemo formulu kojom se računaju Eulerovi brojevi preko Stirlingovih brojeva druge vrste.

Teorem 4.6. *Neka su n i k pozitivni cijeli brojevi. Tada vrijedi*

$$\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \left\{ {n \atop i} \right\} i! \binom{n-i}{k-i} (-1)^{k-i}.$$

Dokaz. Promotrimo prvo jednakost (4) za svaki $i \leq k$ te pomnožimo svaku od njih s $i!$. Dobijemo niz jednakosti

$$\begin{aligned} 1! \cdot \left\{ {n \atop 1} \right\} &= \left\langle {n \atop 0} \right\rangle \cdot \binom{n-1}{0}, \\ 2! \cdot \left\{ {n \atop 2} \right\} &= \left\langle {n \atop 0} \right\rangle \cdot \binom{n-1}{1} + \left\langle {n \atop 1} \right\rangle \cdot \binom{n-2}{0}, \end{aligned}$$

pri čemu je i-ta jednakost

$$i! \cdot \left\{ {n \atop i} \right\} = \sum_{j=1}^{i} \left\langle {n \atop j-1} \right\rangle \binom{n-j}{i-j}, \tag{5}$$

dok je zadnja jednakost

$$k! \cdot \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{j=1}^{k} \left\langle {n \atop j-1} \right\rangle \binom{n-j}{k-j}. \tag{6}$$

Naš je cilj eliminirati sve sumande u (6) osim zadnjeg, tj. $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \binom{n-k}{k-k} = \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$. To ćemo napraviti tako da (5) pomnožimo s $(-1)^{k-i}\binom{n-i}{k-i}$ za svaki

$i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ te ih pribrojimo (6). Jednakost koju dobijemo opisanim postupkom glasi

$$\sum_{i=1}^{k} \left\{ {n \atop i} \right\} i!(-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i} \sum_{j=1}^{i} \left\langle {n \atop j-1} \right\rangle \binom{n-j}{i-j},$$

odnosno mijenjanjem poretka sumacije

$$\sum_{i=1}^{k} \left\{ {n \atop i} \right\} i!(-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i} = \sum_{j=1}^{i} \left\langle {n \atop j-1} \right\rangle \binom{n-j}{i-j} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i}. \tag{7}$$

Uočimo kako je lijeva strana gornje jednakosti jednaka upravo desnoj strani jednakosti iz iskaza teorema. Očito je na desnoj strani koeficijent uz $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ jednak $\binom{n-k}{k-k} = 1$. Označimo s $t(n, j-1)$ koeficijent koji stoji uz $\left\langle {n \atop j-1} \right\rangle$ u (7). Tvrdnja teorema će biti dokazana ako pokažemo da je $t(n, j-1) = 0$ za sve $j < k$.

Uočimo kako je $\binom{n-j}{i-j} = 0$ za $i < j$. Zbog toga, za svaki fiksirani $j < k$ vrijedi

$$\begin{aligned} t(n, j-1) &= \sum_{i=j}^{k} \binom{n-j}{i-j} \binom{n-i}{k-i} (-1)^{k-i} = \sum_{i=j}^{k} \binom{n-j}{i-j} \binom{k-n-1}{k-i} \\ &= \binom{k-j-1}{k-j} = 0. \end{aligned}$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili $\binom{-x}{a} = \binom{x+a-1}{a}(-1)^a$, a u predzadnjoj jednakosti Chu-Vandermondeovu formulu. Dakle, dokazali smo da na desnoj strani (7) $\left\langle {n \atop j-1} \right\rangle$ nestaje za $j < k$, dok uz $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ stoji koeficijent 1. Time se na desnoj strani dobije samo $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$, a to je lijeva strana u iskazu teorema. Time je dokaz ovog teorema završen. □

5 Eulerovi brojevi i funkcije izvodnice

Postoji više načina na koje možemo definirati funkcije izvodnice čiji su članovi određeni Eulerovi brojevi. Prvo ćemo iskazati "horizontalnu" verziju.

Definicija 5.1. *Neka je n nenegativni cijeli broj. Polinom*

$$A_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k$$

zovemo n-ti Eulerov polinom.

Eulerovi polinomi imaju neka zanimljiva svojstva koja se mogu dokazati kombinatorno, no njih ostavljamo za kasnije. Sada ćemo proučiti na koji su način povezani Eulerovi polinomi i neke poznate beskonačne funkcije izvodnice.

Teorem 5.2. *Neka je n nenegativni cijeli broj. Tada se n-ti Eulerov polinom alternativno može zapisati kao*

$$A_n(z) = (1-z)^{n+1} \sum_{i \geq 0} i^n z^i.$$

Dokaz. Korištenjem teorema 3.15 dobivamo

$$\begin{aligned} A_n(z) &= \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n z^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^{k-i} \binom{n+1}{k-i} i^n z^k \right). \end{aligned}$$

Zamijetimo kako suma u zagradi, jednaka $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ nestaje za $k > n$. Sada promjenom poretka sumacije u gornjoj jednakosti imamo

$$A_n(z) = \sum_{i \geq 0} i^n z^i \cdot \sum_{k \geq i} \binom{n+1}{k-i} (-z)^{k-i} = (1-z)^{n+1} \sum_{i \geq 0} i^n z^i$$

čime je dokaz gotov. □

Primjer 5.3. Neka je $n = 1$. Teorem 5.2 daje nam

$$A_1(z) = (1-z)^2 \sum_{i \geq 0} i z^i = (1-z)^2 \cdot \frac{z}{(1-z)^2} = z.$$

Za $n = 2$ imamo

$$A_2(z) = (1-z)^3 \sum_{i^2 \geq 0} i z^i = (1-z)^3 \cdot \left(\frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} \right) = z^2 + z.$$

Često je korisno pribrojiti brojeve $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$ za sve n i k u jednoj funkciji izvodnici. Ta funkcija izvodnica tada ima jednostavnu formu koju ćemo sada dokazati.

Teorem 5.4. *Neka je*

$$r(t,z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^n \frac{z^n}{n!}.$$

Tada vrijedi jednakost

$$r(t, z) = \frac{1-t}{1-te^{z(1-t)}}.$$

Dokaz. Koristeći teorem 5.2 te raspisivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} r(t,z) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle t^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\left((1-t)^{n+1}\sum_{i\geq 0} i^n t^i\right)\frac{z^n}{n!} = \\ &= (1-t)\sum_{i\geq 0} t^i \sum_{n\geq 0}\frac{(iz(1-t))^n}{n!} = (1-t)\sum_{i\geq 0} t^i e^{iz(1-t)} = \\ &= \frac{1-t}{1-te^{z(1-t)}}. \end{aligned}$$

□

6 Log-konkavnost Eulerovih brojeva

Prisjetimo se trokuta Eulerovih brojeva za $n = 6$.

n	$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 1} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 2} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 3} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 4} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 5} \right\rangle$	$\left\langle {n \atop 6} \right\rangle$
0	1						
1	1	0					
2	1	1	0				
3	1	4	1	0			
4	1	11	11	1	0		
5	1	26	66	26	1	0	
6	1	57	302	302	57	1	0

Tablica 6.1. Eulerovi brojevi $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ za $0 \leq k \leq n \leq 6$.

Kao što smo već zamijetili, niz $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ je simetričan za svaki fiksni $n \in \mathbb{N}$. Isto tako, primjećujemo kako se svaki od tih nizova do njegove polovice stalno povećava, a zatim smanjuje. To svojstvo u kombinatorici ima i svoj naziv.

Definicija 6.1. *Niz pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je* unimodalan *ako postoji indeks k, $1 \leq k \leq n$, takav da vrijedi $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n$.*

Niz Eulerovih brojeva $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_{\{0\leq k\leq n\}}$ je unimodalan za svaki fiksni n. Štoviše, u nastavku ćemo dokazati da on zadovoljava i jedno jače svojstvo koje ćemo prvo definirati.

Definicija 6.2. *Niz pozitivnih realnih brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *je* log-konkavan *ako za sve indekse* k *vrijedi* $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Propozicija 6.3. *Ako je niz pozitivnih realnih brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *log-konkavan, tada je i unimodalan.*

Dokaz. Promotrimo niz $\{b_i\}_i$ definiran s $b_i = a_i/a_{i-1}$. Relaciju $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$ možemo zapisati i kao $a_k/a_{k+1} \geq a_{k-1}/a_k$ pa tako u log-konkavnom nizu vrijedi

$$\frac{a_1}{a_0} \geq \frac{a_2}{a_1} \geq \cdots \geq \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

odnosno $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_{n-1} \geq b_n$. Postoje tri mogućnosti. Prva mogućnost je $b_1 < 1$. Tada je cijeli niz $\{a_i\}_i$ padajuć, pa stoga i unimodalan. U drugoj mogućnosti je $b_1 \geq 1$ i $b_i \geq 1$ za svaki i, $1 \leq i \leq n$. Ovdje je cijeli niz $\{a_i\}_i$ rastuć i unimodalan. Posljednja mogućnost je kad imamo $b_1 \geq 1$, no nakon određenog vremena se niz $\{b_i\}_i$ spusti ispod jedinice. Neka je k najmanji indeks za koji je $b_k < 1$. Tada očito vrijedi $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{k-1} \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n$ pa je niz također unimodalan. Dakle, niz $\{a_i\}_i$ je unimodalan u svim slučajevima te je stoga dokaz gotov. $\square$

Teorem 6.4. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *niz Eulerovih brojeva* $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_{\{0 \leq k \leq n\}}$ *je log-konkavan.*

Prije dokaza ovog teorema, trebamo definirati neke pojmove te navesti i dokazati pomoćnu propoziciju i lemu. Ako put na koordinatnoj mreži sadrži samo pomake $(1,0)$ i $(0,1)$, nazivat ćemo ga *najkraćim putem u rešetki.*

Označimo s $\mathcal{A}(n,k)$ skup n-permutacija s k padova. Konstruirat ćemo bijekciju između toga skupa te skupa navedenih najkraćih puteva u rešetki s n pomaka, od kojih je točno k njih vertikalnih (odnosno, $(0,1)$).

Neka je $\mathcal{P}(n)$ skup najkraćih puteva u rešetki s rubovima $a_1, a_2, \ldots, a_n$ te neka su pozitivni cijeli brojevi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ njihove odgovarajuće oznake takve da vrijedi sljedeće:

(i) rub a_1 je horizontalan i vrijedi $e_1 = 1$,

(ii) ako su rubovi a_i i a_{i+1} oba horizontalni ili oba vertikalni, tada je $e_i \geq e_{i+1}$,

(iii) ako su rubovi a_i i a_{i+1} međusobno okomiti, tada je $e_i + e_{i+1} \leq i + 1$.

Napomenimo kako nam startna točka puta u $\mathcal{P}(n)$ nema nikakvog značaja. Neka je $\mathcal{P}(n,k)$ skup svih puteva u $\mathcal{P}(n)$ s k vertikalnih rubova te neka je $P(n,k) = |\mathcal{P}(n,k)|$.

Propozicija 6.5. *Sljedeća dva svojstva puteva u $\mathcal{P}(n)$ slijede direktno iz definicije:*

- *Nejednakost $e_i \leq i - 1$ vrijedi za svaki $i \geq 2$.*
- *Fiksirajmo e_i. Ako e_{i+1} može poprimiti vrijednost v, tada može poprimiti sve vrijednosti $w \in \mathbb{N}$ takve da je $w \leq v$.*

Napomenimo još kako su uvjeti na e_{i+1} zadani isključivo sa e_i, nezavisno od prethodnika e_j, $j < i$. Sada ćemo iskazati i dokazati lemu u kojoj ćemo objasniti kako ćemo konstruirati bijekciju između skupova.

Lema 6.6. *Sljedeći proces definira bijekciju između $\mathcal{S}(n)$ i $\mathcal{P}(n)$, gdje je $\mathcal{S}(n)$ skup svih n-permutacija. Neka je $p \in \mathcal{S}(n)$. Da dobijemo rub a_i i njegovu oznaku e_i za $2 \leq i \leq n$, prvo restringiramo permutaciju p na prvih i elemenata i ponovno ih označimo tako da dobijemo permutaciju $q = q_1 q_2 \cdots q_i$ od $[i]$. Nakon toga radimo sljedeće:*

1. *Ako je pozicija $i - 1$ pad u permutaciji p (ekvivalentno, u permutaciji q), neka je a_i vertikalni rub te neka je e_i jednako q_i*
2. *Ako je pozicija $i - 1$ rast permutacije p, neka je a_i horizontalan i neka je oznaka e_i jednaka $i + 1 - q_i$.*

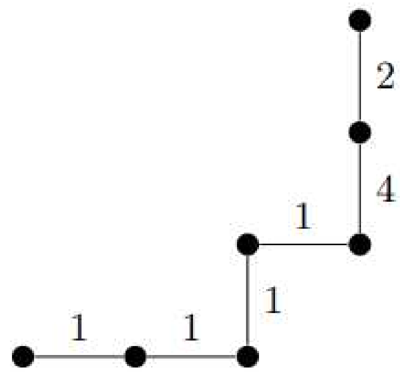
Štoviše, ova bijekcija se može restringirati na bijekciju između $\mathcal{A}(n, k)$ i $\mathcal{P}(n, k)$ za $0 \leq k \leq n - 1$.

Dokaz. Opisano preslikavanje je očito injektivno. Pretpostavimo da su $i-1$ i i padovi permutacije p te neka su q i r dobivene restringiranjem permutacije p redom na prvih i te $i + 1$ elemenata. Očito je element q_i jednak ili r_i ili $r_i - 1$, a budući da je $r_i > r_{i+1}$ (jer je i pad), tada je i $q_i \geq r_{i+1}$ čime je zadovoljen uvjet (ii). Postoje još tri slučaja, ovisno o tome jesu li i i $i - 1$ padovi ili rastovi, a oni se dokazuju vrlo slično te svi zadovoljavaju uvjete za $\mathcal{P}(n)$. Dakle, ovako dobiven put je u $\mathcal{P}(n)$.

Preostaje nam za dokazati da se radi o bijekciji. Naime, trebamo dokazati da postoji inverz, odnosno da iz zadanog puta u $\mathcal{P}(n)$ možemo dobiti permutaciju p. Dovoljno je dokazati da možemo dobiti p_n te primijeniti indukciju po n za ostatak permutacije p. Da dobijemo p_n iz puta, jednostavno stavimo da je on jednak oznaci l zadnjeg ruba ako je on vertikalan, te $n+1-l$ ako je taj rub horizontalan. Uvjeti (ii) i (iii) osiguravaju da za p_n uvijek dobijemo broj između 1 i n. □

Na slici 1 vidimo jedan primjer gore opisanog postupka, tj. dobivanje najkraćeg puta iz zadane permutacije.

Sada smo spremni dokazati teorem o log-konkavnosti niza Eulerovih brojeva.



Slika 1: Put iz $\mathcal{P}(n)$ za permutaciju 341652.

Dokaz teorema 6.4. Konstruirat ćemo injekciju

$$\Phi : \mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1) \longrightarrow \mathcal{P}(n, k) \times \mathcal{P}(n, k)$$

koja će biti drugačije definirana na različitim dijelovima domene.

Neka je $(P, Q) \in \mathcal{P}(n, k-1) \times \mathcal{P}(n, k+1)$. Pozicioniramo P na točku $(0, 0)$ te Q na točku $(1, -1)$. Tada su završne točke od P i Q redom $(n-k+1, k-1)$ i $(n-k, k)$ što znači da Q počinje "ispod", a završava "iznad" P.

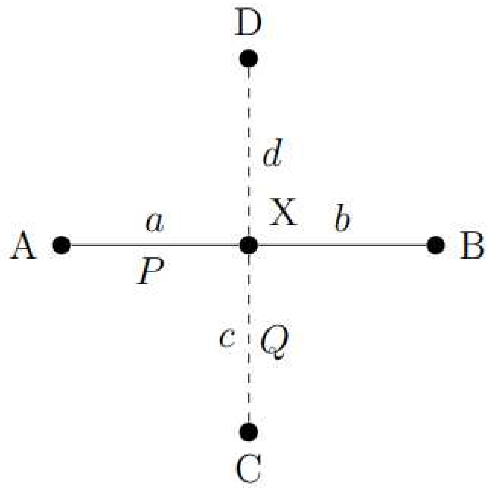
Neka je X prva zajednička točka P i Q. Uočimo da put P dolazi do točke X pomakom udesno, odnosno $(1, 0)$, dok Q dolazi do točke X pomakom prema gore, odnosno $(0, 1)$. Pokazat ćemo sada kako postupamo u slučaju kad ni P ni Q ne mijenjaju smjer u X, odnosno P napušta X s pomakom udesno, a Q s pomakom prema gore. Ostale slučajeve ćemo prokomentirati kasnije.

Napravimo dekopmozicije $P = P_1 \cup P_2$ te $Q = Q_1 \cup Q_2$ gdje je P_1 put od $(0, 0)$ do X, P_2 put od X do $(n-k+1, k-1)$, Q_1 put od $(1, -1)$ do X te Q_2 put od X do $(n-k, k)$. Neka su a, b, c i d oznake sva četiri ruba susjedna X, kao što možemo vidjeti na slici 2.

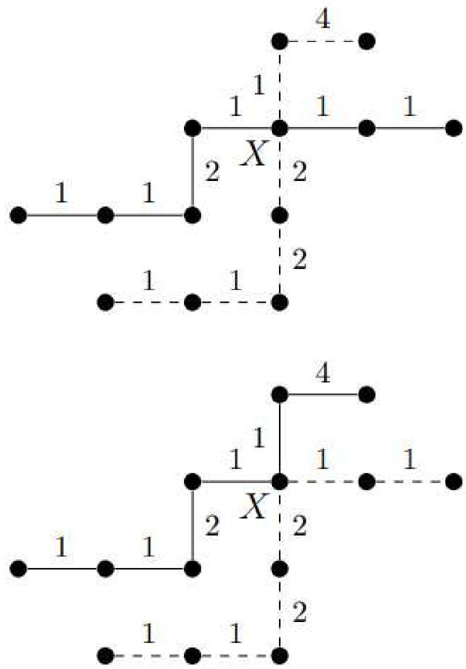
Napomenimo kako rubovi AX i XB pripadaju putu P dok rubovi CX i XD pripadaju putu Q. Zbog uvjeta (ii) iz $\mathcal{P}(n)$ u ovom slučaju vrijedi $a \geq b$ i $c \geq d$. Neka je $P' = P_1 \cup Q_2$ i $Q' = Q_1 \cup P_2$. Sada imamo dva slučaja.

1. Ako su P' i Q' valjani putevi, odnosno ako njihove oznake zadovoljavaju uvjete (i)-(iii), tada stavimo $\Phi(P, Q) = (P', Q')$. Promotrimo sliku 3 za navedeni postupak.

   Na ovaj način definirali smo Φ za parove $(P, Q) \in \mathcal{P}(n, k) \times \mathcal{P}(n, k)$ u kojima vrijedi $a + d \leq i$ i $b + c \leq i$, gdje je $i - 1$ suma dvije koordinate točke X. Napomenimo i kako nismo promijenili nijednu oznaku, odnosno u (P', Q') još uvijek vrijedi $a \geq b$ i $c \geq d$ iako to



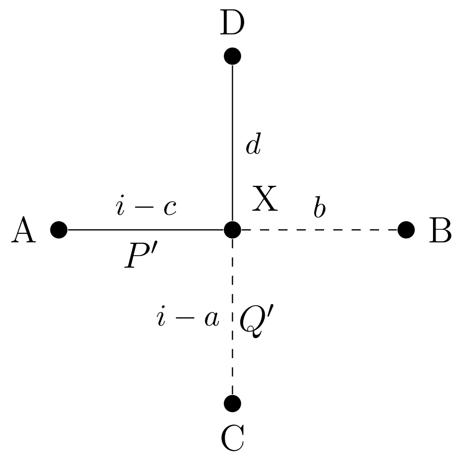
Slika 2: Točka X te oznake svih vrhova i rubova oko nje.



Slika 3: Novi par puteva, P' i Q', vrijedi $\Phi(P, Q) = (P', Q')$.

više nije nužno jer a i b te c i d više nisu dio istog puta. Očito je $\Phi(P,Q) = (P',Q') \in \mathcal{P}(n,k) \times \mathcal{P}(n,k)$ te je Φ injektivna.

2. Postoje parovi puteva $(P,Q) \in \mathcal{P}(n,k-1) \times \mathcal{P}(n,k+1)$ za koje ne možemo provesti prethodni postupak. To se dešava u slučaju kada vrijedi $a+d > i$ ili $c+b > i$. U ovom ćemo slučaju mijenjamo oznaku ruba AX u $i-c$ te oznaku ruba CX u $i-a$. Nakon toga postupamo kao i u prethodnom primjeru. Stavimo $\Phi(P,Q) = (P',Q')$ gdje je $P' = P_1 \cup Q_2$ i $Q' = Q_1 \cup P_2$. Postupak možemo vidjeti na slici 4.



Slika 4: Nove oznake svih vrhova i rubova oko točke X.

Tvrdimo da su P' i Q' valjani putevi. Budući da vrijedi ili $a+d > i$ ili $c+b > i$, mora vrijediti i $a+c > i$ zbog toga što je $a \geq b$ i $c \geq d$. Dakle, vrijedi $i-c < a$ i $i-a < c$ što znači da smo smanjili oznake rubova AX i XC. To je uvijek moguće što nam govori i propozicija 6.5. Vrijede i sva ograničenja za puteve P' i Q' budući da očito vrijede nejednakosti $i-c+d \leq i$ te $i-a+b \leq i$. Također, Φ je injektivna na ovom dijelu domene. Zadnje što nam preostaje za pokazati je tvrdnja da je slika ovog dijela domene disjunktna slici prethodnog dijela, iz prvog slučaja. Budući da na ovom dijelu domene vrijedi barem jedna od nejednakosti $a+d > i$ i $c+b > i$, vrijedi i barem jedna od nejednakosti $i-a < d$ i $i-c < b$. Dakle, barem jedan od parova rubova AX, XB te CX, XD ne zadovoljava svojstvo da je oznaka prvog ruba veća ili jednaka oznaci drugog. To svojstvo je u prvom slučaju zadovoljeno, pa su slike doista disjunktne.

Uz $\Phi(P,Q) = (P',Q')$, točka X je jedinstveno određena kao prva točka u kojoj se putevi P' i Q' sijeku. Slijedi da je preslikavanje Φ injekcija što dokazuje nejednakost

$$\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle \left\langle {n \atop k+1} \right\rangle \leq \left\langle {n \atop k} \right\rangle^2$$

čime je dokaz ovog slučaja gotov.

Preostaje nam pokazati slučajeve kada P ne izlazi iz točke X putem udesno, a Q putem prema gore. Te slučajeve pokazat ćemo na sličan način, gdje uvijek postoji prvo sjecište P i Q koje ima svojstvo takvo da je prije njega P bio iznad Q, dok je neposredno poslije njega Q iznad P. U prvom, već dokazanom slučaju, to sjecište je jedna točka (X), no to može biti i cijeli niz rubova.

Pretpostavimo sada da P ulazi u X udesno i to putem a, dok izlazi također prema desno i to putem b te Q ulazi u X prema gore putem c, dok iz njega izlazi udesno putem d. Iz ovoga slijede nejednakosti $a \geq b$ i $c + d \leq i$. Nastavljamo na sljedeći način.

1. U slučaju kada je $a \geq d$ i $b + c \leq i$ možemo jednostavno zamijeniti dijelove P i Q nakon točke X. Time ćemo dobiti valjane puteve.

2. U slučaju $b + c > i$ vrijedi i $a + c > i$ budući da je $a \geq b$. Ovdje zamijenimo oznaku a s $i - c$ te oznaku c s $i - a$. Zamijetimo kako će se obje oznake smanjiti tako da nećemo narušiti nijedan uvjet u odnosu na rubove prethodne njima. Sada također zamijenimo dijelove P i Q nakon točke X. Kod P imamo dva ruba koja ne mijenjanu smjer s oznakama $i - c$ i d što je valjano jer je $i - c \geq d$ iz $c + d \leq i$, dok u Q imamo dva okomita ruba s oznakama $i - a$ i b što je također valjano zbog $a \geq b$.

Dakle, u ova dva slučaja Φ je injektivna. Preostaje nam zadnji slučaj, kada imamo $b + c \leq i$ i $a < d$. U ovom slučaju moramo promotriti kako P i Q izgledaju nakon podudarajućih pomaka udesno koji izlaze iz X. Ta dva puta mogu imati podudarajuće rubove proizvoljno dugo nakon X, no nakon što se prvi puta razdvoje, Q će imati pomak prema gore, dok će P imati pomak udesno što slijedi iz toga kako smo definirali X u ovom slučaju.

Neka su $b_1, b_2, \ldots, b_k$ oznake od P na podudarajućem segmentu i neka su $d_1, d_2, \ldots, d_k$ oznake od Q na istom tom segmentu. Označimo s b' oznaka ruba udesno koji slijedi nakon b_k te s d' oznaku ruba prema gore koji slijedi nakon d_k. Sada ćemo definirati preslikavanje Φ na sljedeći način.

1. Ako postoji indeks j takav da vrijedi $b_j \geq d_{j+1}$ i $d_j \geq b_{j+1}$, tada nađimo najmanji takav te zamijenimo dijelove P i Q počevši s rubovima b_{j+1} i d_{j+1}. Primijetimo kako je ovaj postupak reverzibilan, odnosno možemo dobiti originalne dijelove od P i Q iz slike.

2. U slučaju da ne postoji takav j, vrijedi $d_j > b_j$ za sve j. Naime, vrijedi $d_0 = d > a \geq b_0 = b$. Dakle, $d_0 > b_1$ te iz činjenice da za $j = 1$ ne vrijedi gornje svojstvo imamo $d_1 > b_0 = b \geq b_1$. Analogno dokazujemo za d_2 i b_2 te nakon toga za sve d_j i b_j. U ovom slučaju mijenjamo dijelove P i Q počevši s b' i d'.

Na ovaj način dobivamo valjan put jer vrijede nejednakosti $b_k + b' < d_k + d'$ (gdje je desna strana dovoljno mala da ne krši uvjete u Q) te $d_k \geq b_k \geq b'$.

Definirali smo injektivnu funkciju Φ u svim mogućim slučajevima te iz toga slijedi log-konkavnost niza Eulerovih brojeva. Time je dokaz teorema gotov.

□

Sada ćemo navesti još jedno svojstvo nizova pozitivnih realnih brojeva koje je još jače od log-konkavnosti.

Definicija 6.7. *Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ niz pozitivnih realnih brojeva. Kažemo da ovaj niz ima* samo realne korijene *ili* samo realne nultočke *ako polinom $\sum_{i=0}^{n} a_i z^{i+1}$ ima samo realne nultočke.*

Napomenimo kako niz možemo zapisati kao $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ te je ponekad lakše promatrati polinom $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, koji ima samo realne nultočke ako i samo ako ih ima i $\sum_{i=0}^{n} a_i z^{i+1}$.

Primjer 6.8. Neka je za sve prirodne brojeve n zadan niz $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ s $a_i = \binom{n}{i}$. Za ovako definiran niz vrijedi $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i = (1+z)^n$ što znači da su sve nultočke polinoma jednake -1. Na ovaj način smo dokazali da ovako zadan niz zaista ima samo realne korijene.

Svojstvo niza da ima samo realne korijene je jače od log-konkavnosti, što ćemo dokazati u narednom teoremu.

Teorem 6.9. *Ako niz pozitivnih realnih brojeva ima samo realne korijene, tada je log-konkavan.*

Dokaz. Neka je $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ naš niz te neka su polinomi $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ i $Q(x, y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i}$. Tada za sve nultočke (x, y) polinoma $Q(x, y)$ omjer (x/y) mora biti realan zbog toga što bi u suprotnom (x/y) bila nultočka od $P(z)$ koja nije realna što nije moguće. Po Rolleovom teoremu ovo vrijedi i za parcijalne derivacije $\partial Q/\partial x$ i $\partial Q/\partial y$. Iteracijom ovog argumenta zaključujemo da polinom

$$\frac{\partial^{a+b}Q}{\partial x^a\,\partial y^b}$$

također ima samo realne nultočke za $a+b \leq n+1$. Posebno, ovo vrijedi u posebnom slučaju kada je $a = j-1$ te $b = n-j-1$, gdje je j fiksni. Ovo implicira da kvadratni polinom

$$R(x,y) = \frac{\partial^{n-2}Q}{\partial x^{j-1}\,\partial y^{n-j-1}}$$

ima samo realne nultočke, iz čega lako zaključujemo da je diskriminanta od $R(x,y)$ nenegativna. Polinom $R(x,y)$ možemo odrediti gledajući samo relevantne parcijalne derivacije. Naime, potrebno je gledati vrijednosti od i samo od $j-1$ do $j+1$ jer svi ostali sumandi polinoma $Q(x,y)$ nestaju nakon deriviranja. Imamo

$$\begin{aligned} R(x,y) = {} & a_{j-1}(j-1)!\frac{1}{2}(n-j+1)!y^2 + a_j j!(n-j)!xy \\ & + a_{j+1}(n-j-1)!\frac{1}{2}(j+1)!x^2. \end{aligned}$$

Iz činjenice da ovaj polinom ima nenegativnu disktiminantu dobivamo

$$a_j^2 \geq \frac{j+1}{j} \cdot \frac{n-j+1}{n-j} \cdot a_{j-1} \cdot a_{j+1} \tag{8}$$

iz čega očito slijedi log-konkavnost, odnosno $a_j^2 \geq a_{j-1} \cdot a_{j+1}$ budući da su prva dva faktora veća od 1. □

Suprotni smjer ne vrijedi, odnosno log-konkavan niz ne mora imati samo realne korijene. Primjer navedenog je niz $1,1,1$ koji je očito log-konkavan, no polinom $P(z) = 1 + z + z^2$ ima dvije kompleksne nultočke.

Svojstvo niza da ima samo realne korijene je vrlo koristan alat za dokazivanje log-konkavnosti te unimodalnosti zbog toga što je to često jedini ili najlakši način za dokazati ta svojstva. U nekim slučajevima se log-konkavnost i unimodalnost mogu dokazati i na druge načine, no to nam ne govori uvijek gdje se nalazi maksimum niza i koliko maksimuma sami niz ima. Primijetimo kako je konstantni niz ujedno i log-konkavan, pa log-konkavan niz može imati bilo koji broj maksimuma. S druge strane, kod nizova sa samo realnim korijenima je situacija drugačija, što ćemo vidjeti u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 6.10. *Ako niz* $\{a_k\}_{0\le k\le n}$ *ima samo realne korijene, tada ima ili jedan ili dva maksimalna elementa.*

Dokaz. Iz (8) dobivamo

$$\frac{a_j}{a_{j-1}} \geq \frac{j+1}{j} \cdot \frac{n-j+1}{n-j} \cdot \frac{a_{j+1}}{a_j}$$

te budući da je $\frac{j+1}{j} \cdot \frac{n-j+1}{n-j}$ strogo veće od 1, očito je $\frac{a_j}{a_{j-1}} > \frac{a_{j+1}}{a_j}$ za svaki j takav da je $1 \leq j \leq n-1$. Dakle, niz a_{j+1}/a_j je strogo padajuć te stoga može biti jednak 1 za samo jedan j. $\square$

Sljedećim teoremom dokazat ćemo da nizovi Eulerovih brojeva zadovoljavaju i ovo zadnje, najjače svojstvo.

Teorem 6.11. *Za svaki fiksni* n*, niz Eulerovih brojeva* $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle_k$ *ima samo realne korijene. Drugim riječima, sve nultočke polinoma*

$$A_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle z^k$$

su realne.

Dokaz. Zamijetimo kako iz teorema 3.10 slijedi

$$A_n(z) = (z - z^2)A'_{n-1}(z) + nzA_{n-1}(z)$$

gdje je $n \geq 1$ te $A_0(z) = z$. Naime, koeficijent na lijevoj strani uz z^k je $\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$, dok je koeficijent uz z^k na desnoj strani jednak

$$\begin{aligned} &k \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle - (k-1) \left\langle {n-1 \atop k-2} \right\rangle + n \left\langle {n-1 \atop k-2} \right\rangle = \\ =&k \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle + (n-k+1) \left\langle {n-1 \atop k-2} \right\rangle = \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Zamijetimo sada kako desna strana jednakosti sliči formuli za derivaciju produkta. Pomoću ovoga dobivamo

$$A_n(z) = z(1-z)^{n+1} \frac{d}{dz} \left\{ (1-z)^{-n} A_{n-1}(z) \right\}. \tag{9}$$

uz $n \geq 1$ te $A_0(z) = z$.

Polinom $A_0(z) = z$ nestaje samo za $z = 0$. Pretpostavimo sada induktivno da $A_{n-1}(z)$ ima $n-1$ jedinstvenih realnih korijena od čega je jedan

$z = 0$, dok su ostali negativni. Iz (9) lako zamijećujemo kako $A_n(z)$ nestaje u nuli. Nadalje, po Rolleovom teoremu te iz (9) vidimo da $A_n(z)$ ima nultočku između svakog para uzastopnih nultočaka $A_{n-1}(z)$. Ovime dobijemo $n - 1$ nultočaka funkcije izvodnice $f_n(z)$ pa tako znamo da su sve one realne. Preostala nam je još samo jedna nultočka koja također mora biti realna zbog toga što nijedan polinom ne može imati samo jednu kompleksnu nultočku budući da one dolaze u konjugiranim parovima. Ovime je dokaz završen. $\square$

7 Eulerovi brojevi druge vrste

Na kraju ćemo definirati Eulerove brojeve druge vrste te navesti neke identitete koje oni zadovoljavaju.

Definicija 7.1. Eulerov broj druge vrste $T(n, k)$, *ili* $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ $(0 \leq k \leq n - 1)$ *označava broj permutacija multiskupa* $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ *s točno* k *padova (ili rastova) koje imaju svojstvo da za svaki* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *svi brojevi koji se pojavljuju između dva elementa* j *u permutaciji moraju biti veći od* j.

Na primjer, 323211 nije valjana permutacija jer se između dva elementa 3 nalazi broj manji od 3.

Primjer 7.2. *Neka je* $n = 3$. *Imamo samo jednu traženu permutaciju bez padova i to je* 112233. *Permutacija s jednim padom imamo* 8 *i to su*

$$221133, 223311, 113322, 331122, 122133, 112332, 133122, 122331$$

dok je permutacija s dva pada ukupno 6, *i to*

$$221331, 233211, 133221, 331221, 332211, 123321.$$

Dakle, $\left\langle\!\left\langle {3 \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1$, $\left\langle\!\left\langle {3 \atop 1} \right\rangle\!\right\rangle = 8$ *i* $\left\langle\!\left\langle {3 \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle = 6$.

Pogledajmo sada trokut Eulerovih brojeva druge vrste.

n	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 1} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 2} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 3} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 4} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 5} \right\rangle\!\right\rangle$	$\left\langle\!\left\langle {n \atop 6} \right\rangle\!\right\rangle$
0	1						
1	1	0					
2	1	2	0				
3	1	8	6	0			
4	1	22	58	24	0		
5	1	52	328	444	120	0	
6	1	114	1452	4400	3708	720	0

Tablica 7.1. Eulerovi brojevi druge vrste $\left\langle\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ za $0 \leq k \leq n \leq 6$.

Sada ćemo dokazati analogon Pascalove rekurzije za Eulerove brojeve druge vrste i to na vrlo sličan način kao i za Eulerove brojeve prve vrste.

Teorem 7.3. *Za sve pozitivne cijele brojeve k i n takve da je $k < n$ vrijedi*

$$\left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle = (k+1)\left\langle\!\!\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle + (2n-k-1)\left\langle\!\!\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle\!\!\right\rangle.$$

Dokaz. Promotrimo prvo permutaciju $p' = p_1 p_2 \cdots p_{2n-3} p_{2n-2}$ multiskupa $\{1, 1, 2, 2, \dots, n-1, n-1\}$. Uočimo da dva elementa n u permutaciju p' moramo ubaciti "zajedno", zbog toga što nema elemenata većih od n te se stoga između njih ne može pojaviti nijedan drugi element. Dakle, ubacivanjem tog para elemenata u permutaciju p' broj padova može ostati isti ili se povećati za jedan te se stoga $2n$-permutacija multiskupa s k padova može dobiti na dva načina iz $2(n-1)$-permutacije multiskupa. Prvi način je kad p' već ima k padova te se ubacivanjem dva elementa n u paru taj broj neće promijeniti, dok je drugi način kad p' ima $k-1$ padova te se ubacivanjem n uzrokuje jedan novi pad tako da ih nakon toga ima k.

Promotrimo prvi slučaj. Broj padova se neće promijeniti ako par elemenata n stavimo ili na zadnje mjesto ili između dva elementa gdje se već nalazi pad. Naime, očito je $p_{2n-2} < n$ pa dodavanjem n na zadnje mjesto ne stvaramo novi pad. S druge strane, ubacivanjem nn između dva elementa p_i i p_{i+1} za koje vrijedi $p_i > p_{i+1}$, u novoj permutaciji imat ćemo niz $\dots, p_i, n, n, p_{i+1}, \dots$. Budući da je n veći i od p_i i od p_{i+1}, imat ćemo pad između n i p_{i+1}, dok će ostatak permutacije ostati nepromijenjen te na taj način broj padova ostaje isti. Dakle, n možemo ubaciti na k mjesta gdje već imamo padove te na zadnje mjesto p' što nam daje prvi sumand.

U slučaju kada $(n-1)$-permutacija multiskupa ima $k-1$ padova, par nn možemo staviti ili na prvo mjesto ili između bilo koja dva elementa između kojih nemamo pad. Naime, očito je $n > p_1$. S druge strane, za neki indeks i za koji nemamo rast, odnosno vrijedi $p_i \le p_{i+1}$, imamo $n > p_i$ te $n > p_{i+1}$ te ubacivanjem nn permutacija izgleda $\dots, p_i, n, n, p_{i+1}, \dots$, odnosno stvoren je jedan novi pad između n i p_{i+1}. Ukupno postoji $1 + (2n-3) - (k-1) = 2n-k-1$ mogućih pozicija za n u ovom slučaju što nam daje drugi sumand.

Sada po principu sume lako zaključujemo da identitet iz teorema zaista vrijedi. $\square$

Teorem 7.4. *Eulerovi brojevi druge vrste zadovoljavaju eksplicitnu formulu*

$$\left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle = \sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_{k+1}=n-k-1 \\ t_j \ge 0,\, j=1,2,\dots,k+1}} 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots (k+1)^{t_{k+1}} (2(t_1+2))(2(t_1+t_2)+3) \cdots$$

$$\cdots (2(t_1+\cdots+t_k)+(k+1)).$$

Dokaz. Koristit ćemo indukciju po n. Očito je da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za n te $0 \leq k \leq n-1$. Promotrimo $\left\langle\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\right\rangle$ gdje je $0 \leq k \leq n$. Iz teorema 7.3 te pretpostavke indukcije imamo

$$\left\langle\!\!\left\langle {n+1 \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle = (k+1)\left\langle\!\!\left\langle {n \atop k} \right\rangle\!\!\right\rangle + (2n-k-1)\left\langle\!\!\left\langle {n \atop k-1} \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= (k+1) \sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_{k+1}=n-k-1 \\ t_j \geq 0,\, j=1,2,\ldots,k+1}} 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots (k+1)^{t_{k+1}} (2t_1+2) \cdots \\
&\cdots (2(t_1+\cdots+t_k)+(k+1)) + \\
&+ (2n-k+1) \sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_k=n-k \\ t_j \geq 0,\, j=1,2,\ldots,k}} 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots k^{t_k} (2t_1+2)(2(t_1+t_2)+3) \cdots \\
&\cdots (2(t_1+\cdots+t_{k-1})+k) \\
&= \sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+(t_{k+1}+1)=n-k \\ t_j \geq 0,\, j=1,2,\ldots,k+1}} 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots (k+1)^{t_{k+1}+1} (2t_1+2)(2(t_1+t_2)+3) \cdots \\
&\cdots (2(t_1+\cdots+t_k)+(k+1)) + \\
&+ \sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_k=n-k \\ t_j \geq 0,\, j=1,2,\ldots,k}} 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots k^{t_k} (2t_1+2)(2(t_1+t_2)+3) \cdots \\
&\cdots (2(t_1+\cdots+t_{k-1})+k)(2(n-k)+(k+1)) \\
&= \sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots+(h_{k+1})=n-k \\ h_j \geq 0,\, j=1,2,\ldots,k, h_{k+1} \geq 1}} 1^{h_1} 2^{h_2} \cdots (k+1)^{h_{k+1}} (2h_1+2)(2(h_1+h_2)+3) \cdots \\
&\cdots (2(h_1+\cdots+h_k)+(k+1)) + \\
&+ \sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_k+t_{k+1}=n-k \\ t_j \geq 0,\, j=1,2,\ldots,k, t_{k+1}=0}} 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots (k+1)^{t_{k+1}} (2t_1+2)(2(t_1+t_2)+3) \cdots \\
&\cdots (2(t_1+\cdots+t_k)+(k+1)) \\
&= \sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_{k+1}=n-k \\ t_j \geq 0,\, j=1,2,\ldots,k+1}} 1^{t_1} 2^{t_2} \cdots (k+1)^{t_{k+1}} (2t_1+2)(2(t_1+t_2)+3) \cdots \\
&\cdots (2(t_1+\cdots+t_k)+(k+1))
\end{aligned}$$

što znači da tvrdnja teorema vrijedi za $n+1$. Time je dokaz gotov. $\square$

Literatura

[1] M. Bóna, *Combinatorics of permutations, 3rd edition*, CRC Press, 2022.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics, 2nd edition*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[3] V. Krčadinac, *Kombinatorika*, skripta, PMF-MO, Zagreb, 2024., dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/komb/komb-skripta.pdf`

[4] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, PMF-MO, Zagreb, 2024., dostupno na:
`https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf`

[5] D. Qi, *Note: On the second order Eulerian numbers*, Australasian Journal of Combinatorics 50 (2011), 183-185.

[6] Wikipedia, *Eulerian number*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_number` (siječanj 2025.)

[7] Wikipedia, *Leonhard Euler*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler` (siječanj 2025.)

[8] Wikipedia, *Combinatorics*, dostupno na:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics` (siječanj 2025.)

Sažetak

Za prirodni broj i kažemo da je pad u permutaciji $p = p_1p_2 \dots p_n \in S_n$ ako vrijedi $p_i > p_{i+1}$. Eulerov broj $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ označava broj permutacija stupnja n s točko k padova. U radu prvo objašnjavamo matematičke principe poput prebrojavanja, permutacija i binomnih koeficijenata kako bismo osigurali podlogu za razumijevanje nastavka rada. Eulerove brojeve definiramo kroz koncept padova u permutacijama, što omogućuje istraživanje njihovih osnovnih svojstava i različitih identiteta koje zadovoljavaju. Posebno su naglašene rekurzivne metode za računanje Eulerovih brojeva, kao i eksplicitne formule.

Istražena je i veza između Eulerovih i Stirlingovih brojeva druge vrste, gdje su navedene formule za njihov međusobni odnos. Nakon toga su definirane funkcije izvodnice čiji su članovi Eulerovi brojevi, a u posebnom se dijelu analizira niz Eulerovih brojeva te dokazuje svojstvo log-konkavnosti. Na kraju rada uvodimo koncept Eulerovih brojeva druge vrste i iskazujemo neka njihova osnovna svojstva, kao i eksplicitnu formulu za njihovo računanje.

Summary

We say that a positive integer i is a descent of the permutation $p = p_1p_2\dots p_n \in S_n$ if $p_i > p_{i+1}$ holds. Eulerian number $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ denotes the number of n-permutations with exactly k descents. The paper begins by explaining basic mathematical principles such as counting, permutations, and binomial coefficients, providing the groundwork for understanding the remainder of the study. Eulerian numbers are defined through the concept of descents in permutations, enabling the exploration of their fundamental properties and various identities they satisfy. Recursive methods for calculating Eulerian numbers, as well as explicit formulas, are emphasized.

The relationship between Eulerian numbers and Stirling numbers of the second kind is also examined, with formulas provided for their interconnection. Generating functions whose terms are Eulerian numbers are then defined, and log-concavity of Eulerian numbers is proved. Finally, the concept of second order Eulerian numbers is introduced, outlining their basic properties and presenting an explicit formula for their computation.

Životopis

Rođen sam 22. lipnja 2001. u Čakovcu. Osnovnu školu pohađao sam u Svetom Martinu na Muri, a 2015. svoje obrazovanje nastavljam u Gimnaziji Josipa Slavenskog Čakovec, gdje sam upisao prirodoslovno-matematički smjer. Po završetku srednje škole, 2019. godine, upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, sveučilišni preddiplomski studij matematike. Titulu sveučilišnog prvostupnika matematike stekao sam 2022. godine, a obrazovanje nastavljam na diplomskom studiju Matematička statistika, na istom fakultetu.