Smoljan, Marin

Master's thesis / Diplomski rad

2025

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:031620

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: 2025-03-24



Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET MATEMATIČKI ODSJEK

Marin Smoljan

DINAMIKA LJUDSKOG TIJELA

Diplomski rad

Voditelj rada: prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, veljača, 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana	pred ispitnim povjerenstvom	
u sastavu:		

 1.
 _______, predsjednik

 2.
 _______, član

 3.
 _______, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

- 1. _____
- 2. _____
- 3.

Zahvala Roditeljima na podršci

Sadržaj

Sadržaj			iv
U	vod		1
1	Ana	tomija i struktura ljudskog tijela	3
	1.1	Kosti i mišići	3
	1.2	Poluge	4
	1.3	Notacija ljudskih pokreta	5
2	Teor	rijski okvir	7
	2.1	Kinematika krutog tijela	7
	2.2	Dinamika krutog tijela	13
3	Ana	liza pokreta	18
	3.1	Opis pokreta	18
	3.2	Skica pokreta	19
	3.3	Izvod Lagrangeove funkcije	20
	3.4	Generalizirane sile	24
	3.5	Jednadžba gibanja	28
	3.6	Određivanje parametara	29
	3.7	Numeričko rješenje	30
	3.8	Izbačaj i domet kugle	32
	3.9	Sile u zglobovima	34
л,		C1	25

Bibliografija

Uvod

Ljudski lokomotorni sustav je složen sustav u kojem čak i najobičniji pokreti na koje smo svakodnevno navikli, poput hodanja, predstavljaju veliki izazov u analizi pokreta. Analiza ljudskog gibanja je nužna za napredak raznih disciplina poput medicine, sportske znanosti, rehabilitacije, omogućava razvoj protetike, robotike, optimizacije sportskih performansi, te liječenje poremećaja gibanja.

Kao i u općenitom matematičkom modeliranju, potrebno je krenuti od jednostavnijih modela koji će dovoljno dobro opisati željeni pokret, prije nego se krene u detaljniju analizu. Očit problem u modeliranju ljudskog tijela je velik broj varijabli potrebnih za opis gibanja, pa da smanjimo broj potrebnih varijabli s kojima radimo, analizu ćemo provesti pojednostavljenjem pokreta na način da koristimo manji broj krutih tijela za opis pokreta, svođenjem na ravninsko gibanje, te koristeći Lagrangeovu mehaniku.

Lagrangeova mehanika pokušava predviditi kako se čestica sustava giba prateći volju prirode, a kako priroda nalaže opisano je principom najmanje akcije. Taj princip kaže da integral Lagrangeove funkcije, koji nazivamo akcija,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$$

gdje je L = T - V razlika kinetičke i potencijalne energije, mora biti stacionaran, odnosno da se varijacija funkcionala poništava. Iz ovog principa izvedena je Euler-Lagrangeova jednadžba

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

za svaku generaliziranu koordinatu q_i . Gerenalizirane koordinate su varijable koje u potpunosti opisuju položaj dinamičkog sustava koji promatramo, po uzoru na [1]. Euler-Lagrangeova jednadžba nam daje putanju gibanja čestice kojoj smo definirali kinetičku i potencijalnu energiju, odnosno putanju sustava krutih tijela.

Cilj ovog rada je pokazati kako možemo modelirati pokret ljudskog tijela kao sustav krutih tijela povezanih u zglobovima, te na tu strukturu dodati silu mišića koja će uzrokovati pokret. To ćemo napraviti definiranjem generaliziranih sila Q_i i njihovim uvođenjem u Euler-Lagrangeove jednadžbe sustava. Dobiveni model se može proširiti dodavanjem

SADRŽAJ

otpora zraka, promatranjem ekstremnih kuteva i ozljeda ligamenata pri njima, modeliranje realistične sile mišića pomoću inverzne dinamike i još mnogo načina.

Poglavlje 1

Anatomija i struktura ljudskog tijela

1.1 Kosti i mišići

Ljudsko tijelo ima 206 kostiju povezanih ligamentima, te oko 700 mišića od kojih je većina spojena na kosti preko vezivnog tkiva - tetiva. Dijelimo ih na duge, kratke i plosnate, a za dinamiku ljudskog tijela su najvažnije duge, poput bedrene kosti. Kosti su međusobno povezane ligamentima u spojevima koje nazivamo zglobovi. Prema građi, zglobovi se dijele na

- Vezivni (npr. spojevi između kosti lubanje)
- Hrskavični (npr. preponska simfiza)
- Pravi ili sinovijalni najpokretljiviji, plohe su prekrivene hrskavicom, a unutar zglobne šupljine se nalazi sinovijalna tekućina koja podmazuje i hrani zglobnu hrskavicu. Zglob omeđuju dva lista zglobne čahure, a učvršćuju ga ligamenti, koji imaju stabilizacijsku ulogu, te ograničavaju amplitudu pokreta.

Prema obliku i funkciji ih dijelimo na

- Kutni omogućuju pokret samo u jednoj ravnini, npr. zglobovi između članaka prstiju
- Obrtni omogućuju samo rotaciju oko središnje osovine zgloba, npr. zglob između prvog i drugog vratnog kralješka
- Klizni omogućuju pokret klizanja između ravnih zglobnih ploha, npr. između pojedinih kostiju zapešća
- Jajoliki omogućuju pokrete u dva smjera, npr. ručni zglob

- Sedlasti jedno zglobno tijelo je udubljeno, a drugo izbočeno, omogućuje pokret u dva smjera, npr. zglob na bazi palca
- Kuglasti zglob udubljeno zglobno tijelo obuhvaća konveksno koje je pravilnog oblika, omogućuju pokrete u svim smjerovima, npr. zglob kuka

Kosti su sastavljene od minerala, najviše kalcija koji ih čini krutima, te kolagena koji omogućuje fleksibilnost, te spriječava lomove. S druge strane, mišići su sastavljeni od mišićnih vlakana, koja imaju sposobnost skraćivanja. Vlakna čine snopove povezane ovojnicama, a na kraju mišića se skupljaju u čvrsti snop vlakana koja čine tetivu vezanu za kost. Tetiva kontrakciju mišića prenosi na kost i na taj način omogućuje pokret. Ako mišić ima više polazišnih tetiva govorimo o dvoglavom (biceps), troglavom (triceps) ili četveroglavom (quadriceps) mišiću. Mišiće dijelimo na

- Poprečnoprugasti ili skeletni vezani za kosti, te su pod utjecajem naše volje
- Glatki oblikuju stijenke krvnih žila i unutrašnjih organa

Pri izvođenju pokreta, mišići koji izvode pokret se nazivaju agonisti, a mišići koji izvode suprotni pokret antagonisti, dok se oni koji indirektno sudjeluju u pokretu nazivaju sinergisti. Ako promotrimo pokret vertikalnog skoka, agonisti, odnosno glavni pokretači su veliki mišić stražnjice, četveroglavi bedreni mišić, te mišići lista. Antagonisti su Iliopsoas koji spriječava prekomjerno ispružanje kuka, mišići stražnje strane bedra, te prednji mišić potkoljenice. Uz to imamo i razne mišiće sinergiste koji služe stabilizaciji pokreta, a to su mišići trupa, te aduktori i abduktori kuka.

1.2 Poluge

Mišići djeluju na kosti tako što ih koriste kao poluge za izvođenje pokreta ili podizanje tereta. Poluga je kruta struktura koja rotira oko uporišta - zgloba. Imamo tri vrste poluga u ljudskom lokomotornom sustavu

- Poluga prvog reda ima uporište u sredini, a vanjska sila i teret djeluju na suprotnim stranama (na primjer mišići vrata djeluju na glavu, uporište je prvi vratni kralježak)
- Poluga drugog reda ima uporište na jednoj strani, teret u sredini, a vanjska sila djeluje na drugoj strani (troglavi gnjatni mišić preko zgloba noge djeluje na stopalo). Ova vrsta poluge povećava silu pod cijenu manje brzine i dometa pokreta.
- Poluga trećeg reda ima uporište na jednoj strani, vanjska sila djeluje u sredini, a teret je na drugoj strani (biceps djeluje na podlakticu između lakta i težišta podlaktice). Ova vrsta poluge naglašava brzinu i domet pokreta pod cijenu jačine sile.

Na slici (1.1) može vidjeti grafički prikaz navedenih vrsta poluga.



Slika 1.1: Vrste poluga u ljudskom tijelu

1.3 Notacija ljudskih pokreta

Ako postavimo središte koordinatnog sustava $\{x_1, x_2, x_3\}$ u težište ljudskog tijela, pri čemu je x_1 usmjeren prema lijevo, x_2 prema gore, a x_3 prema naprijed, kao na slici (1.2), možemo definirati tri ravnine: frontalna $\{x_1, x_2\}$, sagitalna $\{x_2, x_3\}$ i transverzalna $\{x_3, x_1\}$. Obzirom



Inferior

Slika 1.2: Položaj ravnina ljudskog tijela

na te ravnine, imamo sljedeću podjelu pokreta:

- Fleksija i ekstenzija pokreti paralelni sagitalnoj ravnini prema naprijed i prema natrag respektivno.
- Abdukcija i adukcija pokreti od ili prema centru tijela

- Rotacija
- Elevacija i depresija podizanje i spuštanje ramena
- Ostali pokreti: pronacija i supinacija podlaktice, kruženje...

Od prethodno definiranih pojmova, u ovom radu ćemo se fokusirati na duge kosti i poprečnoprugaste mišiće, posebno agoniste, a nećemo se specijalno baviti antagonistima te ograničavanjem pokreta i hiperekstenzijom. Od zglobova ćemo promotriti kutne i kuglaste zglobove, od poluga one treće vrste, te od pokreta fleksiju i ekstenziju.

Poglavlje 2

Teorijski okvir

Ovaj rad se nastavlja na kolegij Metode matematičke fizike [2], posebno na dio o Lagrangeovoj mehanici i krutim tijelima. Cilj nam je u već poznate Euler-Lagrangeove jednadžbe dodati i generalizirane sile Q_i , odnosno desnu stranu jednadžbi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{2.1}$$

za i = 1, ..., n pri čemu je *n* broj generaliziranih koordinata. To će predstavljati mišićnu silu i momente oko zglobova, te omogućiti simulaciju pokreta.

2.1 Kinematika krutog tijela

Kinematika se bavi opisom gibanja krutog tijela bez razmatranja sila i momenata koji uzrokuju gibanje. Uvodimo pojmove kojima ćemo moći definirati položaj, brzinu, i akceleraciju krutog tijela, te njihove momente.

Čestica je tijelo bez volumena, koristimo je u modeliranju kada je dimenzija tijela puno manja nego njegova putanja gibanja i u tom slučaju zanemarujemo rotaciju tijela, te gibanje opisujemo sa 3 translacijska stupnja slobode. Kruto tijelo definiramo kao tijelo sa fizičkom dimenzijom, takvo da su udaljenosti između čestica od kojih je sastavljeno konstantne. Kad za takvo tijelo uzmemo u obzir i njegovu rotaciju dobivamo ukupno 6 stupnjeva slobode. Uz to moramo izračunati i veličine koje nam govore o distribuciji mase u tijelu, to jest o otporu tijela rotaciji oko pripadne osi.

Centar mase

Kako na kruto tijelo gledamo kao na neprekidno tijelo, moramo uvesti način na koji ćemo definirati položaj tog tijela. Za to će nam trebati položaj neke točke na tijelu, te kutovi koji

opisuju kako je tijelo rotirano u odnosu na osi koje prolaze tom točkom. Najvažnija točka tijela će nam biti centar mase tijela. Centar mase G krutog tijela Ω definiramo sa

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{G}} = \frac{1}{m} \int_{\Omega} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}) \rho(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

pri čemu je r(X) radijvektor točke X, $\rho(X)$ gustoća, a $m = \int_{\Omega} \rho(X) dX$ masa tijela. Koristeći zapis

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}) = \mathbf{r}_{\mathbf{G}} + \phi(\mathbf{X}) \tag{2.2}$$

gdje je $\phi(X)$ radijvektor točke X od centra mase G, dobivamo

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{G}} = \frac{1}{m} \int_{\Omega} (\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{G}} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X})) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{G}} + \frac{1}{m} \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

iz čega slijedi

$$\int_{\Omega} \phi(X) \rho(X) dX = 0 \tag{2.3}$$

to jest, težinska sredina vektora pomaka od centra mase je jednaka nula. Slično, uvrštavanjem brzine i akceleracije točke krutog tijela zapisane pomoću $\phi(X)$,

$$v(X) = v_G + \dot{\phi}(X)$$
 $a(X) = a_G + \ddot{\phi}(X)$

u definicije brzine i akceleracije centra mase G,

$$v_G = \frac{1}{m} \int_{\Omega} v(X) dX$$
 $a_G = \frac{1}{m} \int_{\Omega} a(X) dX$

dobivamo

$$\int_{\Omega} \dot{\phi}(X) dX = 0 \qquad \qquad \int_{\Omega} \ddot{\phi}(X) dX = 0$$

U modeliranju najčešće koristimo pravilna homogena tijela pa je r_G lako odrediti koristeći osnovnu geometriju.

Tenzor tromosti

Sada ćemo definirati moment inercije, veličinu koja opisuje otpor tijela rotaciji, a ovisi o tome kako je masa raspoređena po tijelu¹. Neka je V realni trodimenzionalni unitarni prostor. Definiramo linearan operator $I: V \to V$ sa

$$Ie = \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{X}) \times (\mathbf{e} \times \mathbf{r}(\mathbf{X}))\rho(\mathbf{X})d\mathbf{X}.$$
(2.4)

¹Centar mase smo odredili koristeći prvi moment, a moment inercije ćemo odrediti koristeći drugi moment distribucije mase.

Po zadatku 13.1 iz [2] znamo da je tenzor tromosti simetričan pozitivno definitan linearan operator. Matrični zapis tenzora tromosti se sastoji od momenata inercije. Neka radijvektor točke X u bazi (i, j, k) ima zapis

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}) = X_1 \mathbf{i} + X_2 \mathbf{j} + X_3 \mathbf{k} \,. \tag{2.5}$$

Zanimaju nas dvije vrste veličina:

- 1. distribucija mase obzirom na neku os
- 2. distribucija mase obzirom na neku ravninu

Dijagonalne elemente matrice I, definirane sa

$$I_{ii} = \int_{\Omega} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{3} X_k^2 \rho(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$
(2.6)

zovemo *aksijalni momenti tromosti* i oni opisuju distribuciju mase oko osi *i*, a vandijagonalne

$$I_{ij} = -\int_{\Omega} X_i X_j \rho(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad i \neq j$$
(2.7)

devijacijski momenti tromosti koji opisuju distribuciju mase oko ravnine *i*, *j*. Primjetimo najprije da iz definicije devijacijskih momenata tromosti slijedi $I_{ij} = I_{ji}$ (što potvrđuje simetričnost tenzora tromosti). Nadalje, ako je tijelo simetrično obzirom na ravninu *i*, *j* (a tijelo je homogeno ili je i gustoća simetrična obzirom na ravninu *i*, *j*), tada je pripadni integral jednak nula pa je $I_{ij} = I_{ji} = 0$. Moment tromosti oko proizvoljne osi ξ definiramo kao

$$I_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{\Omega} d(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi})^2 \rho(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}$$

pri čemu je $d(X, \xi)$ udaljenost točke X od osi ξ .

Promotrimo moment tromosti tankog homogenog štapa duljine l i mase m, pri čemu je relativni koordinatni sustav postavljen tako da je ishodište u težištu štapa, a i u smjeru štapa. Budući da su za zanemarivo mali radijus valjka, u formuli (2.7) integrandi zanemarivo mali, svi su devijacijski momenti tromosti jednaki nula. Aksijalni moment tromosti I_{11} je nula zbog pretpostavke o zanemarivo malom radijusu štapa. Za I_{22} i I_{33} zbog simetrije imamo²

$$I_{22} = I_{33} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{3l} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{1}{12} m l^2 \, .$$

²Štap je homogen pa je $\rho(X) = \rho$ konstantan. Kako radimo sa štapom zanemarivo malog radijusa, promatramo linijsku gustoću $\rho = m/l$.

Ako želimo momente tromosti obzirom na koordinatni sustav kojem je ishodište na jednom kraju štapa (*i* opet u smjeru štapa), možemo ponoviti prethodni račun uz novo ishodište, ili iskoristiti sljedeći teorem:

Teorem 2.1.1. (Steiner) Neka su ξ i ξ' dvije paralelne osi i neka ξ prolazi kroz centar mase tijela. Tada je

$$I_{\mathcal{E}'} = I_{\mathcal{E}} + md^2$$

pri čemu je d udaljenost osi $\boldsymbol{\xi}$ i $\boldsymbol{\xi}'$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\boldsymbol{\xi}$ upravo os \boldsymbol{k} , te da je pomak od $\boldsymbol{\xi}$ do $\boldsymbol{\xi}'$ po pozitivnom dijelu osi \boldsymbol{i} , kao na slici (2.1)



Slika 2.1: Osi ξ i ξ'

Inače definiramo novi relativni koordinatni sustav sa ishodištem u centru mase G, tako da je $k = \xi$, a i je postavljen tako da ξ' prolazi pozitivnim dijelom osi i. Koristeći koordinatni zapis vektora r(X), (2.5) sada imamo

$$I_{\xi} = \int_{\Omega} (X_1^2 + X_2^2) \rho(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$$
 (2.8)

dok je

$$I_{\xi'} = \int_{\Omega} \left[(X_1 - d)^2 + X_2^2 \right] \rho(X) dX \,. \tag{2.9}$$

Raspišimo izraz (2.9)

$$I_{\xi'} = \int_{\Omega} (X_1^2 + X_2^2) \rho(X) dX + d^2 \int_{\Omega} \rho(X) dX - 2d \int_{\Omega} X_1 \rho(X) dX$$

Iz (2.8) slijedi da je prvi član upravo I_{ξ} , po definiciji mase krutog tijela je drugi član jednak md^2 , dok je treći član po (2.3) jednak 0. Dobili smo da je

$$I_{\xi'} = I_{\xi} + md^2$$

što je i trebalo pokazati.

Koristeći Steinerov teorem sada lako dobijemo momente tromosti oko osi koje prolaze krajem štapa,

$$I_{11} = 0 I_{22} = I_{33} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2. (2.10)$$

Brzina točke krutog tijela

Promotrimo brzinu točke krutog tijela pri čistoj translaciji i čistoj rotaciji.

Na translaciju krutog tijela možemo gledati kao na translaciju centra mase G, a svaka točka krutog tijela se pomakne u istom smjeru, za istu udaljenost. Brzina proizvoljne točke tijela pri čistoj translaciji je jednaka brzini težišta G.

Kod rotacije oko fiksne osi e_h uzimamo u obzir kutnu brzinu oko te osi, $\omega = \omega e_h$, pri čemu je iznos brzine ω u radijanima po sekundi, te udaljenost promatrane točke *P* tijela od osi rotacije, $r_P = h + b$. Tu je *h* radijvektor projekcije *H* točke *P* na os rotacije, dok je $b = \overrightarrow{HP}$. Tada je brzina točke *P* jednaka

$$\mathbf{v}_{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_{h} \times (\mathbf{h} + \mathbf{b})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_{h} \times (\mathbf{h} \mathbf{e}_{h} + \mathbf{b} \mathbf{e}_{n})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \mathbf{b} \mathbf{e}_{t}$$
(2.11)

gdje $\{e_n, e_t, e_h\}$ čine desnu bazu, odnosno koordinatni sustav vezan za promatrano tijelo, h je udaljenost od ishodišta do točke H, b je udaljenost točke P od osi rotacije. Promotrimo sljedeći primjer rotacije u ravnini $\{i, j\}$ oko jednog kraja krutog štapa, kao na slici (2.2). Štap rotira oko osi e_h koja prolazi točkom H i okomita je na ravninu $\{i, j\}$. Brzina točke P je po (2.11) jednaka ωbe_t , dakle smjer je okomit smjeru štapa, a iznos je kutna brzina pomnožena sa duljinom štapa.



Slika 2.2: Skica rotacije krutog tijela.

Po Chaslesovom poučku, sada svako gibanje krutog tijela možemo opisati kao kombinaciju traslacije neke točke na tijelu, te rotacije oko te točke, a vektore brzina i ubrzanja točaka dobijemo zbrajanjem pripadnih vektora tih dvaju gibanja. Najčešće se za tu referentnu točku krutog tijela uzima težište, a u ovom radu ćemo koristiti rub krutog štapa, te položaj i brzinu računati u odnosu na tu točku.

Parcijalne brzine

Još ćemo uvesti pojam parcijalnih brzina koji ćemo koristiti za izračun generaliziranih sila u sljedećem potpoglavlju. Neka su dane generalizirane koordinate $q_1, ..., q_n$ točke P oko koje tijelo rotira, te pripadne generalizirane brzine $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$. Tada se brzina v točke P može zapisati kao linearna kombinacija generaliziranih brzina,

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j}$$
(2.12)

pri čemu su $\partial v / \partial \dot{q}_j$ parcijalne brzine, te predstavljaju doprinos *j*-te generalizirane brzine u brzini točke *P*. Slično, kutnu brzinu ω tijela možemo zapisati kao

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{q}_{j}} \dot{q}_{j} \tag{2.13}$$

pri čemu su $\partial \omega / \partial \dot{q}_j$ parcijalne kutne brzine obzirom na q_j , te predstavljaju doprinos *j*-te generalizirane brzine u kutnoj brzini tijela.

2.2 Dinamika krutog tijela

Prisjetimo se oznaka za moment p, moment impulsa l, te moment sile (zakretni moment) m čestice:

$$p = mv$$
 $l = r \times p$ $m = r \times F$

pri čemu je r vektor pozicije, v vektor brzine, m masa čestice, a F sila koja djeluje na česticu. Sada ćemo promotriti moment, moment impulsa te zakretni moment krutog tijela, i radi jednostavnosti zapisa pretpostaviti da radimo sa homogenim krutim tijelom ($\rho(X)$ konstanta koju ćemo radi jednostavnosti uzeti da je jednaka 1).

Moment

Moment krutog tijela se definira kao

$$\boldsymbol{p} = \int_{\Omega} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X} = \int_{\Omega} \frac{d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{X})}{dt} d\boldsymbol{X} \,. \tag{2.14}$$

Zapišimo ponovno poziciju diferencijskog elementa kao u (2.2),

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}) = \mathbf{r}_G + \phi(\mathbf{X}) \,.$$

Deriviranjem dobivamo

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}) = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}), \qquad (2.15)$$

pa uvrštavanjem (2.15) u (2.14) slijedi

$$p = \int_{\Omega} (v_G + \omega \times \phi(X)) dX$$
$$= v_G \int_{\Omega} dX + \omega \times \int_{\Omega} \phi(X) dX$$
$$= m v_G,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz definicije mase, te iz (2.3).

Moment impulsa

Moment impulsa krutog tijela oko centra mase G je definiran sa

$$H_G = \int_{\Omega} \phi(X) \times v(X) dX. \qquad (2.16)$$

POGLAVLJE 2. TEORIJSKI OKVIR

Uvrstimo (2.15) u prethodnu jednakost

$$H_{G} = \int_{\Omega} \phi(X) \times (v_{G} + \omega \times \phi(X)) dX$$

= $\int_{\Omega} (\phi(X) \times v_{G}) dX + \int_{\Omega} \phi(X) \times (\omega \times \phi(X)) dX$
= $\left(\int_{\Omega} \phi(X) dX\right) \times v_{G} + \int_{\Omega} \phi(X) \times (\omega \times \phi(X)) dX$
= $\int_{\Omega} \phi(X) \times (\omega \times \phi(X)) dX$ (2.17)

gdje zadnja jednakost slijedi iz (2.3).

Primjetimo da je to upravo tenzor tromosti tijela, koji djeluje na ω , pa imamo

 $H_G = I_G \omega$

Neka je sada uzeta proizvoljna točka B, uzmimo u obzir moment impulsa oko točke B. Radijvektor točke X s obzirom na B označit ćemo sa s(X),

$$s(X) = r_G^B + \phi(X) \tag{2.18}$$

gdje je r_G^B vektor centra mase s obzirom na *B*, a $\phi(X)$ radijvektor točke *X* krutog tijela s obzirom na centar mase. Uvrstimo (2.18) u definiciju momenta impulsa oko *B*

$$H_{B} = \int_{\Omega} s(X) \times v(X) dX = \int_{\Omega} (r_{G}^{B} + \phi(X)) \times (v_{G} + \omega \times \phi(X)) dX \qquad (2.19)$$
$$= \int_{\Omega} r_{G}^{B} \times v_{G} + \phi(X) \times v_{G} + r_{G}^{B} \times (\omega \times \phi(X)) + \phi(X) \times (\omega \times \phi(X)) dX.$$

Rastavimo izraz na 4 integrala

$$H_B = (r_G^B \times v_G) \int_{\Omega} dX + \left(\int_{\Omega} \phi(X) dX \right) \times v_G + r_G^B \times \left(\omega \times \int_{\Omega} \phi(X) dX \right) + \int_{\Omega} \phi(X) \times (\omega \times \phi(X)) dX.$$

Integral u prvom članu je masa tijela, drugi i treći član su nula zbog (2.3), a četvrti član je po definiciji moment impulsa oko centra mase jednak H_G , pa je

$$H_B = H_G + mr_G^B \times v_G \,. \tag{2.20}$$

Ako tijelo rotira oko točke C na tijelu, različite od centra mase G, izraz (2.20) se može pojednostavniti. Zapišimo brzinu centra mase kao $v_G = \omega \times r_G^C$ i uvrstimo u (2.19) pa

imamo

$$H_{C} = \int_{\Omega} (r_{G}^{C} + \phi(X)) \times (\omega \times r_{G}^{C} + \omega \times \phi(X)) dX$$
$$= \int_{\Omega} (r_{G}^{C} + \phi(X)) \times (\omega \times (r_{G}^{C} + \phi(X)) dX$$

što je po definiciji linearnog operatora tenzora tromosti (2.4) jednako

Ì

$$H_C = I_C \omega \,. \tag{2.21}$$

Izraz (2.21) nam daje jednostavnu formulu za moment impulsa oko točke koja se nalazi na tijelu, što je slučaj pri rotacijama dijelova tijela oko zglobova.

Moment sile

Moment sile koja djeluje na kruto tijelo računamo kao i u slučaju čestice

$$M = r \times F$$

to jest kao vektorski produkt radijvektora točke u kojoj djeluje sila i vektora sile, pri čemu je F takozvani vezani vektor sile. Za takav vektor je bitno mjesto na kojemu djeluje na tijelu (za razliku od čestice, kojoj je bitan jedino smjer djelovanja sile).

Kao primjer promotrimo gravitacijsku silu koja djeluje na kruto tijelo. Ta sila nije vezan vektor, jer djeluje po cijelom volumenu tijela. S druge strane, ako promotrimo teret malog volumena u šaci ispružene ruke, možemo uzeti da je težina tereta koncentrirana u jednoj točki, pa teret djeluje na ruku na njenom kraju. Ako premjestimo teret na sredinu ruke, tada on ima drugačiji utjecaj na ruku - manje je opterećenje za mišiće ramena, iako se radi o istoj sili (u smislu vektora), odnosno manji je moment sile.

Generalizirane sile

Sada možemo definirati generalizirane sile. Koristimo definiciju (1) poglavlja 5.5 iz [4]. Generalizirana sila vezana za *i*-tu generaliziranu koordinatu se računa kao

$$Q_i = F \frac{\partial v_B}{\partial \dot{q}_i} + M \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_i}$$
(2.22)

gdje su $\partial v_B / \partial \dot{q}_i$ parcijalna brzina točke *B* i $\partial \omega_i / \partial \dot{q}_i$ parcijalna kutna brzina tijela, dok je *F* sila koja djeluje na tijelo u točki *B*, a *M* moment sile tijela. Ako imamo više sila (odnosno momenata sila) ili imamo više tijela na koje djeluje sila u sustavu, onda Q_i dobivamo kao sumu utjecaja svih sila u sustavu na *i*-tu generaliziranu koordinatu. Označimo sa Q_i^j

utjecaj *j*-te sile (odnosno momenta) u sustavu na *i*-tu generaliziranu silu, a sile koje djeluju označimo sa F_j te momente sila sa M_j . Brzine točaka B_j na koje djeluju sile imaju oznaku v_{B_j} , a kutne brzine ω_j , za j = 1, ..., n pri čemu je *n* ukupan broj sila/momenata u sustavu. Tada je

$$Q_i^j = F_j \frac{\partial v_{B_j}}{\partial \dot{q}_i} + M_j \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{q}_i}$$

pa je generalizirana sila vezana za i-tu generaliziranu koordinatu jednaka

$$Q_i = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial v_{B_j}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{q}_i}.$$
 (2.23)

Promotrimo sljedeći primjer određivanja generaliziranih sila. Modeliramo skok u vodu, od potpuno skupljenog tijela, kada su noge uz torzo, do potpuno ispruženog tijela pri ulasku u vodu. Zanima nas odnos trupa i nogu:

- Gornji dio tijela modeliramo kao kruti štap A duljine l_A , sa relativnim koordinatnim sustavom a_1, a_2, a_3 s ishodištem u centru mase tijela A, pri čemu je a_1 u smjeru prema glavi, dok je a_2 usmjeren prema natrag. Kut između tijela A (tj. $-a_1$) i vertikalne osi apsolutnog koordinatnog sustava je generalizirana varijabla q_1 .
- Donji dio tijela modeliramo kao kruti štap *B* duljine l_B , sa relativnim koordinatnim sustavom b_1, b_2, b_3 s ishodištem u centru mase tijela *B*, pri čemu je b_1 u smjeru prema kuku, dok je b_2 usmjeren prema natrag. Kut između tijela *B* (tj. $-b_1$) i vertikalne osi apsolutnog koordinatnog sustava je generalizirana varijabla q_2 .

Na slici (2.3) vidimo skicu modela s gotovo ispruženim tijelom. Generaliziranu silu koja



Slika 2.3: Skica modela skoka u vodu.

uzrokuje pokret možemo modelirati pomoću sile mišića F ili momenta sile M, te u oba

slučaja dobijemo isti rezultat. Recimo da imamo dan moment M potreban da u željeno vrijeme prije kontakta s vodom, skakač ispruži tijelo. Utjecaj generalizirane sile na q_1 i q_2 je sada dan s

$$Q_{1} = M_{A} \frac{\partial \omega_{A}}{\partial \dot{q}_{1}} + M_{B} \frac{\partial \omega_{B}}{\partial \dot{q}_{1}}$$
$$Q_{2} = M_{A} \frac{\partial \omega_{A}}{\partial \dot{q}_{2}} + M_{B} \frac{\partial \omega_{B}}{\partial \dot{q}_{2}}$$

gdje je ω_j kutna brzina tijela *j*, a M_j je utjecaj momenta na tijelo *j*. Budući da se tijelo slobodno giba u zraku, zbog zakona o očuvanju momenta sile mora vrijediti $M_B = -M_A = -M$ pa je

$$Q_1 = M \left(\frac{\partial \omega_A}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \omega_B}{\partial \dot{q}_1} \right),$$
$$Q_2 = M \left(\frac{\partial \omega_A}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \omega_B}{\partial \dot{q}_2} \right).$$

Dakle, kinetička i potencijalna energija ulaze u Lagrangian s lijeve strane Euler-Lagrangeove jednadžbe, dok ostale sile koju uzrokuju gibanje ulaze pod generalizirane sile s desne strane Euler-Lagrangeove jednadžbe. Ako je gibanje nekog tijela ograničeno, generalizirana sila se može još pojednostavniti. Recimo da istim modelom želimo prikazati vježbu podizanja nogu, koja koristi trbušne mišiće. Tijelo A je fiksirano, dok se tijelo B giba od ispruženog položaja do nekog završnog kuta. Neka je kao i prije dan moment M koji uzrokuje takvo gibanje. Kako je položaj tijela A fiksan, kutna brzina ω_A je jednaka 0, pa su i parcijalne kutne brzine tijela A jednake nula. Sada su generalizirane sile dane s

$$Q_1 = -M \frac{\partial \omega_B}{\partial \dot{q}_1} ,$$
$$Q_2 = -M \frac{\partial \omega_B}{\partial \dot{q}_2} .$$

U modeliranju ljudskog tijela, moment sile ili sila mišića najčešće djeluju na jedno ili dva kruta tijela, pa su izrazi za generalizirane sile dosta jednostavniji nego u (2.23). Sada imamo sve potrebno za analizu pokreta koristeći Lagrangeovu mehaniku, pa promotrimo primjer kompletne analize pokreta.

Poglavlje 3

Analiza pokreta

U ovom poglavlju ćemo koristeći Lagrangeovu mehaniku doći od skice pokreta kojeg analiziramo do jednadžbe gibanja i njenog numeričkog rješenja.

3.1 Opis pokreta

Promotrit ćemo pokret bacanja kugle, od ispružene ruke iza tijela, do savijene ruke ispred tijela. Pokret je prirodno dvodimenzionalan, pa imamo ravninsko gibanje dva kruta tijela spojena međusobno, te povezana za fiksnu podlogu - rame.

Anatomija ruke

Ruka se sastoji od tri glavne kosti, to su nadlaktična kost (lat. humerus), laktana kost (lat. ulna) i palčana kost (lat. radius). Nadlaktična kost je spojena na kuglasti zglob - rame, koji dopušta pokrete u svim smjerovima. Nadlaktična kost je preko lakta spojena sa laktanom i palčanom kosti. Lakat dopušta fleskiju i ekstenziju približno od 0 do 140 stupnjeva, gdje se mjeri kut između nadlaktice i podlaktice. Kod nekih ljudi taj je raspon veći, na primjer ako se lakat može ispružiti do negativne vrijednosti, to nazivamo hiperekstenzijom. Pretpostavit ćemo da kut ide do 0 stupnjeva, i kasnije u simulaciji jedan od uvjeta zaustavljanja programa će biti ako taj kut padne ispod nule. Šaku ruke nećemo uvesti u model, nego ćemo, pošto je cilj modelirati izbačaj kugle, promatrati šaku i podlakticu kao jedno tijelo, pri čemu ćemo na duljinu podlaktice nadodati pola duljine šake.

Zbog krutosti kosti, ruku možemo modelirati krutim tijelom, to jest krutim valjkom određene duljine. Radi jednostavnosti možemo zanemariti širinu tog valjka. Zglobove ćemo modelirati kao spoj koji dopušta rotaciju bez trenja. Mišiće koji uzrokuju fleksiju podlaktice, od kojih je glavni dvoglavi nadlaktični mišić (lat. biceps brachii), modelirat ćemo kao liniju koja djeluje iz hvatišta na podlaktici, prema ramenu. U vektor sile bicepsa

ćemo uključiti i njegovu duljinu budući da jačina sile ovisi o duljini mišića u pokretu. S druge strane, zbog kompleksnosti mišića uključenih u pokrete oko ramena, uzet ćemo u obzir samo moment oko ramena, bez modeliranja mišića koji uzrokuju gibanje.

Pokret će krenuti od pozicije iza trupa, lakat blago savijen. Zatim pod utjecajem mišića ramena i ruke, ona se giba prema naprijed dok ne postigne određeni kut. U tom trenutku pokret prestaje, i završavamo sa vektorom pozicije i brzine šake, odnosno kugle pri izbačaju.

3.2 Skica pokreta

Zapišimo sada matematički model prethodno opisanog pokreta.

Postavimo ishodište apsolutnog koordinatnog sustava $\{e_1, e_2, e_3\}$ u točku $O_A = (0, 0, 0)$, pri čemu O_A predstavlja rame na visini h_A od tla. Promatramo dva kruta tijela koja predstavljaju nadlakticu i podlakticu tokom fleksije. Nadlakticu ćemo označiti slovom A, a podlakticu slovom B. Kruti štap A, duljine l_A je na gornjem dijelu povezan s nepomičnom podlogom u točki O_A koja dopušta rotaciju u ravnini e_1, e_2 . S druge strane je povezan s krutim štapom B u točki O_B koja također dopušta rotaciju u ravnini e_1, e_2 , te predstavlja lakat. Na kraju tijela B, duljine l_B se nalazi kugla mase m_K . Dakle radi se o ravninskom gibanju dva međusobno povezana kruta tijela. Pretpostavljamo da su kruti štapovi A i B dovoljno tanki pa ćemo zanemariti neke momente inercije. Relativni koordinatni sustav tijela A, $\{a_1, a_2, a_3\}$, je postavljen tako da je a_1 u smjeru nadlaktice, ima ishodište u točki O_A , te dozvoljava rotaciju oko osi a_3 . Relativni koordinatni sustav tijela B, $\{b_1, b_2, b_3\}$ postavljen tako da je b_1 uvijek u smjeru podlaktice, ima ishodište u točki O_B , te dozvoljava translaciju uzrokovanu gibanjem tijela A, i rotaciju oko osi b_3 . Kut između tijela A i vertikalne osi (tj. između $-e_2$ i a_1) u pozitivnom smjeru ćemo označiti sa q_1 , a kut između tijela A i tijela B (tj. između a_1 i b_1) u pozitivnom smjeru ćemo označiti sa q_2 . Dakle kut između tijela B i vertikalne osi je $q_1 + q_2$. Kutovi q_1 i q_2 su dvije generalizirane koordinate kojima možemo opisati pokret u potpunosti. Skicu možemo vidjeti na slici (3.1).



Slika 3.1: Skica krutih tijela A i B, te kutova između njih.

Masa tijela A je m_A , tijela B m_B , a masa kugle je m_K . Pokret kreće iz nekih početnih kuteva $q_{1,0}, q_{2,0}$, te mišići izvršavaju fleksiju ramena i lakta. Biceps je u modelu na jednom kraju vezan za točku O_A , a drugi kraj je vezan za podlakticu u točki E udaljenoj d centimetara od točke O_B . Duljina bicepsa je dana s $l(q_2)$ - u modelu ovisi o kutu između tijela A i B.

3.3 Izvod Lagrangeove funkcije

U ovom potpoglavlju je cilj definirati Lagrangevovu funkciju *L*, te odrediti lijevu stranu u Euler-Lagrangeovoj jednadžbi

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i.$$
(3.1)

U sljedećem potpoglavlju ćemo odrediti sile mišića uključenih u pokret, to jest imat ćemo i desnu stranu jednadžbe (3.1). Kutna brzina tijela *A* je

$$\boldsymbol{\omega}_A = \dot{q}_1 \boldsymbol{a}_3 \,. \tag{3.2}$$

Za kutnu brzinu tijela *B* moramo uzeti u obzir promjenu kuta između tijela *A* i *B*, te promjenu kuta q_1 . Po primjeru 6.1 iz skripte [2], znamo da će iznos kutne brzine tijela *B* biti suma brzina q_1 i q_2 ,

$$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{B}} = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\boldsymbol{b}_3. \tag{3.3}$$

Prvo promatramo rotaciju oko osi a_3 pa nam je u tenzoru tromosti relevantan samo član I_{33} . Izračunajmo moment tromosti oko osi a_3 koristeći definiciju,

$$I_{33} = \int_0^{l_A} x^2 \rho(x) dx = \int_0^{l_A} x^2 \frac{m_A}{l_A} dx = \frac{m_A}{l_A} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l_A} = \frac{1}{3} m_A l_A^2.$$

Naravno tu smo se mogli pozvati na već izračunati moment tromosti štapa oko njegovog težišta

$$\frac{1}{12}m_A l_A^2$$

pa koristeći Steinerov teorem dobiti da je $I_{33} = \frac{1}{3}m_A l_A^2$ kao u (2.10). Kako tijelo A rotira oko fiksne osi a_3 , na kojoj je ishodište pripadnog koordinatnog sustava, njegovu kinetičku energiju ćemo računati po formuli (13.7) iz skripte kolegija Metode matematičke fizike [2]

$$T_{A} = \frac{1}{2}I_{A}\omega_{A} \cdot \omega_{A} = \frac{1}{2}I_{33}^{A}\omega_{a_{3}}^{2} = \frac{1}{6}m_{A}l_{A}^{2}\dot{q}_{1}^{2}$$

Potencijalna energija tijela A je

$$V_A = -m_A g \frac{l_A}{2} \cos q_1$$

to jest, uzimamo težinu tijela *A* kao da je čitava masa u centru mase tijela. Tijelo *B* rotira oko osi b_3 koja prolazi točkom O_B , te ima težište u točki G_B , a kako se tijelo *A* giba, uzimamo u obzir i translaciju točke O_B . Zbog toga za kinetičku energiju tijela B koristimo formulu (13.5) iz [2],

$$T_B = \frac{1}{2} m_B \mathbf{v}_{O_B}^2 + m_B \mathbf{v}_{O_B} \cdot (\boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{G_B}) + \frac{1}{2} I_B \boldsymbol{\omega}_B \cdot \boldsymbol{\omega}_B.$$

Izračunajmo vektor brzine točke O_B . Točka O_B se nalazi na kraju štapa A, pa se radi o čistoj rotaciji

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{O}_{\boldsymbol{B}}} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{a}_{1} = \dot{\boldsymbol{q}}_{1} \boldsymbol{a}_{3} \times \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{a}_{1} = \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{A}} \dot{\boldsymbol{q}}_{1} \boldsymbol{a}_{2}$$

Sada je

$$T_{B} = \frac{1}{2}m_{B}l_{A}^{2}\dot{q}_{1}^{2} + m_{B}l_{A}\dot{q}_{1}\boldsymbol{a}_{2} \cdot ((\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})\boldsymbol{b}_{3} \times \frac{l_{B}}{2}\boldsymbol{b}_{1}) + \frac{1}{2}I_{33}^{B}(\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})^{2}$$
$$= \frac{1}{2}m_{B}l_{A}^{2}\dot{q}_{1}^{2} + m_{B}l_{A}\dot{q}_{1}(\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})\frac{l_{B}}{2}\boldsymbol{a}_{2} \cdot \boldsymbol{b}_{2} + \frac{1}{6}m_{B}l_{B}^{2}(\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})^{2}.$$

Primjetimo da gornja jednadžba sadrži i vektore sustava $\{a_1, a_2, a_3\}$ i sustava $\{b_1, b_2, b_3\}$, a trebala bi sadržavati samo vektore sustava $\{b_1, b_2, b_3\}$, pa trebamo definirati matricu transformacije. Definirat ćemo matrice prijelaza iz sustava $\{b_1, b_2, b_3\}$ u $\{a_1, a_2, a_3\}$, te iz $\{a_1, a_2, a_3\}$ u $\{e_1, e_2, e_3\}$. Matrica prijelaza iz $\{b_1, b_2, b_3\}$ u $\{a_1, a_2, a_3\}$, Q_{BA} je dana s

$$Q_{BA} = \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0\\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (3.4)

Matrica prijelaza iz $\{a_1, a_2, a_3\}$ u $\{e_1, e_2, e_3\}$, Q_{AE} je dana s

$$Q_{AE} = \begin{pmatrix} \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ -\cos q_1 & \sin q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zapišimo još matricu prijelaza iz b_1, b_2, b_3 u $e_1, e_2, e_3, Q_{BE} = Q_{BA}Q_{AE}$

$$\begin{aligned} Q_{BE} &= \begin{pmatrix} \cos q_2 \sin q_1 + \sin q_2 \cos q_1 & \cos q_2 \cos q_1 - \sin q_2 \sin q_1 & 0\\ \sin q_2 \sin q_1 - \cos q_2 \cos q_1 & \sin q_2 \cos q_1 + \cos q_2 \sin q_1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) & 0\\ -\cos(q_1 + q_2) & \sin(q_1 + q_2) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Možemo primijetiti da su a_3 , b_3 i e_3 isti vektori. Budući da su rotacijske matrice ortogonalni operatori, njihov inverz je transponirana matrica. Na primjer, sada u stupcima matrice Q_{BA} imamo raspis vektora b_i preko vektora $\{a_1, a_2, a_3\}$, dok u retcima matrice Q_{BA} imamo raspis vektora a_i preko vektora $\{b_1, b_2, b_3\}$. Sada za skalarni produkt $a_2 \cdot b_2$ vrijedi

$$\boldsymbol{a_2} \cdot \boldsymbol{b_2} = (\sin q_2 \boldsymbol{b_1} + \cos q_2 \boldsymbol{b_2}) \cdot \boldsymbol{b_2} = \cos q_2$$

budući da je $\{b_1, b_2, b_3\}$ ortonormirana baza. Dobivamo da je kinetička energija tijela B jednaka

$$T_B = \frac{1}{2} m_B l_A^2 \dot{q}_1^2 + m_B l_A \frac{l_B}{2} \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + \frac{1}{6} m_B l_B^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

= $\frac{1}{2} m_B \left[l_A^2 \dot{q}_1^2 + l_A l_B \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + \frac{1}{3} l_B^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right].$

Za potencijalnu energiju tijela B imamo težinu tijela B na visini centra mase G_B

$$V_B = -m_B g \left(l_A \cos q_1 + \frac{l_B}{2} \cos(q_1 + q_2) \right) \,.$$

Izračunajmo još energiju kugle koja se nalazi u šaci, na kraju tijela B. Kinetička energija kugle je

$$T_K = \frac{1}{2} m_K \boldsymbol{v}_K \cdot \boldsymbol{v}_K \,.$$

POGLAVLJE 3. ANALIZA POKRETA

Do pozicije točke K dolazimo kombinacijom translacije točke O_B , te rotacije tijela B oko točke O_B . Označimo sa r_K^B vektor iz O_B do K. Brzina kugle je sada

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{K} &= \mathbf{v}_{O_{B}} + \omega_{B} \times \mathbf{r}_{K}^{B} \\ &= l_{A}\dot{q}_{1}\mathbf{a}_{2} + (\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})\mathbf{b}_{3} \times l_{B}\mathbf{b}_{1} \\ &= l_{A}\dot{q}_{1}\mathbf{a}_{2} + l_{B}(\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})\mathbf{b}_{2} \\ &= l_{A}\dot{q}_{1}(\sin q_{2}\mathbf{b}_{1} + \cos q_{2}\mathbf{b}_{2}) + l_{B}(\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})\mathbf{b}_{2} \\ &= l_{A}\dot{q}_{1}\sin q_{2}\mathbf{b}_{1} + [l_{A}\dot{q}_{1}\cos q_{2} + l_{B}(\dot{q}_{1} + \dot{q}_{2})]\mathbf{b}_{2} \end{aligned}$$
(3.5)

gdje četvrta jednakost slijedi iz matrice transformacije Q_{BA} (3.4), pa je

$$T_K = \frac{1}{2} m_K \left[l_A^2 \dot{q}_1^2 + 2 l_A l_B \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + l_B^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right].$$

Potencijalna energija kugle je

$$V_K = -m_K g[l_A \cos q_1 + l_B \cos(q_1 + q_2)].$$

Lagrangeova funkcija je razlika ukupne kinetičke i ukupne potencijalne energije

$$\begin{split} L &= T - V = (T_A + T_B + T_K) - (V_A + V_B + V_K) = \\ &= \left[\frac{1}{6} m_A l_A^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_B \left(l_A^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{3} l_B^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_A l_B \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 \right) \\ &+ \frac{1}{2} m_K \left(l_A^2 \dot{q}_1^2 + 2 l_A l_B \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + l_B^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \right) \right] \\ &- \left[- m_A g \frac{l_A}{2} \cos q_1 - m_B g \left(l_A \cos q_1 + \frac{l_B}{2} \cos(q_1 + q_2) \right) - m_K g \left(l_A \cos q_1 + l_B \cos(q_1 + q_2) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} l_A^2 \left(\frac{1}{3} m_A + m_B + m_K \right) \dot{q}_1^2 \\ &+ \frac{1}{2} l_A l_B \left(m_B \cos q_2 + 2 m_K \right) \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ &+ \frac{1}{2} l_B^2 \left(\frac{1}{3} m_B + m_K \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \\ &+ g l_A \left(\frac{1}{2} m_A + m_B + m_K \right) \cos q_1 \\ &+ g l_B \left(\frac{1}{2} m_B + m_K \right) \cos(q_1 + q_2) \,. \end{split}$$

Odredimo parcijalne derivacije Lagrangeove funkcije. Računamo

$$\begin{split} \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -gl_A \left(\frac{1}{2} m_A + m_B + m_K \right) \sin q_1 - gl_B \left(\frac{1}{2} m_B + m_K \right) \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= l_A^2 \left(\frac{1}{3} m_A + m_B + m_K \right) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} l_A l_B \left(m_B \cos q_2 + 2m_K \right) \left(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \right) \\ &+ l_B^2 \left(\frac{1}{3} m_B + m_K \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= l_A^2 \left(\frac{1}{3} m_A + m_B + m_K \right) \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} l_A l_B \left[-m_B \sin q_2 \cdot \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + (m_B \cos q_2 + 2m_K) (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \right] \\ &+ l_B^2 \left(\frac{1}{3} m_B + m_K \right) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\frac{1}{2} l_A l_B m_B \sin q_2 \cdot \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) - gl_B \left(\frac{1}{2} m_B + m_K \right) \sin(q_1 + q_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} l_A l_B (m_B \cos q_2 + 2m_K) \dot{q}_1 + l_B^2 \left(\frac{1}{3} m_B + m_K \right) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{1}{2} l_A l_B \left[-m_B \sin q_2 \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_B \cos q_2 + 2m_K) \ddot{q}_1 \right] + l_B^2 \left(\frac{1}{3} m_B + m_K \right) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) . \end{split}$$

Sada su Euler-Lagrangeove jednadžbe dane s

$$\begin{aligned} l_A^2 \left(\frac{1}{3}m_A + m_B + m_K\right) \ddot{q}_1 + \frac{1}{2}l_A l_B \left[-m_B \sin q_2 \cdot \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + (m_B \cos q_2 + 2m_K)(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\right] \\ &+ l_B^2 \left(\frac{1}{3}m_B + m_K\right) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + gl_A \left(\frac{1}{2}m_A + m_B + m_K\right) \sin q_1 + gl_B \left(\frac{1}{2}m_B + m_K\right) \sin(q_1 + q_2) = Q_1 \\ \frac{1}{2}l_A l_B \left[-m_B \sin q_2 \cdot \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (m_B \cos q_2 + 2m_K)\ddot{q}_1\right] + l_B^2 \left(\frac{1}{3}m_B + m_K\right) (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ &+ \frac{1}{2}l_A l_B m_B \sin q_2 \cdot \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + gl_B \left(\frac{1}{2}m_B + m_K\right) \sin(q_1 + q_2) = Q_2 \,. \end{aligned}$$

3.4 Generalizirane sile

U ovom poglavlju ćemo modelirati gibanje ruke pod utjecajem mišića, odnosno odrediti desnu stranu Euler-Lagrangeove jednadžbe.

Sila mišića bicepsa

U ovom modelu promatramo mišić biceps koji uzrokuje fleksiju oko lakta. Na jednom kraju je vezan za točku O_A , a na drugom kraju je spojen za podlakticu u točki E koja je udaljena od lakta za d. Smjer djelovanja mišića je dan s vektorom c_B koji ide u smjeru iz E u O_A , te je normiran. Zakretni moment M_B oko točke O_B (ishodišta relativnog sustava $\{b_1, b_2, b_3\}$) dobit ćemo kao $M_B = r_E^B \times F_B$, pri čemu je r_E^B vektor iz O_B u E, dakle $r_E^B = db_1$, a F_B je vektor sile bicepsa, djeluje iz uporišta E prema ramenu, $F_B = F_B(t)c_B$. Iznos sile $F_B(t)$ je dan eksterno, kao funkcija po vremenu t. Promotrimo skicu djelovanja bicepsa.



Slika 3.2: Skica utjecaja bicepsa na podlakticu.

Označimo sa $l(q_2)$ duljinu bicepsa kada je kut između tijela A i tijela B jednak q_2 (kao na Slici (3.2)). Tada je vektor $l(q_2)c_B$ jednak

$$l(q_2)\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} = -l_A\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{B}} = -l_A\boldsymbol{a}_1 - d\boldsymbol{b}_1$$

Iz matrice transformacije Q_{BA} sada imamo

$$l(q_2)\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} = -l_A(\cos q_2\boldsymbol{b}_1 - \sin q_2\boldsymbol{b}_2) - d\boldsymbol{b}_1$$
$$= -(l_A\cos q_2 + d)\boldsymbol{b}_1 + l_A\sin q_2\boldsymbol{b}_2.$$

Dakle,

$$\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} = -\frac{l_A \cos q_2 + d}{l(q_2)} \boldsymbol{b}_1 + \frac{l_A \sin q_2}{l(q_2)} \boldsymbol{b}_2$$

dok je sila jednaka

$$F_{B} = F_{B}(t)c_{B} = \frac{F_{B}(t)}{l(q_{2})} \left[-(l_{A}\cos q_{2} + d)b_{1} + l_{A}\sin q_{2}b_{2} \right].$$
(3.6)

Izračunajmo doprinos ove sile na generalizirane sile Q_1 i Q_2 . Koristimo definiciju (2.23)

$$Q_i = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial v_{B_j}}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{q}_i}$$

pri čemu je Q_i^j utjecaj *j*-te sile (momenta sile) na *i*-tu generaliziranu silu, $\partial v_{B_j}/\partial \dot{q}_i$ parcijalna brzina točke na koju djeluje sila (odnosno moment sile) *j*, $\partial \omega/\partial \dot{q}_i$ parcijalna kutna brzina tijela *i*, a F_j i M_j su *j*-ta sila, odnosno moment sile. Kod modeliranja bicepsa zadana nam je sila i njeno hvatište pa nisu prisutni dodatani momenti sile. Dakle, u izrazu se pojavljuje utjecaj sile bicepsa na točku *E*, te utjecaj sile bicepsa na točku O_A

$$Q_1^B = \mathbf{F}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{O_A}}{\partial \dot{q}_1} + \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial \dot{q}_1}$$
$$Q_2^B = \mathbf{F}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_{O_A}}{\partial \dot{q}_2} + \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial \dot{q}_2}$$

gdje je $\partial v_X / \partial \dot{q}_i$ parcijalna brzina točke X obzirom na generaliziranu koordinatu *i*, a F_X je utjecaj sile bicepsa na tijelo X, pri čemu je zbog Newtonovog zakona akcije i reakcije $F_A = -F_B$, kao na slici (3.3).



Slika 3.3: Sile u sustavu.

Odredimo potrebne vrijednosti. Prisjetimo se da je točka O_A fiksna, njena je brzina jednaka 0 pa su i parcijalne brzine vezane za točku O_A jednake 0. Sada računamo brzinu v_E . Slično kao kod računa brzine kugle u (3.5), uz zamjenu d za l_B dobivamo

$$\mathbf{v}_E = l_A \dot{q}_1 \sin q_2 \mathbf{b}_1 + [l_A \dot{q}_1 \cos q_2 + d(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \mathbf{b}_2.$$

Da odredimo parcijalne brzine točke E, zapišimo V_E na sljedeći način

 $\boldsymbol{v}_{E} = \dot{q}_{1} \left[l_{A} \sin q_{2} \boldsymbol{b}_{1} + (l_{A} \cos q_{2} + d) \, \boldsymbol{b}_{2} \right] + \dot{q}_{2} \left[d \boldsymbol{b}_{2} \right] \, .$

Koristeći definiciju parcijlane brzine točke (2.12) slijedi

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_E}{\partial \dot{q}_1} = l_A \sin q_2 \boldsymbol{b}_1 + (l_A \cos q_2 + d) \boldsymbol{b}_2, \qquad \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}_E}{\partial \dot{q}_2} = d\boldsymbol{b}_2.$$

Sada je

$$\begin{aligned} Q_1^B &= \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial \dot{q}_1} = \frac{F_B(t)}{l(q_2)} \left[-(l_A \cos q_2 + d) \mathbf{b_1} + l_A \sin q_2 \mathbf{b_2} \right] \cdot \left[l_A \sin q_2 \mathbf{b_1} + (l_A \cos q_2 + d) \mathbf{b_2} \right] \\ &= 0 \\ Q_2^B &= \mathbf{F}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial \dot{q}_2} = \frac{F_B(t)}{l(q_2)} \left[-(l_A \cos q_2 + d) \mathbf{b_1} + l_A \sin q_2 \mathbf{b_2} \right] \cdot d\mathbf{b_2} \\ &= F_B(t) \frac{dl_A \sin q_2}{l(q_2)} \,. \end{aligned}$$

Generalizirane sile nadlaktice

Kao što smo najavili, nećemo modelirati mišiće oko ramena koji djeluju na pokret, pa pretpostavimo da imamo dan zakretni moment $M_A = M_A(t)a_3$ oko točke O_A uzrokovan djelovanjem mišića ramena. Izračunajmo sada doprinos promatranih mišića na generalizirane sile Q_1 i Q_2 . Kao i u prethodnom slučaju, koristimo definiciju (2.23) no, sada promatramo samo komponentu zakretnog momenta, bez sile koja djeluje iz nekog uporišta, pa će Q_1^A i Q_2^A biti:

$$Q_1^A = M_A \cdot \frac{\partial \omega_A}{\partial \dot{q}_1},$$

 $Q_2^A = M_A \cdot \frac{\partial \omega_A}{\partial \dot{q}_2}.$

Kutna brzina je $\omega_A = \dot{q}_1 a_3$ pa su parcijalne kutne brzine dane s

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial \dot{q}_1} = a_3,$$
$$\frac{\partial \omega_A}{\partial \dot{q}_2} = 0.$$

odnosno utjecaj momenta na generalizirane sile je

$$Q_1^A = \boldsymbol{M}_A \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_A}{\partial \dot{q}_1} = \boldsymbol{M}_A(t) \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{M}_A(t) ,$$
$$Q_2^A = \boldsymbol{M}_A \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_A}{\partial \dot{q}_2} = 0 .$$

3.5 Jednadžba gibanja

Napišimo sada jednadžbe gibanja za obe generalizirane koordinate

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \,.$$

Definiramo

$$Q_1 = Q_1^A + Q_1^B = M_A(t),$$

$$Q_2 = Q_2^A + Q_2^B = F_B(t) \frac{dl_A \sin q_2}{l(q_2)}$$

Euler-Lagrangeova jednadžba za q_1 je

$$l_{A}^{2}\left(\frac{1}{3}m_{A}+m_{B}+m_{K}\right)\ddot{q}_{1}+\frac{1}{2}l_{A}l_{B}\left[-m_{B}\sin q_{2}\cdot\dot{q}_{2}(2\dot{q}_{1}+\dot{q}_{2})+(m_{B}\cos q_{2}+2m_{K})(2\ddot{q}_{1}+\ddot{q}_{2})\right]$$
$$+l_{B}^{2}\left(\frac{1}{3}m_{B}+m_{K}\right)(\ddot{q}_{1}+\ddot{q}_{2})+gl_{A}\left(\frac{1}{2}m_{A}+m_{B}+m_{K}\right)\sin q_{1}+gl_{B}\left(\frac{1}{2}m_{B}+m_{K}\right)\sin(q_{1}+q_{2})=M_{A}(t)$$
$$\cdot$$

a za q_2 je

$$\frac{1}{2}l_{A}l_{B}\left[-m_{B}\sin q_{2}\cdot\dot{q}_{1}\dot{q}_{2}+(m_{B}\cos q_{2}+2m_{K})\ddot{q}_{1}\right]+l_{B}^{2}\left(\frac{1}{3}m_{B}+m_{K}\right)(\ddot{q}_{1}+\ddot{q}_{2})$$
$$+\frac{1}{2}l_{A}l_{B}m_{B}\sin q_{2}\cdot\dot{q}_{1}(\dot{q}_{1}+\dot{q}_{2})+gl_{B}\left(\frac{1}{2}m_{B}+m_{K}\right)\sin(q_{1}+q_{2})=F_{B}(t)\frac{dl_{A}\sin q_{2}}{l(q_{2})}$$

Dvije diferencijalne jednadžbe drugog reda ćemo svesti na četiri jednadžbe prvog reda, zbog numeričkog rješavanja sustava. Izrazimo najprije \ddot{q}_1 i \ddot{q}_2 preko ostalih varijabli. Kad izlučimo \ddot{q}_1 i \ddot{q}_2 dobivamo sljedeći sustav jednadžbi

$$\begin{bmatrix} l_A^2 \left(\frac{1}{3}m_A + m_B + m_K\right) + l_A l_B \left(m_B \cos q_2 + 2m_K\right) + l_B^2 \left(\frac{1}{3}m_B + m_K\right) \end{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ + \left[\frac{1}{2} l_A l_B \left(m_B \cos q_2 + 2m_K\right) + l_B^2 \left(\frac{1}{3}m_B + m_K\right) \right] \ddot{q}_2 \\ = \frac{1}{2} l_A l_B m_B \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 - l_A g \left(\frac{1}{2}m_A + m_B + m_K\right) \sin q_1 \\ - l_B g \left(\frac{1}{2}m_B + m_K\right) \sin(q_1 + q_2) + M_A(t) \\ \left[\frac{1}{2} l_A l_B \left(m_B \cos q_2 + 2m_K\right) + l_B^2 \left(\frac{1}{3}m_B + m_K\right) \right] \ddot{q}_1 + \left[l_B^2 \left(\frac{1}{3}m_B + m_K\right) \right] \ddot{q}_2 \\ = -\frac{1}{2} l_A l_B m_B \dot{q}_1^2 \sin q_2 - l_B g \left(\frac{1}{2}m_B + m_K\right) \sin(q_1 + q_2) + dF_B(t) \frac{dl_A \sin q_2}{l(q_2)} \\ \end{bmatrix}$$

3.6 Određivanje parametara

Defninirajmo sada parametre modela da dobijemo gotove Euler-Lagrangeove jednadžbe spremne za numeričko rješavanje. Koriste se SI mjerne jedinice. Koristeći [5] za osobu visoku 195cm, dobivamo prosječnu duljine nadlaktice 36.3cm, podlaktice 28.5cm i dlana 21.1cm. Budući da ćemo promatrati pokret bacanja kugle, na duljinu podlaktice ćemo dodati i pola duljine šake, pa su $l_A = 0.36$ i $l_B = 0.39$. Koristeći [3] dobivamo prosječnu masu nadlaktice $m_A = 2.9$ te masu podlaktice i šake $m_B = 2.3$. Masa kugle koju promatramo je $m_K = 0.7$. Duljinu poluge bicepsa uzmimo iz [6], pa imamo d = 0.035. Koristeći kosinusov poučak dobivamo da je duljina bicepsa dana s

$$l(q_2) = \sqrt{d^2 + l_A^2 - 2dl_A \cos(\pi - q_2)}$$

Početni uvjeti sustava su dani sa

$$Y_0 = [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [-1.5, 0.3, 0, 0]$$

U programu Octave definiramo parametre u main.m datoteci, funkciju za moment oko ramena M_A i silu bicepsa F_B , funkciju eulerLagrange koja za pripadnu Euler Lagrangeovu jednadžbu, ulazne parametre i početne uvjete definira sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda, to jest definira matricu i vektor sustava Ay = B, te funkciju stopConditions koja zaustavlja simulaciju. Rješenje dobivamo tako što u funkciju ode45 ubacimo sustav dobiven iz funkcije eulerLagrange, uz uvjet zaustavljanja stopConditions. Funkcija ode45 izbacuje vektor koji sadrži vrijeme *t*, položaje odnosno kuteve q_1 i q_2 , te brzine \dot{q}_1 i \dot{q}_2 kroz vrijeme. Nakon toga u main.m datoteci crtamo graf kutova i brzina, te animaciju pokreta.

Modeliranje sila i momenata

U prvom pokušaju modeliranja, postavimo momente i sile "nasumično" samo za provjeru da li sustav funkcionira. Bez sile F_B i momenta M_A sustav se ponaša kao dvostruko njihalo. Sa konstantnim F_B i M_A dobivamo sustav koji se ponaša neprirodno za ruku. U prvi modelu koji se ponaša prirodno, je u silu F_B uključena procjena gravitacijskog momenta kompenziranog silom bicepsa, PD regulator koji vraća ruku u željeni položaj, sila koja spriječava približavanje kuta q_2 nuli, odnosno spriječava hiperekstenziju lakta, te ograničenje sile bicepsa. M_B je ostavljen konstantnim obzirom da nema neke veće promjene momenta u pokretu bacanja.

Kao 'Event' je dodana funkcija stopCondition koja provjerava da li je q_2 postao negativan i u tom slučaju zaustavlja simulaciju, jer nas ne zanima hiperekstenzija lakta. Nadalje, u stopConditions dodajemo i uvjet $q_1 + q_2 > 0.95$, dakle promatramo pokret dok suma kutova ne postigne neku razinu.

3.7 Numeričko rješenje

Kao što smo najavili, obzirom na kompleksnost Euler-Lagrangeovih jednadžbi, rješenje ćemo dobiti numerički. Koristimo program Octave za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, te dobivamo generalizirane koordinate i pripadne generalizirane brzine.

Sada pozivamo datoteku main.m, u kojoj su definirani parametri i početni uvjeti, te koja poziva funkciju ode45. Za sljedeće ulazne vrijednosti:

```
1 % Parametri sustava
2 params.lA = 0.36; % Duljina tijela A - nadlaktice
3 params.lB = 0.39; % Duljina tijela B - podlaktice
4 params.mB = 0.39; % Masa tijela B - podlaktice
5 params.mB = 2.3; % Masa tijela B - podlaktice
6 params.mK = 0.7; % Masa kugle
7 params.g = 9.81; % Gravitacijska konstanta
8 params.TA = 6; % Zakretni moment oko ramena
9 params.d = 0.035; % Udaljenost od lakta do uporišta bicepsa
10
11 % Početni uvjeti
12 q1 = -1.5; % Početna vrijednost kuta - prve generalizirane koordinate
13 q2 = 0.3; % Početna vrijednost kuta - druge generalizirane koordinate
14 v1 = 0; % Početna kutna brzina - brzina prve generalizirane koordinate
15 v2 = 0; % Početna kutna brzina - brzina druge generalizirane koordinate
16 Y0 = [q1, q2, v1, v2]; % Početni uvjeti za ODE sustav
17 Y = Y0;
```

Slika 3.4: Parametri modela u programu Octave

program izbacuje animaciju pokreta,



Slika 3.5: Animacija pokreta bacanja kugle (radi samo u programima koji podržavaju animacije pdf dokumenata poput Adobe Acrobat)



ispod možemo vidjeti 4 položaja ruke kroz simulaciju, od početnog do završnog položaja,

Slika 3.6: Slike položaja ruke za različito vrijeme t.

Zatim ispisuje sljedeći graf



Slika 3.7: Graf kutova q_1, q_2 , brzina \dot{q}_1, \dot{q}_2 , te sile bicepsa kroz vrijeme.

te vrijednosti:

r_x	0.4082
r_y	-0.5752
v_x	4.0519
vy	3.2745

Time smo završili sa analizom dinamike ljudske ruke, a da primijenimo primjer, promotrit ćemo još kosi hitac kugle sa danom početnom visinom.

3.8 Izbačaj i domet kugle

U prošlom dijelu smo dobili početne vrijednosti kugle u trenutku izbačaja. Odredimo najprije početnu visinu kugle. Po prosječnim mjerama ljudskog tijela [5], visina ramena našeg modela je $h_A = 1.5$. Budući da je pozicija kugle u trenutku izbačaja u odnosu na rame $r_x = 0.4082$, $r_y = -0.5752$, možemo uzeti da je visina kugle jednaka $h = h_A + r_y \approx 1$. Postavimo ishodište novog koordinatnog sustava {x, y} u središte kugle za vrijeme izbačaja,



Slika 3.8: Kosi hitac sa početnom visinom h

pri čemu je x usmjeren na desno, a y prema gore. U ovom primjeru zanemarujemo otpor zraka pa je putanja kugle dana s

$$x(t) = v_x t,$$

$$y(y) = v_y t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ono što nas zanima je trenutak T kada kugla padne na tlo, dakle kad je y(T) = -h, odnosno

$$y(T) = -h$$
$$v_y T - \frac{1}{2}gT^2 = -h$$
$$\frac{1}{2}gT^2 - v_y T + h = 0.$$

Rješenje ove kvadratne jednadžbe je

$$T = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}$$

pa je domet kugle u smjeru x osi jednak

$$R = v_x T = v_x \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g} = 3.6277.$$

Domet je relativno mali, pa ćemo povećati momente pokreta da dobijemo jači izbačaj kugle.

Kad povećamo moment oko ramena na 40 te podesimo silu bicepsa da podržava takav pokret, dobivamo sljedeći graf



Slika 3.9: Graf kutova q_1, q_2 , brzina \dot{q}_1, \dot{q}_2 , te sile bicepsa kroz vrijeme.

Položaj i brzina pri izbačaju za ovakvu konfiguraciju su

r_x	0.4085
r_y	-0.5751
v_x	7.3336
v _y	5.4941

Koristeći već zapisanu formulu za domet, sada dolazimo do sljedeće vrijednosti

$$R = v_x \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g} = 9.3829 \,.$$

Event funkcija

Izmjenom sile bicepsa i momenta ramena, možemo dobiti različite načine za izvesti pokret. Nadalje, možemo mijenjati uvjete zaustavljanja u event funkciji stopCondition za različite primjene modela. Jedan zanimljiv problem je kada izbaciti kuglu pri nekom pokretu, da dobijemo točno određeni domet. Koristeći event funkciju u ode45, to možemo jednostavno izvesti. Umesto kriterija zaustavljanja $q_1 + q_2 > 0.95$ u funkciji stopCondition, definiramo domet *R*, te kao uvjet postavimo $R > R_x$ gdje je R_x željena udaljenost. Tada će se simulacjia izvesti kao i prije, ali ćemo dobiti poziciju i brzinu kugle pri izbačaju, tako da pripadni kosi hitac rezultira sa horizontalnim dometom od R_x .

3.9 Sile u zglobovima

Iako smo korištenjem Lagrangeove mehanike zaobišli težak račun sa silama koji koristi Newtonova mehanika, možemo relativno lako izračunati iznose sila u zglobovima pri izvođenju pokreta. Promotrimo najprije silu u šaci. Koristeći Newtonove zakone dobivamo

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{K}} + m_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{g} = m_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{K}} \,. \tag{3.7}$$

Budući da imamo iznose brzina točke K, akceleraciju možemo aproksimirati kao

$$a_{K} = \frac{\mathbf{v}_{K}(t_{i}) - \mathbf{v}_{K}(t_{i-1})}{t_{i} - t_{i-1}}.$$
(3.8)

što ćemo izračunati numerički u Octavi. Vektor sile u šaci dobivamo kao $F_K = m_K a_K - m_K g$, a njen iznos kroz vrijeme F_K spremamo te prikazujemo na grafu.

Ispod vidimo skicu sila koje utječu na šaku



Slika 3.10: Sile koje utječu na šaku.

Slično, uz malo više računa dolazimo do sile u laktu. Jednadžba očuvanja sile je

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{B}} \tag{3.9}$$

Akceleraciju a_B odredimo numerički, slično kao u (3.8). Vektor sile bicepsa F_B računamo iz (3.6).



Slika 3.11: Sile koje utječu na lakat.

Vektor sile u laktu dobivamo kao $F_L = m_B a_B - F_B - m_B g + F_K$, a njen iznos kroz vrijeme F_L spremamo te prikazujemo na grafu.

Ispod možemo vidjeti graf sila u šaci i laktu za analizirani pokret, uz moment ramena $M_A = 40$.



Slika 3.12: Graf reakcijskih sila u šaci i laktu.

Bibliografija

- [1] Haim Baruh, Analytical Dynamics, 1999.
- [2] Marko Erceg, Marija Galić, Petar Kunštek i Marko Vrdoljak, *Metode matematičke fizike, skripta 2023.*
- [3] ExRx.net, Body Segment Data Kinesiology, https://exrx.net/Kinesiology/ Segments, Accessed: 2024-11-28.
- [4] Dewey H. Hodges i Carlos M. Roithmayr, *Dynamics: Theory and Application of Kane's Method*, Cambridge University Press, 2016.
- [5] OPEN Design Lab, Anthropometric Proportionality Constants Tool, http://tools. openlab.psu.edu/tools/proportionality_constants.htm, Accessed: 2024-11-27.
- [6] Huiju Pan i Jianshe Li, Muscle Length and Its Moment Arm of Elbow Muscles During Elbow Flexion and Extension, 18 International Symposium on Biomechanics in Sports (2000).

Sažetak

U ovom radu je demonstrirano kako možemo modelirati pokrete ljudskog tijela koristeći Lagrangeov pristup gibanju sustava krutih tijela, te način na koji možemo od skice pokreta doći do Euler-Lagrangeovih jednadžbi, u koje su dodane i generalizirane sile i momenti.

Krenuli smo od definiranja krutih tijela s pripadnim relativnim koordinatnim sustavima i opisom njihovog međusobnog odnosa. Računanjem kinetičke i potencijalne energije svakog tijela smo odredili Lagrangeovu funkciju, odnosno Euler-Lagrangeove jednadžbe za dvije generalizirane koordinate. Time smo dobili model u kojem se dva međusobno spojena kruta tijela gibaju pod utjecajem sile teže, to jest dvostruko njihalo. Da bi u model dodali i sile mišića, definirali smo generalizirane sile Q_i za svaku generaliziranu koordinatu i ubacili ih na desnu stranu Euler-Lagrangeovih jednadžbi.

Sustav diferencijalnih jednadžbi drugog reda smo svođenjem na sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda numerički rješili u programu Octave, koristeći funkciju ode45. Program je napravio i animaciju pokreta, te ispisao graf s generaliziranim koordinatama i brzinama kroz vrijeme. Pokazali smo jedan zanimljiv način korištena event funkcije za zaustavljanje programa, te na kraju iz već izračunatih sila, i numerički izračunate akceleracije dobili i reakcijske sile u šaci i laktu.

Summary

In this work, it was demonstrated how we can model the movements of the human body using Lagrange's approach to the motion of a system of rigid bodies, and the way we can get from the diagram of motion to the Euler-Lagrange equations, to which generalized forces and moments are added.

We started by defining rigid bodies with the corresponding relative coordinate systems and a description of their mutual relationship. By calculating the kinetic and potential energy of each body we determined the Lagrange function, that is, the Euler-Lagrange equations for two generalized coordinates. This resulted in a model in which two connected rigid bodies move under the influence of gravity, that is, a double pendulum. To add the muscle forces to the model, we have defined the generalized forces Q_i for each generalized coordinate and added them to the right side of the Euler-Lagrange equations.

By reducing the system of second-order differential equations to a system of the firstorder differential equations we have numerically solved it in the Octave program, using the function ode45. The program also created an animation of the movement, and printed a graph with generalized coordinates and speeds through time. We have shown an interesting way of using the event function for stopping the program, and finally, from the already known forces, and numerically calculated accelerations we have calculated reaction forces in the hand and elbow.

Životopis

Rođen sam 12. svibnja 1998. u Zadru, a zanimanje za matematiku imam još od osnovne škole u Tkonu, te Biogradu na Moru. Nakon toga sam upisao opću gimnaziju u Biogradu na Moru. Tokom školovanja, uz podršku nastavnika sam išao po natjecanjima iz matematike, uz sudjelovanje na državnom natjecanju u prvom srednje. 2017. godine upisujem Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, na kojem 2022. upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike.