Centri trokuta i glavni centri trokuta

Begić, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Begić

CENTRI TROKUTA I GLAVNI CENTRI TROKUTA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, veljača 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. **_________________________, predsjednik**
2. **_________________________, član**
3. **_________________________, član**

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. **_________________________**
2. **_________________________**
3. **_________________________**

Sadržaj

Uvod

Pojam centra trokuta uveden je kao poopćenje različitih istaknutih točaka u geometriji trokuta, od kojih su neki dobro poznati u klasičnoj elementarnoj planimetriji – težište, ortocentar, središte upisane kružnice, središte opisane kružnice, središte kružnice devet točaka. No, matematičari su uočili i istražili još niz točaka sa zanimljivim svojstvima kao što su Fermatova točka, Brocardove točke, točka sjecišta simedijana i tako dalje, pri čemu i među takvim točkama postoje različite relacije. Neke su kolinearne, a neke leže na posebnim krivuljama 2. i 3. reda.

Zbog velikog obilja točaka s posebnim svojstvima u odnosu na dani trokut pojavila se potreba za sustavnim pristupom i klasifikacijom takvih točaka. Pritom je od bitne koristi primjena tzv. trilinearnih koordinata, koje su znatno pogodnije za ovu svrhu od Kartezijevih koordinata na kakve smo uglavnom naviknuti, jer omogućuju lakše izražavanje svojstava invarijantnih s obzirom na sličnost trokuta. Centar trokuta se onda definira kao točka čije se trilinearne kooridnate mogu zadati pomoću onih funkcija elemenata trokuta koje imaju neka posebna svojstva.

U uvodnom dijelu rada upoznat ćemo se s trilinearnim koordinatama i kao primjer izračunati njihove vrijednosti za najpoznatije centre trokuta. U današnjoj geometriji već je glasovita Enciklopedija centara trokuta Clarka Kimberlinga, koji je početkom 1990-ih godina uveo novi pristup klasifikaciji i u kojoj je popisano preko 7 tisuća takvih centara. Slijedeći neke Kimberlingove radove, izložit ćemo nadalje još neke pojmove i postupke povezane sa centrima trokuta. Bit će to najprije bicentrični parovi točaka i postupci centralizacije, kojima se od bicentričkog para dobiva jedan centar.

Posebnu klasu centara čine tzv. glavni centri (*major centers* u Kimberlingovoj terminologiji) do kojih se dolazi na temelju ideje da se postupcima konstrukcije centara trokuta zadanom trokutu pridruži trokut koji će s njim biti perspektivan. Točnije, ako je X neki centar trokuta ABC, npr. središte upisane kružnice, pa se na trokute XBC, XCA i XAB primijeni postupak konstrukcije nekog centra tipa Y, od nastalog trokuta jednostavno se dobiva novi trokut $A'B'C'$ koji će u mnogim slučajevima biti perspektivan s trokutom ABC. Pokazuje se da je za to dovoljno, iako ne i nužno, za centar tipa Y izabrati bilo koji glavni centar, što znači da je svaka od njegovih trilinearnih koordinata funkcija samo jednog od tri kuta trokuta ABC, redom.

Poglavlje 1

Trilinearne koordinate i centri trokuta

Homogeni koordinatni sustav u matematici predstavlja sistem koordinata koji se koristi u projektivnoj geometriji, kao što se Kartezijev koordinatni sustav koristi u euklidskoj geometriji. Prednost homogenog koordinatnog sustava da se i „točke u beskonačnosti“mogu prikazati uporabom konačnih vrijednosti koordinata, uz to izrazi umnogome postaju jednostavniji za prikaz i manipulaciju.

U suvremenoj geometriji najčešće se koriste dva tipa homogenih koordinatnih sustava: baricentrični i trilinearni. Mi ćemo se ovdje usredotočiti na trilinearni sustav.

Trilinearni koordinatni sustav opisuje položaj točke u odnosu na dani trokut na taj način da se zadaju orijentirane udaljenosti točke od stranica trokuta.

Prije nego definiramo Centar trokuta trebao se prisjetiti definicija homogenosti i simetričnosti: Funkcija $f(a, b, c)$ je pozitivno homogena reda n u a, b i c ako za svaku uređenu trojku (a, b, c) i $t > 0$ vrijedi

$$f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c)$$

Funkcija $f(a, b, c)$ je simetrična u b i c ako za svaku uređenu trojku (a, b, c) vrijedi:

$$|f(a, b, c)| = |f(a, c, b)|$$

Definicija 1.1: Centar trokuta ABC je točka s trilinearnim koordinatama $x: y: z$ za koje je

$$x = f(a, b, c)$$

$$y = f(b, c, a)$$

$$z = f(c, a, b)$$

za neku pozitivno homogenu funkciju f sa svojstvom

$$|f(a, b, c)| = |f(a, c, b)|$$

Definicija 1.2: Neka je p površina trokuta ABC. Centar X je regularan centar ako postoji funkcija $f(a, b, c)$ koja ima oblik polinoma u varijablama a, b, c, p takva da vrijedi

$$X = f(a, b, c): f(b, c, a): f(c, a, b).$$

Definicija 1.3: Ako nam je dana stranica s trokuta ΔABC i točka P, označimo s$|P, s|$ (najmanju) udaljenost od P do pravca koji sadrži s. Definirajmo usmjerenu udaljenost od P do s kao

$$[P, s] = \begin{cases} |P, s| & ako\ je\ P\ na\ istoj\ strani\ od\ s\ kao\ i\ trokut \\ -|P, s| & ako\ je\ P\ na\ suprotnoj\ strani\ od\ s\ kao\ i\ trokut \end{cases}$$

Pomoću usmjerenih udaljenosti svaki trokut tvori koordinatni sustav u kojem točka P u ravnini ima tri koordinate

$$a = [P, BC], \qquad b = [P, AC], \qquad c = [P, AB]$$

To zapisujemo kao $P = [a: b: c]$.

Treba napomenuti da svaka točka ima svoju trojku realnih brojeva, koji ju jednoznačno određuju, ali ne mora svaka trojka brojeva imati svoju točku. Na primjer za jednakostranični trokut duljiine stranica 1 ne postoji točka s koordinatama [2:2:2]. To ograničenje rješavamo relacijom ekvivalencije.

Definicija 1.4: Dva seta trilinearnih koordinata $[a: b: c]$ i $[a^{'}: b^{'}: c^{'}]$ su ekvivalentni i pišemo $[a: b: c] \sim [a^{'}: b^{'}: c^{'}]$ ako postoji realan broj $k \neq 0$ takav da

$$a^{'} = ka \;\; b^{'} = kb \;\; c^{'} = kc$$

Pogledajmo prije spomenuti jednakostranični trokut dužine stranica 1. Jasno je da ne postoji točka koja je za 2 udaljena od svih stranica, ali [2:2:2] je ekvivalentno $[\frac{\sqrt{3}}{6}:\frac{\sqrt{3}}{6}:\frac{\sqrt{3}}{6}]$ a postoji točka čija je udaljenost od svake stranice $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (sjecište simetrala kutova).

Definicija 1.5: Trilinearne koordinate točke P u odnosu na trokut ΔABC su klasa ekvivalencije trojke $[ka\!:kb\!:kc]$ $(k \neq 0)$ gdje je

$$a = [P, BC] \;\; b = [P, AC] \;\; c = [P, AB]$$

Koordinate koje odgovaraju stvarnim orijentiranim udaljenostima kada je $k = 1$ nazivaju se egzaktnim trilinearnim koordinatama od P.

Budući je svaka koordinata klasa ekvivalencija postoji jasna i korisna veza između trilinearnih koordinata sličnih trokuta. Pretpostavimo da su ΔABC i $\Delta A'B'C'$ slični s koeficijentom sličnosti k takvim da

$$|A^{'}B^{'}| = k|AB||B^{'}C^{'}| = k|BC||C^{'}A^{'}| = k|CA|$$

Pretpostavim da su točke P i P' postavljene slično u odnosu na te trokute (takvi da je $|A^{'}P^{'}| = k|AP|$, $|B^{'}P^{'}| = k|BP|$ i $|C^{'}P^{'}| = k|CP|$). Tada su koordinate od P određene s ΔABC ekvivalentne koordinatama od P' određenim s $\Delta A'B'C'$.

Vratimo se na pitanje da li svaka klasa ekvivalencije od tri realna broja određuje točku. Vidimo da koordinate $[0\!:0\!:0]$ ne određuju niti jednu točku, ali to je iznimka.

Teorem 1.6: Raspon trilineara

Ako imamo ΔABC i ako su x, y, z realni brojevi od kojih bar jedan $\neq 0$ tada postoji točka čije su trilinearne koordinate upravo $[x\!:y\!:z]$u odnosu naΔABC .

Dokaz: U osnovi imamo 2 slučaja: gdje su x, y i z istog predznaka i onaj gdje nisu. Umjesto da tražimo P unutar ΔABC počet ćemo s točkom P i „izgraditi“ Δabc oko nje.

Taj trokut će biti:

1. sličan originalnom ΔABC i
2. biti postavljen tako da su trilinearne koordinate od P u odnosu na Δabc $[x: y: z]$

Tada će slično postavljena točka u ΔABC imati iste koordinate u odnosu na ΔABC

1. Slučaj $[+:+:+]\sim[-:-:-]$

Pogledajmo situaciju gdje su $x, y, z \geq 0$ (ne mogu svi biti jednaki 0 jer točka ne može biti na sve tri strane trokuta). Ovo rješava i slučaj gdje su sve tri koordinate negativne, jer $[x: y: z]\sim[-x: -y: -z]$. Označimo s F_x točku koja je na udaljenosti x od P. Na suprotnim stranama polupravca $\overrightarrow{PF_x}$ nacrtamo još dva polupravca pod kutevima $\pi - (\angle \mathrm{B})$ i $\pi - (\angle \mathrm{C})$ na prvom polupravcu označimo F_z (udaljenost z od P) na drugom označimo F_y (udaljenost y od P). Neka je

l_x pravac kroz F_x okomit na PF_x

l_y pravac kroz F_y okomit na PF_y

l_z pravac kroz F_z okomit na PF_z

Označimo njihove točke presjeka

$$a = l_y \cap l_z \quad b = l_x \cap l_z \quad c = l_x \cap l_y$$

Očito su $[x: y: z]$ trilinearne koordinate točke P u odnosu na Δabc. Da bi vidjeli da su Δabc i ΔABC sličniusporedit ćemo njihove unutarnje kuteve. Četverokut PF_xbF_z ima prave kuteve u vrhovima F_x i F_z i kut $\pi - (\angle \mathrm{B})$ u vrhu P. Budući je suma kuteva četverokuta 2π to znači da je $(\angle \mathrm{b}) = (\angle \mathrm{B})$ pa su kongruentni. Na isti način su i kutevi $\angle \mathrm{c}$ i $\angle$C također kongruentnipa su po KK poučku Δabc i ΔABC slični.

2. Slučaj$[+:-:-]\sim[-:+:+]$

Ovaj slučaj, uz male izmjene pokriva i slučajeve $[-:+:-]$,$[+:-:+]$,$[-:-:+]$ i $[+:+:-]$

Konstrukcija je ista uz jednu razliku, umjesto

$$(\angle \mathrm{F_z PF_x}) = \pi - (\angle \mathrm{B}) \& \left(\angle \mathrm{F_y PF_x}\right) = \pi - (\angle \mathrm{C})$$

uzimamo

$$(\angle \mathrm{F_z PF_x}) = (\angle \mathrm{B}) \& \left(\angle \mathrm{F_y PF_x}\right) = (\angle \mathrm{C})$$

pa dobivamo Δabc koji je sličan ΔABC, samo što točka P leži izvan njega. Ovisno o položaju točke u odnosu na pravac l_x orijentirane udaljenosti od P do BC, AC i AB su ili x, y, z ili $-x, -y, -z$. U svakom slučaju, budući su $[x: y: z]$ i $[-x: -y: -z]$ ekvivalentni P ima egzaktne koordinate$[x: y: z]$.

Trilinearne koordinate klasičnih centara

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako pronaći trilinearne koordinate najčešće spominjanih centara trokuta. Najlakši od svih je središte upisane kružnice, budući je jednako udaljen od svih stranica trokuta njegove trilinearne koordinate su $[1: 1: 1]$ (Ograničili smo se na šiljaste trokute).

Trilinearne koordinate središta opisane kružnice

Trilinearne koordinate središta opisane kružnice ΔABC su

$$[\cos A : \cos B : \cos C]$$

Dokaz: Označimo središte opisane kružnice sa P. Prisjetimo se da je središte opisane kružnice sjecište simetrala stranica. Pogledajmo simetralu stranice BC. Siječe BC u polovištu –X. Sada možemo izračunati prvu trilinearnu koordinatu

$$[P, BC] = |PX| = |PB| \cos(\angle BPX) = |PB| \cos(\angle BAC)$$

1. Minimalna udaljenost od P do BC je duž okomice pa vrijedi $[P, BC] = |PX|$. Pretpostavili smo da je ΔABC šiljasti pa se P nalazi unutar trokuta, na istoj strani dužine BC kao i A što znači da je udaljenost $[P, BC]$ pozitivna stoga vrijedi

$$[P, BC] = |P, BC| = |PX|$$

2. Pogledajmo kut $\angle\mathrm{BPX}$ u ΔBPX:

$$\cos(\angle BPX) = \frac{|PX|}{|PB|} \Rightarrow |PX| = |PB| \cos(\angle BPX)$$

3. Dužina PX raspolavlja ΔBPC u dva dijela koji su kongruentni po SKS poučku. $\overline{PX}$ dijeli $\angle BPC$ u dva kongruentna dijela pa $(\angle BPX) = \frac{1}{2}(\angle BPC)$. Znamo da opisana kružnica prolazi kroz sva tri vrha. U odnosu na tu kružnicu $\angle BAC$ je obodni kut, a $\angle BPC$ je središnji kut, pa nam Talesov teorem kaže da je

$$(\angle BAC) = \frac{1}{2}(\angle BPC) \Rightarrow (\angle BPX) = (\angle BAC)$$

Na isti način možemo naći udaljenosti od druge dvije stranice

$$[P, AC] = |PC| \cos(\angle ABC) \,\&[P, AB] = |PA| \cos(\angle BCA)$$

pa imamo egzaktne trilinearne koordinate središta upisane kružnice

$$P = [|PB| \cos(\angle \mathrm{A}) \ : \ |PC| \cos(\angle B) : \ |PA| \cos(\angle \mathrm{C})]$$

Na kraju još primijetimo da su $PA = PB = PC$ (jednake duljine) – radijus upisane kružnice pa budući je to konstanta možemo ju izbaciti iz gornje jednadžbe i zapisati jednostavnije

$$P = [\cos(\angle \mathrm{A}) \ : \ \cos(\angle B) : \ \cos(\angle \mathrm{C})]$$

Trilinearne koordinate ortocentra

Trilinearne koordinate ortocentra ΔABC su:

$$[\cos B \cos C : \cos A \cos C : \cos A \cos B]$$

Dokaz: Označimo ortocentar sa Q. Prisjetimo se da je on sjecište triju visina trokuta. Označimo nožišta tih visina:

F_A– nožište visine kroz A

F_B– nožište visine kroz B

F_C– nožište visine kroz C

Sada primijetimo da su one simetrale stranica većeg trokuta Δabc gdje

bc prolazi kroz A i paralelan je sa BC

ac prolazi kroz B i paralelan je sa AC

ab prolazi kroz C i paralelan je sa AB

$$
\begin{aligned}
[Q, BC] = |Q, F_A| &= |QB| \cos(\angle F_A QB) \\
&= |QB| \cos(\angle C) = |Qa| \cos(\angle aQB) \cos(\angle C) = |Qa| \cos(\angle B) \cos(\angle C)
\end{aligned}
$$

1. Udaljenost Q do BC se mjeri duž simetrale pa je $|Q, BC| = |Q, F_A|$ ali budući smo pretpostavili da je trokut šiljasti Q će biti unutar ΔABC pa je usmjerena udaljenost $[Q, BC]$ pozitivna. Stoga je
$$[Q, BC] = |Q, BC| = |Q, F_A|$$
2. Pogledajmo trokut $\Delta F_A QB$. U njemu je $\cos(\angle F_A QB) = \frac{|QF_A|}{|QB|}$ to povlači
$$|Q, F_A| = |QB| \cos(\angle F_A QB)$$
3. Po KK poučku $\Delta F_A QB \sim \Delta F_A CB$ (dijele kut B i imaju pravi kut). Stoga
$$\angle F_A QB \simeq \angle F_B CB$$
4. Pogledajmo trokut ΔaQB u njemu $\cos(\angle \mathrm{a} QB) = \frac{|QB|}{|Qa|}$ što povlači
$$|QB| = |Qa| \cos(\angle F_A QB)$$
5. Ortocentar $Q \Delta ABC$ je ustvari središte opisane kružnice većeg trokuta Δabc. Kut $\angle abc$ je obodni kut opisanoj kružnici čiji je središnji kut $\angle aQc$ – Thalesov teorem nam daje $(\angle abc) = \frac{1}{2}(\angle aQc)$. Segment QB raspolavlja $\angle aQc$ pa $(\angle aQB) =$

$\frac{1}{2}(\angle aQc)$ to znači $\angle aQB \simeq \angle abc$ koji je kongruentan $\angle B$ u prošlom trokutu. Na sličan način dobijemo

$$[Q, AC] = |Qb| \cos(\angle A) \cos(\angle C)$$
$$[Q, AB] = |Qc| \cos(\angle A) \cos(\angle B)$$

Time dobivamo trilinearne koordinate ortocentra:

$$Q = [|Qa| \cos(\angle B) \cos(\angle C) : |Qb| \cos(\angle A) \cos(\angle C) : |Qc| \cos(\angle A) \cos(\angle B)$$

Qa, Qb, Qc su jednake duljine budući da su radijusi kružnice opisane Δabc, njihovim izbacivanjem dobijemo:

$$Q = [\cos(\angle B) \cos(\angle C) : \cos(\angle A) \cos(\angle C) : \cos(\angle A) \cos(\angle B)$$

Trilinearne koordinate sjecišta simedijana (Lemoineova točka)

Definicija 1.7: Svaki trokut ima tri simedijane. Dobijemo ih tako da zrcalimo težišnicu iz jednog vrha preko simetrale pripadnog kuta. Možemo reći da su simedijane izogonalne težišnicama.

Pokazuje se da su simedijane konkurentne pa se uvodi naziv:

Definicija 1.8: Točka u kojoj se sijeku tri simedijane trokuta naziva se Lemoineova točka.

To je točka s vrlo jednostavnim trilinearnim koordinatama $(a : b : c)$. Sa slike se vidi da je

$$BS : SC = c : b$$

$$DS : SD' = AD : AD'$$

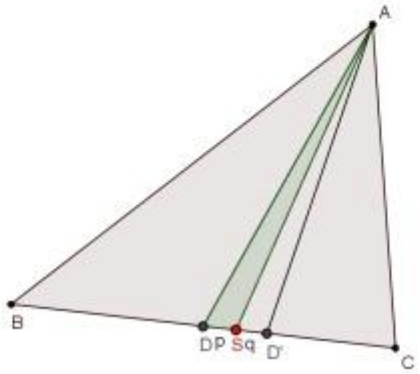
Omjer udaljenosti točke D' do stranica b i c iznosi $y : z = b : c$.

Analogno za ostale simedijane vrijedi:

$$x : y = a : b, \quad x : z = a : c$$

Odatle slijedi

$$(x:y:z) = \left(\frac{a}{c}:\frac{b}{c}:1\right) = (a:b:c)$$



Slika 1.1 Lemoineova točka

Trilinearne koordinate središta kružnice 9 točaka

Definicija 1.9: Svakom trokutu se može konstruirati kružnica koja prolazi kroz sva njegova polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužine koja spaja svaki vrh s ortocentrom. Takvu kružnicu zovemo Kružnica 9 točaka (ili Feuerbachova, Eulerova, Terquemova kružnica)

Kako bismo odredili trilinearne koordinate točke N trebamo izračunati obične koordinate točaka A, A_1, Q i D preko radijvektora iz bilo kojeg ishodišta; npr. Ako je D polovište $\overline{BC}$, onda $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ pa $(x_D, y_D, z_D) = (\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}, \frac{z_B+z_C}{2})$.

Pomoću formule za računanje površine trokuta pomoću poluopsega i radijusa upisane kružnice odnosno zadane duljine stranice i visine na istu $P = s \cdot r, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$ dobijemo vezu između trilinearnih i običnih koordinata $t = \frac{2P}{ax+by+cz}$.

Dakle za trilinearne koordinate $(x:y:z)$, odgovarajuće koordinate su

$$\left(\frac{2P}{ax+by+cz}x, \frac{2P}{ax+by+cz}y, \frac{2P}{ax+by+cz}z\right)$$

$$A(1:0:0) = A(v_a, 0,0) = \left(\frac{2P}{a}, 0,0\right)$$

$$B(0:1:0) = A(0, v_b, 0) = \left(0, \frac{2P}{b}, 0\right)$$

$$C(0:0:1) = A(0,0, v_c) = \left(0,0, \frac{2P}{c}\right)$$

Ortocentar Q:

$$Q\left(\frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma}\right)$$

Označimo:

$$m = \frac{2P}{\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} + \frac{c}{\cos\gamma}}$$

sada

$$Q\left(\frac{2P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}, \frac{2P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\beta}, \frac{2P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}\right)$$

pa polovište K dužine $\overline{AQ}$:

$$x_K = \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{P}{a} + \frac{P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$y_K = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\beta} = \frac{P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\beta}$$

$$z_K = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\gamma} = \frac{P}{m}\cdot\frac{1}{\cos\gamma}$$

za polovište N od $\overline{KD}$ dobijemo:

$$x_N = \frac{1}{2}(x_K + x_D) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{m\cos\alpha}\right)$$

$$y_N = \frac{1}{2}(y_K + y_D) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{m\cos\beta}\right)$$

$$z_N = \frac{1}{2}(z_K + z_D) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{m\cos\gamma}\right)$$

$$(x_N : y_N : z_N) = \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{m\cos\alpha}\right) : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{m\cos\beta}\right) : \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{m\cos\gamma}\right)\right)$$

Računamo

$$\frac{\mathrm{m}\cos\alpha + a}{am\cos\alpha} = \frac{m}{a} + \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\frac{m}{a} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\frac{b}{a}}{\cos\alpha} + \frac{\frac{c}{a}}{\cos\gamma}$$

$$\frac{m}{a} + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{2\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{2\cos\beta\cos\gamma - \cos(\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Izlučimo nazivnik

$$= 2\cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

$$= \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta-\gamma)$$

Analogno za ostale koordinate od N

$$N = (\cos(\beta-\gamma) : \cos(\gamma-\alpha) : \cos(\alpha-\beta))$$

Poglavlje 2

Bicentrični parovi točaka i operacije centralizacije

Definicija 2.1: Neka je P točka s trilinearnim koordinatama

$$f(a,b,c):f(b,c,a):f(c,a,b)$$

pri čemu je f homogena funkcija u a,b,c, ali nije ispunjen uvjet

$$|f(a,c,b)| = |f(a,b,c)| \tag{2.1}$$

Tada točka P nije centar, a za točke

$$F_{ab} = f(a,b,c):f(b,c,a):f(c,a,b)$$

$$F_{ac} = f(a,c,b):f(b,a,c):f(c,b,a) \tag{2.2}$$

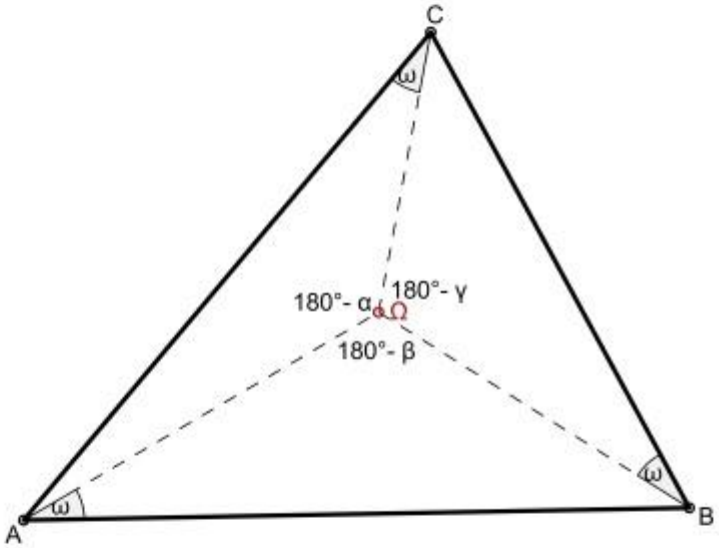
kažemo da tvore bicentričan par.

Primjer za to su Brocardove točke.

Definicija 2.1: Točku Ω trokuta ABC takvu da vrijedi

$$\angle\Omega AB = \angle\Omega BC = \angle\Omega CA = \omega$$

zovemo prva Brocardova točka. Kut ω zovemo Brocardov kut.



Slika 2.1 Konstrukcija prve Brocardove točke

Sada ćemo naći trilinearne koordinate prve Brocardove točke. Iz prve Brocardove točke Ω povučemo okomice na stranice trokuta $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ i nožišta označimo s D, E i F.

Prema definiciji trilinearnih koordinata

$$t_1 = d(\Omega, \overline{BC}) = |\Omega D|$$

$$t_2 = d(\Omega, \overline{CA}) = |\Omega E|$$

$$t_3 = d(\Omega, \overline{AB}) = |\Omega F|$$

U pravokutnim trokutima$AF\Omega, BD\Omega, CE\Omega$ vrijedi

$$\cos\omega = \frac{t_3}{|A\Omega|}, \cos\omega = \frac{t_1}{|B\Omega|}, \cos\omega = \frac{t_2}{|C\Omega|}$$

U trokutu $BC\Omega$ kut ∠BΩC jednak je 180^{o} - γ. Izrazimo površinu trokuta $BC\Omega$:

$$P(\Delta BC\Omega) = \frac{1}{2}|B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^0 - \gamma) = \frac{1}{2}at_1$$

odatle dobivamo

$$|B\Omega| \cdot |C\Omega| \sin\gamma = at_1 \qquad 2.3$$

u trokutu $AB\Omega$ imamo

$$P(\Delta AB\Omega) = \frac{1}{2}|A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin(180^0 - \alpha) = \frac{1}{2}ct_3$$

tj.

$$|A\Omega| \cdot |B\Omega| \sin\beta = ct_3 \qquad 2.4$$

u trokutu $AC\Omega$ imamo

$$P(\Delta AC\Omega) = \frac{1}{2}|A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin(180^0 - \alpha) = \frac{1}{2}bt_2$$

$$|A\Omega| \cdot |C\Omega| \sin\alpha = bt_2 \qquad 2.5$$

dijeljenjem obiju strana u (2.4) i (2.5) jednakosti dobijemo

$$\frac{|B\Omega| \sin\beta}{|C\Omega| \sin\alpha} = \frac{ct_3}{bt_2}$$

primjenom sinusovog teorema dobijemo

$$t_3 = \frac{b^2}{ac}t_1.$$

dijeljenjem obiju strana u (2.3) i (2.4) jednakosti dobijemo

$$\frac{|C\Omega| \sin\gamma}{|A\Omega| \sin\beta} = \frac{at_1}{ct_3}$$

Primjenom sinusovog teorema dobijemo

$$t_2 = \frac{ab}{c^2}t_1.$$

Zato je

$$t_1 : t_2 : t_3 = t_1 : \frac{ab}{c^2}t_1 : \frac{b^2}{ac}t_1$$

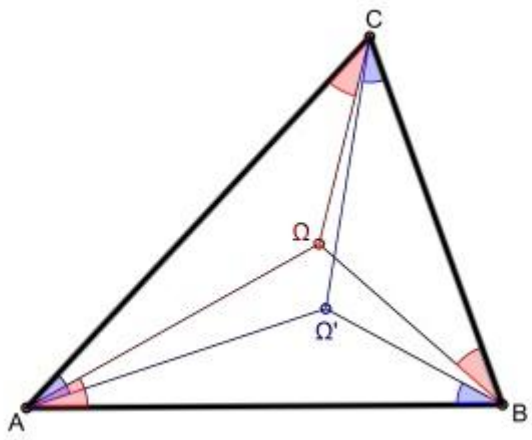
$$t_1 : t_2 : t_3 = 1 : \frac{ab}{c^2} : \frac{b^2}{ac}$$

$$t_1 : t_2 : t_3 = \frac{c}{b} : \frac{a}{c} : \frac{b}{a}$$

Time smo dobili trilinearne koordinate prve Brocardove točke.

Definicija2.2: Druga Brocardova točka trokuta ABC je točka Ω' takva da vrijedi

$$\angle \Omega' BA = \angle \Omega' CB = \angle \Omega' AC = \omega'$$



Slika 2.2 Prva i druga Brocardova točka

Druga Brocardova točka se konstruira na isti način kao i prva Brocardova točka stoga vrijede ista svojstva.

Ako trokutu ABC s prvom Brocardovom točkomΩopišemo kružnicu k_0 i vrhove trokuta ABC spojimo s točkom Ω i te spojnice produžimo tako da sijeku kružnicu k_0 redom u točkama $A^{'}$, $B^{'}$ i C' vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.3: Trokut $A'B'C'$ je sukladan trokutu ABC, a prva Brocardova točka trokuta ABC je druga Brocardova točka trokuta $A'B'C'$.

Dokaz: Točka Ω je prva Brocardova točka trokuta ABC pa vrijedi

$$\angle \Omega CA = \angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \omega$$

Kutovi ΩCA i $C'A'A$ su sukladni jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC'}$. Na isti način zaključujemo $\angle \Omega AB = \angle A'B'B$ i $\angle \Omega BC = \angle B'C'C$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{B'C}$). Dakle,

$$\angle \Omega B'C' = \angle \Omega A'C' = \angle \Omega C'B' = \omega$$

tj. Ω je druga Brocardova točka trokuta $A'B'C'$.

Druge centralizirajuće operacije

Postoji niz računskih operacija koje od bicentričnih parova točaka daju centar trokuta. Npr. prije spomenuti par točaka F_{ab}, F_{ac}. Točke

$$F_{ab} \oplus F_{ac} \coloneqq (f_{ab} + f_{ac}) : (f_{bc} + f_{ba}) : (f_{ca} + f_{cb}) \tag{2.6}$$

$$F_{ab} \ominus F_{ac} \coloneqq (f_{ab} - f_{ac}) : (f_{bc} - f_{ba}) : (f_{ca} - f_{cb}) \tag{2.7}$$

su centri trokuta.

Pretpostavimo da točke F_{ab} i F_{ac} ne leže na neizmjerno dalekom pravcu L^{∞} i pogledajmo normirane trilinearne koordinate u obliku:

$$F'_{ab} = (k_{ab} f_{ab}, k_{ab} f_{bc}, k_{ab} f_{ca}), F_{ab} = (k_{ac} f_{ac}, k_{ac} f_{ba}, k_{ac} f_{cb}) \tag{2.8}$$

gdje je

$$k_{ab} = \frac{2\sigma}{a f_{ab} + b f_{bc} + c f_{ca}}, k_{ac} = \frac{2\sigma}{a f_{ac} + b f_{ba} + c f_{cb}}$$

a σ je površina trokuta ABC.

Stoga možemo zapisati

$$F'_{ab} \oplus F'_{ac} = (k_{ab} f_{ab} + k_{ac} f_{ac}) : (k_{ab} f_{bc} + k_{ac} f_{ba}) : (k_{ab} f_{ca} + k_{ac} f_{cb}). \tag{2.9}$$

Ova točka $f(a, b, c)$bit će različita od $F_{ab} \oplus F_{ac}$ uz prikladan izbor funkcije.

U svakom slučaju (2.9) daje središnju točku bicentričnog para točaka F_{ab}, F_{ac} atočka koja je njoj harmonički konjugirana s obzirom na točke (2.2) je sjecište pravca$F_{ab} F_{ac}$ s neizmjerno dalekimL^{∞}.

Pogledajmo sada još jednu centralizirajuću operaciju na paru točaka F_{ab}, F_{ac} . Njihova spojnica je pravac zadan jednadžbom:

$$\begin{vmatrix} \propto & \beta & \gamma \\ f_{ab} & f_{bc} & f_{ca} \\ f_{ac} & f_{ba} & f_{cb} \end{vmatrix} = 0$$

ito je centralni pravac. Njegov trilinearni pol P, i izogonalni konjugat pola P dan koordinatama:

$$(f_{bc} f_{cb} - f_{ca} f_{ba}) : (f_{ca} f_{ac} - f_{ab} f_{cb}) : (f_{ab} f_{ba} - f_{bc} f_{ac})$$

također su centri trokuta.

Ako je

$$X = x : y : z = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$$

centar trokuta različit od X_1 tada su točke

$$Y = y : z : x \text{ i } Z = z : x : y$$

očigledno bicentrične. Primjenom gore spomenutih operacija na $\{Y, Z\}$ dobivamo sljedeće centre:

- Trilinearni produkt
- $Y \oplus Z = (y + z) : (z + x) : (x + y)$
- $Y \ominus Z = (y - z) : (z - x) : (x - y)$

Točke $^{Z}/_{Y}$ i $^{Y}/_{Z}$ su bicentrične i također daju centre.

Sada ćemo pokazati da se primjenom operacije trilinearnog produkta na dvije bicentrične točke (X i U) doista dobiva centar. Neka je

$$X = x : y : z = f(a,b,c) : f(b,c,a) : f(c,a,b)$$

$$U = u : v : w = f(a,c,b) : f(b,a,c) : f(c,b,a)$$

Trilinearni produkt je:

$$xu : yv : zw$$

Stoga je prva trilinearna koordinata za trilinearni produkt točaka X i U dana s

$$g(a,b,c) = f(a,b,c) \cdot f(a,c,b)$$

Treba provjeriti simetričnost i homogenost funkcije g. Prema pretpostavkama f je pozitivno homogena reda n. Tada je

$$g(ta,tb,tc) = f(ta,tb,tc) \cdot f(ta,tb,tc) = t^n f(a,b,c) \cdot t^n f(a,c,b)$$

$$= t^{2n} f(a,b,c) \cdot f(a,c,b) = t^{2n} g(a,b,c),$$

tj. g je pozitivno homogena reda $2n$. Osim toga vrijedi

$$g(a,c,b) = f(a,c,b) \cdot f(a,b,c) = g(a,b,c),$$

tj. g je simetrična u drugoj i trećoj varijabli. Dakle g, generira centar trokuta.

Poglavlje 3

Glavni centri trokuta

Uz dosadašnje centre trokuta uvodimo pojam glavnih centara trokuta koji za razliku od „običnih“ nisu točke već funkcije kutova ili udaljenosti od stranica.

Definicija 3.1: Centar trokuta P je glavni centar trokuta ako se trilinearne koordinate od P mogu izraziti u obliku $f(A): f(B): f(C)$ gdje je $f(A)$ funkcija kuta uz vrh A i ne ovisi o drugim kutovima ili duljinama stranica (analogno za $f(B)$ i $f(C)$).

Neka $x(ABC)$ označava postupak za konstrukciju nekog centra X ΔABC, npr. I - središta upisane kružnice, a s $y(ABC)$ označimo postupak za pronalaženje drugog (možda i istog) centra Y trokuta ABC npr. težišta G. Za dani X možemo formirati tri trokuta XBC, XCA, XAB i na svaki primijeniti funkciju $y$kako bi našli njihove centre:

$$y(\Delta XBC) = Y_A, \ \ y(\Delta AXC) = Y_B, \ \ y(\Delta ABX) = Y_C$$

Neka je

$$A^{'} = XY_A \bigcap BC, \ \ B^{'} = XY_B \bigcap CA, \ \ C^{'} = XY_C \bigcap AB$$

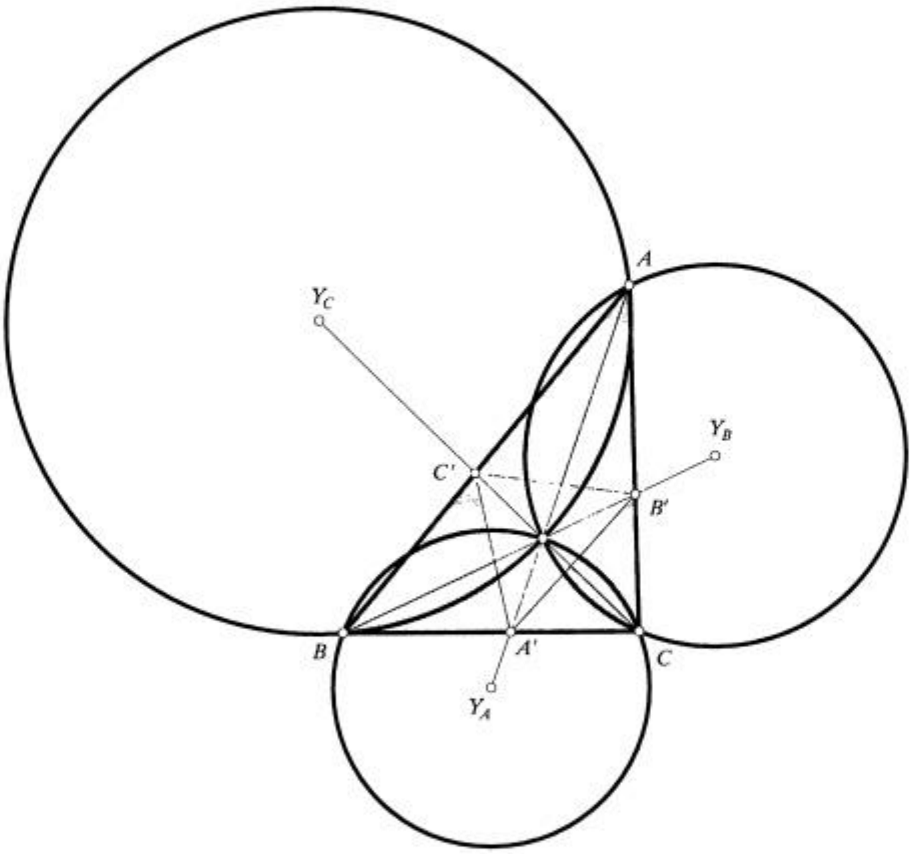
Daljnje istraživanje bit će motivirano sljedećim pitanjem: Za danu funkciju x, koje funkcije daju $A'B'C'$ koji je perspektivan trokutu ABC tj. takav trokut da pravci $AA^{'}, BB^{'}, CC^{'}$ prolaze jednom točkom Z?

Napomena 3.2: Jedan od najvažnijih teorema projektivne geometrije, Desarguesov teorem, govori da su dva trokuta ABC i $A'B'C'$ centralno perspektivni (tj. da se pravci

$AA^{'}, BB'$ i CC' sijeku u jednoj točki) ako i samo ako su osno perspektivni (što znači da sjecišta pravaca AB i $A^{'}B^{'}, BC$ i $B'C'$ te CA i $C'A'$ leže na jednom pravcu). Stoga je dovoljno govoriti jednostavno o perspektivnosti dva trokuta, budući da je postojanje centra perspektiviteta ekvivalentno postojanju osi perspektiviteta.

Lako se geometrijski vidi da ako x konstruira središte upisane kružnice, a y konstruira težište tada je dobiveni trokut $A'B'C'$ perspektivan trokutu ABC i Z je težište trokuta ABC.

Sada ćemo koristeći trilinearne koordinate i standardnu definiciju centra geometrijski postupak prevesti u analitički postupak.



Slika 3.1 Dva perspektivna trokuta

Tri točke $P_i = \alpha_i : \beta_i : \gamma_i$ su kolinearne ako i samo ako

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1}$$

Ako $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$(3.1) zamijenimo varijabilnom točkom $\propto : \beta : \gamma$dobijemo jednadžbu pravca $P_2 P_3$. Svojstvo dualno kolinearnosti točaka koje je izraženo pomoću (3.1), jest svojstvo konkurentnosti pravaca (tj. da tri pravca prolaze kroz jednu točku)

$\alpha\alpha_i + \beta\beta_i + \gamma\gamma_i = 0, i = 1, 2, 3.$

Primjenom dualnosti, sjecište drugog i trećeg pravaca je točka s koordinatama

$$\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 : \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3 : \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3. \tag{3.2}$$

Kada trilinearne koordinate točke izražavamo pomoću kutovaA, B, C u trokutu, točke se mogu gledati kao funkcije varijabli A, B, C. Podsjetimo se da za točku P koja je centar trokuta u smislu Definicije 1.1. vrijedi sljedeće. P ima trilinearne koordinate

$$f(A, B, C) : g(A, B, C) : h(A, B, C)$$

koji zadovoljavaju uvjete

- $g(A, B, C) = f(B, C, A)$ i $h(A, B, C) = f(C, A, B)$;
- $f(A, C, B) = f(A, B, C)$;
- Ako P zapišemo kao $u(a, b, c) : u(b, c, a) : u(c, a, b)$ gdje su a, b, c stranice trokuta ABC, tada je u homogen varijablama a, b, c.

Označimo li sa $\boldsymbol{F}$ skup svih centara trokuta ABC, početni primjer nam može poslužiti za postavljanje općenitog pitanja:

Problem A: ako je zadana točka X kao središte upisane kružnice trokuta ABC, pronaći sve $Y \in \boldsymbol{F}$ za koje je trokut $A'B'C'$ perspektivan trokutu ABC.

Da bi pronašli Y u tri trokuta formirat ćemo trilinearne koordinate za Y_A u odnosu na trokut XBC, Y_B u odnosu na trokut AXC i Y_C u odnosu na trokut ABX i transformirati ih u koordinate u odnosu na trokut ABC.

Koordinatne transformacije

Bilo koje tri nekolinearne točke

$$P_i = f_i(a,b,c) : g_i(a,b,c) : h_i(a,b,c): \quad i = 1,2,3,$$

određuju trokut s vrhovima P_1, P_2, P_3. Trokut se može prikazati matricom

$$M = \begin{pmatrix} f_1(a,b,c) & g_1(a,b,c) & h_1(a,b,c) \\ f_2(a,b,c) & g_2(a,b,c) & h_2(a,b,c) \\ f_3(a,b,c) & g_3(a,b,c) & h_3(a,b,c) \end{pmatrix}$$

Neka $F_i,\ G_i,\ H_i$ označavaju funkcije koje zadovoljavaju

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} F_1(a,b,c) & G_1(a,b,c) & H_1(a,b,c) \\ F_2(a,b,c) & G_2(a,b,c) & H_2(a,b,c) \\ F_3(a,b,c) & G_3(a,b,c) & H_3(a,b,c) \end{pmatrix}$$

pri čemu je $|M| = detM$.

Neka su $\alpha' : \beta' : \gamma'$ trilinearne koordinate točke Y u odnosu na M. Tada matrična jednadžba

$$(\alpha \quad \beta \quad \gamma) = (\alpha' \quad \beta' \quad \gamma')DM \tag{3.3}$$

daje trilinearne koordinate u odnosu na trokut ABC za točku Y gdje

$$D = \begin{pmatrix} \delta_1 D_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 D_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 D_3 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3\cos A - 2F_3F_1\cos B - 2F_1F_2\cos C}$$

$$D_2 = \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 - 2G_2G_3\cos A - 2G_3G_1\cos B - 2G_1G_2\cos C}$$

$$D_3 = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 2H_2H_3\cos A - 2H_3H_1\cos B - 2H_1H_2\cos C}$$

i $\delta_i = \pm 1$ za $i = 1,2,3$ ovisno o položaju točke u odnosu na stranice trokuta. Podsjetimo: da bi mogli reći kada je $\delta_i = -1$, a kada +1 prvo moramo definirati pozitivnu stranu stranice trokuta kao skup točaka ravnine koja leži na istoj strani stranice kao i vrh koji već nije na stranici. Druga strana je negativna, a usmjerena udaljenost pozitivna ili negativna ovisno o položaju točke. Usmjerena udaljenost od Y do stranice P_2P_3 je $\frac{\delta_1 h_1}{D_1}$ gdje je $h_1 = \alpha F_1 + \beta F_2 + \gamma F_3$ a δ_1 je određena ovako: ako se Ynalazi s pozitivne strane P_2P_3 i $h_1 < 0$ tada je $\delta_1 = -1$; ako Y leži na negativnoj strani P_2P_3 i $h_1 > 0$, $\delta_1 = -1$; inače $\delta_1 = 1$. δ_2 i $\delta_3$su određeni analogno. Ovdje ne navodimo cijeli, vrlo složeni postupak izračunavanja $(\alpha:\beta:\gamma)$ i $(\alpha':\beta':\gamma')$ (vidi članak[4])

Općenito možemo dozvoliti da X bude i neka druga točka, ne samo središte upisane kružnice, pa pišemo $X = x:y:z$. Relevantne matrice su tada

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } M^{-1} = \frac{1}{x^3}\begin{pmatrix} 1 & -y & -z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

Transformacija (3.3) može zapisati u obliku

$$\alpha:\beta:\gamma = (x\delta_1 D_1 \alpha'):(y\delta_1 D_1\alpha' + \delta_2 D_2 \beta'):(z\delta_1 D_1 \alpha' + \delta_3 D_3 \gamma') \qquad (3.4)$$

Ova jednadžba pokazuje kako se mogu zapisati trilinearne koordinate $\alpha:\beta:\gamma$ za Y_A u odnosu na trokut ABC u izražen pomoću trilinearnih koordinata $\alpha':\beta':\gamma'$ za Y_A u odnosu na trokut XBC. Pritom $\alpha':\beta':\gamma'$ treba biti zadano preko duljina stranica trokuta XBC koje naravno ovise o izboru točke X.

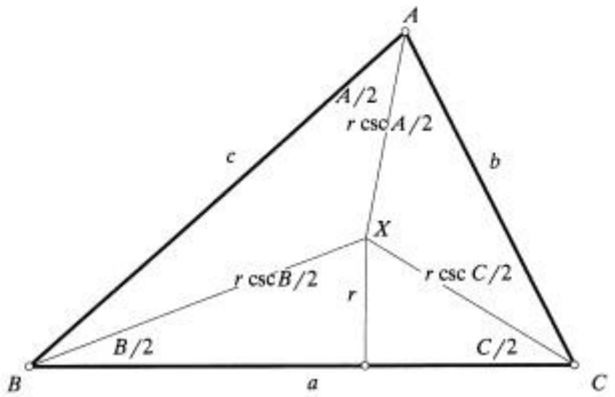
Glavni centri kao rješenje problema A

Za problem A gdje je X centar upisane kružnice imamo $X = 1:1:1$ i $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$ u jednadžbi (3.4), duljine stranica trokuta XBC izražene u donjoj slici pa iz jednadžbe (3.4) imamo relaciju

$$\alpha:\beta:\gamma = \alpha^{'}:\alpha^{'} + 2\beta' \cos\left(\frac{C}{2}\right):\alpha^{'} + 2\gamma' \cos\left(\frac{B}{2}\right)$$

Sada se može izračunati sjecište A' pravaca XY_A i BC

$$A^{'} = 0:\beta \sec\left(\frac{B}{2}\right):\gamma' \sec\left(\frac{C}{2}\right)$$



Analogno treba učiniti za druga dva unutarnja trokuta AXC i ABX, dakle naći točke B' i C', zatim odrediti jednadžbe za tri pravca $AA^{'}, BB^{'}, CC'$, i na kraju naći nužan i dovoljan uvjet da ta tri pravca prolaze kroz jednu točku. Zapišimo $Y_A = \alpha'_1:\beta'_1:\gamma'_1$, $Y_B = \alpha'_2:\beta'_2:\gamma'_2$, $Y_C = \alpha'_3:\beta'_3:\gamma'_3$

$$AA^{'}: \quad \left(\frac{-1}{\beta'_1}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\beta + \left(\frac{1}{\gamma'_1}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)\gamma = 0 \tag{3.5}$$

$$BB^{'}: \quad \left(\frac{1}{\alpha'_2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)\alpha + \left(\frac{-1}{\gamma'_2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)\gamma = 0 \tag{3.6}$$

$$CC^{'}: \quad \left(\frac{1}{\alpha'_3}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)\alpha + \left(\frac{-1}{\beta'_2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\gamma = 0 \tag{3.7}$$

Koristeći jednadžbu (3.1) tj. izjednačavanjem odgovarajuće determinante s 0 zaključujemo da se pravci sijeku ako i samo ako

$$\alpha'_3\beta'_1\gamma'_2 = \alpha'_2\beta'_3\gamma'_1 \tag{3.8}$$

gdje

$$\alpha'_1 = \alpha'\left(a, r\csc\left(\frac{C}{2}\right), r\csc\left(\frac{B}{2}\right)\right), \beta'_1 = \alpha'\left(r\csc\left(\frac{C}{2}\right), r\csc\left(\frac{B}{2}\right), a\right),$$
$$\gamma'_1 = \alpha'\left(r\csc\left(\frac{B}{2}\right), a, r\csc\left(\frac{C}{2}\right)\right)$$

$$\alpha'_2 = \alpha'\left(r\csc\left(\frac{C}{2}\right), b, r\csc\left(\frac{A}{2}\right)\right), \beta'_2 = \alpha'\left(b, r\csc\left(\frac{A}{2}\right), r\csc\left(\frac{C}{2}\right)\right),$$
$$\gamma'_2 = \alpha'\left(r\csc\left(\frac{A}{2}\right), r\csc\left(\frac{C}{2}\right), b\right)$$

$$\alpha'_3 = \alpha'\left(r\csc\left(\frac{B}{2}\right), r\csc\left(\frac{A}{2}\right), c\right), \beta'_3 = \alpha'\left(r\csc\left(\frac{A}{2}\right), c, r\csc\left(\frac{B}{2}\right)\right),$$
$$\gamma'_3 = \alpha'\left(c, r\csc\left(\frac{B}{2}\right), r\csc\left(\frac{A}{2}\right)\right)$$

r označava radijus upisane kružnice trokuta ABC. Dobiveni uvjeti općenito poprimaju vrlo složeni oblik pa ih je teško provjeriti, no ispunjeni su, primjerice, u posebnom slučaju kada je Y takav centar za koji postoje trilinearne koordinate $\alpha{:}\,\beta{:}\,\gamma$ sa svojstvom da je $\alpha = f(A)$ i analogno za $\beta = f(B)$ i $\gamma = f(C)$. Sljedeći teorem pokazuje da je za neki centar dovoljno da bude glavni centar kako bi pripadao skupu rješenja Problema A.

Teorem 3.3: Svaki glavni centar Y rješava problem A. Ako $Y = f(A){:}\,f(B){:}\,f(C)$ onda je sjecište triju pravaca (centar perspektiviteta) glavni centar zadan sa

$$f\left(\frac{A}{2}\right)\sec\left(\frac{A}{2}\right) : f\left(\frac{B}{2}\right)\sec\left(\frac{B}{2}\right) : f\left(\frac{C}{2}\right)\sec\left(\frac{C}{2}\right) \tag{3.9}$$

Dokaz: Za zadani $Y = f(A){:}\,f(B){:}\,f(C)$, dobiva se da su$Y_A, Y_B, Y_C$ dani s

$$\begin{pmatrix}\alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1\\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2\\ \alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(\frac{(\pi-A)}{2}\right) & f\left(\frac{B}{2}\right) & f\left(\frac{C}{2}\right)\\ f\left(\frac{A}{2}\right) & f\left(\frac{(\pi-B)}{2}\right) & f\left(\frac{C}{2}\right)\\ f\left(\frac{A}{2}\right) & f\left(\frac{B}{2}\right) & f\left(\frac{(\pi-C)}{2}\right)\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Jednadžba (3.8) tada vrijedi, a jednadžbe (3.5) do (3.7) skupa sa (3.2) impliciraju

$$BB^{'} \bigcap CC' = -\frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\gamma'_2\beta'_3} : -\frac{\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\gamma'_2\alpha'_3} : -\frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\alpha'_2\beta'_3}$$

tako da (3.10) vodi do (3.9).

Na primjer, ako je $Y = \sin A : \sin B : \sin C$ (sjecište simedijana ili Lemoineova točka) tada

$$\begin{pmatrix}\alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1\\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2\\ \alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{A}{2}\right) & \sin\left(\frac{B}{2}\right) & \sin\left(\frac{C}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{A}{2}\right) & \cos\left(\frac{B}{2}\right) & \sin\left(\frac{C}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{A}{2}\right) & \sin\left(\frac{B}{2}\right) & \cos\left(\frac{C}{2}\right)\end{pmatrix}$$

i $BB^{'} \cap CC' = -\frac{\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)}$ pa je točka presjeka $\tan\left(\frac{A}{2}\right) : \tan\left(\frac{B}{2}\right) : \tan\left(\frac{C}{2}\right)$.

Napomena 3.4 Pokazuje se da glavni centri nisu jedini centri koji su rješenje Problema A primjerice centar tzv. Kiepertove hiperbole zadan s$\alpha = \sin A \sin^2(B-C)$ nije glavni centar, ali predstavlja rješenje.

Literatura

[1] Clark Kimberling: Bicentric pairs of points and related triangle centers,

Forum Geometricum vol. 3 (2003) 35-47.

http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200303.pdf

[2] Clark Kimberling: Major centers of triangles,

American Math. Monthly vol. 104(5) (May, 1997) 431-438.

http://apollonius.math.nthu.edu.tw/d1/ne01/jyt/linkjstor/compass%20only/Major%20Centers%20of%20Triangles.pdf

[3] Clark Kimberling: Encyclopedia of triangle centers

http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[4] Clark Kimberling: Triangle centers as functions,

Rocky Mountain J. Math. 23(1993) 1269-1286.

[5]D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 2004.

[6] Bernarda Topalović, Bicentrični parovi točaka trokuta, diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2015.

[7] Tamara Zdjelar, Kiepertove konike. Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2014.

Sažetak

U ovom diplomskom radu izloženi su neki pojmovi i rezultati iz područja geometrije trokuta povezani s konceptom centra trokuta kao poopćenja klasičnih karakterističnih točaka trokuta. Rezultati ovog smjera istraživanja u posljednjih tridesetak godina naročito je vidljiv u „Enciklopediji centara trokuta“ Clarka Kimberlinga.

Za definiranje i proučavanje centara trokuta najpogodnije su homogene koordinate, a ovdje se služimo posebnim tipom takvih koordinata koje se nazivaju trilinearne koordinate. U prvom dijelu rada upoznajemo se s tim koordinatnim sustavom i primjenjujemo ga na klasične centre trokuta, primjerice centri upisane i opisane kružnice, ortocentar.

Zatim se općenito definira centre trokuta kao točke čije se trilinearne koordinate mogu izraziti kao funkcije kutova i duljina stranica. Nadalje, uočavaju se tzv. bicentrični parovi točaka kakve su npr. Brocardove točke i operacije s kojima se od bicentričnog para dobiva centar.

Poseban je naglasak na glavnim centrima trokuta koji se uvode s motivom da se poznatim postupkom dobije novi trokut koji je perspektivan polaznom.

Složenost problema ne dopušta jednostavno eksplicitno rješenje, no svaki glavni centar, a to je centar čije se trilinearne koordinate mogu izraziti u obliku $f(A):f(B):f(C)$ pripada skupu rješenja.

Summary

In this master's thesis we showed some terms and results from field of triangle geometry that are linked with the concept of triangle center as generalization of classic characteristic points of triangle. Results of this field’s research can be seen in “Encyclopedia of triangle centers” by Clark Kimberling.

To define and study centers of triangles we find homogeneous coordinates to be the most suitable. Here we used special kind of those coordinates that are called trilinear coordinates. In first part of the thesis we get to know around that coordinate system and apply it to classic triangle centers like incenter, centroid and orthocenter.

Then we defined triangle centers as points whose trilinear coordinates can be expressed as functiones of angels and side lengths. Furthermore, we noticed, so called, bicentric pairs of points such as Brocard points and operations that make center from bicentric pair.

We will also saw major triangle centers which were introduced to show how can we get a new triangle which is perspective to the first one.

Complexity of the problem does not allow simple explicit solution, but every major center, and that is center whose trilinear coordinates can be expressed in terms $f(A): f(B): f(C)$, is part of the set of solution

Životopis

Rođen sam u Zagrebu 13. kolovoza 1985. Nakon završene osnovne škole upisujem Zrakoplovno tehničku školu Rudolfa Perešina. Maturirao sam 2004. godine, te upisao tadašnji, predbolonjski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2007. godine morao sam se prebaciti na nastavnički smjer koji završavam 2011. godine te upisujem diplomski studij Matematičke statistike.