SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Sven Hrastić

PROBLEM VREMENA U KANONSKOJ KVANTNOJ GRAVITACIJI

Diplomski rad

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Sven Hrastić

Diplomski rad

Problem vremena u kanonskoj kvantnoj gravitaciji

Voditelj diplomskog rada: dr.sc., Hrvoje Nikolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2025.

Sažetak

U ovom diplomskom radu će se u detalje istražiti kanonska formulacija opće relativnosti i pokušat će se odgovoriti na pitanje što je to problem vremena u kvantnoj gravitaciji. Kroz razradu formalizma kanonske opće relativnosti vidjet će se da postoje jednadžbe evolucije, no ne onakve kakve zadovoljavaju potrebe kvantne teorije. Pogledat će se pristup rješavanju problema vremena koji je objašnjen u [K.V. Kuchař, Time and interpretations of quantum gravity, Int. J. Mod.Phys. D 20, Suppl. 1 (2011) 3-86.]. U drugom poglavlju će se otprilike pokušati objasniti što je to problem vremena. Kasnije kada razradimo formalizam (3+1) opće relativnosti krenut će se na detaljnu analizu ograničenja superhamiltonijana i superimpulsa te kako bi se mogli svesti u kvantnu formu. Pri tome će doći do mnogih problema koji će se probati ilustrativno riješiti na nekim sustavima jednostavnijim od pune geometrodinamike. Proći će se kroz sustave koji se mogu svesti na tzv. višeprstnu Schrödingerovu jednadžbu.

Problem of time in quantum gravity

Abstract

In this thesis we will in detail explore canonical formulation of general relativity and we will try to answer the question what is the problem of time in quantum gravity. While working out the formalism of general relativity we will see that there exist equations of evolution, but not the ones suitable for the needs of quantum theory. We will take a look at the approach that's explained in [K.V. Kuchař, Time and interpretations of quantum gravity, Int. J. Mod.Phys. D 20, Suppl. 1 (2011) 3-86.]. In second paragraph problem of time will be explained on a simple system. Later when the formalism of (3+1) general relativity is worked out we will in detail explore super-Hamiltonian and super momentum constraints and how to quantize them. In these attempts at quantization there will be many problems that will be solved on simpler systems than full geometrodynamics. We will go through systems that can be cast into so called many fingered Schrödinger equation.

Sadržaj

1 Uvod

Klasična opća relativnost je najelegantnija teorija gravitacije koju znamo. Naj značajnije svojstvo te teorije je difeomorfna invarijatnost, koja teoriji daje svojstvo da je invarijantna na opće koordinatne transformacije te je metrika prostorvremena dinamička varijabla. Ova invarijantnost je korisna u klasičnoj fizici, no u kvantnoj fizici ta invarijantnost je prokletstvo koja onemogućava spoznavanje prave vremenske varijable. Zbog potrebe da valna funkcija bude difeomorfno invarijantna, njenu evoluciju je gotovo nemoguće odrediti i ispada kao da je konstanta. Taj problem će se na jednostavnom primjeru u poglavlju 2 pokušati objasniti. Dalje će se razviti formalizam (3+1) kanonske opće relativnosti gdje će se odvojiti vrijeme od prostornih varijabli. Dobiti će se lagranžijan, hamiltonijan te jednadžbe gibanja od kojih ćemo morati izbaciti jednadžbe evolucije jer su neupotrebljive zbog njihove difeomorfno kovarijantne i ružne forme. Heisenbergova slika kao pristup ne dolazi u obzir upravo zbog te ružne forme. Otud dolazi taj problem vremena kao generalni problem nemogućnosti dobivanja validne vremenski evoluirajuće valne funkcije kvantne gravitacije. Ti problemi su klasificirani u [1] od kojih je najveći funkcionalna evolucija. Taj problem je riješen jedino u jednostavnom (1+1)-dimenzionalnom modelu parametriziranog skalarnog polja koji je opisan u 8.7. Jako se malo zna o punoj teoriji kvantne gravitacije te je problem funkcionalne evolucije neriješen u (3+1)-dimenzionalnom prostorvremenu.

2 Jednostavan model za ilustraciju problema

Ovdje će se koristiti model opisan u [6].

2.1 Model

Ovdje ćemo proučiti 3D sustav s N dinamičkih stupnjeva slobode čiji je cilj ilustrirati što je to problem vremena. Sustav je opisan s varijablom $q(t) = \{q_1(t), ..., q_N(t)\}$ čija dinamika je opisana sljedećom akcijom

$$A = \int dt L(q, \dot{q}), \tag{2.1}$$

gdje točkica označava vremensku derivaciju te lagranžijan glasi

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2} - V(q). \tag{2.2}$$

Kanonski impulsi su definirani kao

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = m_a \dot{q}_a. \tag{2.3}$$

Hamiltonijan sustava glasi

$$H = \sum_{a=1}^{N} p_a \dot{q}_a - L = \sum_{a=1}^{N} \frac{p_a^2}{2m_a} + V(q) \tag{2.4}$$

te se može interpretirati kao energija sustava. Sustav se može tretirati klasično ili kvantno na jednostavan način. Kvantizacija se napravi pomoću kanonske kvantizacije i dinamika se može prikazati Schrödingerovom jednadžbom

$$\hat{H} \left|\psi(t)\right\rangle = i\hbar \partial_t \left|\psi(t)\right\rangle , \tag{2.5}$$

gdje je $\hat{H}$ operator. Pošto akcija nema nikakvu a priori baždarnu ili difeomorfnu invarijantnost, kvantizacija je jednostavna.

2.2 *Difeomorfno invarijantni model*

Pošto hamiltonijan H nema nikakvu ovisnost o vremenu, on je očuvan. U klasičnoj fizici to znači da ima neku konstantnu vrijednost E energije pa možemo pisati $H(q,p) = E$ ili

$$\mathcal{H}(q,p) = 0, \tag{2.6}$$

gdje je

$$\mathcal{H}(q,p) \equiv H(q,p) - E. \tag{2.7}$$

U konfiguracijskom prostoru se činjenica da hamiltonijan ima vrijednost E može napisati kao

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2} + V(q) - E = 0. \tag{2.8}$$

Ako zamislimo da lagranžijan (2.2) opisuje cijeli svemir, onda je E energija tog svemira. Stanovnici tog svemira opažaju samo vrijednost E, ali teorija ne može reći koju. Za stanovnike svemira, E je fundamentalna konstanta čija vrijednost se može odrediti eksperimentom.

Pošto je E fundamentalna konstanta, prirodno ju je uvesti u efektivnu akciju. Jedna od mogućnosti je uvesti ograničenje (2.8) Lagrangevim multiplikatorom tako da dodamo $\lambda[\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2} + V(q) - E]$. No, postoji puno zanimljiviji način uvođenja ograničenja (2.8) u akciju. Umjesto uvođenja Lagrangevog multiplikatora λ, uvodi se nova konfiguracijska varijabla $g(t) > 0$ i mijenja se akcija (2.1) s

$$\tilde{A} = \int dt \sqrt{g} \left[\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2g} - V(q) + E \right]. \tag{2.9}$$

Ono što je lijepo kod ove akcije je da se Euler-Lagrangeova jednadžba za $g(t)$ reducira na ograničenje (2.8) kada je $g(t) = 1$ te ona glasi

$$-\frac{1}{2\sqrt{g}} \left[\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2g} + V(q) - E \right] = 0, \tag{2.10}$$

no zbog kojeg razloga se može uzeti $g = 1$? Odgovor je da akcija (2.9) ima svojstva difeomorfne invarijantnosti što znači da se za $g(t)$ može uzeti bilo koja pozitivna funkcija pa je $g(t) = 1$ zgodan izbor baždarenja. U akciji (2.9) g se pojavljuje u dva člana

$$dt\sqrt{g}, \qquad \frac{\dot{q}_a^2}{g} = \frac{dq_a^2}{gdt^2} \tag{2.11}$$

te se g pojavljuje samo u kombinacijama $\sqrt{g}dt$ ili gdt^2. To znači da je akcija invarijantna nad transformacijama koje čuvaju

$$d\tau^2 \equiv g(t)dt^2 \tag{2.12}$$

invarijantnim. U općoj relativnosti $d\tau^2$ je analogno $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, stoga vidimo da g u (2.12) ima korespondenciju s g_{00} u općoj relativnosti. Isto tako $1/g$ korespondira s g^{00}. Kao što je opća relativnost invarijantna nad arbitrarnim 4-dimenzionalnim difeomorfizmima prostorvremena $x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x)$ koji čuvaju $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ invarijantnim, isto tako je akcija (2.9) invarijantna nad arbitrarnim 1-dimenzionalnim difeomorfizmima vremena

$$t \to t' = f(t) \tag{2.13}$$

koji čuvaju (2.12) invarijantnim. Invarijantnost $gdt^2 = g'dt'^2$ implicira da se g transformira kao

$$g \to g' = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 g. \tag{2.14}$$

Ova 1-dimenzionalna difeomorfna invarijantnost je u literaturi poznata kao invarijantnost na vremensku reparametrizaciju [8–10]. Ono što smo dosad napravili je da smo počeli od akcije (2.1) te iz činjenice da energija ima konstantnu vrijednost E u klasičnoj mehanici smo dobili korespondirajuću akciju (2.9) s 1-dimenzionalnom difeomorfnom invarijantnošću. Na ovaj način se 1-dimenzionalna difeomorfna invarijantnost pojavila zbog očuvanja energije u klasičnoj fizici.

2.3 *Ograničenje u kanonskoj formi*

Sada ćemo razviti kratki formulizam za ilustraciju problema vremena. Akcija (2.9) se može napisati kao

$$\tilde{A} = \int dt\tilde{L}(q, \dot{q}, g) = \int dt\sqrt{g}\mathcal{L}(q, \dot{q}, g) \tag{2.15}$$

gdje je

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},g) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2g} - V(q) + E,$$

$$\tilde{L}(q,\dot{q},g) = \sqrt{g}\mathcal{L}(q,\dot{q},g). \tag{2.16}$$

Odgovarajući kanonski impulsi glase

$$\tilde{p}_a = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{m_a \dot{q}_a}{\sqrt{g}}, \quad p_g = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{g}} = 0 \tag{2.17}$$

pa hamiltonijan glasi

$$\tilde{H}(q,\tilde{p},g) = \sum_{a=1}^{N} \tilde{p}_a \dot{q}_a - \tilde{L} = \sqrt{g}\mathcal{H}(q,\tilde{p}), \tag{2.18}$$

gdje je

$$\mathcal{H}(q,\tilde{p}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\tilde{p}_a^2}{2m_a} + V(q) - E. \tag{2.19}$$

Kanonska jednadžba za p_g glasi

$$\dot{p}_g = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial g} = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{H}. \tag{2.20}$$

Iz jednadžbe (2.17) vidimo da je $p_g = 0$ što implicira $\dot{p}_g = 0$ pa je prema tome

$$-\frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{H} = 0, \tag{2.21}$$

što je identično ograničenju (2.10). Također pošto je $g(t) > 0$ vrijedi

$$\mathcal{H}(q,\tilde{p}) = 0, \tag{2.22}$$

ili ekvivalentno

$$\tilde{H}(q,\tilde{p},g) = 0. \tag{2.23}$$

U baždarenju $g = 1$, ovo se reducira na ograničenje (2.6).

2.4 Problem vremena u 1D kvantnoj gravitaciji

U ovom dijelu će se pokušati kvantizirati akcija s ugrađenom difeomorfnom invarijantnošću. Problem je kako uključiti ograničenje (2.22) u kvantnu teoriju. Najprirodniji način implementacije je da se uključi kao ograničenje na fizikalna stanja

$$\hat{\mathcal{H}}(q,\tilde{p})\,|\psi(t)\rangle = 0, \tag{2.24}$$

gdje je $\hat{\mathcal{H}}(q,\tilde{p})$ kvantni operator dobiven standardnom kanonskom kvantizacijom. Ograničenje također implicira

$$\tilde{H}(q,\tilde{p},g)\,|\psi(t)\rangle = 0, \tag{2.25}$$

što je kvantna verzija (2.23). Problem se jasno vidi kada pogledamo vremenski ovisnu Schrödingerovu jednadžbu

$$\tilde{H}(q,\tilde{p},g)\,|\psi(t)\rangle = i\hbar\partial_t\,|\psi(t)\rangle\,, \tag{2.26}$$

što zajedno s (2.25) implicira

$$\partial_t\,|\psi(t)\rangle = 0, \tag{2.27}$$

što znači da je kvantno stanje konstanta u vremenu. Međutim to je u kontradikciji i sa stvarnim svijetom i s modelom igračke opisanom u potpoglavlju 2.1 koji očito evoluira u vremenu. Pitanje je otkud dolazi ovisnost u vremenu ako je stanje $|\psi(t)\rangle$ konstantno u vremenu? Ovo je verzija igračke problema vremena u kvantnoj gravitaciji [9–12]. U kontekstu ovog modela je trivijalno razumjeti otkud dolazi problem. U općenitom slučaju kada kvantni sustav ima dobro definiranu energiju E, valna funkcija trivijalno evoluira u vremenu mijenjanjem faze kao $e^{-iEt/\hbar}$, što nema nikakvu posljedicu na mjerljive veličine. Da bismo imali mjerljivu ovisnost o vremenu u kvantnoj mehanici, kvantno stanje ne smije imati dobro definiranu energiju tj. stanje mora biti u superpoziciji više različitih energija. Što je zapravo krivo s relacijom (2.25)? Ovo kvantno ograničenje dolazi iz klasične akcije (2.9) u kojem je energija fiksirana. Također, difeomorfna invarijantnost se pojavila u akciji kao posljedica uvođenja klasične energije E u akciju. U tome nema ničeg pogrešnog u klasičnoj fizici, gdje je energija dobro definirana, no zahtjev da kvantni sustav isto tako ima dobro definiranu energiju je pogrešan, jer u općenitom slučaju ona nije dobro definirana. Drugim riječima nije korektno kvantizirati akciju (2.9). Ono što se treba kvantizirati je originalna akcija (2.1) što vodi na validnu Schrödingerovu jednadžbu (2.5) bez problema vremena. Pojavna difeomorfna invarijantnost jedino vrijedi na klasičnom nivou, dok fundamentalna kvantna teorija nema tu invarijantnost.

3 Kratki uvod u bezindeksnu notaciju

Kasnije ćemo raditi s bezindeksnom notacijom u kojoj radimo s kontravarijantnim vektorskim poljima na prostorvremenu $\mathcal{M}$

$$x^{\mu} \to X. \tag{3.1}$$

Metrika (0,2) u tom zapisu umjesto da se piše s indeksima uzima dva vektorska polja i daje

$$x^{\mu} g_{\mu\nu} y^{\nu} \to g(X, Y). \tag{3.2}$$

Ovaj izraz $g(X, Y)$ za dana dva vektorska polja X i Y je broj tj. matrični element metrike u izabranoj bazi. Einsteinova jednadžba u ovom zapisu glasi

$$Ric(X, Y) - \frac{1}{2} R g(X, Y) + \Lambda g(X, Y) = T(X, Y) \tag{3.3}$$

gdje je $Ric(X, Y)$ komponenta Riccijevog tenzora, R Riccijev skalar, Λ kozmološka konstanta, a $T(X, Y)$ komponenta tenzora energije i impulsa. Kovektori u ovoj notaciji se pišu podcrtano

$$x_{\mu} \to \underline{X}, \tag{3.4}$$

a (2,0) tenzori i metrika ćemo uzeti da se isto pišu kao i u (3.2), ali s negativnom potencijom jer se radi o inverzu kad govorimo o metrici

$$x_{\mu} g^{\mu\nu} y_{\nu} \to g^{-1}(\underline{X}, \underline{Y}), \tag{3.5}$$

no ovo nije formalan zapis jer se radi s kontravarijantnim vektorima i ovaj zapis se može svesti na (3.2). (1,1) tenzori postaju matrice koje djeluju na kontravarijantno vektorsko polje i vrate kontravarijantno vektorsko polje npr. Kronecker delta tenzor

$$\delta^{\mu}_{\nu}x^{\nu} = x^{\mu} \rightarrow \delta(X) = X. \tag{3.6}$$

Jednadžba (3.6) predstavlja kako Kronecker delta izgleda u ovom zapisu, iako izgleda kao varijacija polja X. Skalarni produkt kovektorskog i kontravarijantnog vektorskog polja postaje

$$y_{\mu}x^{\mu} = g_{\mu\nu}y^{\mu}x^{\nu} \rightarrow \underline{Y}(X) = g(Y, X). \tag{3.7}$$

čija interpretacija je kovektorsko polje $\underline{Y}$ evaluirano na kontravarijantnom vektorskom polju X ili komponenta u X smjeru. Riemmanov tenzor (1,3) je matrica koja šalje kontravarijantna vektorska polja u kontravarijantna vektorska polja, no da bi to mogao treba u njega umetnuti još 2 kontravarijantna vektorska polja

$$x^{\rho}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}y^{\sigma}z^{\nu} \rightarrow R(X, Y)Z. \tag{3.8}$$

Možemo spustiti taj jedan indeks s metrikom

$$g(W, R(X, Y)Z) \equiv Riem(W, Z, X, Y) \tag{3.9}$$

isto kao i s indeksima

$$g_{\mu\alpha}R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{3.10}$$

Kontrahirati se mogu kontravarijantni i kovarijantni indeksi pa Riccijev tenzor glasi

$$Ric(X, Y) \equiv R^{\mu}(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, X)Y. \tag{3.11}$$

Za (1,1) Riccijev tenzor mora vrijediti

$$g(X, Ri(Y)) \equiv Ric(X, Y) \tag{3.12}$$

te Riccijev skalar se dobije uzimanjem njegovog traga

$$R \equiv \mathrm{tr}(Ri). \tag{3.13}$$

S ovom notacijom dobivamo to što vrijedi za npr. Einsteinov tenzor $G_{\mu\nu} = Ein(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu})$

$$Ein(X+Y, X+Y) = Ein(X,X) + Ein(Y,Y) + 2Ein(X,Y) \tag{3.14}$$

pa se nedijagonalni elementi Einsteinovog tenzora mogu zapisati preko dijagonalnih

$$Ein(X,Y) = \frac{1}{4}\left[Ein(X+Y, X+Y) - Ein(X-Y, X-Y)\right]. \tag{3.15}$$

Formalno su kontravarijantna vektorska polja definirana kao

$$X \equiv f^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.16}$$

pa imamo definiran komutator dva kontravarijantna polja na tangetnom podprostoru $[X,Y] \in T\mathcal{M}$ koji je isto kontravarijantno vektorsko polje na tangetnom podprostoru od $\mathcal{M}$. U zapisu (3.16) su izabrane koordinate tj. baždarenje o kojem ovisi što je to $f^\mu(x)$. Kovektorska polja se u koordinatama formalno pišu

$$\underline{X} \equiv f_\mu(x) dx^\mu. \tag{3.17}$$

Sva kontravarijantna vektorska polja u ilustraciji formalizma u kojem nije formalno specificirano baždarenje se nalaze u tangetnom podprostoru mnogostrukosti koju zovemo prostorvrijeme $T\mathcal{M}$. U sljedećem poglavlju ćemo izvesti foliaciju prostorvremena na prostor i vrijeme pa će doći do razdvajanja tangentnog prostora. Imat ćemo onda tzv. tangentni svežanj (tangent bundle) $\Gamma T_{\|}\mathcal{M}$ koji predstavlja dio tangetnog prostora od kojeg je odvojeno vrijeme.

3.1 *Liejeva derivacija*

Kovarijantna derivacija u bezindeksnoj notaciji je

$$x^\mu \nabla_\mu \rightarrow \nabla_X \tag{3.18}$$

Liejeva derivacija kada djeluje na vektorsko polje daje 2-formu

$$L_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{3.19}$$

Liejeva derivacija govori koliko se vektorsko polje $Y \in T\mathcal{M}$ promijenilo kada je bilo paralelno transportirano uz vektorsko polje $X \in T\mathcal{M}$. Liejeva derivacija skalara je obična kovarijantna derivacija

$$L_X R = \nabla_X R \tag{3.20}$$

Liejeva derivacija (0,2) tenzora glasi

$$(L_Z g)(X,Y) = (\nabla_Z g)(X,Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(Y, \nabla_X Z), \tag{3.21}$$

dakle Liejeva derivacija simetričnog tenzora je simetričan tenzor. Zagrade naglašavaju da derivacija djeluje samo na tenzor u članu, a ne na polja. Liejeva derivacija (1,1) tenzora glasi

$$(L_Y Ri)X = (\nabla_Y Ri)X + Ri(\nabla_X Y) - \nabla_{Ri(X)} Y. \tag{3.22}$$

Bitno je spomenuti Leibnizovo pravilo

$$\nabla_Z(g(X,Y)) = (\nabla_Z g)(X,Y) + g(X, \nabla_Z Y) + g(\nabla_Z X, Y), \tag{3.23}$$

da se vidi kako ono izgleda u ovom formalizmu.

4 Kanonski formulizam opće relativnosti

Ovdje ćemo koristiti literaturu [2–5] Kanonska formulacija opće relativnosti je bazirana na razdvajanju prostorvremena ($\mathcal{M}$) na prostor (Σ_t) i vrijeme ($t \in \mathbb{R}$). Foliacija mnogostrukosti $\mathcal{M}$ se izvodi tako da se pretpostavi da je vrijeme regularno i glatko skalarno polje te da za svaki t, list Σ_t ima prostornu signaturu metrike pa se zove prostorni list (eng. *space-like leaf*). Matematički preciznije

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \Sigma_t \equiv \{p \in \mathcal{M}, t(p) = t\}. \tag{4.1}$$

Pošto je vrijeme regularno, sve hiperplohe Σ_t nemaju dodirne točke

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset \qquad \forall t \neq t'. \tag{4.2}$$

Matematički se te hiperplohe zovu Cauchyjeve površine ako je prostorvrijeme $\mathcal{M}$ hiperbolično. Topološki ekvivalentno:

$$\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma \tag{4.3}$$

Topološki uvodi se familija funkcija ugnježđivanja (family of embedding functions) koje umeću 3-dimenzionalni diferencijabilnu mnogostrukost u prostorvrijeme

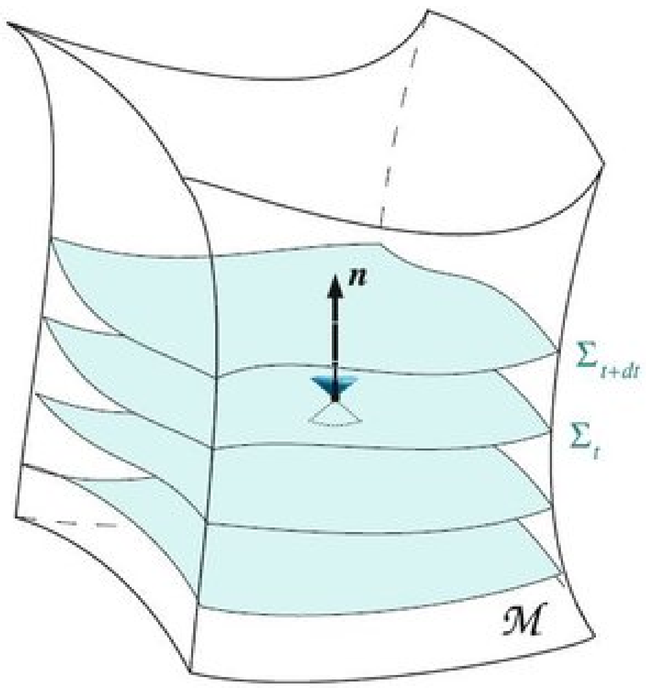
$$e_t : \mathbb{R} \times \Sigma \to \mathcal{M} \tag{4.4}$$

$$(t, p) \mapsto e_t(p) \tag{4.5}$$

Ta familija funkcija definira ”smjer vremena” tj. matematički definira tangente na skalarnom polju vremena kao ”vremensko vektorsko polje” na $\mathcal{M}$. Integralne krivulje ovog vektorskog polja su orbite tj. putanje točaka $p \in \mathcal{M}$. Prostorvrijeme je sada unija familije hiperploha

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t \tag{4.6}$$

Vektor $\vec{n}$ na slici 4.1 je okomit na Σ_t te se pomoću skalarnog polja vremena t definira



Slika 4.1: Skica foliacije $\mathcal{M}$ u obitelj hiperploha Σ_t. Prikazuje prostorvrijeme kao prošlost prostora [2]

kao [3]

$$\vec{n} \equiv (\vec{\nabla} t \cdot \vec{\nabla} t)^{-1/2} \vec{\nabla} t \tag{4.7}$$

Prednji faktor u (4.7) je normalizacija. Od sada nadalje radi jednostavnosti će se vektorsko polje $\vec{n}$ pisati bez strelice n. Foliacija inducira razdvajanje tangentnog prostora na paralelne $\parallel$ i okomite $\perp$ komponente s obzirom na listove Σ. Mogu se definirati operatori projekcije u bilo kojoj točki u tangetnom prostoru od $\mathcal{M}$ [2,4]. Za paralelne

$$P_{\parallel} : T\mathcal{M} \to T_{\parallel}\mathcal{M} \tag{4.8}$$

$$X \mapsto X + ng(n, X) \tag{4.9}$$

i okomite

$$P_{\perp} : T\mathcal{M} \to T_{\perp}\mathcal{M} \tag{4.10}$$

$$X \mapsto -ng(n, X) \tag{4.11}$$

Ovdje se koristi signatura

$$g(n, n) = -1. \tag{4.12}$$

U slučaju obrnute signature promijeni se predznak ispred $ng(n, X)$. Razdvajanje prostorvremena inducira metriku listova h koja glasi [2–4]

$$h = g + \underline{n} \otimes \underline{n} \tag{4.13}$$

ili pomoću indeksa

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j \tag{4.14}$$

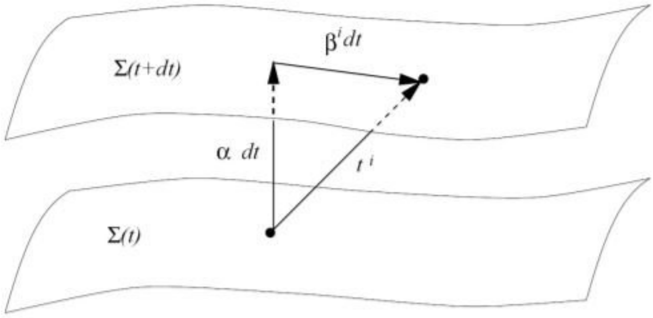
Također je inducirano razdvajanje kovarijantne derivacije. Neka su $X, Y \in \Gamma T_{\parallel}\mathcal{M}$ onda vrijedi [2–4]

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= P_{\parallel}(\nabla_X Y) + P_{\perp}(\nabla_X Y) \\ &= D_X Y + nK(X, Y) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Iako su vektorska polja X i Y paralelna s hiperplohama Σ, kovarijantna derivacija nije nužno paralelna pa imamo ovakvo razdvajanje derivacije, gdje je D_X derivacija s Levi-Civita konekcijom na hiperplohama Σ bez torzije. S druge strane $K(X, Y)$ je simetrično (0, 2) tenzorsko polje na hiperplohama Σ poznato kao vanjska zakrivljenost. Slično tako i vremenska derivacija se može razdvojiti [2–4]

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{e_t(p)} \equiv \frac{d}{dt}\bigg|_{t'=t} e_t(p) = \alpha n + \beta \tag{4.16}$$

gdje se α zove funkcija toka koja je također $C^\infty(\mathcal{M})$ funkcija, a $\beta \in \Gamma T_{\|}\mathcal{M}$ se zove vektor pomaka. Funkcija α govori koliko je sljedeći list udaljen u laboratorijskom



Slika 4.2: Skica interpretacije funkcije toka (eng. *lapse function*) i vektora pomaka (eng. *shift vector*) [2]

vremenu s obzirom na parametarsko vrijeme, dok β govori koliki i u kojem smjeru je tangencijalni pomak između neke točke i slike na sljedećem listu. Ako je g metrika na mnogostrukosti, a h metrika na hiperplohama onda

$$\alpha = g_{ij} t^i n^j \tag{4.17}$$

$$\beta^i = h^i_j t^j \tag{4.18}$$

Bitno je napomenuti da evolucija tih funkcija nije određena Einsteinovim jednadžbama te je u njih stavljena vremenska difeomorfna invarijantnost Einsteinove teorije. Nekad se uzima tzv. maksimalno baždarenje $h^{ij}K_{ij} = 0$. Poanta je više numerička pa se ovakvim baždarenjem zaobilaze ekstremne regije kao što je horizont crne rupe gdje bi numerički račun prestao raditi zbog singulariteta u računu [5].

4.1 Svojstva tenzora na listovima Σ

Prostorvrijeme $\mathcal{M}$ je mnogostrukost bez torzije što znači da vrijedi

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = Tor^{\nabla}(X,Y) = 0, \tag{4.19}$$

gdje je Tor^{∇} tenzor torzije za derivaciju ∇ koji je nula za prostorvrijeme. Isto tako se može pokazati da je za list Σ derivacija D bez torzije. Prvo trebamo pokazati da je D derivacija s Levi-Civita konekcijom s obzirom na metriku (4.13)

$$D_X h = P_{\|} \nabla_X (g + n \otimes n) = P_{\|} (\nabla_X n \otimes n + n \otimes \nabla_X n) = 0. \tag{4.20}$$

Sada provjerimo je li D derivacija s konekcijom bez torzije za $X, Y \in \Gamma T_{\|} \mathcal{M}$

$$Tor^D(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] =$$

$$= P_{\|} (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) = P_{\|} Tor^{\nabla}(X, Y) = 0 \tag{4.21}$$

Može se pokazati da je tenzor vanjske zakrivljenosti simetričan na zamjenu vektorskih polja $X, Y \in \Gamma T_{\|} \mathcal{M}$

$$K(X, Y) = -g(n, P_{\perp} \nabla_X Y) = -g(n, \nabla_X Y) = -g(n, \nabla_Y X + [X, Y]), \tag{4.22}$$

no pošto su $X, Y \in \Gamma T_{\|} \mathcal{M}$ onda je i $[X, Y] \in \Gamma T_{\|} \mathcal{M}$ pa ga normalna komponenta ubije. Lagano se sada vidi da vrijedi

$$K(X, Y) = K(Y, X) \tag{4.23}$$

Možemo "podignuti" jedan indeks s metrikom (4.13) pa se definira (1,1) tenzor

$$K(X, Y) = h(W(X), Y) \tag{4.24}$$

koji se zove Weingartenovo preslikavanje W. Još jedna bitna veličina je akceleracija listova

$$a \equiv \nabla_n n. \tag{4.25}$$

Može se pokazati da vrijedi

$$W = \nabla n + a \otimes \underline{n} \tag{4.26}$$

Slično tako i za (0,2) tenzor K

$$K = \nabla \underline{n} + \underline{a} \otimes \underline{n} \tag{4.27}$$

Da se to pokaže moramo se vratiti na (4.22) te korištenjem Leibnitzovog pravila može se prebaciti derivacija

$$K(X,Y) = -g(n, \nabla_X Y) = g(\nabla_X n, Y). \tag{4.28}$$

Iz (4.28) se vidi da je Weingartenovo preslikavanje

$$W = \nabla n|_{T_\parallel} \in \Gamma T^1_{1\parallel}\mathcal{M} \tag{4.29}$$

gdje se $\Gamma T^1_{1\parallel}\mathcal{M}$ odnosi na (1,1) tenzorski svežanj od $\mathcal{M}$. Sada možemo Weingartenovo preslikavanje napisati kao

$$W = P_\parallel(\nabla n), \tag{4.30}$$

a pomoću indeksa

$$W^\alpha_\beta = (P_\parallel)^\mu_\beta (P_\parallel)^\alpha_\nu \nabla_\mu n^\nu. \tag{4.31}$$

Iz (4.9) se vidi da vrijedi

$$(P_\parallel)^\mu_\beta = \delta^\mu_\beta + n^\mu n_\beta \tag{4.32}$$

Sada se vidi da je

$$\begin{aligned} W^\alpha_\beta &= (P_\parallel)^\mu_\beta(\nabla_\mu n^\alpha + n^\alpha n_\nu \nabla_\mu n^\nu) \\ &= \nabla_\beta n^\alpha + n^\alpha n_\nu \nabla_\beta n^\nu + n_\beta \nabla_n n^\alpha + n^\alpha n_\beta n_\nu \nabla_n n^\nu \\ &= \nabla_\beta n^\alpha + \frac{1}{2} n^\alpha \nabla_\beta (g(n,n)) + n_\beta a^\alpha + \frac{1}{2} n^\alpha n_\beta \nabla_n (g(n,n)) \\ &= W^\alpha_\beta = \nabla_\beta n^\alpha + n_\beta a^\alpha \end{aligned} \tag{4.33}$$

spuštanjem indeksa dobije se

$$K_{\alpha\beta} = \nabla_\beta n_\alpha + n_\beta a_\alpha \tag{4.34}$$

pa su time dokazani (4.26) i (8.15). Bitno je primjetiti da je $g(n,n)$ jednako -1 (4.12). Sada se može pokazati

$$a^2 = \underline{a}(a) = g(a,a) = \nabla_n(g(a,n)) - g(\nabla_n a, n)$$

$$= -g(\nabla_a n, n) + -g([n,a], n) = -g(W(a) - a \otimes \underline{n}(a), n) = (n \cdot a)^2$$

$$= (-\vec{\nabla} \cdot \vec{n} + W^c_c)^2. \tag{4.35}$$

Ovdje je korištena kontrakcija (4.26).

4.2 *Liejeve derivacije bitnih veličina*

Bitne su derivacije u smjeru vektora n. Liejeva derivacija vektora n se pomoću (4.21) vidi da je

$$L_n n = [n, n] = 0. \tag{4.36}$$

Liejeva dervacija kovektora $\underline{n}$ se dobije tako da djelujemo na polje $X \in \Gamma T_{\parallel}\mathcal{M}$

$$L_n \underline{n}(X) = L_n(\underline{n}(X)) - \underline{n}(L_n X)$$

$$= \nabla_n(\underline{n}(X)) - \underline{n}([n, X])$$

$$= \underline{a}(X) + \underline{n}(\nabla_n X - [n, X])$$

$$= \underline{a}(X) + \underline{n}(\nabla_X n) = \underline{a}(X) + \frac{1}{2}\nabla_X(g(n,n)) = \underline{a}(X). \tag{4.37}$$

Pogledajmo Liejevu derivaciju od metrike (4.13)

$$L_n h = L_n(g + \underline{n} \otimes \underline{n})$$

$$= L_n g + \underline{n} \otimes \underline{a} + \underline{a} \otimes \underline{n}$$

$$= 2\text{Sym}(\nabla \underline{n}) + \underline{n} \otimes \underline{a} + \underline{a} \otimes \underline{n} = 2K \tag{4.38}$$

Sym stoji za simetrizaciju indeksa te zbog (4.27) vrijedi zadnja jednakost.

4.3 *Dekompozicija metrike* g

Metrika g iz (4.13) glasi

$$g = h - \underline{n} \otimes \underline{n} \tag{4.39}$$

Baza koja će se koristiti je

$$\{e_\mu | 0 \leq \mu \leq 3\}, \qquad \{\theta^\mu | 0 \leq \mu \leq 3\} \tag{4.40}$$

gdje su e i θ ortonormirana baza

$$\theta^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu \tag{4.41}$$

te je $e_0 = n$. Metrika (4.39) u bazi (4.40) glasi

$$g = -\theta^0 \otimes \theta^0 + \sum_{a=1}^{3} \theta^a \otimes \theta^a. \tag{4.42}$$

Inverz metrike glasi

$$g^{-1} = -e_0 \otimes e_0 + \sum_{a=1}^{3} e_a \otimes e_a \tag{4.43}$$

Sada ćemo uvesti koordinatnu bazu na Σ

$$\{x^n | 1 \leq n \leq 3\} \;\text{ i }\; x^0 = ct \tag{4.44}$$

koji predstavlja vremensku koordinatu. Sada želimo prikazati metriku (4.39) pomoću novih koordinata (4.44). Prvo trebamo vidjeti kako je nova baza povezana sa starom

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^a \\ 0 & A^a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_0 \\ e_a \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Možemo djelovati s inverzom matrice s obije strane u (4.45) pa se dobije

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ e_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{\beta^m}{\alpha} \\ 0 & [A^{-1}]^m_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial x^m} \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

(4.45) i (4.46) se mogu transponirati

$$\begin{pmatrix} dx^0 & dx^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^0 & \theta^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{\beta^m}{\alpha} \\ 0 & [A^{-1}]^m_a \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

te invertiranjem (4.47)

$$\begin{pmatrix} \theta^0 & \theta^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^0 & dx^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta^a \\ 0 & A^a_m \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Matrica A je povezana s metrikom (4.13) tako da vrijedi

$$h_{mn} = h\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) = \sum_{a=1}^{3} A^a_m A^a_n. \tag{4.49}$$

Sada metrika (4.42) u novoj bazi glasi

$$g = -(\alpha^2 - h(\beta,\beta))dx^0 \otimes dx^0 + \beta_m(dx^0 \otimes dx^m + dx^m \otimes dx^0) + h_{mn}dx^m \otimes dx^n, \tag{4.50}$$

a njen inverz

$$g^{-1} = -\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial}{\partial x^0} \otimes \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\beta^m}{\alpha^2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0} \otimes \frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{\partial}{\partial x^m} \otimes \frac{\partial}{\partial x^0}\right) + (h^{mn} - \beta^m\beta^n)\frac{\partial}{\partial x^m} \otimes \frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{4.51}$$

4-forma koja predstavlja volumni dio u bazi (4.40) sada pomoću novih koordinata je

$$d^4x = \theta^0 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 = \alpha\sqrt{h}dx^0 \wedge d^3x \tag{4.52}$$

gdje je $\sqrt{h}$ korijen determinante metrike (4.13)

4.4 *Izvod superhamiltonijana i superimpulsa*

Sada trebamo rastaviti Riemmanov tenzor na komponente. Riemmanov tenzor s kovarijantnom derivacijom ∇ glasi

$$R^\nabla(X,Y)Z = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z \tag{4.53}$$

isto s kovarijantnom derivacijom D

$$R^D(X,Y)Z = (D_XD_Y - D_YD_X - D_{[X,Y]})Z \tag{4.54}$$

za $X, Y, Z \in \Gamma T_\parallel\mathcal{M}$. Izračunajmo

$$\nabla_X\nabla_Y Z = \nabla_X(D_Y Z + nK(Y,Z))$$

$$= D_XD_YZ + nK(X, D_YZ)$$

$$+\nabla_X(n)K(Y,Z) + nD_X(K(Y,Z))$$

$$= D_X D_Y Z + nK(X, D_Y Z) + \nabla_X(n)K(Y, Z)$$

$$+n(D_X(K)(Y, Z) + K(D_X Y, Z) + K(Y, D_X Z)) \tag{4.55}$$

zamjenom X i Y

$$\nabla_Y \nabla_X Z = D_Y D_X Z + nK(Y, D_X Z)$$

$$+\nabla_Y(n)K(X, Z) + nD_Y(K(X, Z))$$

$$= D_Y D_X Z + nK(Y, D_X Z) + \nabla_Y(n)K(X, Z)$$

$$+n(D_Y(K)(X, Z) + K(D_Y X, Z) + K(X, D_Y Z)) \tag{4.56}$$

Zadnji član u (4.53) glasi

$$\nabla_{[X,Y]} Z = D_{[X,Y]} Z + K([X, Y], Z) \tag{4.57}$$

Dakle uvrštavanjem (4.15) u (4.53) dobiva se

$$R^\nabla(X, Y)Z = R^D(X, Y)Z + (\nabla_X n)\, K(Y, Z) -$$

$$- (\nabla_Y n)\, K(X, Z) + n[D_X(K)(Y, Z) - D_Y(K)(X, Z)] \tag{4.58}$$

imajući na umu da vrijedi

$$K(D_X Y, Z) - K(D_Y X, Z) - K([X, Y], Z)$$

$$= K(D_X Y - D_Y X - [X, Y], Z) = K(0, Z) = 0 \tag{4.59}$$

U (4.58) se dobro vidi paralelna i okomita komponenta na list. Spuštanjem indeksa s metrikom dobije se

$$Riem^\nabla(W, Z, X, Y) \equiv g(W, R^\nabla(X, Y)Z)$$

$$= Riem^D(W, Z, X, Y) + K(W, X)K(Y, Z) - K(W, Y)K(X, Z) \tag{4.60}$$

za $W \in \Gamma T_\parallel \mathcal{M}$. (4.60) se zove Gauss-Codazzijeva jednadžba. Pomoću indeksa (4.60) glasi

$$R^\nabla_{abcd} = R^D_{abcd} + K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc} \tag{4.61}$$

Kontrahiramo li (4.58) s normalnim vektorom n dobije se

$$Riem^{\nabla}(n, Z, X, Y) = -D_X K(Y, Z) + D_Y K(X, Z). \tag{4.62}$$

Ova se jednadžba zove Codazzi-Mainardijeva jednadžba. Još možemo imati u Riemmanovom tenzoru dva indeksa popunjena s n. Sve ostale komponente su nula zbog simetrija Riemmanovog tenzora. Komponente Riemmanovog tenzora s dva indeksa kontrahirana s n glasi

$$Riem^{\nabla}(X, n, Y, n) = -(L_n K)(X, Y) + g(X, W \circ W(Y)) + g(X, D_Y a) + \underline{a} \otimes \underline{a}(X, Y) \tag{4.63}$$

Kako bi se to dokazalo prvo počnemo od izraza (4.53) i ubacimo dva vektorska polja n

$$R^{\nabla}(Y, n)n = (\nabla_Y \nabla_n - \nabla_n \nabla_Y - \nabla_{[Y,n]})n$$

$$= \nabla_Y a - \nabla_n (W(Y) - a \otimes \underline{n}(Y)) -$$

$$-W([Y, n]) + a \otimes \underline{n}([Y, n])$$

$$= D_Y a - (\nabla_n W)(Y) + a \otimes \underline{a}(Y) - W(\nabla_n Y + [Y, n])$$

$$+a \otimes \underline{n}(\nabla_n Y + [Y, n]) = D_Y a - (L_n W)(Y) + \nabla_{W(Y)} n$$

$$+a \otimes \underline{a}(Y) + a \otimes \underline{n}(W(Y)) = D_Y a - (L_n W)(Y) + a \otimes \underline{a}(Y) + W \circ W(Y) \tag{4.64}$$

U izvodu (4.64) se koristilo (4.26) i (3.22). Spuštanjem jednog indeksa se dobije (4.63). Izračunate su sve komponente Riemmanovog tenzora pa sad slijedi kontrakcija kako bi se dobio Riccijev tenzor. Kontrakcijom (4.64) dobije se

$$Ric^{\nabla}(e_0, e_0) = -K^{ab} K_{ab} + (K^c_c)^2 + \vec{\nabla} \cdot (\vec{n} K^c_c - \vec{a}), \tag{4.65}$$

a kontrakcijom (4.60) i (4.64) po n komponentama dobje se

$$Ric^{\nabla}(e_a, e_b) = Ric^D(e_a, e_b) + L_n K_{ab} - 2K_{ac} K^c_b + K_{ab} K^c_c - D_a a_b - a_a a_b. \tag{4.66}$$

Daljnjom kontrakcijom dobije se Riccijev skalar

$$R^{\nabla} = R^D + \left[K_{ab} K^{ab} - (K^c_c)^2\right] + 2\nabla \cdot (\vec{n} K^c_c - \vec{a}). \tag{4.67}$$

Izraz u uglatoj zagradi se može napisati kao kontrakcija vanjske zakrivljenosti K sa specifičnim tenzorom

$$G(K,K) = G^{abcd}K_{ab}K_{cd}, \tag{4.68}$$

gdje je

$$G^{abcd} = \frac{1}{2}\left(h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2h^{ab}h^{cd}\right) \tag{4.69}$$

pa se (4.67) može pisati kao

$$R^{\nabla} = G(K,K) + R^{D} + 2\vec{\nabla}\cdot\vec{V} \tag{4.70}$$

gdje je

$$\vec{V} = \vec{n}K^{c}_{c} - \vec{a}. \tag{4.71}$$

Pogledajmo sada (4.38) i (4.16) i zapišimo ih na slijedeći način

$$K = \frac{1}{2}L_{n}h \tag{4.72}$$

$$n = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \beta\right) \tag{4.73}$$

pa kombinacijom ta dva izraza dobiva se

$$K = \frac{1}{2\alpha}\left(\dot{h} - L_{\beta}h\right) \tag{4.74}$$

gdje je

$$\dot{h} \equiv L_{\frac{\partial}{\partial ct}}h. \tag{4.75}$$

Sada možemo napisati lagranžijan Einstein-Hilbertove akcije

$$\mathcal{L}_{EH}(h,\dot{h},\alpha,\beta) = \frac{1}{2\kappa}\left(G\left(\frac{1}{2\alpha}\left(\dot{h} - L_{\beta}h\right), \frac{1}{2\alpha}\left(\dot{h} - L_{\beta}h\right)\right) + R^{D}\right)\alpha\sqrt{h} \tag{4.76}$$

gdje smo pomnožili Riccijev skalar s faktorom uz 4-formu (4.52). Bitno je primjetiti da lagranžijan ne ovisi o derivacijama α i β što je konzistentno s baždarnom teorijom. Član na površini $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ je maknut iz lagranžijana. Prije nego što se prijeđe na Hamiltonov formalizam, napisat ćemo komponente Einsteinovih jednadžbi. (e_0, e_0)

komponenta glasi

$$G(K,K) - R^D = -2\kappa T(n,n) = -2Ein(n,n), \tag{4.77}$$

a (e_0, e_b) komponenta

$$G^{abcd}\nabla_b K_{cd} = \kappa h^{ab} T(e_0, e_b). \tag{4.78}$$

(4.77) i (4.78) predstavljaju ograničenja na početne uvjete (h, K). Izračunajmo sada derivaciju vanjske zakrivljenosti da vidimo kako ona evoluira u vremenu

$$\dot{K}_{ab} = L_{\frac{\partial}{\partial ct}} K_{ab} = L_\beta K_{ab} + D_a D_b \alpha$$

$$+\alpha[2K_{ac}K^c_b + K_{ab}K^c_c - Ric^D(e_a, e_b)] + \frac{\alpha}{2}\kappa h_{ab} T(n,n) + \alpha\kappa(T_{ab} - \frac{1}{2}h^{cd}T_{cd}h_{ab}) \tag{4.79}$$

Sada znamo kako vanjska zakrivljenost K evoluira i metrika na listu h iz (4.74). Prvo izaberemo h i K tako da su početni uvjeti (4.77) i (4.78) zadovoljeni. Drugo se izaberu bilo koje 4 funkcije $\alpha(t, \vec{x})$, $\vec{\beta}(t, \vec{x})$ osim $\alpha(t, \vec{x}) = 0$ jer se inače ne bi pomicali s lista. Pomoću (4.79) i (4.74) se mogu evoulirati rješenja početnih uvjeta (4.77) i (4.78). Sada ćemo prijeći na Hamiltonov formalizam. Kanonski impulsi

$$c\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{\alpha}} = 0 \tag{4.80}$$

$$c\Pi^n_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{\beta}^n} = 0 \tag{4.81}$$

su nula te se oni zovu primarna ograničenja. Oni ne igraju ulogu u kinetičkoj energiji pa ne utječu na dinamiku sustava. Ostali kanonski impulsi glase

$$c\Pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} G^{abcd} K_{cd} \equiv \frac{1}{2\kappa} G'^{abcd} K_{cd}. \tag{4.82}$$

(4.82) se može invertirati

$$K_{ab} = 2c\kappa {G'}_{abcd}\Pi^{cd}. \tag{4.83}$$

Sada će se prestati pisati crtica kod tenzora G pa s indeksima gore i dolje on glasi

$$G^{abcd} = \frac{\sqrt{h}}{2}\left(h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2h^{ab}h^{cd}\right) \tag{4.84}$$

$$G_{abcd} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ac}h_{bd} + h_{ad}h_{bc} - h_{ab}h_{cd}) \tag{4.85}$$

Lako se pokaže da vrijedi

$$G_{abnm}G^{cdnm} = \frac{1}{2}(\delta^c_a\delta^d_b + \delta^c_b\delta^d_a) \tag{4.86}$$

Raspišimo

$$\dot{h}_{ab} = (L_\beta h)_{ab} + 2\alpha K_{ab} = D_a\beta_b + D_b\beta_a + 2\alpha\kappa G_{abcd}\Pi^{cd} \tag{4.87}$$

Sada imamo gustoću hamiltonijana

$$\mathcal{H}_0(h, \Pi, \alpha, \beta) = c\Pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_{EH}$$

$$= \alpha\left[2\kappa c^2 G_{abcd}\Pi^{ab}\Pi^{cd} - \frac{1}{2\kappa}R^D\right] + 2c\Pi^{ab}D_a\beta_b. \tag{4.88}$$

Sada na (4.88) namećemo sekundarna ograničenja

$$c\dot{\Pi}_\alpha = -\frac{\delta H_0}{\delta\alpha} = 0, \tag{4.89}$$

$$c\dot{\Pi}^a_\beta = -\frac{\delta H_0}{\delta\beta^a} = 0. \tag{4.90}$$

gdje je

$$H_0 = \int_\Sigma d^3x\mathcal{H}_0. \tag{4.91}$$

Nametanjem sekundarnih ograničenja dobiju se tzv. superhamiltonijan i superimpuls

$$H = 2\kappa c^2 G(\Pi, \Pi) - \frac{1}{2\kappa}R^D\sqrt{h} = 0, \tag{4.92}$$

$$H_a = -2cD_b\Pi^{ba} = 0. \tag{4.93}$$

Sekundarna ograničenja (4.89) (4.90) omogućuju da α i β^a budu baždarne varijable tj. da o njima ne ovisi nikakvo gibanje. U računu ograničenja superimpulsa uzeto je da površinski član nestane.

4.5 *Površinski članovi*

Gustoća hamiltonijana (4.88) se sada može napisati kao suma ograničenja (4.92) i (4.93) pomnoženih s α i β plus članovi na površini u beskonačnosti

$$\mathcal{H}_0(h, \Pi, \alpha, \beta) = H(h, \Pi)\alpha + H_a(h, \Pi)\beta^a + (\text{površinski članovi}) \tag{4.94}$$

Za $\alpha = 0$ integriramo li po prostoru (4.94) površinski član glasi

$$2c \int_{S_\infty} \Pi^{ab}\beta_b \nu_a d\Omega \tag{4.95}$$

gdje je ν_a okomica na površinu u beskonačnosti. Ako je $\beta = 0$ a $\alpha \neq 0$ onda je rubni član

$$\frac{1}{2\kappa} \int_{S_\infty} d\Omega(\partial_a h_{ab} - \partial_b h_{aa})\nu^b \tag{4.96}$$

4.6 *Evolucija* h *i* Π

Evolucija h i Π je dana Hamiltonovim jednadžbama

$$c\dot{h}_{ab} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi^{ab}} \tag{4.97}$$

$$c\dot{\Pi}^{ab} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h_{ab}} \tag{4.98}$$

Za $\alpha = 0$

$$c\dot{h} = \frac{\delta}{\delta \Pi_{ab}} \int_\Sigma d^3x \beta^a(-2ch_{ab}D_c\Pi^{bc}) = c(D_a\beta_b + D_b\beta_a) \tag{4.99}$$

ako bi se površinski članovi mogli maknuti. Ako bismo stavili $\beta = 0$ te $\alpha \neq 0$ onda jednadžbe (4.74) i (4.79) opisuju evoluciju

Od sada nadalje će

$$h \to g, \quad \Pi \to p \tag{4.100}$$

te će se uzeti da je $c = 1$ i $2\kappa = 1$ kao što je i u [1]

5 Uvod u problem vremena

Ovdje su izloženi problemi iz [1]. Od početaka fizike možemo fizikalne zakone podijeliti u zakone u jednom trenutku (npr. Gaussov zakon) i zakone evolucije u vremenu (npr. Lorentzova sila koja govori kako će raspodjela naboja evoluirati u vremenu). U lagranževom formalizmu (4.76) smo isto tako imali jednadžbe koje određuju početne uvjete (4.77) i (4.78) i jednadžbe po kojima K i h evoluiraju (4.79) i (4.74). Problem s kvantizacijom tog sustava je što u njemu još uvijek imamo baždarne varijable α i β te ne bismo dobili baždarno invarijantnu teoriju, zato u kanonskoj gravitaciji jednadžbe (4.92) i (4.93) predstavljaju zakon u jednom trenutku

$$H_a(x) = -2D_b p_a^b(x) = 0, \tag{5.1}$$

$$H(x) = G_{abcd}(x;g)p^{ab}(x)p^{cd}(x) - \sqrt{g}R(x;g) = 0. \tag{5.2}$$

Ovaj zapis naglašava ovisnost o koordinati $x \in \Sigma$. Sada će se potpuno zaboraviti da postoje jednadžbe evolucije (4.79) i (4.74) jer sada pokušavamo kvantizirati sustav pa ćemo htjeti da generalizirani impulsi postanu derivacije. Jednadžba (5.1) je analogna Gaussovom zakonu, dok (5.2) nema analogiju u elektrodinamici. Pošto smo uklonili bilo kakvu referencu na hiperplohu $\Sigma \to \mathcal{M}$, ona je izostavljena iz ovih jednadžbi. Ta hiperploha predstavlja jedan trenutak u vremenu i to što nema nikakvog ograničenja povezanog s tom hiperplohom je podrijetlo problema vremena. U [1] se pretpostavlja da g_{ab} i p^{ab} nose informacije o hiperplohi na kojoj se nalaze. Kako bi se to osiguralo, pretpostavlja se da postoji transformacija

$$g_{ab}(x), p^{ab}(x) \to X^A(x), P_A(x), \phi^r(x), \pi_r(x) \tag{5.3}$$

gdje A ide od 0 do 3, a r je 1 ili 2. $X^A(x)$ specificira hiperplohu od dva "prava" gravitacijska stupnja slobode $\phi^r(x)$. Ograničenja (5.1) i (5.2) se mogu napisati pomoću novih stupnjeva slobode kao

$$H_A(x) \equiv P_A(x) + h_A(x; X, \phi, \pi) = 0 \tag{5.4}$$

h_A predstavlja gustoću toka energije koju nose varijable ϕ i π kroz hiperplohu $X_A(x)$. Osim nekih alternativnih teorija, ona koja je najbliža kvantnoj gravitaciji ovisi o

Hamilton-Jacobijevoj teoriji je pretpostavka koja je napravljena u [1]. Postulira se da postoji Jacobijeva principalna funkcija $S(g)$ ($S(X,\phi)$) koja generira impulse p^{ab} ($P_A(x), \pi_r(x)$):

$$p^{ab} = \frac{\delta S(g)}{\delta g_{ab}(x)} \tag{5.5}$$

ili

$$P_A = \frac{\delta S(X,\phi)}{\delta X^A(x)}, \quad \pi_r = \frac{\delta S(X,\phi)}{\delta \phi^r(x)} \tag{5.6}$$

Uvrštavanjem ovih izraza za impulse u ograničenja (5.1), (5.2) tj. (5.4) dobiju se Hamilton-Jacobijeve jednadžbe geometrodinamike [1].

$$-2D_b \frac{\delta S(g)}{\delta g_{ab}(x)} = 0 \tag{5.7}$$

$$G\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g}, \frac{\delta S(g)}{\delta g}\right) - \sqrt{g} R(x; g) = 0 \tag{5.8}$$

ili

$$\frac{\delta S(X,\phi)}{\delta X^A(x)} + h_A\left(x; X, \frac{\delta S(X,\phi)}{\delta \phi}\right) = 0 \tag{5.9}$$

Ovo su diferencijalne jednadžbe za Jacobijevu principalnu funkciju. (5.7) osigurava da Jacobi principalna funkcija ovisi samo o geometriji $\mathrm{g}(x)$ a ne o metrici $g_{ab}(x)$ na plohi Σ tj. da je $S(\mathrm{g})$ baždarno invarijantan na plohi Σ. Jednadžba (5.8) je Hamilton Jacobijeva jednadžba za $S(\mathrm{g})$. U njoj dinamički stupnjevi slobode nisu odvojeni od vremena tj. parametarske varijable foliacije u kojoj evoluiraju. Odvajanje tih stupnjeva slobode se dogodi tek u (5.9).

5.1 Globalni problem vremena

Čak i na klasičnom nivou ekstrakcija dinamike iz zakona jednog trenutka predstavlja problem. Kao prvo globalna separacija vremena (iz varijabli ugnježđivanja) od dinamičkih stupnjeva slobode je najvjerojatnije nemoguća. Takva situacija se već dogodi u Newtonovoj dinamici čestica. Ograničenje za takav sistem je sličan (5.4) i s obzirom na apsolutno vrijeme T

$$P_T + h(T; Q, P) = 0 \tag{5.10}$$

Linearnost u P_T implicira da se apsolutno vrijeme uvijek povećava na bilo kojoj dinamičkoj putanji. Dakle svaka trajektorija presiječe isti list samo jednom. Prema [1] postoje u teoriji neki dinamički konačnodimenzionalni sistemi koji nemaju vremensku funkciju s tim svojstvom. Homogeni kozmološki modeli su jedan primjer u kojem geometrodinamika nije dobra teorija jer nema globalno dobro definirano vrijeme [7]. Ograničenje (5.2) tih sustava se ne može zamijeniti s globalnim ograničenjem (5.10). Vrlo je moguće da ne postoji nikakva transformacija (5.3) tako da su originalna ograničenja (5.1) i (5.2) potpuno ekvivalentna novom ograničenju (5.4) pa (5.9) ne može generirati sva rješenja.

5.2 *Problem sendviča*

Hamilton-Jacobijeva jednadžba (5.8) ima određenih poteškoća. Izbor metričke reprezentacije $S(g)$ pretpostavlja da evolucija gravitacijskog polja opisana kanonskim transformacijama čija je generativna funcija, funkcija početne i konačne metrike $S(g_{FIN}|g_{IN})$. Upitno je, je li i do koje mjere izbor intrinzične metrike na početnom i konačnom listu jedinstveno određuje geometriju prostorvremena u sendviču između njih. Ovo čini tzv. problem sendviča. Općenito bi se htjelo znati koji izbor kanonskih varijabli daje jedinstveno prostorvrijeme u sendviču. Ovo vodi natrag na istraživanje kanonskih transformacija (5.3).

5.3 *Neovisnost dinamičke evolucije o foliaciji*

Zadnje pitanje je, je li dinamika opisana (5.7) i (5.8) ili (5.9) Jacobi principalnom funkcijom čuva ograničenja (5.1) i (5.2) ili (5.4), koja vode do dinamike. To je tako kada su to ograničenja prve klase tj. kada Poissonove zagrade slabo iščezavaju na hiperplohi

$$\{H(x), H(x')\} \approx 0 \tag{5.11}$$

pomoću tzv. Diracove algebre. Ako postoji transformacija (5.3) onda Poissonove zagrade moraju jako isčezavati na listu

$$\{H_A(x), H_B(x')\} = 0 \tag{5.12}$$

Jednadžbe (5.11) i (5.12) osiguravaju da rješenje za neke rubne uvjete g_{FIN} i g_{IN} ne ovisi o foliaciji koja povezuje Σ_{IN} i Σ_{FIN}.

6 Problem vremena u kvantnoj gravitaciji

Ovdje su izloženi problemi iz [1]. Kvantizacija sustava čija dinamika je potpuno opisana ograničenjima prve klase se radi pomoću Diracove kvantizacije. Prvo se varijable $g_{ab}(x)$, $p^{ab}(x)$ ili $X^A(x)$, $P_A(x)$, $\phi^r(x)$ i $\pi_r(x)$ pretvore u operatore:

$$\hat{H}_a(x) = -2\hat{D}_b\hat{p}_a^b(x) \tag{6.1}$$

$$\hat{H}(x) = \text{"}\hat{p}^{ab}(x)G_{abcd}(x;\hat{g})\hat{p}^{cd}(x) - \sqrt{|\hat{g}|}R(x;\hat{g})\text{"} \tag{6.2}$$

ili

$$\hat{H}_A(x) = \hat{P}_A(x) + h_A(x;\hat{X},\hat{\phi},\hat{\pi}) \tag{6.3}$$

Navodnici u (6.2) naglašavaju da poredak operatora nije očit. Ograničenja (5.1) (5.2) i (5.4) postaju limitacije na fizikalno stanje $\psi \in \mathscr{F}$

$$\hat{H}_a(x;\hat{g},\hat{p})\psi(g) = 0 \tag{6.4}$$

$$\hat{H}(x;\hat{g},\hat{p})\psi(g) = 0 \tag{6.5}$$

i taj isti ψ napisan u koordinatama (5.3)

$$\hat{H}_A(x;\hat{X},\hat{\phi},\hat{P},\hat{\pi})\psi(X,\phi) = 0 \tag{6.6}$$

gdje ψ igra ulogu Jacobi principalne funkcije. Ovdje su stavljeni pod tepih mnogi problemi. Valna funkcija $\psi(g)$ je i dalje funkcija geometrije a ne metrike pomoću (6.4) dok se (6.5) formalno zove Wheeler-De Wittova jednadžba [1]. Impulsi $\hat{p}^{ab}$ i $\hat{P}_A$ postaju derivacije

$$\hat{p}^{ab} = -i\frac{\delta}{\delta g_{ab}}, \quad \hat{P}_A = -i\frac{\delta}{\delta X^A}. \tag{6.7}$$

6.1 Problem funkcionalne evolucije

Uvjeti (5.11) i (5.12) ne moraju nužno vrijediti za operatore (6.2) i (6.3) pa komutator

$$[\hat{H}_A(x), \hat{H}_B(x')] \neq 0 \tag{6.8}$$

nije nužno nula. Isto tako ako vrijedi

$$[\hat{H}(x), \hat{H}(x')]\psi(g) \neq 0 \tag{6.9}$$

onda su jednadžbe (6.4)-(6.6) nekonzistentne ili u najboljem slučaju imaju samo specijalna rješenja. Evolucija stanja iz IN u FIN postaje ovisna o foliaciji te valna funkcija može evoluirati u dva različita stanja $\psi_{1FIN} \neq \psi_{2FIN}$. To znači da ovisno o baždarenju imamo različitu dinamiku što je u sukobu s teorijom relativnosti.

6.2 Problem višestrukog izbora

Jednadžba (6.6) ima oblik Schrödingerove jednadžbe u varijablama hipervremena $X^A(x)$

$$i\frac{\delta\psi(X,\phi)}{\delta X^A(x)} = h_A(x; \hat{X}, \hat{\phi}, \hat{\pi})\psi \tag{6.10}$$

gdje je uzeto

$$\hat{P}_A = -i\frac{\delta}{\delta X^A}. \tag{6.11}$$

Ovisno o izboru vremenske varijable dobiju se različite kvantne teorije. Problem funkcionalne evolucije nastaje čak i ako ostanemo pri jednom izboru vremenske koordinate. Ovaj problem se razlikuje od globalnog problema vremena u klasičnoj geometrodinamici u tome što ovdje ne znamo koju vremensku koordinatu izabrati, dok kod globalnog problema vremena nemamo nikakvog izbora za globalnu vremensku koordinatu.

6.3 Problem Hilbertovog prostora

Problem višestrukog izbora nastaje kada smo prešli na (5.3) koordinate. No čak i kad bi ostali pri Wheeler-De Wittovim koordinatama imamo značajnih problema pri konstrukciji Hilbertovog prostora rješenja. Ova tri problema su glavni problemi koji dolaze pri kvantizaciji geometrodinamike jer klasična geometrodinamika ne posjeduje prirodnu vremensku varijablu dok standardna kvantna teorija ovisi o preferiranom vremenu.

7 Rasprava o problemima pri konstrukciji modela

Ovdje su izloženi problemi iz [1].

Kako bi riješili neke ili sve navedene probleme pomoću konstrukcije nekog konkretnijeg modela, treba se odbaciti jedno ili više bitnih svojstava Einsteinove teorije koja uzrokuju problem vremena.

1. **Pojavljivanje simetrija kojih nema u Einsteinovoj teoriji** – Model može imati simetrije ili strukture u superprostoru koje geometrodinamika nema. Do tog problema dolazi kod cilindričnih valova, bozonske strune, (2+1) dimenzionalna gravitacija, parametriziirana nerelativistička čestica, harmonički oscilator (poseban slučaj nerelativističke čestice), relativistička čestica, strune i membrane u stacionarnim vrijeme prostorima i kod specijalnih minisuperprostor modela.

2. **Teorije bez problema višestrukog izbora** – Parametrizirana nerelativistička čestica model ima oblik ograničenja (5.4) pa nema problem višestrukog izbora. Za sisteme kao cilindrični valovi ili bozonske strune postoji prirodan izbor (5.3) varijabla ugnježđivanja koji daju ograničenje (5.4)

3. **Teorije bez problema funkcionalne evolucije** – Takve teorije postoje samo u manjem broju dimenzija. Ovo je najveći problem te je jedino riješen u nekim modelima igračke. Da se ovaj problem riješi potrebno je u potpunosti otkriti teoriju kvantne gravitacije. Kod modela parametriziranog skalarnog polja u cilindričnom prostoru taj se problem riješi dodavanjem na (5.4) anomalni potencijal $A_A(x; X)$ tako da (6.8) je nula. Navodno bi se taj rezultat mogao generalizirati na Minkowski prostorvrijeme ali to još nitko nije napravio [1]. Ako radimo s Wheeler-De Wittovom jednadžbom onda jedan od načina da se "riješi" problem je s fiksiranjem foliacije.

4. **Restrikcije na predznak** – U geometrodinamici kinetički član i potencijalna energija mogu biti pozitivne i negativne. U BB modelu kinetička energija je pozitivno definitna, a kod modela relativističke čestice potencijalna energija

je pozitivno definitna. U takvim pogađanjima vrlo često se dogodi da teorije kojima se pokušava opisati geometrodinamika nisu jednako općenite kao geometrodinamika.

Usprkos ovim problemima razvile su se 3 interpretacije kvantne gravitacije tj. 3 načina nošenja s problemima.

1. **Interno vrijeme** – ova interpretacija je bazirana na (6.10) Schrödingerovoj jednadžbi te je sklona problemu višestrukog izbora. Izbor internog vremena se svodi na intrinzično vrijeme (vrijeme konstruirano od metrike g_{ab}), ekstrinzično vrijeme (vrijeme ovisi i o ekstrinzičnoj zakrivljenosti i metrici na listu) ili materija kao vrijeme (vrijeme konstruirano od polja materije spojene s poljem gravitacije). Materija kao vrijeme se može zamisliti kao referentna tekućina u kojoj su čestice sa satovima. Ove definicije vremena imaju problem prostorvremena. Problem je pronaći varijablu ugnježđivanja $T(x)$ tako da zadovoljava slabo iščezavajuće Poissonove zagrade

$$\left\{T(x), \int_{\Sigma} d^3x' H(x')N(x')\right\} \approx 0 \quad \forall N(x') : N(x) = 0 \tag{7.1}$$

   Postoji još model nespecificirane kozmološke konstante. Kozmološka konstanta postaje slobodna varijabla. Problem kod tog modela je što kozmološko vrijeme nije isto kao i funkcionalno vrijeme u specijalnoj relativnosti.

2. **Wheeler-De Wittov pristup** – cilj je konstruirati Wheeler-De Wittovu jednadžbu koja nije osjetljiva na identifikaciju vremenske varijable od metričkih varijabli. Ove interpretacije su sklone problemu Hilbertovog prostora. Jedan od pristupa je da se gleda Wheeler-De Wittova jednadžba kao beskonačno dimenzionalni analogon Klein-Gordonove jednadžbe. Ova interpretacija uz pojavljivanje negativnih energija i negativnih vjerojatnosti tj. problema Hilbertovog prostora ima i problem prostorvremena. Semiklasična interpretacija pojednostavlja Wheeler-De Wittovu jednadžbu na Schrödingera. Ovaj pristup nailazi na globalni problem vremena i još puno raznih problema Hilbertovog prostora i ostalih. Jedan od problema kvantnih stanja WdW jednadžbe je to što nisu pozitivno definitna, to se pokušalo riješiti trećom kvantizacijom. Treća kvantizacija nalaže da se rješenja Wheeler-De Wittove jednadžbe trebaju interpretirati kao operatori.

3. **Kvantna gravitacija bez vremena** – Ova klasa je isto, no ne nužno, bazirana na Wheeler-De Wittovoj jednadžbi. Ideja je da vrijeme nije potrebno za interpretaciju kvantne gravitacije i kvantne mehanike. Nalaže da vrijeme izranja u partikularnim rješenjima, a i ako ne, kvantna stanja i dalje imaju probabilističku interpretaciju. Glavni cilj je nekako osigurati da kvantna vjerojatnost bude pozitivno definitna tako da bismo imali probabilističku interpretaciju. Jedna mogućnost je naivna Schrödingerova interpretacija. Pretpostavlja da je kvadrat $|\Psi(\mathrm{g})|^2$ gustoća vjerojatnosti prostorvremena te da nosi geometriju g. Postoji i kondicionalna interpretacija vjerojatnosti. Ovo je razrađeniji pristup od naivne interpretacije. Isto zahtjevamo da imamo normu na prostoru rješenja Wheeler-De Wittove jednadžbe. Za bilo koja dva kondicionalna operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$, je dana vjerojatnost da je odgovor na $\hat{A}$ da, ako je odgovor na $\hat{B}$ da. U specijalnim slučajevima $\hat{B}$ treba definirati trenutak u vremenu kada je $\hat{A}$ izmjeren. Pristup sume po prošlostima tvrdi da integrali po putu imaju smisla i izvan okvira Hilbertovog prostora. Ova interpretacija nema nužno koncept vremena. Još postoji zaleđeno vrjeme i konstante gibanja koje evoluiraju interpretacija. Nalaže da su jedine observable one koje komutiraju s ograničenjima gibanja tj. one koje su same ograničenja gibanja.

8 Interna Schrödingerova interpretacija

Ovdje su izloženi problemi iz [1]. Sada ćemo raspravljati o interpretacijama kvantne gravitacije u kojima je vrijeme identificirano među kanonskim varijablama te se klasična ograničenja moraju staviti u poseban oblik prije kvantizacije.

1. Varijable ugnježđivanja $X^A(x)$ su odvojene od pravih gravitacijskih stupnjeva slobode ϕ^r pomoću kanonske transformacije (5.3).

2. Ograničenja (5.1) i (5.2) su riješena s obzirom na impulse ugnježđivanja i onda su zamijenjeni s klasično ekvivalentnim ograničenjima (5.4).

3. Ta nova ograničenja su pretvorena u operatore (6.3) te su nametnuta ograničenja na fizikalna stanja (6.6).

Rezultat ove procedure je funkcionalna Schrödingerova jednadžba (6.10). Ta jednadžba je opravdanje sve ove muke. Jasno je kako interpretirati funkciju stanja koja zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu, no nije jasno kako interpretirati funkciju stanja koja zadovoljava originalna ograničenja (6.4) i (6.5). Recimo da je problem funkcionalne evolucije magično rješen, Schrödingerova jednadžba je interno konzistentna i mogu se naći rješenja $\psi(X, \phi)$. Bar formalno, funkcionalni integral

$$\langle\psi|\psi\rangle \equiv \int D\phi|\psi(X, \phi)|^2 \tag{8.1}$$

ne ovisi o varijablama ugnježđivanja $X^A(x)$ tj. o internom više prstnom vremenu. Unutrašnji produkt (8.1) pretvori prostor $\mathcal{F}$ rješenja $\psi(X, \phi)$ Schrödingerove jednadžbe (6.10) u Hilbertov prostor. Struktura Hilbertovog prostora daje statističku interpretaciju kvantiziranog sustava. Specifično

$$D\phi|\psi(X, \phi)|^2 \tag{8.2}$$

se interpretira kao vjerojatnost nalaženja pravih gravitacijskih stupnjeva slobode $\phi^r(x)$ u ćeliji $D\phi$ na hiperplohi $X^A = X^A(x)$ specificirane internim varijablama ugnježđivanja. Općenitije, unutarnji produkt (8.1) omogućava izgradnju značajnih kvantnih observabli. Bilo koja funkcija

$$\hat{F} = F(X, \hat{\phi}, \hat{\pi}) \tag{8.3}$$

pravih gravitacijskih stupnjeva slobode $\hat{\phi}$, $\hat{\pi}$ i varijable ugnježđivanja $X^A(x)$ koja je sama sebi adjungirana pod unutarnjim produktom (8.1) je observabla. Observabla ne mora biti konstanta gibanja tj. ne mora komutirati s ograničenjima (6.6) na prostoru rješenja

$$[\hat{F}, \hat{H}_A(x)]\psi \not\approx 0 \quad \text{za} \;\; \psi \in \mathcal{F}. \tag{8.4}$$

Poznata pravila kvantne mehanike omogućuju odgovaranje na pitanje o spektru $\hat{F}$ tj. vjerojatnost da u stanju ψ ta observabla na hiperpovršini $X^A(x)$ ima neku vrijednost F dozvoljenu spektrom. Osnovno pitanje je kako izabrati vremensku varijablu. Postoje 3 izbora:

1. **Intrinzično vrijeme** $T(x; g)$

2. **Ekstrinzično vrijeme** $T(x; g, p)$

3. **Materija kao vrijeme**

Jako se malo zna kako izabrati interno vrijeme tako da rezultirajuća Schrödingerova jednadžba ima smisla u punoj kvantnoj gravitaciji. Jedina opća shema je ili uzeti maksimalno baždarenje ili uzeti hiperpovršine s konstantnom prosječnom zakrivljenosti i nazvati ih hiperpovršine konstantnog vremena.

8.1 Homogene kozmologije

Jedna realna varijabla, a ne funkcija je potrebna da označi listove odabrane foliacije na kojoj su homogeni i metrika i ekstrinzična zakrivljenost. Rad na homogenim modelima je pokazao da je korisno interno vrijeme koje bilježi listove logaritam njihovog volumena

$$\Omega = \ln \int_{\Sigma} d^3x |g(x)|^{1/2} \tag{8.5}$$

(8.5) je primjer intrinzičnog vremena

8.2 Linearizirana gravitacija

Prednosti korištenja ekstrinzičnog vremena kao alat da se kvantna gravitacija stavi u Schrödingerovu formu se prvo pojavila u lineariziranoj teoriji gravitacije. Funkcije stanja za lineariziranu gravitaciju su definirana na baždarenju koje se samo malo razlikuje od hiperploha na ravnoj pozadini. Kada se koriste Minkowski koordinate $X^K = (T, Z^k)$ na pozadini, može se pretpostaviti da derivacije $T_{,a}$ i $Z^k_{,a}$ su male veličine. Intrinzična geometrija hiperpovršine $T = T(x)$ na Minkowski prostorvremenu ovisi o $T(x)$ jedino kroz članove drugog reda. S druge strane na K_{ab} utječe mala deformacija na hiperravninu, koja je već u članovima linearna s deformacijom

$$K_{ab}(x) = T_{,ab}(x). \tag{8.6}$$

Stoga je lakše identificirati $T(x)$ gledajući ekstrinzičnu zakrivljenost hiperplohe, nego njenu intrinzičnu geometriju. Deformacija Z^k Kartezijevih koordinata utječe na intrinzičnu metriku u prvom redu

$$g_{ab} = \delta_{ab} + Z_{(a,b)}(x). \tag{8.7}$$

(8.7) omogućava rekonstrukciju $Z^k(x)$ iz metrike. U lineariziranoj gravitaciji, pravi stupnjevi slobode su superponirani na koordinatno inducirane efekte (8.6) i (8.7). Da se izdvoje od varijabli ugnježđivanja pravi stupnjevi slobode, koristi se dekompozicija simetričnih tenzora f_{ab} na transverzalne bez traga f^{TT}_{ab}, na transverzalne f^T_{ab} i longitudinalne f^L_{ab} dijelove s obzirom na ravnu površinu

$$f_{ab} = f^{TT}_{ab} + f^T_{ab} + f^L_{ab}, \tag{8.8}$$

$$f^{TT}_{ab,b} = 0 = f^{TT}_{ab}, \quad f^T_{ab,b} = 0$$

gdje je

$$f^L_{ab} = f_{(a,b)}, \quad f_a \equiv \Delta^{-1}\left(f_{ab,b} - \frac{1}{2}\Delta^{-1} f_{bc,bca}\right)$$

$$f^T_{ab} = \frac{1}{2}(f^T\delta_{ab} - \Delta^{-1} f^T), \quad f^T \equiv f_{aa} - \Delta^{-1} f_{ab,ab}$$

$$f^{TT}_{ab} = f_{ab} - f^T_{ab} - f^L_{ab} \tag{8.9}$$

Indeksi se podižu i spuštaju pomoću pozadinske metrike δ_{ab}, a Δ^{-1} je invers laplasijana. Dekompozicije (8.8) i (8.9) mogu biti iskorištene na metrici $h_{ab} = g_{ab} - \delta_{ab}$ i vanjskoj zakrivljenosti p_{ab}. Jednadžbe (8.6) i (8.7) koje su validne u Minkowski prostorvremenu mogu biti napisane kao

$$T(x) = -\frac{1}{2}\Delta^{-1} p^T(x), \quad Z^k(x) = h^k(x) \tag{8.10}$$

Ove jednadžbe se trebaju prihvatiti kao definicija varijabli ugnježđivanja u lineariziranoj gravitaciji. Prva jednadžba u (8.10) je izbor ekstinzičnog vremena. Konjugirani impulsi kanonskih koordinata (8.10) glase

$$P_T = \Delta h^T(x), \quad P_k = -2(\Delta p_k(x) + p_{i,ik}(x)) \tag{8.11}$$

Kanonska transformacija (5.3) sada postaje

$$h_{ab}(x), \quad p^{ab}(x) \to \begin{array}{lll} T(x), & Z^k(x), & h^{TT}_{ab}(x); \\ P_T(x), & P_k(x), & p^{TTab}(x). \end{array} \tag{8.12}$$

Značenje veličina p^T i h^k kao parametri koji specificiraju izbor prostorvremenskih koordinata su otkrili Arnowitt, Daser i Minser (ADM) [13, 14]. Da bi se isključile varijable koje su viška, ADM fiksira foliaciju i referentni sustav pomoću uvjeta na koordinate

$$T(x) = t = const, \quad Z^k(x) = x^k \tag{8.13}$$

U višeprstnom formalizmu vremena bi bilo preferabilno čuvati varijable (8.10) i (8.11) u teoriji. U lineariziranoj gravitaciji, ograničenja trebaju biti raspisana do kvadratičtičnog člana u perturbaciji g_{ab} i p^{ab}. Kada su napisani u novim kanonskim varijablama (8.12), oni su do tog reda linearni u ugnježđenim impulsima. Nametanje tih ograničenja na stanja $\psi(T, Z, h^{TT})$ vodi do funkcionalne Schrödingerove jednadžbe. Arnowitt, Deser i Minser su predložili korištenje ekstrinzičnog vremena (8.10) čak i za velike perturbacije. Nažalost, ravna pozadina korištena u dekompoziciji (8.8) i (8.9) gubi geometrijsku i fizikalnu smisao i ograničenja napisana u novim varijablama postaju neuprotebljiva.

8.3 Cilindrični gravitacijski valovi

Cilindrična simetrija daje beskonačan broj gravitacijskih stupnjeva slobode i ako se dozvoli ∞^1 mnogo deformacija hiperplohe, cilindrična simetrija ne fiksira jedinstvenu foliaciju. Unatoč tome postoje prirodne koordinate prostorvremena T i R (zovu se Einstein-Rosenovo vrijeme i radijalna koordinata) u kojima vakuumske Einsteinove jednadžbe za cilindrične koordinate imaju jednostavan oblik. Einstein-Rosen radijalna koordinata je jednostavno funkcija $R(r)$ karakterizitajući intrinzičnu metriku

$$d\sigma^2 = e^{\gamma-\psi}dr^2 + R^2e^{-\psi}d\phi^2 + e^{\psi}dz^2. \tag{8.14}$$

Einstein-Rosenovo vrijeme se može rekonstruirati od funkcije $p_\gamma(r)$ koja karakterizira ekstrinzičnu zakrivljenost:

$$T(r) = T(\infty) - \int_\infty^r dr p_\gamma(r). \tag{8.15}$$

(8.15) je dobar primjer ekstrinzičnog vremena. Možemo upotpuniti (8.15) u kanonsku transformaciju

$$\gamma, R, \psi; P_\gamma, P_R, \pi_\psi \to T, R, \psi; P_T, P_R, \pi_\psi \tag{8.16}$$

tako da

$$P_T = -\gamma' + (\ln(R'^2 - p_\gamma^2))' \tag{8.17}$$

$$P_R = p_R + \left(\frac{\ln(R' - p_\gamma)}{R' + p_\gamma}\right)'. \tag{8.18}$$

Superhamiltonijan sustava u originalnim koordinatama glasi

$$H(r) = e^{(\psi-\gamma)/2}\left(-p_\gamma p_R + \frac{1}{2}R^{-1}\pi_\psi^2 + \frac{1}{2}R\psi^2 + 2R'' - \gamma' R'\right) \tag{8.19}$$

te jedina komponenta superimpulsa koja preživi je radijalna

$$H_1(r) = -2p'_\gamma + \gamma' p_\gamma + R' p_R + \psi' \pi_\psi. \tag{8.20}$$

U novim koordinatama (8.16) oba ograničenja su linearni u $2\infty^1$ impulsima P_T i P_R pa su lagano rješeni, te nova ograničenja glase

$$P_T + (R'^2 - T'^2)^{-1}\left[\frac{1}{2}(R^{-1}\pi_\psi^2 + R\psi'^2)R' - \psi'\pi_\psi T'\right] = 0, \tag{8.21}$$

$$P_R + (R'^2 - T'^2)^{-1}\left[\frac{1}{2}(R^{-1}\pi_\psi^2 + R\psi'^2)T' - \psi'\pi_\psi R'\right] = 0. \tag{8.22}$$

Rezultirajuća ograničenja imaju istu formu kao i za bezmaseno skalarno polje ψ koje se propagira na ravnoj Minkowski pozadini koja je parametrizirana uvođenjem arbitrarnih zakrivljenih hiperpovršina prostorvremena $T(r)$, $R(r)$. Ova procedura ilustrira kako prikladan izbor varijabli ugnježđivanja može pojednostavniti originalna ružna ograničenja. Kanonska kvantizacija bazirana na ograničenjima (8.21) i (8.22) vodi do $2\infty^1$-prsteno vremenske Schrödinger jednadžbe. Za foliaciju (8.13) ta jednadžba se reducira na običnu Schrödinger jednadžbu za jedno bezmaseno skalarno polje na Minkowski prostoru.

8.4 Prosječna ekstrinzična zakrivljenost kao vrijeme

Pojednostavljenje do kojeg je došlo preko razumnog izbora ekstrinzičnog vremena kod linearizirane gravitacije i cilindričnog midisuperprostor modela potiče na traženje ekstrinzičnog vremena u punoj geometrodinamici. Očiti izbor bi trebao biti

$$T(x) \equiv \frac{2}{3}|g(x)|^{-1/2}p(x), \quad P(x) \equiv -|g(x)|^{1/2} \tag{8.23}$$

uistinu, $T(x)$ i $P(x)$ su skup $2\infty^3$ kanonski konjugiranih varijabli. Dirac je predložio da se gravitacija treba kvantizirati na asimptotski ravnim prostorvremenima, na maksimalnoj hiperpovršini $T(x) = 0$ [15]. Izbor (8.23) je razrađen u efektivnu i elegantnu shemu rješavanja klasičnih ograničenja (5.2) i (5.1) od Yorka i suradnika [16–18]. Jednadžbe (8.23) se mogu dopuniti u kanonske transformacije uvođenjem konformalne metrike σ_{ab} i konjugirani impuls π^{ab}

$$\sigma_{ab} \equiv |g|^{-1/2} g_{ab}, \quad \pi^{ab} \equiv |g|^{1/2} \left(p^{ab} - \frac{1}{3} p g^{ab} \right) \tag{8.24}$$

Obje ove veličine imaju samo $5\infty^3$ nezavisnih komponenti. Kako bi se pojednostavio opis trebalo bi se probati razdvojiti ih dalje na $3\infty^3$ varijabli referentnog sustava $Z^k(x)$ i $2\infty^3$ gravitacijskih stupnjeva slobode, u kontrastu onoga što je napravljeno u Yorkovoj teoriji. Ograničenje superhamiltonijana (5.2) izraženo u novim varijablama T i P postaje kvazilinearna eliptička jednadžba za $\phi \equiv P^{1/6}$

$$\Delta_\sigma \phi - \frac{1}{8} R(\sigma) \phi + \frac{1}{8} \pi_{ab} \pi^{ab} \phi^{-7} - \frac{3}{64} T^2 \phi^5 = 0 \tag{8.25}$$

Pretpostavimo da je moguće naći rješenje $\phi(x;;T,\sigma,\pi)$ jednadžbe (8.25) pa je odgovarajuća gustoća Hamiltonijana $h = -\phi^6$. Sada je moguće zamijeniti ograničenje superhamiltonijana (5.2) s ekvivalentnim ograničenjem

$$\Pi(x) \equiv P(x) + h(x;T,\sigma,\pi) = 0 \tag{8.26}$$

čija kvantna verzija je Schrödingerova jednadžba

$$i \frac{\delta \psi(T,\sigma)}{\delta T(x)} = h(x;T,\hat{\sigma},\hat{\pi}) \psi(T,\sigma) \tag{8.27}$$

Zadatak razdvajanja varijabli referentnog sustava $Z^k(x)$ od pravih gravitacijskih stupnjeva slobode i istovremeno rješavanje ograničenja superimpulsa za konjugirane impulse je zahtjevaniji [16–18]. Jednadžbe se odvežu jedino ako se fiksira foliacija $T = t = \text{const}$.

8.5 Globalni problem vremena

Može se dogoditi da se sustav ograničenja (5.4) ne može globalno napravit ekvivalentnim sustavu ograničenja (5.1) i (5.2) s bilo kojim odabirom internalnog vremena. Ovo se mora dogoditi ako ne postoji globalni izbor vremenske funkcije na faznom prostoru tako da svaka klasična putanja presječe svaku hiperpovršinu konstantnog internog vremena jednom i samo jednom. Ovo je analogon Gribovog problema za parametrizirane dinamičke sustave. Ovaj problem je proučavan na jednostavnim modelima sustava npr. par (antiharmoničkih) harmoničkih oscilatora u stacionarnom stanju

$$H = \left(\frac{1}{2M}P^2 \pm \frac{1}{2}M\Omega^2 Q^2\right) \pm \left(\frac{1}{2M}p^2 \pm \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right) = 0 \tag{8.28}$$

i u homogenim kozmologijama od Hajičeka [7]. Analiza sustava poput harmoničkog (antiharmoničkog) oscilatora (8.28) pokazuje da puno takvih modela nema dobro definiranu globalnu vremensku funkciju i da takvi modeli postaju sve češći kako se broj oscilatora povećava. Također je poznato da neki kozmološki modeli kao Friedmannov svemir s masivnim skalarnim poljem nemaju globalnu vremensku funkciju [7]. Analiza problema globalne vremenske funkcije za homogene kozmologije nije još napravljena, ali se čini da je problem globalnog vremena generičan u ovoj klasi sustava. Puno popularnih izbora vremenskih funkcija nisu globalno važeći. Jedan primjer je (8.5) u oscilirajućim kozmološkim modelima, zato što Svemir dobije određenu vrijednost $\Omega < \Omega_{\text{MAX}}$ bar dvaput, jednom kad se širi i jednom kad se sakuplja. Ovo je najčeći razlog zašto se preferiralo ekstrinzično vrijeme prema intrinzičnom. Globalni problemi maksimalnog i $K =$ const. foliacija su bili proučavani u [19–25]. Još uvijek se malo zna o globalnom problemu vremena u punoj geometrodinamici. Ove teme definitivno zaslužuju više pažnje.

8.6 Problem spektralne analize

Rješenje ograničenja s obzirom na ugnježđene impulse ne mora postojati za sve vrijednosti dinamičke varijable. Čak i ako postoji, može biti prekomplicirano. To se već može vidjet na mini super prostor modelima, kao što je miksmaster svemir

$$H \equiv -p_\Omega^2 + p_+^2 + p_-^2 + e^{-4\Omega}(V(\beta_+, \beta_-) - 1) = 0 \tag{8.29}$$

ograničenje (8.29) sadrži korijen u Ω i pošto je potencijal $V(\beta_+, \beta_-) - 1$ negativan u području blizu središta β_+ i β_- koordinatne ravnine, izraz ispod korijena postaje negativan za neke vrijednosti β_+, β_-, p_+ i p_-. U kvantnoj teoriji se te varijable zamijene s operatorima te treba dat značenje članu ispod korijena. Prvo ako operator ispod korjena nije pozitivno definitan operator, spektralna analiza daje Hamiltonijan koji nije kompleksni konjugat samom sebi (eng. *self-adjoint*). Schrödingerova jednadžba (6.10) onda ne daje unitarnu evoluciju. Drugo, čak i da je operator ispod korijena pozitivno definitan operator, spektralna analiza je komplicirana nelokalna procedura koja zahtijeva rješavanje problema svojstvene vrjednosti za operator u pitanju. Najvjerojatnije je teško napisati rješenje u eksplicitnom obliku. Problem spektralne analize postaje još više ozbiljan u kompletnoj geometrodinamici, zato što nalaženje višeprstenog Hamiltonijana $h_A(x; X, \phi, \pi)$ često zahtijeva rješavanje nelinearnih diferencijalnih jednadžbi te definicija operatora ima probleme s renormalizacijom. Ako se pokuša pretvoriti Yorkov algoritam u Schrödingerovu jednadžbu, dolazi do problema definiranja operatorske verzije (8.26) čija ovisnost o dinamičkim stupnjevima slobode σ_{ab} i π^{ab} se zna jedino implicitno kroz izraz za konformalni faktor ϕ koji mora zadovoljavati Lichnerowicz-Yorkovu jednadžbu (8.25).

8.7 *Problem funkcionalne evolucije*

Dok ostali problemi vremena služe za argumentiranje zašto je ova ili ona teorija bolji kandidat za istraživanje kvantne gravitacije, ovaj problem se dosta ističe od ostalih. On ima različitu formu ovisno o tome da li se radi o shemi internog vremena (6.8) ili Wheeler-de Wittovom pristupu (6.9). Sada ćemo vidjeti rješenje problema funkcionalne evolucije na (1+1)-dimenzionalnom skalarnom polju. Neka $X^A = (T, X), T \in (-\infty, \infty)$ i $Z \in (-\pi, \pi)$ budu Minkowski koordinate na Minkowski cilindru čiji radijus je 1 te X^A je hiperploha prostornog tipa u ovom slučaju je to krivulja na cilindru. Ograničenja parametriziranog bezmasenog skalarnog polja su kao i u (5.4) gdje je višeprsteni hamiltonijan

$$h_A(x; X, \phi, \pi) = T_{AB}(x; X, \phi, \pi)|g(x, X)|^{1/2} n^B(x; X) \tag{8.30}$$

dobiven tako da se tenzor energije i impulsa projicira na normalu $|g|^{1/2} n^B$ koja je napisana u preslikavanju tj. ugnježđenju X^A. Rezultat je napisan u kanonskim varijablama $\phi(x), \pi(x)$. Ova ograničenja imaju iščezavajuću Poissonovu zagradu (5.12). Da bi se ta teorija kvantizirala treba se odrediti redoslijed faktora u (8.30). Očito bi bilo uzeti normalno uređenje (primjer na poljima $:\phi(x)\phi(y):$) s obzirom na operatore stvaranja i poništenja koji korespondiraju s početnim uvjetima $\hat{\phi}_0(x)$ i $\hat{\pi}_0(x)$ na ravnim maksimalnim rezanjima cilindra. Problem funkcionalne evolucije dolazi od Schwingerovih članova koji se pojave u komutatorima $\hat{T}_{AB}(X)$. Schwingerovi članovi se pojavljuju u algebri zbog konstrukcije (5.4) i (8.30) kao anomalija

$$\frac{1}{i}[:\hat{H}_A(x):, :\hat{H}_B(x'):] = -F_{AB}(x, x', X). \tag{8.31}$$

Detaljna rasprava članova u F nije potrebna. Ono što je bitno je da F ovisi samo o ugnježđenju X^A , a ne o varijablama polja $\hat{\phi}(X)$ i $\hat{\pi}(x)$. Anomalija (8.31) čini ograničenja (6.6) nekonzistentnim. Jackobijev identitet za komutator (8.31) vodi do toga da je anomalija 2-forma na prostoru ugnježđivanja. Anomalna 2 forma je uistinu egzaktna tj. funkcijalna vanjska derivacija potencijala $A_A(x; X)$. Ovaj potencijal ima dva dijela, standardan Casimirov tok energije i impulsa koji je konačan radi konačnih prostornih udaljenosti cilindra Minkowskog. Uz to ima i zanimljiv dio koji ovisi samo ekstrinzičnoj zakrivljenosti mapiranja tj. ugnježđivanja $X^A(x)$ ili o zakrivljenosti hiperpovršine. Mogu se redefinirati operatori ograničenja $\hat{H}_A$ dodavanjem anomalnog potencijala

$$\hat{H}_A(x) \equiv :\hat{H}_A(x): + A_A(x; X) \tag{8.32}$$

pa se taj anomalni potencijal točno pokrati s anomalijom. Time je na ovom pojednostavljenom modelu riješen problem funkcionalne evolucije

8.8 Problem višestrukog izbora

Ako postoji geometrijski prirodan izbor internog vremena, svi izbori vremena su jednako dobri ili jednako loši. Stoga je teško uspoređivati kvantne teorije koje proizlaze od različitog izbora interne varijable vremena. Problem višestrukog izbora se može analizirati na modelu relativističke čestice

$$H \equiv \frac{1}{2M} G^{AB}(Q) P_A P_B + \frac{1}{2} M V(Q) = 0 \tag{8.33}$$

u kojem je dopušteno da $V(Q)$ utječe na masu čestice. Bilo koja vremenska funkcija $T(Q)$ čiji listovi tvore $\mathcal{M}$ ima svojstvo da svaka dinamička putanja presječe svaki list jedanput. Nema globalnog problema vremena za relativističku česticu, ali ima problema višestrukog izbora. Postoji beskonačno mnogo načina izbora vremenske funkcije $T(Q)$. Vremenske funkcije su konstruirane od konfiguracija varijabli Q, one su analogne različitim izborima intrinzičnog vremena u kanonskoj geometrodinamici. Konstruira se referentni sustav svjetskih linija okomitih na listove foliacije $T(Q) = \text{const.}$ te se označavaju svjetske linije pomoću sugibajućih koordinata q^a. Normalan razmak između listova $T(Q) = \text{const}$ baždarenja je onda karakteriziran pomoću funkcije toka $N(Q)$. Napravimo transformaciju u točci

$$Q^A, P_A \to T, P_T; q^a, p_a \tag{8.34}$$

na faznom prostoru čestice i riješimo ograničenje (8.33) s obzirom na impuls P_T

$$H_T \equiv P_T + h_T(T, q, p) = 0 \tag{8.35}$$

gdje je

$$h_T \equiv (N^2(T,q)(h^{ab}(T,q)p_a p_b + M^2 V(T,q)). \tag{8.36}$$

U (8.36) h_{ab} je intrinzična metrika listova baždarenja $T = \text{const}$. Za vremenske trajektorije koje su okrenute u budućnost, ograničenje (8.35) je ekvivalentno kvadratičnom ograničenju (8.33). Tako su i bilo koja dva ograničenja (8.35) adaptirana u različitim baždarenjima T_1 i T_2. Dinamička evolucija generirana od svih takvih su međusobno konzistentne. To je osigurano zatvaranjem Poissonovih zagrada

$$\{H_{T_1}, H_{T_2}\} = \text{"}C\text{"} H_{T_1} H_{T_2} + \text{"}C\text{"} H, \tag{8.37}$$

$$\{H_T, H\} = \text{"}C\text{"} H_T + \text{"}C\text{"} H. \tag{8.38}$$

Strukture funkcija "C" nisu lijepe za oko, ali su regularne na ograničenoj površini. Nema problema vremena u klasičnoj relativističkoj mehanici. Mogu se pretvoriti dinamičke varijable q^a, p_a u operatore i definirati Hamiltonijane h_T pomoću spektralne analize. Sada možemo uvesti ograničenja (8.35) kao restrikciju na stanje funkcija

$\psi(Q)$

$$\hat{H}_{T_1}\psi = 0 \to \psi \in \mathcal{F}_1, \tag{8.39}$$

$$\hat{H}_{T_2}\psi = 0 \to \psi \in \mathcal{F}_2. \tag{8.40}$$

Dobiju se Schrödingerove jednadžbe bazirane na baždarenjima $T_1(Q) = \text{const}$ i $T_2(Q) = \text{const}$. Može se koristiti i originalno ograničenje (8.33) pa se dobije Klein-Gordonova jednadžba

$$\hat{H}\psi = 0 \to \psi \in \mathcal{F}. \tag{8.41}$$

Za različite izbore intrinzičnog vremena $T(Q)$ prostori $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}$ se mogu uspoređivati međusobno zato što je $\psi(Q)$ skalarna funkcija na $\mathcal{M}$. Problem višestrukog izbora se pojavi kada se ti prostori ne podudaraju. Tehnički nije moguće naći redoslijed faktora u ograničenjima koji je potpuno baziran na geometrijskim strukturama koje se koriste za pisanje svakog individualnog ograničenja, koje bi napravilo suvišni sustav ograničenja (8.39) i (8.40) konzistentnim tj. koji bi klasične relacije (8.37) i (8.38) doveo do komutatorskih relacija u kojima operatori $\hat{H}_{T_1}$, $\hat{H}_{T_2}$ i $\hat{H}$ bi sa svoje desne strane djelovali na ψ tako da ga anhilira.

9 Zaključak

U ovom diplomskom radu smo pokazali (3+1) formalizam opće relativnosti te je njegova evolucija dobro definirana iz lagranžijana. Unatoč tome ta evolucija je komplicirana i ovisi o baždarnim varijablama. Kuchař u [1] niti ne spomene te jednadžbe evolucije već pokušava doći do kvantne gravitacije samo pomoću tzv. super-Hamiltonijana i superimpulsa koji predstavljaju zakone jednog trenutka u (3+1) formalizmu opće relativnosti. Teško je reći postoji li lagranžijan ili hamiltonijan sustava kada se krene od arbitrarnih jednadžbi gibanja pa nije ni očito postoji li kvantna gravitacija u ovakvoj formi koja nema nijedan od navedenih problema. Problem funkcionalne evolucije je najproblematičniji te je jedino riješen u (1+1)-dimenzionalnom prostorvremenu. Jedino hipotetska potpuna kvantna gravitacija ima riješen taj problem. Većina ostalih problema su više nekakva diskusija koji pristup je bolji od kojeg. Trebalo bi se posebno posvetiti pažnja globalnom problemu vremena. To je problem već na klasičnom nivou te bi nam njegovo rješavanje moglo reći kakve metrike i baždarenja su validni, a kakve ne tj. koji imaju globalni problem vremena, a koji ne.

Drugi slučaj bi bio da nema dobro definiranog globalnog vremena u našem svemiru. Nitko još nije napravio interpretaciju kvantne teorije gravitacije koja bi zaobišla problem vremena.

Literatura

[1] K.V. Kuchař, Time and interpretations of quantum gravity, Int. J. Mod.Phys. D 20, Suppl. 1 (2011) 3-86.

[2] Muhammad Muzammil, Canonical Formulation of General Relativity

[3] Eric Gourgoulhon, W. Beiglbocl, J Ehlers et al., Lecture Notes in Physics:(3+1) Formalism in GR, bases of Numerical Relativity. https://luth2.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/pdf/form3p1.pdf

[4] A Hamiltonian Formulation of General Relativity, Francis Tong, 2006.4 https://www.math.toronto.edu/~mccann/assignments/426/Tong.pdf

[5] W-E Hareues School on Gravity and Light, Video Lectures by DominicoGuilini, 2015 https://www.youtube.com/watch?v=7G4SqIboeig&list=PLFeEvEPtX_0S6vxxiiNPrJbLu9aK1UVC_

[6] Hrvoje Nikolić, Emergent diffeomorphism invariance in toy models https://arxiv.org/pdf/2301.04448

[7] P. Hajıček, Lecture Notes on Quantum Cosmology (University of Bern, Bern, 1990); unpublished. https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0101003v2

[8] C. Rovelli, Quantum Gravity (Cambridge University Press, 2004).

[9] C.J. Isham, gr-qc/9210011.

[10] E. Anderson, The Problem of Time: Quantum Mechanics Versus General Relativity (Springer International Publishing AG, 2017).

[11] K.V. Kuchar, Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics (World Scientific, Singapore, 1992); reprinted in Int. J. Mod. Phys. D 20 (Suppl. 1), 3 (2011).

[12] T. Padmanabhan, Int. J. Mod. Phys. A 4, 4735 (1989).

[13] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, in Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. L. Witten (Wiley, New York, 1962).

[14] R. Armowitt, S. Deser and C. W. Misner, Phys. Rev. 117 (1960) 1595.

[15] P. A. M. Dirac, Phys. Rev. 114 (1959) 924.

[16] J. W. York, in Sources of Gravitational Radiation, ed. L. Smarr (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979).

[17] J. W. York, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 1082.

[18] Y. Choquet-Bruhat and J. W. York, in General Relativity and Gravitation the Hun dred Years After the Birth of Albert Einstein, eds. P. Bergmann, J. Goldberg and A. Held (Plenum, New York, 1980).

[19] Y. Choquet-Bruhat, C. R. Acad. Sci. (Paris) 280A (1975) 169.

[20] D. Brill and F. Flaherty, Commun. Math. Phys. 50 (1976) 157.

[21] A. J. Goddard, Commun. Math. Phys. 54 (1977) 279.

[22] L. L. Smarr and J. W. York, Phys. Rev. D 17 (1978) 2529

[23] D. M. Eardley and L. L. Smarr, Phys. Rev. D 19 (1979) 2239.

[24] J. E. Marsden and F. J. Tipler, Physics Rep. 66 (1980) 109.

[25] J. Isenberg and J. E. Marsden, J. Geom. Phys. 1 (1984) 85