Disperzija i potpuna omeđenost

Bilić, Tamara

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tamara Bilić

DISPERZIJA I POTPUNA OMEĐENOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj mami i mome didi...

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavamo omeđenost i disperziju u metričkim prostorima te veze između tih pojmova. Rad je podijeljen na tri poglavlja.

U prvom poglavlju proučavamo omeđenost i potpunu omeđenost u metričkim prostorima općenito te također proučavamo vezu između tih pojmova u euklidskom prostoru.

U drugom poglavlju bavimo se disperzijom u metričkim prostorima te posebno r-gustim konačnim nizovima, r-raspršenim konačnim nizovima i maksimalnom raspršenošću.

U trećem poglavlju proučavamo n-kapacitet skupa u metričkom prostoru, dajemo neke primjere te ispitujemo vezu između aproksimacije skupa i kapaciteta.

Svi pojmovi korišteni u radu su precizno definirani, a sve tvrdnje iskazane u radu su detaljno dokazane.

Poglavlje 1

Omeđenost u metričkim prostorima

1.1 Metrika

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $x, y, z \in X$ vrijedi sljedeće:*

(i) $d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

*Tada za d kažemo da je **metrika** na X, a za (X, d) kažemo da je **metrički prostor**.*

Primjer 1.1.2. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = |x - y| .$$

Tada je d metrika na $\mathbb{R}$. Dokažimo to.
Očito je da vrijede svojstva (i)-(iii) iz definicije metrike. Provjerimo svojstvo (iv).
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Imamo:

$$d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z|$$

$$\leq |x - z| + |y - z| = d(x, z) + d(y, z).$$

Dakle, vrijedi svojstvo (iv) pa je d metrika na $\mathbb{R}$.

Za funkciju d iz prethodnog primjera kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}$.

Podsjetimo se da ako je $(V, +, \cdot)$ realni vektorski prostor onda za funkciju $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, kažemo da je **norma** na tom vektorskom prostoru ako za sve $x, y \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi sljedeće:

(1.) $\|x\| \geq 0$

(2.) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(3.) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(4.) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

U tom slučaju za $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ kažemo da je **normiran prostor**.

Pretpostavimo sada da je $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Neka je $d : V \times V \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d(x, y) = \|x - y\|\,.$$

Tada je d metrika na V. Naime da vrijede svojstva $(i) - (iii)$ iz definicije metrike slijedi direktno iz svojstava (1.) – (3.) definicije norme. Svojstvo (iv) dobivamo analogno kao u slučaju euklidske metrike:

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq$$

$$\leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z),$$

tj. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ za sve $x, y, z \in V$. Za d kažemo da je metrika inducirana normom $\|\cdot\|$.

Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor. Podsjetimo se da za funkciju $\langle \cdot \,|\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \langle x\,| y \rangle$ kažemo da je skalarni produkt na $(V, +, \cdot)$ ako za sve $x, y, z \in V$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijede sljedeća svojstva:

(1.) $\langle x\,|x \rangle \geq 0$, $\langle x\,|x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2.) $\langle x + y\,|z \rangle = \langle x\,|z \rangle + \langle y\,|z \rangle$

(3.) $\langle \alpha x\,|y \rangle = \alpha \langle x\,|y \rangle$

(4.) $\langle x\,|y \rangle = \langle y\,|x \rangle$.

Tada za $(V, +, \cdot, \langle \cdot \,|\cdot \rangle)$ kažemo da je **unitarni prostor**.

Može se pokazati sljedeće: ako je $(V, +, \cdot, \langle \cdot \,|\cdot \rangle)$ unitarni prostor onda je funkcija $f : V \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$f(x) = \sqrt{\langle x\,|x\rangle},$$

za svaki $x \in V$ norma na V.
Za f kažemo da je norma inducirana skalarnim produktom $\langle \cdot \,|\cdot \rangle$.

Primjer 1.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Promotrimo $\mathbb{R}^n$ kao (realni) vektorski prostor sa standardnim operacijama zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, tj.*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Na tom vektorskom prostoru dan je skalarni produkt $\langle \cdot \,|\cdot \rangle$ sa

$$\langle (x_1, \ldots, x_n)\,|(y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Neka je $\|\cdot\|$ norma inducirana skalarnim produktom $\langle \cdot \,|\cdot \rangle$. Tada za sve $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n)\| =$$

$$= \|(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\|,$$

dakle

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$.

1.2 Omeđenost i potpuna omeđenost

Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $x_0 \in X$ te neka je $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Definiramo

$$K(x_0, r) = \{x_0 \in X\,|d(x, x_0) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je (otvorena) **kugla** oko x_0 radijusa r (u metričkom prostoru (X, d)). Umjesto $K(x_0, r)$ pišemo i $K(x_0, r; d)$ (ako želimo naglasiti o kojoj se metrici radi).

Primjer 1.2.1. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te $r > 0$. Tada je*

$$K(x_0, r; d) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle .$$

Naime, vrijedi $x \in K(x_0, r; d) \Leftrightarrow$

$$d(x, x_0) < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r \Leftrightarrow -r < x - x_0 < r$$

$$\Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r \Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle .$$

Dakle, svaka otvorena kugla u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ je oblika $\langle a, b\rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Obratno, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, onda je $\langle a, b\rangle$ otvorena kugla u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Naime,

$$\langle a, b\rangle = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle ,$$

gdje je $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $r = \frac{b-a}{2}$, dakle

$$\langle a, b\rangle = K(x_0, r; d).$$

Definicija 1.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Za S kažemo da je omeđen skup u metričkom prostoru (X, d) ako postoje $x_0 \in X$ i $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ takvi da je*

$$S \subseteq K(x_0, r).$$

Očito je svaka otvorena kugla u (X, d) omeđen skup.

Lema 1.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S omeđen skup u (X, d). Tada za svaki $x \in X$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$S \subseteq K(x, r).$$

Dokaz. Budući da je S omeđen u (X, d), postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_0, r_0).$$

Neka je $x \in X$. Neka je $r = d(x, x_0) + r_0$. Očito je $r > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r). \tag{1.1}$$

Neka je $y \in K(x_0, r_0)$. Tada je $d(y, x_0) < r_0$. Vrijedi

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < d(x, x_0) + r_0 = r,$$

dakle $d(x, y) < r$. Stoga je

$$y \in K(x, r).$$

Time smo dokazali da vrijedi (1.1). Iz (1.1) i $S \subseteq K(x_0, r_0)$ slijedi

$$S \subseteq K(x, r).$$

□

Propozicija 1.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su S i T omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S \cup T$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo $x \in X$. Iz leme 1.2.3 slijedi da postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da

$$S \subseteq K(x, r_1)$$

i

$$T \subseteq K(x, r_2).$$

Neka je

$$r = \max\{r_1, r_2\}.$$

Tada je $r > 0$ te je $r_1 \leq r$ i $r_2 \leq r$ što povlači da je $K(x, r_1) \subseteq K(x, r)$ i $K(x, r_2) \subseteq K(x, r)$. Stoga je

$$S \subseteq K(x, r)$$

i

$$T \subseteq K(x, r)$$

pa je $S \cup T \subseteq K(x, r)$. Prema tome, $S \cup T$ je omeđen skup. □

Korolar 1.2.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $S_1, \dots, S_n$ omeđeni skupovi u (X, d). Tada je $S_1 \cup \dots \cup S_n$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. kad god imamo n omeđenih skupova u (X, d) onda je njihova unija omeđen skup u (X, d).
Neka su $S_1, \dots, S_{n+1}$ omeđeni skupovi u (X, d). Vrijedi

$$S_1 \cup \dots \cup S_{n+1} = (S_1 \cup \dots \cup S_n) \cup S_{n+1}. \tag{1.2}$$

Prema induktivnoj pretpostavci skup $S_1 \cup \dots \cup S_n$ je omeđen pa iz (1.2) i propozicije 1.2.4 slijedi da je $S_1 \cup \dots \cup S_{n+1}$ omeđen skup. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Definicija 1.2.6. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je omeđen ako je X omeđen skup u (X, d).*

Dakle, metrički prostor (X, d) je omeđen ako i samo ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je

$$X = K(x, r).$$

Definicija 1.2.7. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpuno omeđen ako za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da je*

$$X = K(x_1, \epsilon) \cup \dots \cup K(x_n, \epsilon). \tag{1.3}$$

Pretpostavimo da je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor. Odaberimo neki $\epsilon > 0$ (npr. $\epsilon = 1$). Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in X$ takvi da vrijedi (1.3). Skupovi

$$K(x_1, \epsilon), \dots, K(x_n, \epsilon)$$

su omeđeni u (X, d) pa iz korolara 1.2.5 i (1.3) slijedi da je X omeđen skup u (X, d). Dakle, (X, d) je omeđen metrički prostor. Prema tome, svaki potpuno omeđen metrički prostor je omeđen metrički prostor.

Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Tvrdimo da je d metrika na X.

Očito je da svojstva $(i) - (iii)$ iz definicije metrike vrijede. Pokažimo da vrijedi i svojstvo (iv).
Neka su $x, y, z \in X$. Tvrdimo da je

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z). \tag{1.4}$$

Ako je $x = z$ onda je $d(x, z) = 0$ pa (1.4) očito vrijedi.
Ako je $x \neq z$ onda je $y \neq x$ ili $y \neq z$. Tada je $d(x, z) = 1$ te je $d(y, x) = 1$ ili $d(y, z) = 1$ pa je jasno da (1.4) vrijedi.
Dakle, d je metrika na X.
Za d kažemo da je ***diskretna metrika*** *na X.*

Primjer 1.2.8. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Neka je $x_0 \in X$ te neka je $r > 0$. Ako je $r \leq 1$, onda je*

$$K(x_0, r) = \{x_0\}.$$

Naime, očito je $x_0 \in K(x_0, r)$, a s druge strane ako je $x \in K(x_0, r)$, onda je

$$d(x, x_0) < r$$

pa je $d(x, x_0) < 1$ iz čega slijedi $x = x_0$. S druge strane, ako je $r > 1$, onda je

$$K(x_0, r) = X.$$

Iz ovoga zaključujemo da je X omeđen skup u (X, d), tj. (X, d) je omeđen metrički prostor.

Primjer 1.2.9. *Neka je X beskonačan skup te neka je d diskretna metrika na X. Tada metrički prostor (X, d) nije potpuno omeđen .*

Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ tako da je

$$X = K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Posebno za $\epsilon = \frac{1}{2}$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ tako da je

$$X = K(x_1, \frac{1}{2}) \cup \ldots \cup K(x_n, \frac{1}{2}).$$

Slijedi

$$X = \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\} = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je X beskonačan skup. Prema tome metrički prostor (X, d) nije potpuno omeđen.

Definicija 1.2.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S* ***potpuno omeđen skup*** *u (X, d) ako za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da je*

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Uočimo sljedeće: metrički prostor (X, d) je potpuno omeđen ako i samo ako je X potpuno omeđen skup u (X, d).

Propozicija 1.2.11. *Neke je (X, d) metrički prostor. Neka je S potpuno omeđen skup u (X, d). Tada je S omeđen u (X, d). Nadalje ako je $T \subseteq S$, onda je i T potpuno omeđen u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo $\epsilon > 0$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Prema korolaru 1.2.5 skup

$$K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon)$$

je omeđen pa je i S omeđen kao podskup omeđenog skupa.
Neka je $T \subseteq S$. Za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon)$$

iz čega slijedi da je

$$T \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Prema tome T je potpuno omeđen u (X, d). □

Lema 1.2.12. *Neka je (X,d) metrički prostor, neka su $x, y \in X$ te neka je $\epsilon > 0$ takav da je $y \in K(x, \frac{\epsilon}{2})$. Tada je*

$$K(x, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq K(y, \epsilon).$$

Dokaz. Neka je $z \in K(x, \frac{\epsilon}{2})$. Tada je

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dakle, $d(y,z) < \epsilon$ pa je

$$z \in K(y, \epsilon).$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 1.2.13. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je S neprazan podskup od X. Tada je S potpuno omeđen u (X,d) ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in S$ takvi da je*

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon). \tag{1.5}$$

Dokaz. Ako za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in S$ takvi da vrijedi (1.5) onda je S očito potpuno omeđen.
Pretpostavimo da je S potpuno omeđen. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_1, \frac{\epsilon}{2}) \cup \ldots \cup K(x_n, \frac{\epsilon}{2}). \tag{1.6}$$

Neka je

$$A = \left\{ i \in \{1, \ldots, n\} \;\middle|\; K(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \cap S \neq \emptyset \right\}.$$

Budući da je S neprazan postoji $s \in S$. Iz (1.6) slijedi

$$s \in K(x_i, \frac{\epsilon}{2})$$

za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$, iz čega slijedi da je

$$K(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \cap S \neq \emptyset,$$

stoga je $i \in A$. Očito je A konačan skup, dakle A je konačan neprazan skup pa postoje $k \in \mathbb{N}$ i $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ takvi da je $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Tada je

$$S \subseteq K(x_{i_1}, \frac{\epsilon}{2}) \cup \ldots \cup K(x_{i_k}, \frac{\epsilon}{2}).$$

Naime, ako je $s \in S$ onda je prema (1.6)

$$s \in K(x_j, \frac{\epsilon}{2})$$

za neki $j \in \{1, \dots, n\}$. Očito je $j \in A$, stoga je $j = i_l$ za neki $l \in \{1, \dots, k\}$. Dakle,

$$s \in K(x_{i_l}, \frac{\epsilon}{2})$$

pa je

$$s \in K(x_{i_1}, \frac{\epsilon}{2}) \cup \ldots \cup K(x_{i_k}, \frac{\epsilon}{2}).$$

Neka je $l \in \{1, \dots, k\}$. Budući da je

$$K(x_{i_l}, \frac{\epsilon}{2}) \cap S \neq \emptyset,$$

postoji $s_l \in S$ takav da je $s_l \in K(x_{i_l}, \frac{\epsilon}{2})$.

Iz leme 1.2.12 slijedi da je

$$K(x_{i_l}, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq K(s_l, \epsilon)$$

za svaki $l \in \{1, \dots, k\}$. Stoga je

$$S \subseteq K(x_{i_1}, \frac{\epsilon}{2}) \cup \ldots \cup K(x_{i_k}, \frac{\epsilon}{2}) \subseteq K(s_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(s_k, \epsilon).$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 1.2.14. *Neka su (X, d) i (Y, p) metrički prostori takvi da je $Y \subseteq X$ te takvi da je*

$$p(a, b) = d(a, b),$$

za sve $a, b \in Y$. Tada za (Y, p) kažemo da je ***potprostor metričkog prostora*** *(X, d).*

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor te Y neprazan podskup od X, onda je funkcija $p : Y \times Y \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$p(a, b) = d(a, b),$$

$a, b \in Y$ (tj. $p = d|_{Y \times Y}$) metrika na Y te je (Y, p) potprostor od (X, d).
Nadalje, jasno je da je p jedinstvena metrika na Y takva da je (Y, p) potprostor od (X, d).

Propozicija 1.2.15. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S neprazan podskup od X. Neka je*

$$p = d|_{S \times S}.$$

Tada je S potpuno omeđen skup u (X, d) ako i samo ako je (S, p) potpuno omeđen metrički prostor.

Dokaz. Za svaki $x \in S$ i svaki $r > 0$ vrijedi

$$K(x, r; p) = S \cap K(x, r). \tag{1.7}$$

Dokažimo to. Neka je $y \in K(x, r; p)$. Tada je $y \in S$ i $p(y, x) < r$, tj. $d(y, x) < r$. Stoga je

$$y \in K(x, r).$$

Dakle,

$$y \in S \cap K(x, r).$$

Obratno, ako je $y \in S \cap K(x, r)$ onda je $y \in S$ i $y \in K(x, r)$ pa je $d(y, x) < r$. Dakle,

$$p(y, x) < r$$

pa je

$$y \in K(x, r; p).$$

Time je jednakost (1.7) dokazana.

Pretpostavimo da je S potpuno omeđen u (X, d). Neka je $\epsilon > 0$. Prema propoziciji 1.2.13 postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in S$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Stoga je

$$S \subseteq S \cap (K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon)) = (S \cap K(x_1, \epsilon)) \cup \ldots \cup (S \cap K(x_n, \epsilon)) =$$

$$= K(x_1, \epsilon; p) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon; p).$$

Dakle,

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon; p) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon; p)$$

pa je

$$S = K(x_1, \epsilon; p) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon; p).$$

Time smo dokazali da je metrički prostor (S, p) potpuno omeđen.

Pretpostavimo da je (S, p) potpuno omeđen metrički prostor. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \dots, x_n \in S$ takvi da je

$$S = K(x_1, \epsilon; p) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon; p).$$

No,

$$K(x_1, \epsilon; p) \subseteq K(x_1, \epsilon), \ldots, K(x_n, \epsilon; p) \subseteq K(x_n, \epsilon).$$

Stoga je

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Prema tome S je potpuno omeđen skup u (X, d). □

Napomena 1.2.16. *Neka je (X, d) metrički prostor te S neprazan podskup od X. Neka je*

$$p = d\,|_{S \times S}\,.$$

Tada je S omeđen u (X, d) ako i samo ako je (S, p) omeđen metrički prostor.
Naime, ako je S omeđen u (X, d), onda za bilo koji $x \in S$ prema lemi 1.2.3 postoji $r > 0$ takav da je

$$S \subseteq K(x, r).$$

Stoga je

$$S \subseteq S \cap K(x, r)$$

tj.

$$S \subseteq K(x, r; p)$$

(jer je $S \cap K(x, r) = K(x, r; p)$ što smo pokazali u dokazu propozicije 1.2.15). Dakle, S je omeđen u (S, p), tj. (S, p) je omeđen metrički prostor.
Ako je (S, p) omeđen metrički prostor, onda lako slijedi (slično kao u dokazu propozicije 1.2.15) da je S omeđen u (X, d).

Definicija 1.2.17. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je* ***gornja međa*** *skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi*

$$x \leq a.$$

Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je ***odozgo omeđen*** *ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a gornja međa skupa S.*

Definicija 1.2.18. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je* ***donja međa*** *skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi*

$$a \leq x.$$

Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je ***odozdo omeđen*** *ako postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a donja međa skupa S.*

Definicija 1.2.19. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je S omeđen skup u $\mathbb{R}$ ako je S omeđen odozdo i odozgo.*

Propozicija 1.2.20. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je S omeđen skup u $\mathbb{R}$ (u smislu definicije 1.2.19) ako i samo ako je S omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ (u smislu definicije 1.2.2).*

Dokaz. Pretpostavimo da je S omeđen u $\mathbb{R}$. Dakle, S je omeđen odozdo i odozgo pa postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je a donja međa od S, a b gornja međa od S. Možemo pretpostaviti da je $a < b$. Za svaki $x \in S$ vrijedi

$$a - 1 < a \leq x \leq b < b + 1$$

iz čega zaključujemo da je

$$S \subseteq \langle a - 1, b + 1 \rangle .$$

Prema primjeru 2.3.4 $\langle a - 1, b + 1 \rangle$ je otvorena kugla u $(\mathbb{R}, d)$ pa je S omeđen u $(\mathbb{R}, d)$.

Pretpostavimo da je S omeđen u $(\mathbb{R}, d)$.Tada postoje $x \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ takvi da je

$$S \subseteq K(x, r).$$

Prema primjeru 2.3.4 vrijedi

$$S \subseteq \langle x - r, x + r \rangle .$$

Ovo znači da je $x - r$ donja međa skupa S, a $x + r$ gornja međa skupa S. Prema tome S je omeđen u $\mathbb{R}$. □

Propozicija 1.2.21. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tada je $[a, b]$ potpuno omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{b-a}{\epsilon} < n$. Tada je

$$\frac{b - a}{n} < \epsilon.$$

Za $i \in \{0, \ldots, n\}$ neka je $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Imamo

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

stoga je

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup \ldots \cup [x_n - 1, x_n] . \tag{1.8}$$

Naime, lako se indukcijom po $k \in \mathbb{N}$ dokaže da općenito vrijedi sljedeće:
ako su $y_0, \ldots, y_k \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_k$$

onda je
$$[y_0, y_k] = [y_0, y_1] \cup \ldots \cup [y_{k-1}, y_k].$$
Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tvrdimo da je
$$[x_{i-1}, x_i] \subseteq K(x_i, \epsilon). \tag{1.9}$$
Neka je $z \in [x_{i-1}, x_i]$. Tada je
$$x_{i-1} \leq z \leq x_i.$$
Vrijedi
$$\begin{aligned} x_{i-1} &= a + (i-1)\frac{b-a}{n} = \\ &= a + i\frac{b-a}{n} - \frac{b-a}{n} = \\ &= x_i - \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$
Dakle,
$$x_{i-1} = x_i - \frac{b-a}{n}.$$
Iz $\frac{b-a}{n} < \epsilon$ slijedi $-\epsilon < -\frac{b-a}{n}$ pa je
$$x_i - \epsilon < x_i - \frac{b-a}{n} = x_{i-1} \leq z \leq x_i < x_i + \epsilon.$$
Dakle, $x_i - \epsilon < z < x_i + \epsilon$, tj.
$$z \in \langle x_i - \epsilon, x_i + \epsilon \rangle.$$
Prema tome
$$z \in K(x_i, \epsilon).$$
Time smo dokazali da vrijedi (1.9). Iz (1.8) i (1.9) slijedi da je
$$[a, b] \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$
Prema tome $[a, b]$ je potpuno omeđen skup u $(\mathbb{R}, d)$. □

Korolar 1.2.22. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je S omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Tada je S potpuno omeđen u $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Prema propoziciji 3.3.3 skup S je omeđen u $\mathbb{R}$, tj. omeđen odozgo i odozdo pa postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ i takvi da je a donja međa od S, a b gornja međa od S. Tada je S podskup od $[a, b]$. Prema propoziciji 1.2.21 $[a, b]$ je potpuno omeđen u $(\mathbb{R}, d)$, stoga je i S potpuno omeđen u $(\mathbb{R}, d)$. □

Propozicija 1.2.23. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S omeđen skup u (X, d). Tada je skup*

$$\{d(x, y) \,|\, x, y \in S\}$$

omeđen u $\mathbb{R}$.

Dokaz. Budući da je S omeđen postoje $x_0 \in X$ i $r > 0$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_0, r).$$

Neka su $x, y \in S$. Tada je

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r = 2r.$$

Dakle,

$$d(x, y) < 2r$$

za sve $x, y \in S$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

1.3 Dijametar skupa

Definicija 1.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je* ***supremum*** *skupa S ako vrijedi sljedeće:*

(1.) a je gornja međa od S

(2.) $a \leq b$ za svaku gornju među b od S.

Drugim riječima, a je supremum skupa S ako je a najmanja gornja međa skupa S.

Uočimo sljedeće: ako su a_1 i a_2 supremumi skupa S onda je

$$a_1 \leq a_2$$

(jer je a_2 gornja međa od S) te također

$$a_2 \leq a_1$$

iz čega zaključujemo

$$a_1 = a_2.$$

Prema tome, supremum skupa, ako postoji, je jedinstven.
Supremum skupa S označavamo sa $\sup S$.

Primjer 1.3.2. *0 je supremum skupa $\langle -\infty, 0\rangle$. Naime jasno je da je 0 gornja međa ovog skupa. Pretpostavimo da je b gornja međa od $\langle -\infty, 0\rangle$ takva da je*

$$b < 0.$$

Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $b < x < 0$. Iz ovoga slijedi da je

$$x \in \langle -\infty, 0\rangle$$

pa je

$$x \leq b$$

jer je b gornja međa tog skupa što je u kontradikciji s $b < x$. Prema tome svaka gornja međa od $\langle -\infty, 0\rangle$ je veća ili jednaka od 0.

Definicija 1.3.3. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za $x_0 \in S$ kažemo da je **maksimum** skupa S ako je*

$$x \leq x_0$$

za svaki $x \in S$.

Ako je x_0 maksimum skupa S onda je x_0 i supremum od S. Naime, očito je da je x_0 gornja međa od S, a ako je b gornja međa od S onda je

$$x_0 \leq b$$

jer je $x_0 \in S$.
Obratno, ako je a supremum skupa S onda a ne mora biti maksimum od S (primjer 1.3.2).

Aksiom potpunosti: *Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $a \leq b$ za svaki $a \in A$ i za svaki $b \in B$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $a \in A$ i $b \in B$ vrijedi*

$$a \leq c \leq b.$$

Propozicija 1.3.4. *Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Tada S ima supremum, tj. postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a supremum od S.*

Dokaz. Neka je T skup svih gornjih međa od S. Budući da je S odozgo omeđen, postoji bar jedna gornja međa od S što znači da je T neprazan skup. Dakle, S i T su neprazni skupovi te za svaki $s \in S$ i svaki $t \in T$ vrijedi

$$s \leq t.$$

Prema aksiomu potpunosti postoji $r \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $s \in S$ i za svaki $t \in T$ vrijedi

$$s \leq r \leq t.$$

Iz ovoga je jasno da je r supremum skupa S. □

Neka je (X, d) *metrički prostor te neka je* S *neprazan omeđen skup u* (X, d). *Tada je prema propoziciji 1.2.23*

$$\{d(x, y) \,|\, x, y \in S\}$$

odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ *pa budući da je očito neprazan ima supremum.*

Definiramo

$$\operatorname{diam} S = \sup\{d(x, y) \,|\, x, y \in S\}.$$

Za $\operatorname{diam} S$ *kažemo da je* ***dijametar*** *skupa* S.

Propozicija 1.3.5. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $x_0 \in X$ *i* $r > 0$. *Tada je*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) \leq 2r.$$

Dokaz. Neka su $x, y \in K(x_0, r)$. Tada je

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r = 2r.$$

Dakle, $2r$ je gornja međa skupa $\{d(x, y) \,|\, x, y \in K(x_0, r)\}$. Stoga je supremum ovog skupa manji ili jednak od $2r$. Prema tome,

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) \leq 2r.$$

□

Primjer 1.3.6. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *te neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Neka je* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *i* $r > 0$. *Tvrdimo da je*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) = 2r.$$

Pretpostavimo suprotno, tj.

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) \neq 2r.$$

Znamo da je $\operatorname{diam} K(x_0, r) \leq 2r$ *(prema propoziciji 1.3.5) pa je*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) < 2r.$$

Slijedi da je

$$\frac{\operatorname{diam} K(x_0, r)}{2} < r.$$

Odaberimo $t \in \mathbb{R}$ *takav da je*

$$\frac{\operatorname{diam} K(x_0, r)}{2} < t < r.$$

Uočimo da je $t > 0$. *Imamo* $x_0 = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. *Neka su* $a = (x_1 - t, x_2, \ldots, x_n)$ *i* $b = (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$. *Imamo*

$$d(a, x_0) = \sqrt{t^2 + 0^2 + \ldots + 0^2} = t < r$$

pa je

$$a \in K(x_0, r).$$

Isto tako dobivamo da je $d(b, x_0) = t < r$ *pa je*

$$b \in K(x_0, r).$$

Nadalje, imamo

$$d(a, b) = \sqrt{(2t)^2 + 0^2 + \ldots + 0^2} = 2t.$$

Iz $\frac{\operatorname{diam} K(x_0,r)}{2} < t$ *slijedi*

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) < 2t,$$

dakle

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) < d(a, b).$$

S druge strane, iz $a, b \in K(x_0, r)$ *slijedi da je*

$$d(a, b) \leq \operatorname{diam} K(x_0, r).$$

Kontradikcija. Prema tome, $\operatorname{diam} K(x_0, r) = 2r$.

Primjer 1.3.7. *Neka je* X *neprazan skup te neka je* d *diskretna metrika na* X. *Neka je* $x_0 \in X$, *tada je*

$$K(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$$

pa je

$$\operatorname{diam} K(x_0, \frac{1}{2}) = 0.$$

Iz ovoga zaključujemo da općenito ne vrijedi

$$\operatorname{diam} K(x_0, r) = 2r.$$

Lema 1.3.8. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka su* A *i* B *neprazni podskupovi od* X *takvi da je* $A \subseteq B$. *Pretpostavimo da je* B *omeđen. Tada je i* A *omeđen te vrijedi*

$$\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B.$$

Dokaz. Očito je da je A omeđen skup. Općenito, ako su C i D neprazni odozgo omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $C \subseteq D$, onda je

$$\sup C \leq \sup D.$$

Naime, $\sup D$ je gornja međa skupa D pa je gornja međa i skupa C. Budući da je $\sup C$ najmanja gornja međa skupa C, vrijedi

$$\sup C \leq \sup D.$$

Iz $A \subseteq B$ slijedi

$$\{d(x, y) \,|\, x, y \in A\} \subseteq \{d(x, y) \,|\, x, y \in B\},$$

pa je

$$\sup \{d(x, y) \,|\, x, y \in A\} \leq \sup \{d(x, y) \,|\, x, y \in B\},$$

tj.

$$\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B.$$

□

Propozicija 1.3.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S neprazan podskup od X. Tada je S potpuno omeđen u (X, d) ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i podskupovi $A_1, \ldots, A_n$ od S takvi da je $S = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ i $\operatorname{diam} A_i < \epsilon$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S potpuno omeđen skup. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in S$ takvi da je

$$S \subseteq K(x_1, \frac{\epsilon}{3}) \cup \ldots \cup K(x_n, \frac{\epsilon}{3}).$$

Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je

$$A_i = S \cap K(x_i, \frac{\epsilon}{3}).$$

Očito je $A_i \subseteq S$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ pa je $A_1 \cup \ldots \cup A_n \subseteq S$. S druge strane, ako je $s \in S$ onda postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $s \in K(x_i, \frac{\epsilon}{3})$ pa je

$$s \in S \cap K(x_i, \frac{\epsilon}{3}),$$

tj. $s \in A_i$. Prema tome

$$S \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

Dakle,

$$S = A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada je $x_i \in A_i$, prema tome $A_i \neq \emptyset$. Nadalje,

$$A_i \subseteq K(x_i, \frac{\epsilon}{3})$$

pa je prema lemi 1.3.8

$$\operatorname{diam} A_i \leq \operatorname{diam} K(x_i, \frac{\epsilon}{3}) \leq 2\frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Dakle,

$$\operatorname{diam} A_i < \epsilon.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i podskupovi $A_1, \dots, A_n$ od S dijametra manjeg od ϵ koji u uniji daju S. Dokažimo da je S potpuno omeđen.
Neka je $\epsilon > 0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \dots, A_n \subseteq S$ takvi da je

$$S = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

te

$$\operatorname{diam} A_1 < \epsilon, \dots, \operatorname{diam} A_n < \epsilon.$$

Za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ odaberimo točku $x_i \in A_i$. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Tvrdimo da je

$$A_i \subseteq K(x_i, \epsilon). \tag{1.10}$$

Neka je $a \in A_i$. Imamo $a, x_i \in A_i$ pa je

$$d(a, x_i) \leq \operatorname{diam} A_i < \epsilon.$$

Dakle, $d(a, x_i) < \epsilon$ pa je $a \in K(x_i, \epsilon)$. Time smo dokazali da (1.10) vrijedi. Imamo

$$S = A_1 \cup \ldots \cup A_n \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon),$$

tj.

$$S \subseteq K(x_1, \epsilon) \cup \ldots \cup K(x_n, \epsilon).$$

Prema tome S je potpuno omeđen. □

1.4 Potpuna omeđenost u $\mathbb{R}^n$

Teorem 1.4.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je $[a, b]^n$ potpuno omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$, pri čemu $[a, b]^n$ označava skup svih $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Iz činjenice da je $[a, b]$ potpuno omeđen u $\mathbb{R}$ (s obzirom na euklidsku metriku, prema propoziciji 1.2.21) te prema propoziciji 1.3.9 slijedi da postoje $k \in \mathbb{N}$ i podskupovi $A_1, \dots, A_k$ od $\mathbb{R}$ dijametra manjeg od $\frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}$ takvi da je

$$[a, b] = A_1 \cup \ldots \cup A_k. \tag{1.11}$$

Ako su $S_1, \dots, S_n$ podskupovi od $\mathbb{R}$, označimo sa $S_1 \times \ldots \times S_n$ skup svih $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ takvih da je $x_1 \in S_1, \dots, x_n \in S_n$. Tvrdimo da je

$$[a, b]^n = \bigcup_{i_1,\dots,i_n \in \{1,\dots,k\}} A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}. \tag{1.12}$$

Neka su $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$. Iz $A_{i_1} \subseteq [a, b], \dots, A_{i_n} \subseteq [a, b]$ slijedi da je

$$A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} \subseteq [a, b]^n.$$

Stoga je

$$\bigcup_{i_1,\dots,i_n \in \{1,\dots,k\}} A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} \subseteq [a, b]^n.$$

S druge strane, neka je $(x_1, \dots, x_n) \in [a, b]^n$. Iz (1.11) i $x_1 \in [a, b]$, slijedi da postoji $i_1 \in \{1, \dots, k\}$ takav da je

$$x_1 \in A_{i_1}.$$

Iz (1.11) i $x_2 \in [a, b]$, slijedi da postoji $i_2 \in \{1, \dots, k\}$ takav da je

$$x_2 \in A_{i_2}$$

itd. Dobivamo brojeve $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$ takve da je

$$x_1 \in A_{i_1}, \dots, x_n \in A_{i_n}.$$

Stoga je

$$(x_1, \dots, x_n) \in A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}.$$

Time je dokazano da vrijedi (1.12).
Neka su $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, k\}$. Dokažimo da je $\operatorname{diam}(A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}) < \epsilon$.
Neka su $x, y \in A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Imamo $x_1, y_1 \in A_{i_1}$ pa je

$$|x_1 - y_1| \leq \operatorname{diam} A_{i_1} < \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}.$$

Analogno dobivamo

$$|x_2 - y_2| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}, \dots, |x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} < \\ &< \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4n}+\ldots+\frac{\epsilon^2}{4n}} = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{4}} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ovo znači da je $\frac{\epsilon}{2}$ gornja međa skupa $\left\{d(x,y) \,\middle|\, x,y \in A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n}\right\}$. Stoga je supremum ovog skupa manji ili jednak od $\frac{\epsilon}{2}$, tj.

$$\operatorname{diam}(A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_n}) \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Iz ovoga i iz (1.12) zaključujemo da je $[a,b]^n$ jednak uniji konačno mnogo podskupova od $\mathbb{R}^n$ dijametra manjeg od ϵ. Iz propozicije 1.3.9 slijedi da je $[a,b]^n$ potpuno omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$. □

Teorem 1.4.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je S omeđen skup u $(\mathbb{R}^n, d)$ ako i samo ako je S potpuno omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Dokaz. Ako je S potpuno omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$ onda je S omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$ prema propoziciji 1.2.11. Pretpostavimo sada da je S omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$. Prema lemi 1.2.3 postoji $r > 0$ takav da je

$$S \subseteq K((0,\ldots,0), r). \tag{1.13}$$

Neka je $x \in S$. Imamo

$$x = (x_1,\ldots,x_n),\ x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}.$$

Iz (1.13) slijedi da je $x \in K((0,\ldots,0), r)$ pa je $d((x_1,\ldots,x_n),(0,\ldots,0)) < r$, tj.

$$\sqrt{(x_1-0)^2+\ldots+(x_n-0)^2} < r.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$x_1^2+\ldots+x_n^2 < r^2$$

pa je

$$x_1^2 < r^2,\ldots,x_n^2 < r^2,$$

tj.

$$|x_1| < r,\ldots,|x_n| < r.$$

Prema tome $x_1,\ldots,x_n \in \langle -r, r\rangle$ pa zaključujemo da je

$$x \in [-r,r]^n.$$

Time smo dokazali da je

$$S \subseteq [-r, r]^n .$$

Prema teoremu 1.4.1 $[-r, r]^n$ je potpuno omeđen skup u $(\mathbb{R}^n, d)$ pa je i S potpuno omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$. $\square$

Poglavlje 2

Disperzija u metričkim prostorima

2.1 r-gusti skupovi

Definicija 2.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, A neprazan podskup od X te $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Kažemo da je A* ***r-gust*** *u (X, d) ako je*

$$X = \bigcup_{a \in A} K(a, r). \tag{2.1}$$

Uočimo da je podskup A od X r-gust u metričkom prostoru (X, d) gdje je $r > 0$ ako i samo ako za svaki $x \in X$ postoji $a \in A$ takav da je

$$d(x, a) < r.$$

Naime, ako je A r-gust onda vrijedi (2.1) pa ako je $x \in X$ onda je

$$x \in \bigcup_{a \in A} K(a, r)$$

te postoji $a \in A$ takav da je

$$x \in K(a, r)$$

što povlači da je

$$d(x, a) < r.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $x \in X$ postoji $a \in A$ takav da je

$$d(x, a) < r.$$

To znači da za svaki $x \in x$ postoji $a \in A$ takav da je

$$x \in K(a, r).$$

Dakle, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$x \in \bigcup_{a \in A} K(a, r).$$

Stoga vrijedi (2.1) tj. A je r-gust.

Primjer 2.1.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{Z}$ 1-gust skup u $(\mathbb{R}, d)$.*
Naime, neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi

$$m \leq x \leq m + 1.$$

Ako je $x = m + 1$, onda je

$$d(x, m + 1) = 0 < 1,$$

a ako je $x \neq m + 1$ onda imamo

$$m \leq x < m + 1$$

pa je

$$0 \leq x - m < 1.$$

Stoga je $|x - m| = x - m < 1$, tj.

$$d(x, m) < 1.$$

Dakle, $\mathbb{Z}$ je 1-gust u $(\mathbb{R}, d)$.

No, $\mathbb{Z}$ nije $\frac{1}{2}$ − gust u $(\mathbb{R}, d)$. Dokažimo to.
Pretpostavimo suprotno. Neka je $x = \frac{1}{2}$. Tada postoji $m \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$d(x, m) < \frac{1}{2}.$$

1. slučaj: *$1 \leq m$. Tada je*

$$\frac{1}{2} \leq m - \frac{1}{2}$$

pa je

$$\frac{1}{2} \leq \left| m - \frac{1}{2} \right|,$$

tj.

$$\frac{1}{2} \leq d(m, x).$$

Kontradikcija.
2. slučaj: $m \leq 0$. *Tada je*

$$0 \leq -m$$

pa je

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - m,$$

tj.

$$\frac{1}{2} \leq d(x, m).$$

Kontradikcija.
Dakle, $\mathbb{Z}$ *nije* $\frac{1}{2} -$ *gust u* $(\mathbb{R}, d)$.

Definicija 2.1.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* A *podskup od* X. *Kažemo da je* A ***gust skup*** *u* (X, d) *ako za svaki* $x \in X$ *i svaki* $r > 0$ *postoji* $a \in A$ *takav da je*

$$d(x, a) < r.$$

Uočimo sljedeće: A *je gust skup u* (X, d) *ako i samo ako je* A $r -$ *gust skup u* (X, d) *za svaki* $r > 0$.

Primjer 2.1.4. *Neka je* d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Skup* $\mathbb{Z}$ *nije gust u* $(\mathbb{R}, d)$, *jer nije* $\frac{1}{2} -$ *gust (primjer 2.1.2).*

Dokažimo da je $\mathbb{Q}$ *gust u* $(\mathbb{R}, d)$.
Uzmimo $x \in \mathbb{R}$ *i* $r > 0$. *Treba pokazati da postoji* $a \in \mathbb{Q}$ *takav da je*

$$d(x, a) < r,$$

što je ekvivalentno sa $a \in K(x, r)$, *odnosno*

$$a \in \langle x - r, x + r \rangle$$

(primjer 2.3.4).
No, $x - r < x + r$ *pa sigurno postoji racionalan broj koji se nalazi između ova dva broja, dakle postoji* $a \in \mathbb{Q}$ *takav da je*

$$x - r < a < x + r,$$

tj.

$$a \in \langle x - r, x + r \rangle.$$

Prema tome $\mathbb{Q}$ *je gust u* $(\mathbb{R}, d)$.

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) *metrički prostor onda je* X *gust skup u* (X, d) *(ako je* $x \in X$ *i* $r > 0$, *uzmemo* $a = x$ *i imamo* $d(x, a) < r$).

Propozicija 2.1.5. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* A *konačan skup koji je gust u* (X, d). *Tada je*

$$A = X.$$

Dokaz. Uočimo da je A, kao gust skup, neprazan. Stoga, budući da je A konačan, imamo

$$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

gdje su $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_k \in X$. Dokažimo da je X podskup od A. Iz toga će slijediti da je $A = X$ (jer je očito A podskup od X).
Neka je $x \in X$. Pretpostavimo da $x \notin A$. Neka je

$$r = \min\{d(x, a_1), \ldots, d(x, a_k)\}$$

(lako se indukcijom dobiva da svaki konačan neprazan podskup od $\mathbb{R}$ ima minimum i maksimum). Budući da je

$$d(x, a_i) > 0$$

za svaki $i \in \{1, \ldots, k\}$ (jer $x \notin A$), imamo

$$r > 0.$$

Budući da je A gust u (X, d) postoji $y \in A$ takav da je

$$d(x, y) < r.$$

Slijedi da je $y = a_i$ za neki $i \in \{1, \ldots, k\}$ pa je prema tome

$$d(x, a_i) < r.$$

S druge strane iz definicije broja r je jasno da je

$$r \leq d(x, a_i).$$

Kontradikcija.
Prema tome, $x \in A$, dakle,

$$X \subseteq A.$$

Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 2.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, $r > 0$ te $n \in \mathbb{N}$. Za konačan niz $a_1, \dots, a_n$ u X kažemo da je **r-gust** u (X, d) ako je $\{a_1, \dots, a_n\}$ r-gust skup u (X, d).*
Dakle, $a_1, \dots, a_n$ je r-gust niz u (X, d) ako i samo ako za svaki $x \in X$ postoji $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je

$$d(x, a_i) < r.$$

Uočimo da vrijedi $a_1, \dots, a_n$ $r-$ gust niz u (X, d)

$$\Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\} \; r - \text{gust skup u } (X, d)$$

$$\Leftrightarrow X = \bigcup_{y \in \{a_1, \dots, a_k\}} K(y, r) \Leftrightarrow X = K(a_1, r) \cup \ldots \cup K(a_k, r).$$

Stoga je metrički prostor (X, d) potpuno omeđen ako i samo ako za svaki $r > 0$ postoji konačan niz koji je r-gust u (X, d).

2.2 *r*-raspršeni konačni nizovi

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je S neprazan podskup od X. Neka je r pozitivan realan broj. Kažemo da je skup S **r-raspršen** (ili **r-disperziran**) u (X, d) ako za sve $x, y \in S$ takve da je $x \neq y$ vrijedi*

$$d(x, y) > r.$$

Primjer 2.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{Z}$ $\frac{1}{2}-$ raspršen skup u $(\mathbb{R}, d)$. Naime ako su $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq y$, onda je*

$$|x - y| \geq 1 > \frac{1}{2},$$

dakle

$$d(x, y) > \frac{1}{2}.$$

Nadalje, $\mathbb{Z}$ nije $1-$ raspršen jer za $x = 1$ i $y = 2$ imamo $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq y$, ali

$$d(x, y) = 1,$$

tj. ne vrijedi

$$d(x, y) > 1.$$

S druge strane, ne postoji $r > 0$ *takav da je* $\mathbb{Q}$ $r-$ *raspršen.*
Pretpostavimo suprotno, tj. da takav r postoji. Odaberimo $q \in \mathbb{Q}$ *takav da je*

$$0 < q < r.$$

Imamo $0, q \in \mathbb{Q}$, $0 \neq q$ *i* $d(0, q) = q < r$, *kontradikcija.*

Definicija 2.2.3. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $r > 0$ *te* $a_1, \ldots, a_n$ *konačan niz točaka u* X, *pri čemu je* $n \in \mathbb{N}$. *Za (konačan niz)* $a_1, \ldots, a_n$ *kažemo da je* ***r-raspršen konačan niz*** *u* (X, d) *ako za sve* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *takve da je* $i \neq j$ *vrijedi*

$$d(a_i, a_j) > r.$$

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) *metrički prostor,* $r > 0$ *i* $a_1, \ldots, a_n$ $r-$ *raspršen konačan niz u* (X, d), *onda je* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ $r-$ *raspršenskup u* (X, d).

Primjer 2.2.4. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}$ *te neka je* a_1, a_2, a_3 *konačan niz u* $\mathbb{R}$ *definiran sa* $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$. *Tada je*

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{0, 1\},$$

a skup $\{0, 1\}$ *je očito* $\frac{1}{2}-$ *raspršen. Dakle,* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *je* $\frac{1}{2}-$ *raspršen skup u* $(\mathbb{R}, d)$.
No, a_1, a_2, a_3 *nije* $\frac{1}{2}-$ *raspršen konačan niz jer je*

$$d(a_1, a_2) = 0 < \frac{1}{2}.$$

Zapravo, konačan niz a_1, a_2, a_3 *nije* $r-$ *raspršen ni za jedan* $r > 0$.

Propozicija 2.2.5. *Neka je* (X, d) *potpuno omeđen metrički prostor te neka je* $r > 0$. *Neka je*

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{postoji konačan niz } a_1, \ldots, a_n \text{ koji je } r-\text{raspršen u } (X, d)\}.$$

Tada je A konačan skup.

Dokaz. Budući da je (X, d) potpuno omeđen postoje $p \in \mathbb{N}$ i $b_1, \ldots, b_p \in X$ takvi da je

$$X = K(b_1, \frac{r}{2}) \cup \ldots \cup K(b_p, \frac{r}{2}).$$

Neka je $n \in A$. Tada postoji konačan niz $x_1, \ldots, x_n$ koji je $r-$ *raspršen* u (X, d). Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Imamo $x_i \in X$ pa postoji $j_i \in \{1, \ldots, p\}$ takav da je

$$x_i \in K(b_j, \frac{r}{2}).$$

Promotrimo funkciju $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,p\}$, $i \longmapsto j_i$. Tvrdimo da je ova funkcija injekcija.
Neka su $i_1, i_2 \in \{1,\ldots,n\}$ takvi da je $i_1 \neq i_2$. Pretpostavimo da je $j_{i_1} = j_{i_2}$.
Imamo

$$x_{i_1} \in K(b_{j_{i_1}}, \frac{r}{2})$$

i

$$x_{i_2} \in K(b_{j_{i_2}}, \frac{r}{2}).$$

No, $b_{j_{i_1}} = b_{j_{i_2}}$ pa slijedi

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}) < r$$

(naime, ako su $a, b, c \in X$ takvi da je $a \in K(c, \frac{r}{2})$ i $b \in K(c, \frac{r}{2})$ onda je

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

tj.

$$d(a,b) < r).$$

No, iz činjenice da je $x_1,\ldots,x_n$ $r-$*raspršen* konačan niz slijedi da je

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}) > r.$$

Kontradikcija.
Prema tome $j_{i_1} \neq j_{i_2}$ pa zaključujemo da je promatrana funkcija injekcija. Ovo povlači da je $n \leq p$.
Dakle, $n \leq p$ za svaki $n \in A$, tj.

$$A \subseteq \{1,\ldots,p\}.$$

Stoga je A konačan skup. □

2.3 Maksimalno raspršeni nizovi

Definicija 2.3.1. *Neka je (X,d) potpuno omeđen metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ te neka je $r > 0$. Definiramo*

$$D_{(X,d)}(S,r)$$

kao skup svih $n \in \mathbb{N}$ za koje postoji konačan niz $x_1,\ldots,x_n$ koji je $r-$raspršen u (X,d) te takav da su $x_1,\ldots,x_n \in S$.

Uočimo da je, uz pretpostavke iz prethodne definicije, $D_{(X,d)}(S,r)$ konačan neprazan podskup od $\mathbb{N}$. Naime, očito je

$$D_{(X,d)}(S,r) \subseteq D_{(X,d)}(X,r),$$

a $D_{(X,d)}(X,r)$ je konačan skup prema propoziciji 2.2.5, stoga je $D_{(X,d)}(S,r)$ konačan skup. Odaberimo bilo koji $s \in S$ i definirajmo konačan niz x_1 sa

$$x_1 = s.$$

Očito je x_1 $r-$ raspršen niz u (X,d) pa zaključujemo da je $1 \in D_{(X,d)}(S,r)$.

Definicija 2.3.2. *Neka je (X,d) potpuno omeđen metrički prostor. Neka je $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ te neka je $r > 0$. Definiramo*

$$\Lambda_{(X,d)}(S,r) = \max D_{(X,d)}(S,r).$$

Ako je (X,d) potpuno omeđen metrički prostor, $r > 0$ te $a_1, \dots, a_n$ konačan niz u X, onda ćemo umjesto

$$\Lambda_{(X,d)}(\{a_1, \dots, a_n\}, r)$$

pisati i

$$\Lambda_{(X,d)}(a_1, \dots, a_n; r).$$

Definicija 2.3.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S \neq \emptyset$. Za*

$$d|_{S\times S}$$

kažemo da je ***euklidska metrika*** *na S.*

Napomena 2.3.4. *Neka su $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te da su $x, y \in [a,b]$. Tada je*

$$|x-y| \leq b-a.$$

Naime ako je $x \leq y$ onda imamo

$$a \leq x \leq y \leq b$$

pa slijedi

$$-x \leq -a$$

i

$$y \leq b.$$

Zbrajanjem zadnjih dviju nejednakosti dobivamo $y - x \leq b - a$, tj.

$$|x-y| \leq b-a.$$

U slučaju kada je $y \leq x$ analogno dolazimo do istog zaključka.

Primjer 2.3.5. *Neka je $X = [0,3]$ te neka je d euklidska metrika na X. Neka je p euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Prema propoziciji 1.2.21 X je potpuno omeđen skup u $(\mathbb{R}, p)$ pa iz propozicije 1.2.15 slijedi da je*

$$(X, p|_{(X\times X)})$$

potpuno omeđen metrički prostor.
No, $p|_{(X\times X)}$ je upravo metrika d. Dakle, (X, d) je potpuno omeđen metrički prostor.
Neka je $S = [0,1]$. Neka je $r \in [1, \infty\rangle$. Tvrdimo da je

$$D_{(X,d)}(S, r) = \{1\}. \tag{2.2}$$

Očito je $1 \in D_{(X,d)}(S, r)$.

Obratno, pretpostavimo da je $n \in D_{(X,d)}(S, r)$. Tada postoji konačan niz $x_1, \ldots, x_n$ koji je $r-$raspršen u (X, d) te takav da su $x_1, \ldots, x_n \in S$.
Pretpostavimo da je $n \neq 1$. Tada je $n \geq 2$, a budući da je $x_1, \ldots, x_n$ $r-$raspršen niz, vrijedi

$$d(x_1, x_2) > r$$

pa je $d(x_1, x_2) > 1$, tj.

$$|x_1 - x_2| > 1.$$

S druge strane, iz $x_1, x_2 \in [0,1]$ i napomene 2.3.4 slijedi

$$|x_1 - x_2| \leq 1.$$

Kontradikcija. Stoga je $n = 1$. Time smo dokazali da vrijedi (2.2). Iz (2.2) slijedi

$$\Lambda_{(X,d)}(S, r) = 1.$$

Neka je sada $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$. Tvrdimo da je

$$D_{(X,d)}(S, r) = \{1, 2\}. \tag{2.3}$$

Neka je x_1, x_2 konačan niz u X definiran sa $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Vrijedi

$$|x_1 - x_2| = 1 > r.$$

Dakle, x_1, x_2 je $r-$raspršen niz u (X, d), a očito su $x_1, x_2 \in S$ pa zaključujemo da je

$$2 \in D_{(X,d)}(S, r).$$

Prema tome

$$\{1, 2\} \subseteq D_{(X,d)}(S, r).$$

Obratno, neka je $n \in D_{(X,d)}(S, r)$*. Tada postoji konačan niz* $x_1, \dots, x_n$ *koji je* $r-$ *raspršen u* (X, d) *te takav da su* $x_1, \dots, x_n \in S$*.*
Pretpostavimo da $n \notin \{1, 2\}$*. Tada je* $n \geq 3$*. Imamo,*

$$|x_1 - x_2| > r$$

pa je

$$|x_1 - x_2| > \frac{1}{2}$$

jer je $r \in \left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$*. Isto tako imamo*

$$|x_1 - x_3| > \frac{1}{2}$$

i

$$|x_2 - x_3| > \frac{1}{2}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 < x_2 < x_3$*. Imamo*

$$|x_1 - x_2| = x_2 - x_1$$

pa je

$$x_2 - x_1 > \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

Nadalje, $|x_2 - x_3| = x_3 - x_2$ *pa je*

$$x_3 - x_2 > \frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

Zbrajanjem nejednakosti (2.4) i (2.5) dobivamo $x_3 - x_1 > 1$*, tj.*

$$|x_3 - x_1| > 1.$$

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da su $x_1, x_3 \in [0, 1]$*. Prema tome* $n \in \{1, 2\}$*. Dakle, vrijedi (2.3). Iz (2.3) slijedi*

$$\Lambda_{(X,d)}(S, r) = 2.$$

Općenito, neka je $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*. Neka je* $r \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right\rangle$*. Tvrdimo da je*

$$\Lambda_{(X,d)}(S, r) = n.$$

Neka je $x_1, \dots, x_n$ *niz u X definiran sa*

$$x_i = \frac{i-1}{n-1},$$

$i \in \{1, \dots, n\}$. Očito su $x_1, \dots, x_n \in S$. Neka su $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Tada je očito $|i - j| \geq 1$ pa je

$$|x_i - x_j| = \frac{i - j}{n - 1} \geq \frac{1}{n - 1} > r,$$

tj.

$$d(x_i, x_j) > r.$$

Prema tome niz $x_1, \dots, x_n$ je $r-$raspršen u (X, d), što povlači da je

$$n \in D_{(X,d)}(S, r).$$

Pretpostavimo da postoji $k \in D_{(X,d)}(S, r)$ takav da je $k > n$. Tada postoji konačan niz $x_1, \dots, x_k$ koji je $r-$raspršen u (X, d) te takav da su $x_1, \dots, x_k \in S$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Imamo

$$\sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} x_{i+1} - \sum_{i=1}^{k-1} x_i = \sum_{i=2}^{k} x_i - \sum_{i=1}^{k-1} x_i =$$

$$= \sum_{i=2}^{k-1} x_i + x_k - (x_1 + \sum_{i=2}^{k-1} x_i) = x_k - x_1.$$

Dakle,

$$x_k - x_1 = \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i).$$

Za svaki $i \in \{1, \dots, k-1\}$ vrijedi $x_i \leq x_{i+1}$ pa je $x_{i+1} - x_i \geq 0$ što povlači

$$x_{i+1} - x_i = |x_{i+1} - x_i| = d(x_{i+1}, x_i) > r \geq \frac{1}{n}$$

jer je niz $x_1, \dots, x_k$ $r-$raspršen.
Dakle, $x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n}$. Stoga je

$$x_k - x_1 = \sum_{i=1}^{k-1}(x_{i+1} - x_i) > \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k-1 puta} = \frac{k-1}{n}.$$

Prema tome,

$$x_k - x_1 > \frac{k-1}{n}. \tag{2.6}$$

Budući da je $x_k \leq 1$ te da je $x_1 \geq 0$, imamo

$$x_k - x_1 \leq 1.$$

Iz ovoga i (2.6) slijedi

$$\frac{k-1}{n} < 1.$$

Iz $n < k$ slijedi $n \leq k - 1$ pa je

$$1 \leq \frac{k-1}{n}.$$

Kontradikcija. Prema tome, ne postoji element od $D_{(X,d)}(S, r)$ koji je veći od n. To znači da je n najveći element skupa $D_{(X,d)}(S, r)$ pa je

$$\Lambda_{(X,d)}(S, r) = n.$$

Propozicija 2.3.6. *Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor, neka je $s > 0$ te neka je*

$$n = \Lambda_{(X,d)}(X, s). \tag{2.7}$$

Pretpostavimo da je $a_1, \ldots, a_n$ konačan niz koji je $s-$ raspršen u (X, d). Tada je $a_1, \ldots, a_n$ $r-$ gust konačan niz za svaki $r \in \mathbb{R}$ takav da je $r > s$.

Dokaz. Neka je $r \in \mathbb{R}$ takav da je $r > s$. Neka je $x \in X$. Promotrimo konačan niz $a_1, \ldots, a_n, x$. Tada prema (2.7) ovaj niz nije $s-$ *raspršen* u (X, d). Stoga postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je

$$d(a_i, x) \leq s$$

iz čega slijedi

$$d(a_i, x) < r.$$

Zaključujemo da je niz $a_1, \ldots, a_n$ $r-$ *gust* u (X, d). □

Poglavlje 3

Kapacitet

3.1 Kapacitet skupa

Definicija 3.1.1. *Neka je X skup te $p \in \mathbb{N}$. Neka je $F^p(X)$ skup svih funkcija $x : \{1, \dots, p\} \to X$. Dakle, $F^p(X)$ je skup svih konačnih nizova u X oblika $x_1, \dots, x_p$. Naravno za $x \in F^p(X)$ i $i \in \{1, \dots, p\}$ umjesto $x(i)$ pisat ćemo i x_i. Ako je $x \in F^p(X)$ onda ćemo reći da je X konačan niz duljine p.*

Definicija 3.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $x \in F^p(X)$, gdje je $p \in \mathbb{N}$. Definiramo*

$$\rho(x) = \min \left\{ d(x_i, x_j) | i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j \right\}.$$

Uočimo sljedeće: ako je (X, d) metrički prostor, $s > 0$ te x konačan niz u X, onda je x s-raspršen ako i samo ako je $\rho(x) > s$.

Definicija 3.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \neq \emptyset$ omeđen skup u (X, d). Neka je $n \in \mathbb{N}$. Definiramo realan broj*

$$C_n^{(X,d)}(A) = \sup \left\{ \epsilon > 0 \mid \exists x \in F^{n+1}(A) \text{ takav da je } x\ \epsilon - \text{raspršen u } (X, d) \right\}$$

ako je skup

$$\left\{ \epsilon > 0 \mid \exists x \in F^{n+1}(A) \text{ takav da je } x\ \epsilon - \text{ raspršen u } (X, d) \right\} \tag{3.1}$$

neprazan, a inače definiramo

$$C_n^{(X,d)}(A) = 0.$$

Za $C_n^{(X,d)}(A)$ kažemo da je ***n-kapacitet*** *od A u (X, d). Ako je jasno o kojem se metričkom prostoru radi, pišemo samo $C_n(A)$.*

Pokažimo da je prethodna definicija dobra, tj. da skup (3.1), ako je neprazan, ima supremum. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je dani skup odozgo omeđen.
Neka je ϵ element tog skupa. Tada postoji konačan niz $x_1, \ldots, x_{n+1}$ u A koji je $\epsilon-$raspršen. Tada vrijedi

$$d(x_1, x_2) > \epsilon.$$

Iz $x_1, x_2 \in A$ slijedi da je

$$d(x_1, x_2) \leq \operatorname{diam} A.$$

Stoga je

$$\epsilon \leq \operatorname{diam} A.$$

Prema tome diam A *je gornja međa skupa (3.1).*

Propozicija 3.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, A omeđen skup u (X, d) te $n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$C_n(A) = \sup\left\{\rho(x) \mid x \in F^{n+1}(A)\right\}. \tag{3.2}$$

Dokaz. Neka je

$$E = \left\{\epsilon > 0 \mid \exists x \in F^{n+1}(A) \text{ takav da je} x \ \epsilon - \text{raspršen}\right\}.$$

Promotrimo prvo slučaj kada je $E = \emptyset$. Tada je po definiciji

$$C_n(A) = 0.$$

S druge strane neka je $x \in F^{n+1}(A)$. Tada je svakako

$$\rho(x) \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $\rho(x) > 0$. Odaberimo $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\rho(x) > \epsilon > 0.$$

Slijedi da je x ϵ-raspršen niz pa je $\epsilon \in E$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $E = \emptyset$. Stoga je $\rho(x) = 0$. Prema tome,

$$\sup\left\{\rho(x) | x \in F^{n+1}(A)\right\} = \sup\{0\} = 0.$$

Dakle, (3.2) vrijedi.

Promotrimo sada slučaj kada je $E \neq \emptyset$. Neka je

$$s = \sup\left\{\rho(x) \mid x \in F^{n+1}(A)\right\}.$$

Neka je $\epsilon \in E$. Tada postoji $x \in F^{n+1}(A)$ takav da je x ϵ-raspršen. Iz toga slijedi da je

$$\epsilon < \rho(x).$$

Očito je $\rho(x) \leq s$. Prema tome $\epsilon < s$. Ovim smo pokazali da je s gornja međa od E. Stoga je $\sup E \leq s$.
Pretpostavimo da je $\sup E < s$. Budući da je s najmanja gornja međa skupa

$$\left\{\rho(x) \mid x \in F^{n+1}(A)\right\},$$

imamo da $\sup E$ nije gornja međa ovog skupa. Stoga postoji $x \in F^{n+1}(A)$ takav da je

$$\sup E < \rho(x).$$

Odaberimo $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\sup E < \epsilon < \rho(x).$$

Iz ovoga slijedi da je x ϵ-raspršen. Stoga je $\epsilon \in E$ pa je $\epsilon \leq \sup E$ što je u kontradikciji sa $\sup E < \epsilon$.
Zaključak:

$$\sup E = s,$$

tj.

$$C_n(A) = s,$$

a to je i trebalo dokazati. □

3.2 Primjeri

Primjer 3.2.1. *Neka je d euklidska metrika na $[0, 1]$. Prema propoziciji 3.1.4 vrijedi*

$$C_1([0,1]) = \sup\left\{\rho(x) \mid x \in F^2([0,1])\right\}.$$

Stoga je

$$C_1([0,1]) = \sup\{\rho(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in [0,1]\} =$$
$$= \sup\{d(x_1, x_2)|x_1, x_2 \in [0,1]\} =$$
$$= \sup\{|x_1 - x_2||x_1, x_2 \in [0,1]\}.$$

Prema napomeni 2.3.4 za sve $x_1, x_2 \in [0, 1]$ vrijedi

$$|x_1 - x_2| \leq 1 - 0 = 1,$$

prema tome 1 *je gornja međa skupa* $\{|x_1 - x_2| \,|x_1, x_2 \in [0,1]\}$.
Za $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ *dobivamo*

$$|x_1 - x_2| = 1$$

pa je 1 *element ovog skupa. Iz ovoga zaključujemo da je* 1 *maksimum promatranog skupa pa je ujedno i supremum tog skupa.*
Zaključak:

$$C_1([0,1]) = 1.$$

Odredimo sada $C_2([0,1])$.
Imamo

$$C_2([0,1]) = \sup\left\{\rho(x) \mid x \in F^3([0,1])\right\} =$$
$$= \sup\{\rho(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in [0,1]\}.$$

Uzmimo $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$. *Tvrdimo da je*

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{1}{2}.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\rho(x_1, x_2, x_3) > \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Poredajmo sada brojeve x_1, x_2, x_3 *od najmanjeg k najvećem, tj. odaberimo međusobno različite brojeve* $i_1, i_2, i_3 \in \{1,2,3\}$ *takve da je*

$$x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq x_{i_3}.$$

Koristeći napomenu 2.3.4 i (3.3) dobivamo

$$1 \geq |x_{i_3} - x_{i_1}| = x_{i_3} - x_{i_1} = x_{i_3} - x_{i_2} + x_{i_2} - x_{i_1} =$$
$$= |x_{i_3} - x_{i_2}| + |x_{i_2} - x_{i_1}| > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

tj. $1 > 1$, *kontradikcija.*
Prema tome,

$$\rho(x_1, x_2, x_3) \leq \frac{1}{2}.$$

Iz ovoga slijedi da je $\frac{1}{2}$ *gornja međa skupa* $\{\rho(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in [0,1]\}$. *No* $\frac{1}{2}$ *je i element ovog skupa: za* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 1$ *imamo*

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}.$$

Prema tome

$$\sup\{\rho(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in [0,1]\} = \frac{1}{2}$$

pa je

$$C_2([0,1]) = \frac{1}{2}.$$

Propozicija 3.2.2. *Neka je d euklidska metrika na* $[0,1]$. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Tada u metričkom prostoru* $([0,1], d)$ *vrijedi*

$$C_n([0,1]) = \frac{1}{n}.$$

Dokaz. Prema propoziciji 3.1.4 vrijedi

$$C_n([0,1]) = \sup\{\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0,1]\}. \tag{3.4}$$

Neka su $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0,1]$. Tvrdimo da je

$$\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n}.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. $\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) > \frac{1}{n}$.
Odaberimo međusobno različite brojeve $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, n+1\}$ takve da je

$$x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \ldots \leq x_{i_{n+1}}.$$

Neka je $k \in \{1, \ldots, n\}$. Iz $i_k \neq i_{k+1}$ slijedi

$$x_{i_{k+1}} - x_{i_k} = |x_{i_{k+1}} - x_{i_k}| = d(x_{i_{k+1}}, x_{i_k}) \geq$$

$$\geq \rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) > \frac{1}{n},$$

dakle

$$x_{i_{k+1}} - x_{i_k} > \frac{1}{n}. \tag{3.5}$$

Koristeći napomenu 2.3.4 i (3.5) dobivamo

$$1 \geq |x_{i_{n+1}} - x_{i_1}| = x_{i_{n+1}} - x_{i_1} =$$

$$= x_{i_{n+1}} - x_{i_n} + x_{i_n} - x_{i_{n-1}} + \ldots + x_{i_3} - x_{i_2} + x_{i_2} - x_{i_1} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (x_{i_{k+1}} - x_{i_k}) > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

dakle $1 > 1$, kontradikcija.
Prema tome,

$$\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n}$$

za sve $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0, 1]$.
S druge strane, definirajmo brojeve $x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0, 1]$ sa

$$x_i = \frac{i-1}{n},$$

$i \in \{1, \ldots, n+1\}$.
Neka su $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ takvi da je $i \neq j$. Tvrdimo da je

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{n}.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $i < j$. Tada je $i + 1 \leq j$ pa je

$$x_{i+1} \leq x_j$$

te je

$$d(x_i, x_j) = |x_i - x_j| = x_j - x_i \geq x_{i+1} - x_i =$$
$$= \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n},$$

dakle

$$d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{n}.$$

Nadalje, $d(x_1 - x_2) = \frac{1}{n}$ pa zaključujemo da je

$$\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $\frac{1}{n}$ maksimum skupa

$$\{\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_1, \ldots, x_{n+1} \in [0, 1]\},$$

stoga je $\frac{1}{n}$ i supremum tog skupa. Iz (3.4) slijedi da je

$$C_n([0, 1]) = \frac{1}{n}.$$

□

Napomena 3.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te A neprazan omeđen skup u (X, d). Tada je*

$$C_1(A) = \operatorname{diam} A.$$

Naime, uočimo prije svega da za sve $x_1, x_2 \in X$ vrijedi

$$\rho(x_1, x_2) = d(x_1, x_2).$$

Stoga je prema propoziciji 3.1.4

$$C_1(A) = \sup\left\{\rho(x) \mid x \in F^2(A)\right\} =$$
$$= \sup\{\rho(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\} =$$
$$= \sup\{d(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\} = \operatorname{diam} A.$$

3.3 Aproksimacije i kapacitet

Lema 3.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, $a, b, a', b' \in X$ te $\epsilon, r > 0$ takvi da je $d(a, b) > r$, $d(a, a') < \epsilon$ i $d(b, b') < \epsilon$. Tada je*

$$d(a', b') > r - 2\epsilon.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $d(a', b') \leq r - 2\epsilon$. Imamo

$$d(a, b) \leq d(a, a') + d(a', b) \leq$$
$$\leq d(a, a') + d(a', b') + d(b', b) <$$
$$< \epsilon + r - 2\epsilon + \epsilon = r,$$

tj. $d(a, b) < r$. Kontradikcija. Prema tome,

$$d(a', b') > r - 2\epsilon.$$

□

Teorem 3.3.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka su A i B neprazni omeđeni skupovi u ovom prostoru te neka je ϵ pozitivan realan broj koji ima sljedeće svojstvo:*
za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da je

$$d(a, b) < \epsilon$$

i za svaki $b \in B$ postoji $a \in A$ takav da je

$$d(b, a) < \epsilon.$$

Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|C_n(A) - C_n(B)| \leq 2\epsilon.$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je

$$S = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid \exists x \in F^{n+1}(A) \text{ takav da je } x \ r - \text{raspršen} \right\}.$$

Prema definiciji 3.1.3 vrijedi

$$C_n(A) = \sup S.$$

Neka je $\delta > 0$. Imamo

$$C_n(A) - \delta = \sup S - \delta < \sup S$$

pa zaključujemo da $C_n(A) - \delta$ nije gornja međa skupa S. Stoga postoji $r \in S$ takav da je

$$C_n(A) - \delta < r. \tag{3.6}$$

Budući da je $r \in S$ postoji $x \in F^{n+1}(A)$ takav da je x r-raspršen. Dakle, postoje $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ takvi da je

$$d(x_i, x_j) > r$$

za sve $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ takve da je $i \neq j$. Neka je $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Prema pretpostavci propozicije postoji $y_i \in B$ takav da je

$$d(x_i, y_i) < \epsilon.$$

Neka su $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}$ takvi da je $i \neq j$. Imamo

$$d(x_i, x_j) > r,$$

$$d(x_i, y_i) < \epsilon$$

i

$$d(x_j, y_j) < \epsilon$$

pa iz leme 3.3.1 slijedi

$$d(y_i, y_j) > r - 2\epsilon.$$

Prema tome konačan niz $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ je $(r - 2\epsilon)$-raspršen. Neka je

$$T = \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \exists y \in F^{n+1}(B) \text{ takav da je } y \ s - \text{raspršen} \right\}.$$

Tada je očito $r - 2\epsilon \in T$. Znamo da je $C_n(B) = \sup T$ pa slijedi da je

$$r - 2\epsilon \leq C_n(B).$$

Stoga je

$$r \leq C_n(B) + 2\epsilon. \tag{3.7}$$

Iz (3.6) i (3.7) slijedi da je

$$C_n(A) - \delta < C_n(B) + 2\epsilon$$

pa je

$$C_n(A) - C_n(B) - 2\epsilon < \delta. \tag{3.8}$$

Dakle, (3.8) vrijedi za svaki $\delta > 0$. Općenito, ako je $\alpha \in \mathbb{R}$ takva da je $\alpha < \delta$ za svaki $\delta > 0$ onda je $\alpha \leq 0$, naime kada bi vrijedilo $\alpha > 0$ imali bismo $\frac{\alpha}{2} > 0$ pa bi za $\delta = \frac{\alpha}{2}$ slijedilo

$$\alpha < \frac{\alpha}{2},$$

što je nemoguće. Stoga je

$$C_n(A) - C_n(B) - 2\epsilon \leq 0.$$

Slijedi

$$C_n(A) - C_n(B) \leq 2\epsilon.$$

Analogno dobivamo

$$C_n(B) - C_n(A) \leq 2\epsilon.$$

Prema tome

$$|C_n(A) - C_n(B)| \leq 2\epsilon.$$

□

Primjer 3.3.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A podskup od X koji ima točno m elemenata, $m \in \mathbb{N}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq m$. Tada je*

$$C_n(A) = 0.$$

Naime, ako su $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$ onda postoje $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ takvi da je $i \neq j$ i $x_i = x_j$. Stoga je

$$\rho(x) = 0$$

za svaki $x \in F^{n+1}(A)$. Budući da je prema propoziciji 3.1.4

$$C_n(A) = \sup \left\{ \rho(x) \mid x \in F^{n+1}(A) \right\}$$

imamo

$$C_n(A) = \sup \{0\} = 0.$$

Propozicija 3.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A neprazan omeđen skup u (X, d). Tada je A beskonačan skup ako i samo ako je*

$$C_n(A) > 0$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je A beskonačan skup. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Budući da je A beskonačan postoje $x_1, \dots, x_{n+1} \in A$ takvi da je $x_i \neq x_j$ za sve $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ takve da je $i \neq j$. Stoga je

$$d(x_i, x_j) > 0$$

za sve $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ takve da je $i \neq j$ pa budući da je

$$\rho(x_1, \dots, x_{n+1}) = \min \left\{ d(x_i, x_j) \mid i, j \in \{1, \dots, n+1\}, i \neq j \right\}$$

imamo da je

$$\rho(x_1, \dots, x_{n+1}) > 0.$$

Dakle, postoji $x \in F^{n+1}(A)$ takav da je $\rho(x) > 0$ pa iz propozicije 3.1.4 slijedi da je

$$C_n(A) > 0.$$

Pretpostavimo sada da je $C_n(A) > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kada bi A bio konačan skup tada bi prema primjeru 3.3.3 postojao $n \in \mathbb{N}$ takav da je $C_n(A) = 0$, a to je nemoguće.
Dakle, A je beskonačan skup. □

Primjer 3.3.5. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Neka je A neprazan podskup od X te neka je $n \in \mathbb{N}$. Znamo da je*

$$C_n(A) = \sup \left\{ \rho(x) \mid x \in F^{n+1}(A) \right\}.$$

Nadalje za svaki $x \in F^{n+1}(A)$ prema definiciji broja $\rho(x)$ i diskretne metrike vrijedi

$$\rho(x) = 0$$

ili

$$\rho(x) = 1.$$

Stoga je

$$\left\{ \rho(x) \mid x \in F^{n+1}(A) \right\} \subseteq \{0, 1\}$$

pa je

$$C_n(A) = 0$$

ili

$$C_n(A) = 1.$$

1. slučaj: *A je beskonačan skup. Tada je prema propoziciji 3.3.4 $C_n(A) > 0$ pa slijedi da je*

$$C_n(A) = 1.$$

2. slučaj: *A je konačan skup i broj n je veći ili jednak od broja elemenata skupa A. Tada je prema primjeru 3.3.3*

$$C_n(A) = 0.$$

3. slučaj: *A je konačan skup i broj n je manji od broja elemenata skupa A. Tada A sadrži barem* $n + 1$ *međusobno različitih elemenata, dakle postoje* $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ *takvi da je* $x_i \neq x_j$ *za* $i \neq j$*. Slijedi*

$$\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1.$$

Zaključujemo da je

$$C_n(A) \geq 1$$

pa je

$$C_n(A) = 1.$$

Bibliografija

[1] Christenson, C. O.; Voxman, W. L.: Aspects of Topology, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

[2] Iljazović, Z.: Isometries and Computability, Structures, Journal of Universal Computer Science, 16(18):2569–2596, 2010.

[3] Kreinovich, V.: Constructivization of the notions of epsilon- entropy and epsilon-capacity"; Proceedings of the Leningrad Mathematical Institute of the Academy of Sciences, 1974, Vol. 40, pp. 38-4 (in Russian), English translation: Journal of Soviet Mathematics, 1977, Vol. 8, No. 3, pp. 271-276.

[4] Sutherland, W. A.: Introduction to metric and topological spaces, Oxford University Press, 1975.

Sažetak

Ovaj diplomski rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju proučavali smo omeđenost i potpunu omeđenost u metričkim prostorima. U drugom poglavlju bavili smo se disperzijom u metričkim prostorima te posebno r-gustim konačnim nizovima, r-raspršenim konačnim nizovima i maksimalnom raspršenošću. U trećem poglavlju proučavali smo pojam n-kapaciteta skupa u metričkom prostoru. Naveli smo neke primjere s tim u vezi te smo se bavili odnosom aproksimacije skupa i kapaciteta.

Summary

This diploma thesis is divided into three chapters. In the first chapter we studied boundedness and completed boundedness in metric spaces. In the second chapter we examined dispersion in metric spaces and in particular we examined r-dense finite sequences, r-dispersed finite sequences and maximal dispersion. In the third chapter we studied the notion of n-capacity of a set in a metric space. We gave some examples and we examined the relationship between an approximation of a set and capacity.

Životopis

Rođena sam 18. lipnja 1990. godine u Šibeniku. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1997. godine u Osnovnoj školi Jurja Šižgorića. Godine 2005. upisujem se u Gimnaziju Antuna Vrančića u Šibeniku gdje sam 2009. godine maturirala s odličnim uspjehom. Iste godine nastavljam daljnje visokoškolsko obrazovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2013., nakon završenog preddiplomskog studija matematike; smjer: nastavnički, upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički.