Kineski prstenovi

Bolšec, Mateja

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mateja Bolšec

KINESKI PRSTENOVI

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. dr.sc. Dragutin Svrtan

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

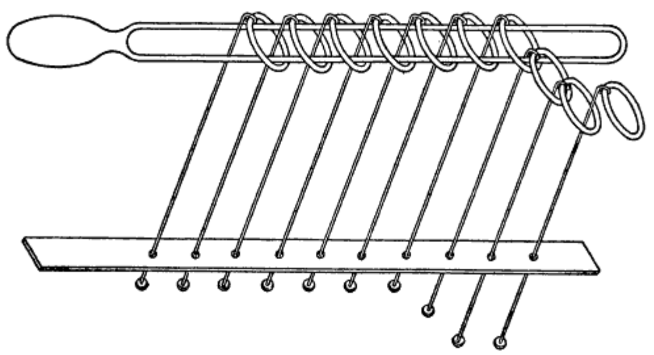
Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod



Slika 0.1: Mehanička slagalica "Kineski prstenovi"

Slika 0.1 predstavlja jednu od najstarijih od svih mehaničkih slagalica.
Mehanička slagalica je slagalica predstavljena kao skup međusobno povezanih dijelova.
Sastoji se od zapetljane ručice koja je isprepletena s prstenovima.
Cilj je ukloniti sve prstenove s petlje.
Problem prstenova je prvi našao *Cardan*, no kasnije je opširno objašnjena u matematičkim izrazima *Johna Wallisa* oko 1685.godine. Izvorno su je koristili francuski seljaci za zaključavanje škrinja, zvana *Baguenaudier*, što znači rasipanje vremena na francuskom. Stoga je ustanovljeno da se previše vremena troši u tu svrhu.
Iako je njezino porijeklo nepoznato, postoji priča da je veliki političar i strateg *Zhuge Liang* izumio ovu slagalicu za svoju suprugu s namjerom da u pokušaju da riješi slagalicu zaboravi na svoju tugu dok je on u ratu.

U ovom diplomskom radu će se objasniti kako se rješava ova slagalica s određenim brojem prstenova te će biti obrazložena općenita formula za slagalicu s n prstenova.

Rad je podijeljen u pet poglavlja. U prvom poglavlju ***"Naporni okovi"*** opisuje se detaljno princip rješavanja slagalice sa sedam prstenova. Na kraju poglavlja je naveden zanimljiv zadatak i njegovo neobično rješenje.

U drugom poglavlju ***Rekurzivna metoda za uklanjanje prstenova i otključavanje slagalice*** otkriva se formula za broj koraka potrebnih za skidanje svih prstenova s petlje uz obrazloženje na konkretnom primjeru. Dobivena formula se dokazuje indukcijom.

U trećem poglavlju ***Topološki uvid u Kineske prstenove*** se obrađuje topološka interpretacija problema Kineskih prstenova koja je relevantna u teoriji uzlova.

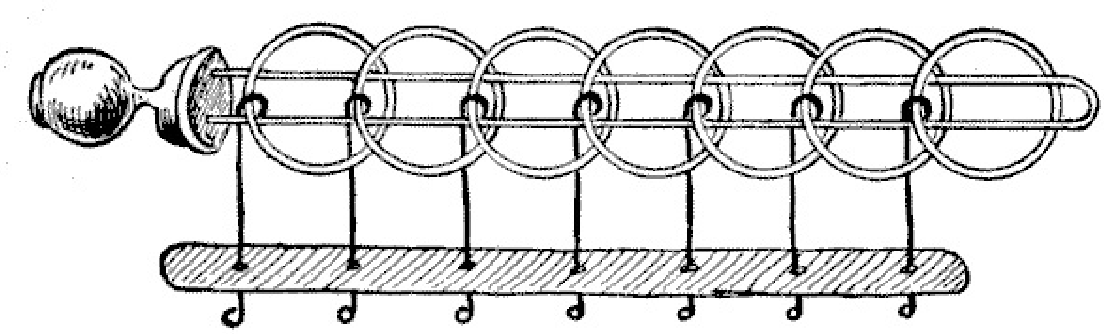
U četvrtom poglavlju ***Povezane slagalice*** navode se i opisuju dvije slagalice koje imaju sličan princip rješavanja kao slagalica Kineski prstenovi.

Peto poglavlje ***Rješavanje slagalice s 4, 5 i 6 prstenova*** ilustrira, uz otkriveni algoritam iz poglavlja 1, rješenje slagalice (korak po korak) s 4, 5 i 6 prstenova.

Poglavlje 1

”Naporni okovi” (The Tiring Irons)

1.1 Što su naporni okovi?



Slika 1.1: Mehanička slagalica ”Naporni okovi” (The Tiring Irons)

Kao što je prikazano na slici 1.1, *the tiring irons* je slagalica, napravljena od željeza i zvana ”naporni okovi”. U dućanima s igračkama zove se *Kineski prstenovi*, ali i sve češće ”zagonetni prstenovi”.

Vidi se da se slagalica sastoji od jednostavne petlje od žice učvršćene na ručku koja se najčešće drži u lijevoj ruci, te određenim brojem prstenova osiguranih žicom koja prolazi kroz rupe u šipci. Žice su slobodne na šipci, ali se ne mogu odvojiti od nje, niti se žice mogu odvojiti od prstenova.

Glavni cilj slagalice je odvojiti prstenove s petlje; i tada ih vratiti natrag.

1.2 Postupak rješavanja

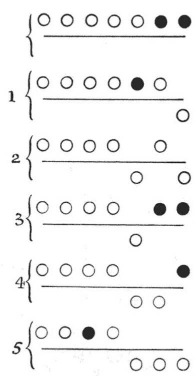
Na prvi pogled se vidi da se prvi prsten (s desna) može skinuti u bilo kojem trenutku tako da klizne preko kraja i padne kroz petlju, ili se može vratiti na petlju obrnutim postupkom. Uz ovu iznimku, jedini prsten koji se uvijek može pomaknuti je onaj koji je granično drugi na petlji na desnoj strani.

Dakle, sa svim prstenovima na petlji, drugi se može skinuti odjednom; s prvim prstenom dolje, drugi se ne može skinuti, ali se može treći prsten; s prvim prstenom dolje, ne može se skinuti četvrti, ali se može peti prsten...

Pokaže se da se prvi i drugi prsten mogu zajedno skinuti ili vratiti zajedno na petlju, ali da se spriječi zbrka, ovaj dvostruki korak se uklanja, i kaže se da se samo jedan prsten može skinuti ili vratiti istovremeno.

Na taj način se može u jednom koraku skinuti jedan prsten; dva prstena u dva koraka; tri prstena u pet koraka; četiri prstena u deset koraka; pet prstena u dvadesetjedan korak; i ako se nastavi udvostručavati (i dodavajući 1 kada je broj prstena neparan), može se lako utvrditi broj koraka za potpuno uklanjanje bilo kojeg broja prstena.

Pogledajmo pet koraka napravljenih za uklanjanje prva tri prstena; krugovi iznad crte su za prstene na petlji, a oni ispod crte za prstene skinute s petlje, (slika 1.2).



Slika 1.2: Prvih 5 koraka za slagalicu sa 7 prstenova

- skini prvi prsten;
- skini treći;
- vrati prvi;
- skini drugi;
- skini prvi.

To je pet koraka, kao na dijagramu 1.2.
Tamni krugovi pokazuju u svakoj fazi, od početne pozicije do cilja, koje prstenove je moguće skinuti. Poslije drugog koraka može se primijetiti da se nijedan prsten ne može skinuti dok se jedan ne vrati, zato što prvi i drugi prsten s desna sada nisu zajedno na petlji. Nakon petog koraka, ako se želi ukloniti svih sedam prstenova, mora se skinuti peti prsten. Ali prije nego što se može ukloniti četvrti prsten potrebno je vratiti prva tri prstena te skinuti prva dva. Tada su sedmi, šesti, četvrti i treći na petlji, te se stoga može skinuti četvrti. Sljedeća operacija bi bila dobiti niz 6., 5., 4., 3., 2., 1. na petlji i skinuti 4., 3., 2.; tada se skida 6. prsten; vrati se 5., 4., 3., 2. i 1. na petlju; tada se skida 4. prsten; vrati se 3., 2. i 1. na petlju i skine se 1. prsten; tada se skine 3. prsten; vrati se 2. i 1. na petlju; tada se skida 2. prsten i 1. prsten će se skinuti u 85. koraku, ostavljajući petlju sasvim slobodnom.

1.3 Zadatak - Slagalica Kineski prstenovi sa 14 prstenova

Koja će biti pozicija prstenova nakon što je napravljen 9 999. korak u rješavanju slagalice s 14 prstenova?
Treba napomenuti da je broj koraka za rješavanje slagalice s n prstenova jednak

$$\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-2\right), n-paran$$

$$\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-1\right), n-neparan$$

U ovom slučaju $n = 14$, ima 10 922 koraka.
Ovako ide rješenje zadatka:

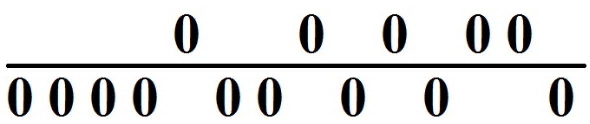
$$10922 - 9999 = 923$$

$$\begin{array}{ll}
923 : 2 = 461 & 1 \\
461 : 2 = 230 & 0 \\
230 : 2 = 115 & 0 \\
115 : 2 = 57 & 1 \\
57 : 2 = 28 & 1 \\
28 : 2 = 14 & 0 \\
14 : 2 = 7 & 0 \\
7 : 2 = 3 & 1 \\
3 : 2 = 1 & 1
\end{array}$$

1 : 2 = 0 1

Slagalica ima 14 prstenova, a samo 10 figura (1110011001). Postavi se razlika, u obliku četiri nule, u zagradi s lijeve strane, i u zagrade se postave sve figure koje ponavljaju figure sa svoje lijeve strane. Tada se dobije:
(0000)1(11)0(0)1(1)01(1)

Ovo je korektan odgovor za slagalicu, jer ako se sada smjeste prstenovi ispod crte za reprezentaciju figure u zagradama i prstenove na crtu za ostale figure, dobije se rješenje u traženoj formi, što je na slici 1.3.



Slika 1.3: 9 999. korak u rješavanju slagalice s 14 prstenova

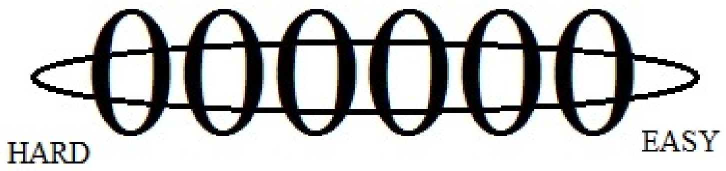
To znači da su 14., 13., 12., 11. prstenovi skinuti, 10. je na petlji, 9. i 8. su skinuti, 7. je na petlji, 6. je skinut, 5. je na petlji, 4. je skinut, 3. i 2. su na petlji, te je i prvi prsten skinut.

Poglavlje 2

Rekurzivna metoda za uklanjanje prstenova i otključavanje slagalice

2.1 Motivacija

Slagalica se može prikazati kao pizza s prstenovima zaključanima oko nje i prstenovima koji nisu zaključani oko nje.



Slika 2.1: Imitacija pizze s prstenovima

Neka je lijeva strana HARD (težak), a desna EASY (lagan) kraj. Na slici 2.1 prikazana je početna pozicija, tj. svi prstenovi su na "pizzi" (petlji).

Postoje dvije stvari koje se uoče ako se "poigrate" sa slagalicom:

1. Prsten s lakšeg kraja se može u bilo kojem trenutku ili skinuti ili vratiti. Njega ćemo zvati prvi prsten.

2. Osim prvog prstena, može se promijeniti i položaj drugog prstena.

Slika 2.1 predstavlja figuru 111111, gdje je 1 kada je prsten na petlji, a 0 kada je skinut. Po (1) imamo figuru 111110, i po (2) imamo figuru 111101.

Primjer 2.1.1. *Od figure*
101101 *se može dobiti*
101100 *(1) i*
101111 *(2).*

Metoda je ta da se počne na desnom kraju i gleda preko svih nula dok se ne nađe prva jedinica. U primjeru 2.1.1 nema nula s desnog kraja pa se počne odmah od jedinice. Položaj na prvom lijevom mjestu koje se nađe, može se mijenjati. To je osnovna mehanička priroda ove slagalice. I može se mijenjati predzadnji prsten s desna.

Primjer 2.1.2. *Od figure*
100100 *se može dobiti*
100101 *(1)*
Kreće se s desna prema prvoj jedinici - lijevo od nje se može mijenjati.
100100 → 101100

Znajući ove dvije figure, dovoljno je da se slagalica riješi . . . samo se moraju "istjerati van".

2.2 Rekurzija

Cilj je maknuti sve prstenove s petlje.
011111 - Jednom kad je zadnji prsten skinut s petlje, slagalica sa šest prstenova se može "odrezati" i dobije se nova s pet prstenova. Kad se taj "6. prsten" skine, više se ne dira. Prstenovi se skidaju s težeg kraja prema lakšem. No, tu ima mnogo koraka. Skinut će se prsten s težeg dijela i rješavat će se slagalica s *n-1* prstenova.
skinuti n prstenova:

- smanjiti slagalicu na slagalicu s $n-1$ prstenova;
- skinuti $n-1$ prsten koji je krajnje lijevi.

Smanjiti slagalicu na slagalicu s $n-1$ prstenom:

- skinuti $n-2$ prsten koji je krajnje lijevi;
- skinuti $n-ti$ prsten;

- vratiti $n-2$ prsten koji je krajnje lijevi.

Iz ovoga proizlazi rekurzivna formula:

$$T(n) = 2T(n-2) + T(n-1) + 1 \quad T(1) = 1, T(2) = 2 \tag{2.1}$$

gdje je *T(n)* broj koraka za rješavanje slagalice.
Ideja je da "nestanu"

$$T(n-1),\ T(n-2)$$

tako da se ponovno koriste i supstituiraju.

$$T(n-1) = 2T(n-3) + T(n-2) + 1$$

$$T(n) = 3T(n-2) + 2T(n-3) + 2$$

Dobije se:

n	T(n)
1	1
2	2
3	5
4	10
5	21
6	42
7	85
8	170

Kada je n neparan, $T(n)$ se udvostruči i poveća za 1, a kada je n paran, onda se *T(n)* samo udvostruči.
Pretpostavka je:

$$T(n) = 2T(n-1) + 1, n - neparan;$$
$$T(n) = 2T(n-1), n - paran.$$

2.3 Dokaz

Teorem 2.3.1. *Minimalni broj koraka za rješavanje slagalice s n prstenova je*

$$T(n) = 2T(n-1) + 1, n - paran;$$

$$T(n) = 2T(n-1), n - neparan.$$

Dokaz se provodi indukcijom.
Pretpostavka:

$$T(n-1) = 2T(n-2), n-1-paran$$
$$T(n-1) = 2T(n-2)+1, n-1-neparan \tag{2.2}$$

Želi se pokazati da tvrdnja teorema 2.3.1 vrijedi.

(1) n - paran $\rightarrow n-1$−neparan
Koristeći pretpostavku 2.2 i rekurzivnu formulu 2.1

$$T(n-1) = 2T(n-2)+1$$
$$T(n) = T(n-1) + \underline{2T(n-2)+1}$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-1)$$
$$T(n) = 2T(n-1) \quad Q.E.D.$$

(2) n - neparan $\rightarrow n-1$−paran
Koristeći pretpostavku 2.2 i rekurzivnu formulu 2.1

$$T(n-1) = 2T(n-2)$$
$$T(n) = T(n-1) + \underline{2T(n-2)} + 1$$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-1) + 1$$
$$T(n) = 2T(n-1) + 1 \quad Q.E.D.$$

$$T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 1 \tag{2.3}$$

Doda se $T(n-1)+1$ na obje strane:

$$T(n) + T(n-1) + 1 = 2(T(n-1) + T(n-2) + 1)$$

Ponavljanjem se dobije:

$$T(n) + T(n-1) + 1 = 2^n$$
$$T(n) + T(n-1) = 2^n - 1 \tag{2.4}$$

Zamijeni se n s $2k$ u jednadžbi 2.3

$$T(2k) = T(2k-1) + 2T(2k-2) + 1$$

i oduzme se od obje strane $T(2k-2)$ te se iskoristi jednadžba 2.4

$$T(2k) - T(2k-2) = T(2k-1) + T(2k-2) + 1 = 2^{2k-1} - 1 + 1 = 2^{2k-1}$$

Kako ovo vrijedi za svaki k, slijedi

$T(2k) - T(0) = (T(2k) - T(2k-2)) + (T(2k-2) + T(2k-4) + \ldots + T(2) + T(0))$

$=2(2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \ldots + 2^5 + 2^3 + 2)$
$=2(2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \ldots + 2^4 + 2^2 + 1)$
$=2(4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 4^2 + 4 + 1)$
$=\frac{2}{3}(4^k - 1)$

$$T(0) = 0$$
$$T(2k) = \frac{2}{3}(4^k - 1) \tag{2.5}$$

Traži se izraz za $T(2k-1)$.
Zamjenom n s $2k$ u jednadžbi 2.4, dobije se
$T(2k) + T(2k-1) = 2^{2k} - 1 \Rightarrow T(2k-1) = 2^{2k} - T(2k) - 1$.
Po jednadžbi 2.5,

$$T(2k-1) = 4^k - \frac{2}{3}(4^k - 1) - 1$$
$$T(2k-1) = \frac{1}{3}(4^k - 1) \tag{2.6}$$

Kako je $4^k = 2^{2k} = 2^n$, formule 2.5 i 2.6 mogu se izraziti u obliku

$$T(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2), & n \text{ - paran;} \\ \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1), & n \text{ - neparan.} \end{cases}$$

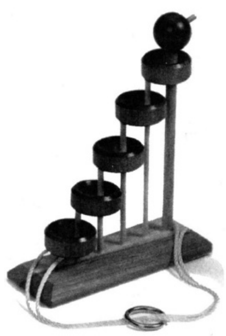
Poglavlje 3

Topološki uvid u Kineske prstenove

L.Kaufman je naslutio da je djelomično rješenje slagalice kineskih prstenova najjednostavnije moguće.
Jozef H. Przytycki i Adam S. Sikora dokazuju njegovu slutnju koristeći nisko-dimenzionalnu topologiju i teoriju grupa.

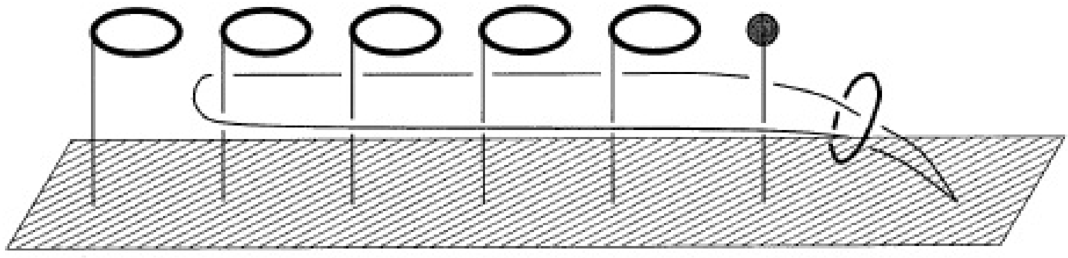
3.1 Uvod

U nekim popularnim slagalicama potrebno je skinuti prsten s užeta koji je obično ulančan s čvrstim dijelom slagalice.
Tipično, za takve slagalice postoje genijalna rješenja koja, ako se dovoljno razmotre, dovode do zanimljivih problema u nisko-dimenzionalnoj topologiji.
Ova pojava se može uočiti za kineske prstenove koji su prikazani na slici 3.1.
Zadatak slagalice je skinuti slobodan prsten s užeta.



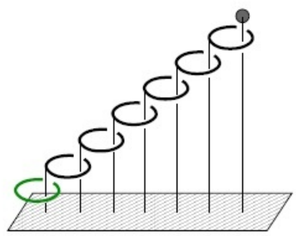
Slika 3.1: Kineski prstenovi

Iako je ova slagalica dugo vremena bila igračka djece prvog autora, Jozef H. Przytycki i Adam S. Sikora su postali ozbiljno zainteresirani za nju tek nakon što je L.Kaufman istaknuo neke njene zanimljive matematičke aspekte. Ako niste prije razmišljali o ovoj slagalici, sugerira se da ju riješite sada kako bi stekli poštovanje za ovaj predivan problem. Nemojte biti obeshrabreni početnom poteškoćom u nalaženju rješenja. Zaista, skoro je nemoguće vidjeti sve nužne pokrete koji se moraju učiniti sa užetom samo gledanjem u gornju sliku. Medutim, lako se vidi da rješenje postoji: Zamislite na trenutak da je igračka napravljena od elastičnog materijala i potisnite dulje stupce prema dolje tako da su svi stupci iste visine, (slika 3.2).



Slika 3.2: ”olabavljena” slagalica

Sada rješenje postaje očito. Kako je sada uže u potpunosti odvojeno od stupaca, ono se također može odvojiti u originalnoj slagalici. Rješenje na slici 3.2 pokazuje kako jednostavna topološka ideja može dati lijepo rješenje nečemu što se čini kompliciranim. Ista ideja pokazuje da se kineski prstenovi mogu predstaviti u nešto pravilnijem obliku, (slika 3.3).

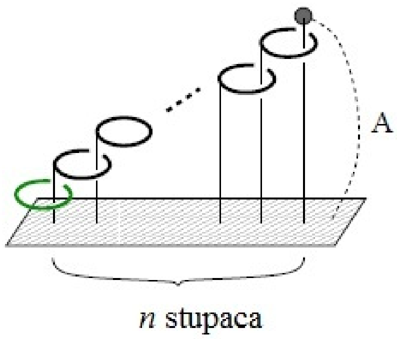


Slika 3.3: Problem: odvojiti slobodan prsten

Problematika u ovom radu je naći najjednostavnije rješenje ove slagalice. Kao što će se uskoro vidjeti, rješenje ovog problema uključuje induktivni argument o broju stupaca. Zbog toga se u obzir uzima općenitija verzija slagalice, slika 3.3, sastavljena od proizvoljnog broja stupaca (sve osim jednog s pričvršćenim prstenom na vrhu).

Precizan odgovor na naš problem zahtijeva objektivnu mjeru složenosti mogućih rješenja slagalice.

Za to, zamislite luk A (nacrtan na slici 3.4 s iscrtkanom linijom) koji spaja najviši stupac i bazu. Složenost rješenja slagalice je minimalan broj puta da elastičan prsten prođe luk A u procesu rješavanja.



Slika 3.4: Zamišljen luk A koji spaja najviši stupac i bazu

Teorem 3.1.1. *Minimalna složenost za rješenje kineskih prstenova s n stupaca prikazanih na slici 3.4 je* 2^{n-1}.

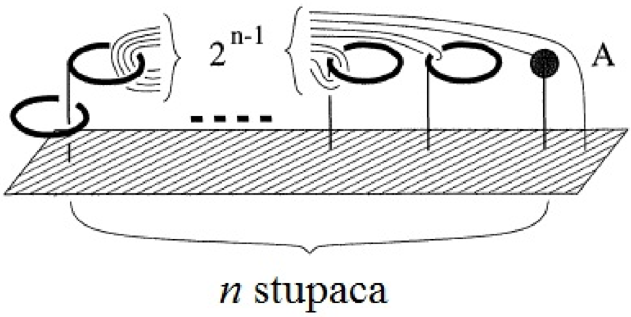
Tu slutnju je postavio L.Kaufman 1992.g. u radu "Tangle complexity and the topology of the Chinese rings, in Mathematical approaches to biomolecular structure and dynamics", u kojem je napisao:

> Ovaj problem u topologiji kineskih prstenova je koristan test za pitanja koja mogu nastati u primjeni teorije uzlova na prirodne strukture gdje uvijek postoji mješavina topologije i mehaničkog/geometrijskog modeliranja.
>
> Rješenje za slutnju će vjerojatno uključivati otkriće nove tehnike za razumijevanje topologije smještavanja grafova u trodimenzionalnom prostoru.
>
> Zabavno je biti u mogućnosti uzeti klasičnu slagalicu kao kineski prstenovi i unutar nje pronaći značajan topološki problem.
>
> Nađimo rješenje!

3.2 Dokaz

Rješenje slagalice prezentirano na početku rada zahtijeva da se prvo odlančaju prstenovi pričvršćeni na stupce.

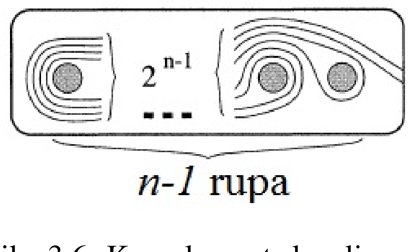
Kao rezultat ove deformirane slagalice, luk A preuzima oblik prikazan na slici 3.5.



Slika 3.5: Prikaz "deformirane" slagalice gdje luk A preuzima novi oblik

Sada se može ukloniti prsten prolaskom kroz 2^{n-1} niti od A, te je složenost ovog algoritma očito najviše 2^{n-1}. Pokazat će se da je ovo najjednostavnije rješenje kineskih prstenova.

Tijelo kineskih prstenova s n stupaca (i isključenim slobodnim prstenom) je tijelo s ručkama H_{n-1} roda $n-1$ smješteno na standardni način u S^3. Njegov komplement H'_{n-1} je također tijelo s ručkama roda $n-1$. Slobodni prsten je kontraktibilan u H'_{n-1} i to je razlog zbog kojeg slagalica ima rješenje. Luk A poprima kompliciranu poziciju u H'_{n-1}, što se može zaključiti iz slike 3.5; vidi sliku 3.6.



Slika 3.6: Komplement slagalice = H'_{n-1}

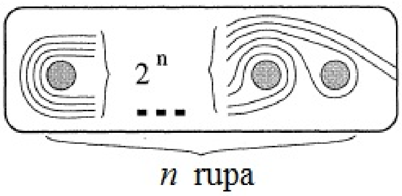
Ako se luk A izbaci iz H'_{n-1}, tada slobodni prsten S^1 više nije kontraktibilan (stezljiv).

Složenost rješenja slagalice je minimalni broj prolaza prstena kroz luk A potrebnih za kontrakciju prstena do točke u $H'_{n-1} \setminus A$. Cilj je pokazati da je taj broj barem 2^{n-1}. Nažalost, položaj prstena S^1 u $H'_{n-1} \setminus A$ je vrlo kompliciran.

Kako bi se izbjegao ovaj problem, koriste se tri trika: Prvo, uzima se dualni pristup: fiksira se prsten S^1 u H'_{n-1} i broji se koliko puta luk A mora proći kroz S^1 kako bi S^1 bio kontraktibilan u $H'_{n-1} \setminus A$.

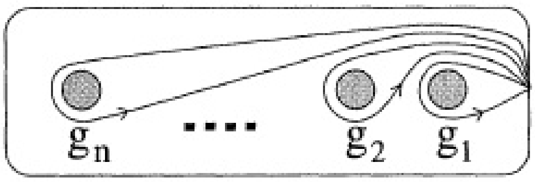
Drugo, malo se oslabe uvjeti slagalice, uz pretpostavku da luk A može biti izmijenjen proizvoljnom homotopijom fiksirajući svoje krajnje točke. Sluti se da su krajnje točke luka A u nekom $x_0 \in H'_{n-1}$. Stoga se smatra da je luk A kao element od $\pi_1\,(H'_{n-1} \setminus S^1, x_0)$. Namjera je da se dokaže da je pod tim oslabljenim uvjetima složenost slagalice barem 2^{n-1}. To će sigurno značiti da je složenost slagalice pod originalnom slutnjom također najmanje 2^{n-1}.

Treće, slagalica se može mijenjati pričvršćivanjem slobodnog prstena na bazu s dodatnim stupcem, i tada se pokuša odlančati luk A u izmijenjenoj slagalici. Ovo se čini kao teži problem, ali zapravo nije. Obratite pažnju da je izmijenjena slagalica homeomorfna na tijelu s ručkama roda n, H_n i da je njegov komplement također homeomorfan s tijelom s ručkama H'_n. Primijetite također da postoji smještenje $i : H'_n \to H'_{n-1} \setminus S^1$ koje odgovara činjenici da se izmijenjena slagalica razlikuje od originalne samo dodatnim stupcem. Prednost ovog trika je da se izmijenjena slagalica puno lakše rješava jer nema nijedan slobodan prsten. Obratite pažnju da luk A leži u H'_n kao što je prikazano na slici 3.7.



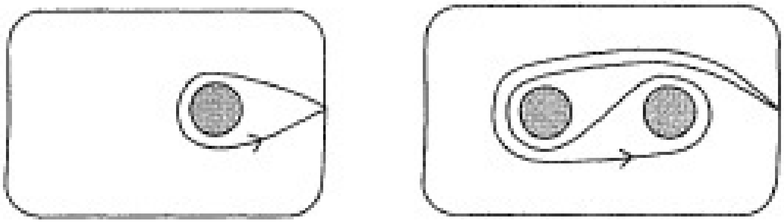
Slika 3.7: Luk A leži u H'_n

Ako se petlje koje obilaze oko rupe u H'_n označe na način prikazan na slici 3.8 po $g_1, g_2, \ldots, g_n$, tada je $F_n = \pi_1(H'_n, x_0)$ slobodna grupa s generatorima $g_1, \ldots, g_n$.



Slika 3.8: Generatori $g_1, \ldots, g_n$ slobodne grupe $F_n = \pi_1(H'_n, x_0)$

Namjera je utvrditi prezentaciju elementa $a_n \in F_n$ prikazujući luk A dan kao na slici 3.8, s, recimo, orijentacijom suprotnom od kazaljke na satu. Prikazi od a_1 i a_2 su kao na slici 3.9.



Slika 3.9: $a_1 = g_1$ i $a_2 = g_2 g_1 g_2^{-1}$

Primijetite da a_{n+1} može biti konstruiran induktivno iz a_n dodavanjem *n+1* rupe i uvijanjem s *n - tom* rupom za 180°; vidi sliku 3.7. Ova operacija odgovara zamjeni svih $g_n^{\pm 1}$ u prikazu od a_n po $g_{n+1} g_n^{\pm 1} g_{n+1}^{-1}$. Stoga je
$a_3 = g_3 g_2 g_3^{-1} g_1 g_3 g_2^{-1} g_3^{-1}, \ a_4 = g_4 g_3 g_4^{-1} g_2 g_4 g_3^{-1} g_4^{-1} g_1 g_4 g_3 g_4^{-1} g_2^{-1} g_4 g_3^{-1} g_4^{-1}$.

Primijetite da je svaki takav prikaz reduciran, odnosno nijedna od riječi a_n nema podriječ u obliku $g_i^{\pm 1} g_i^{\mp 1}$. Doista, to je istina za $n = 1, 2, 3, 4$.

U principu, ako je to istina za neki n, onda to također vrijedi i za $n + 1$: Pretpostavka je da je a_n reduciran. Jedina razlika između a_n i a_{n+1} je ta da je g_n u a_n zamijenjen s $g_{n+1} g_n g_{n+1}^{-1}$. Stoga, a_{n+1} ne može sadržavati $g_i^{\pm 1} g_i^{\mp 1}$ za $i \leq n$. Dakle, ako a_{n+1} nije reduciran, morao bi imati reduciranost u g_{n+1}. To jest, sadržavao bi podriječ sastavljenu od $g_{n+1} g_n^{\pm 1} g_{n+1}^{-1}$ i njezin inverz. Ali to je nemoguće jer bi to značilo da a_n sadrži podriječ $g_n^{\pm 1} g_n^{\mp 1}$.

Obratite pažnju da je broj pojavljivanja od $g_n^{\pm 1}$ u a_n jednak 2^{n-1}. Ovo također može biti dokazano indukcijom: g_1 se pojavljuje jednom u a_1 i g_{n+1} se pojavljuje u a_{n+1} dvostruko više kao g_n u a_n.

Dokazalo se sljedeće:

Propozicija 3.2.1. *Gore induktivno definiran prikaz $a_n \in F_n$ je reduciran i $g_n^{\pm 1}$ se pojavljuje 2^{n-1} puta.*

Cilj je bio brojati minimalan broj puta da prsten S^1 prođe kroz luk A (u originalnoj slagalici) u procesu kontrahiranja do točke. Isto tako, može se izračunati broj puta kada luk A prolazi kroz n - *tu* rupu u H'_n kako bi bio smješten unutar $H'_{n-1} \subset H'_n$ (govori se o izmijenjenoj slagalici). Tvrdnja je da je taj broj barem 2^{n-1}.

Kad god luk A prođe n - *tu* rupu, $xg_n^{\pm 1}x^{-1}$ je umetnut u riječ prikazujući luk A ili je izbrisan iz nje. Intuitivno, budući da se $g_n^{\pm 1}$ pojavljuje 2^{n-1} puta u a_n, ovaj proces se mora ponoviti 2^{n-1} puta.

Kako bi se dokaz završio, potrebna je sljedeća činjenica.

Propozicija 3.2.2. *Ako slova $b_1, b_2, \ldots, b_k \in g_1^{\pm 1}, \ldots, g_{n-1}^{\pm 1}$ tvore reduciranu riječ $b_1 b_2 \ldots b_k$, tada minimalan broj umetanja ili brisanja konjugata od $g_n^{\pm 1}$ u riječ $w = g_n^{\alpha_0} b_1 g_n^{\alpha_1} b_2 \ldots b_k g_n^{\alpha_k} \in F_n$ potrebnih za transformaciju w u element od F_{n-1} je $\sum_{i=0}^{k} |\alpha_i|$.*

Dokaz teorema 3.1.1: Prisjetite se da se a_n može dobiti iz a_{n-1} zamjenom svih $g_{n-1}^{\pm 1}$ koji se pojavljuju u a_{n-1} po $g_n g_{n-1}^{\pm 1} g_n^{-1}$. Dakle, $a_n = g_n^{\alpha_0} b_1 g_n^{\alpha_1} b_2 \ldots b_k g_n^{\alpha_k}$, gdje, po propoziciji 3.2.1, $b_1 b_2 \ldots b_k = a_{n-1}$ je reduciran i $\sum_{i=0}^{k} |\alpha_i| = 2^{n-1}$. Po posljednjoj propoziciji 3.2.2 potrebno je 2^{n-1} umetanja konjugata od $g_n^{\pm 1}$ u riječ prikazujući a_n ili brišući te konjugate iz a_n kako bi eliminirali sva pojavljivanja od g_n. Stoga luk A mora proći barem 2^{n-1} puta kroz n - *tu* rupu u H'_n kako bi bio postavljen unutar $H'_{n-1} \subset H_n$.

Konačna primjedba:

Ustanovila se složenost kineskih prstenova po studiji homotopskih svojstava luka A u tijelu s ručkama i uporabom osnovnih grupa. Može se, međutim, uzeti u obzir sofisticiranija slagalica, čija rješenja zahtijevaju naprednije alate nego homotopska teorija.

Poglavlje 4

Povezane slagalice

4.1 Spinout

Slagalica *Spinout* ("izvrti van"), koju proizvodi *Binary Arts*, sada zvana *Think Fun* ("misli zabavno") je jednostavna slagalica koja se sastoji od dugačke ravne plastike pravokutnog oblika (slika 4.1). Dio bi se mogao jednostavno izvući da nema 7 neobično oblikovanih brojčanika. Ako su svi brojčanici okrenuti vodoravno, mogu kliznuti van, ali brojčanik se jedino može okrenuti ako je jedan njemu desno okrenut vertikalno i svi ostali okrenuti horizontalno. Ova slagalica se sada prodaje kao *Elephant Spinout* (izvrti slonove van), slika 4.1, gdje su brojčanici mali slonići s mehanizmom za restart. Ovo je četvrta slagalica od *Binary Arts*, ali prva uspješna.

Slika 4.1: Spinout i Elephant Spinout

4.2 Slagalica "Mozak" (The Brain)

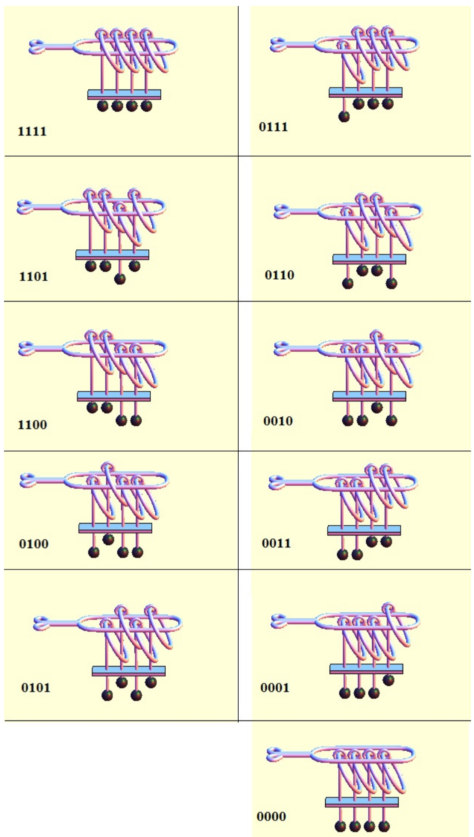
Slagalica *"Mozak"* ("The Brain") (slika 4.2) koju proizvodi *Mag - Nif*, sastoji se od osam jednakih prozirnih diskova koji mogu rotirati oko svojih središta. Diskovi imaju proreze u sebi i sadrže osam uspravnih crnih šipki koje prolaze kroz proreze. Šipke imaju dvije pozicije, unutra ili van. Cilj slagalice je pomaknuti sve šipke van. Šipke su numerirane brojevima od jedan do osam i svaka se može pomaknuti samo ako je šipka s prethodnim (manjim) brojem pozicionirana vani, a šipke s preostalim manjim brojevima su pozicionirane unutra.

Slika 4.2: "Mozak" (The Brain)

Poglavlje 5

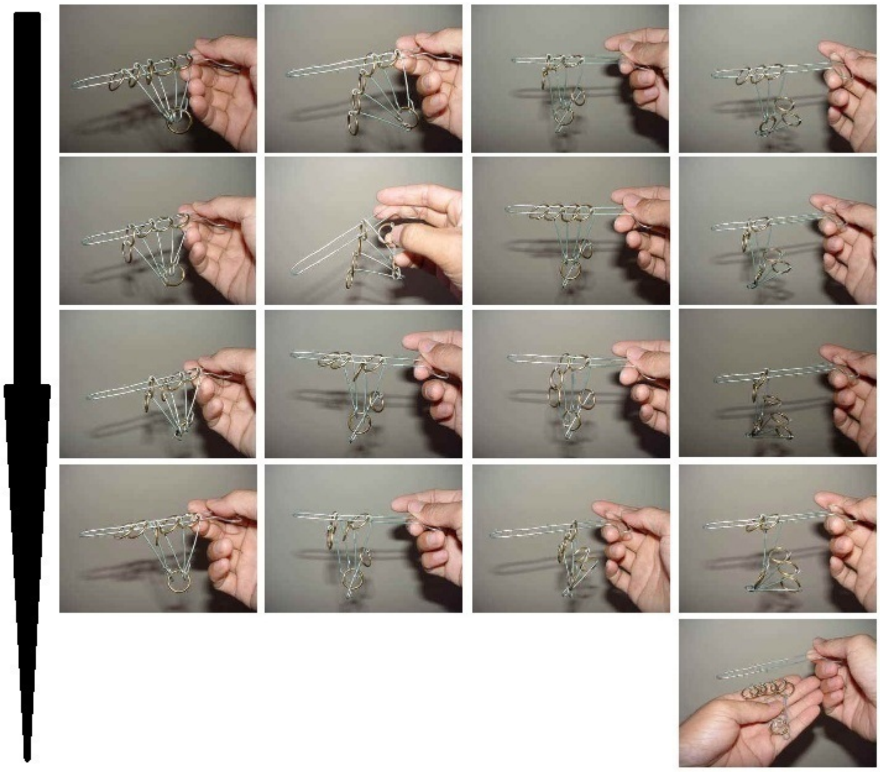
Rješavanje slagalice s 4, 5 i 6 prstenova

5.1 Slagalica s 4 prstenova



5.2 Slagalica s 5 prstenova

11111
1. 11110
2. 11010
3. 11011
4. 11001
5. 11000
6. 01000
7. 01001
8. 01011
9. 01010
10. 01110
11. 01111
12. 01101
13. 01100
14. 01000
15. 01001
16. 01011
17. 01010
18. 00010
19. 00011
20. 00001
21. 00000



5.3 Slagalica sa 6 prstenova

111111

1. 111101
2. 111100
3. 110100
4. 110101
5. 110111
6. 110110
7. 110010
8. 110011
9. 110001
10. 110000
11. 010000
12. 010001
13. 010011
14. 010010
15. 010110
16. 010111
17. 010101
18. 010100
19. 011100
20. 011101
21. 011111
22. 011110
23. 011010
24. 011011
25. 011001
26. 011000
27. 001000
28. 001001
29. 001011
30. 001010
31. 001110
32. 001111
33. 001101
34. 001100
35. 000100
36. 000101
37. 000111
38. 000110
39. 000010
40. 000011
41. 000001
42. 000000

Bibliografija

[1] Robert L.Lamphere, A Recurrence Relation in the Spinout Puzzle, The College Mathematics Journal, Vol. 27, No. 4 (Sep., 1996), pp. 286-289

[2] Jozef H. Przytycki, Adam S. Sikora, Topological Insights from the Chinese Rings, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 130, No. 3 (Mar., 2002), pp.893-902

[3] The Project Gutenberg eBook of Amusements In Mathematics, by Henry Ernest Dudeney,:, http://www.gutenberg.org/files/16713/16713-h/16713-h.htm#X_417_THE_TIRING_IRONS, preuzeto 13.06.2014.

[4] Arsdigita 02 (Discrete Mathematics) Lecture 7/20 - YouTube, https://www.youtube.com/watch?v=uBKb1I70PhA, preuzeto 13.06.2014.

[5] Spinout / The Brain / Chinese Rings puzzle, http://www.jaapsch.net/puzzles/spinout.htm, preuzeto 13.06.2014.

[6] Wolfram Demonstrations Project: The Chinese Rings Puzzle, http://demonstrations.wolfram.com/TheChineseRingsPuzzle/, preuzeto 13.06.2014.

Sažetak

Ovaj diplomski rad je podijeljen u pet poglavlja u kojima se na različite načine opisuje što su Kineski prstenovi te kako se rješavaju.

U prvom poglavlju se promatra slagalica sa sedam prstenova te detaljno opisuje kako se rješava. Na kraju se daje zanimljiv uvid na pitanje kako izgleda slagalica sa 14 prstenova u 9 999. koraku.

U drugom poglavlju se na konkretnom primjeru sa šest prstenova dolazi do rekurzivne formule za broj koraka potrebnih za rješavanje slagalice. Formula se dokazuje indukcijom i ona vrijedi za bilo koji broj prstenova.

U trećem poglavlju se obrađuje topološka interpretacija problema Kineskih prstenova koja je relevantna u teoriji uzlova.

Četvrto poglavlje opisuje dvije slagalice, *Spinout* i *Mozak*, koje imaju sličan princip rješavanja kao Kineski prstenovi.

U zadnjem, petom poglavlju, ilustrirana su rješenja slagalice sa četiri, pet i šest prstenova.

Summary

In this diploma work we elaborate several aspects of the famous Chinese ring puzzle.

This diploma work is divided into five chapters in which we describe the different ways what the Chinese rings are and how the famous Chinese ring puzzle can be solved.

In the first chapter we treat the 7-ring puzzle and describe in details how to solve it. In the end, we give an interesting insight how 14-ring puzzle looks in 9 999-th step.

The second chapter with a concrete example deals with 6-ring puzzle, explains a recursive formula for the number of steps required to solve the puzzle. This recursion is proven by induction and it applies to any number of rings.

In the third chapter, we treat a topological interpretation of the Chinese ring puzzle which is relevant to knot theory, (Kaufman Conjecture on the tangle complexity of knots).

The fourth chapter describes two puzzles, *Spinout* and *The Brain*, which have a similar, as for the Chinese ring puzzle, principle to be resolved.

In the final, fifth chapter, we give illustrated solutions to a 4, 5, and 6-ring puzzle.

Životopis

Rođena sam 21. ožujka 1986. u Zagrebu, gdje sam upisala osnovnu školu. Srednjoškolsko obrazovanje programa matematičke XV. gimnazije završila sam odličnim uspjehom maturirajući na temu "Prvi svjetski rat". 2005.godine sam upisala studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu - Matematičkom odsjeku, Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski sveučilišni studij Matematike, nastavnički smjer, završila sam 2010.godine i stekla akademski naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste godine upisala sam na PMF-Matematičkom odsjeku Diplomski sveučilišni studij Matematike.