Poopćenje klasičnih teorema zatvaranja Ponceletovog tipa

Zubak, Petra

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Petra Zubak

POOPĆENJE KLASIČNIH TEOREMA ZATVARANJA PONCELETOVOG TIPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ___________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. __________________________, predsjednik
2. __________________________, član
3. __________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. __________________________
2. __________________________
3. __________________________

Sadržaj

Uvod

Uočavanje pravilnosti i "kreiranje" sklada oduvijek su ljudske težnje. Dodamo li tim težnjama matematiku, neće biti iznenađujuća činjenica da je upravo Ponceletov teorem o zatvaranju, koji ukazuje na poseban oblik pravilnosti i sklada u međusobnom položaju konika i poligona, jedan od najpoznatijih i najviše proučavanih rezultata u projektivnoj geometriji.

U pojednostavljenoj formulaciji, ovaj teorem kaže da ako za dvije konike postoji poligon koji je upisan jednoj, a opisan drugoj konici, onda postoji beskonačno mnogo takvih poligona, po jedan za svaki izbor početnog vrha na prvoj konici. Riječ je o jednom od rezultata objavljenih u knjizi *Traité des propriétés projectives des figures* 1822. godine, a Jean-Victor Poncelet (1788.-1867.) dokazao ga je 1813. godine.

Promatrano svojstvo poligona koji su upisani jednoj, a opisani drugoj konici dolazi kao poopćenje proučavanja bicentričnih poligona, dakle poligona koji su upisani jednoj i opisani drugoj kružnici. Eulerovim teoremom iz 1767. riješeno je to pitanje za trokut, a Fuss je 1792. izveo odgovarajući rezultat za četverokute koji su tetivni i ujedno tangencijalni. No, uvjeti za postojanje bicentričnih n-terokuta općenito vode do eliptičkih integrala i eliptičkih funkcija.

Mnogi glasoviti matematičari, među njima npr. Jacobi, Cayley i Lebesgue, bavili su se različitim aspektima pristupa i dokazivanja Ponceletovog i njemu sličnih rezultata. Ustanovljene su duboke i katkad neočekivane veze s drugim područjima matematike, poput teorije brojeva i dinamičkih sustava.

I u novije vrijeme pojavljuju se brojni radovi s rezultatima iz ove tematike. Primjerice, Halbeisen i Hungerbühler ([2], 2015.) izvode elementarni dokaz Ponceletovog teorema složenim kombinatoričkim razmatranjem na temelju klasičnog Pascal-Brianchonovog teorema iz projektivne geometrije. Također, ima dosta radova u kojima se proučava veza Ponceletovog teorema s nekim teoremima "zatvaranja" sličnog tipa.

U ovom radu prvenstveno slijedimo pristup V. Ju. Protasova ([6], 2011.) u kojem se formulira poopćeni teorem zatvaranja za sfere u d-dimenzionalnom euklidskom prostoru. Taj pak teorem posebno implicira Ponceletov teorem za kružnice i još tri njemu srodna istaknuta rezultata: Steinerov teorem, "Zigzag" teorem i Emchov teorem. Također, pokazat ćemo kako iz njega slijede i njihova poopćenja u višim dimenzijama. Pritom se teorem čiju je osnovnu verziju Emch objavio 1901. godine može protumačiti kao najopćenitiji u ovoj skupini teorema.

U završnom dijelu rada izlaže se elementarni dokaz i jedno poopćenje Emchovog teorema.

Poglavlje 1

Četiri klasična teorema zatvaranja

Rad ćemo započeti iskazom četiri teorema Ponceletovog tipa. Definirat ćemo opće svojstvo zatvaranja za kružnice koje ćemo koristiti prilikom generalizacije tih teorema na euklidski prostor $\mathbb{R}^d$. Definirat ćemo i pojmove poput singularne točke za familiju kružnica, indeksa tangencijalnosti te ostale pojmove potrebne za iskaze spomenutih teorema.

Elemente prostora $\mathbb{R}^d$ nazivat ćemo točkama, no ujedno ćemo na njih primjenjivati operacije kao s vektorima, uz iste oznake. Tako će npr. (x, y) označavati standardni skalarni produkt za $x, y \in \mathbb{R}^d$ u tom unitarnom prostoru. Međutim, u nekim iskazima služit ćemo se uobičajenim oznakama poput A, B, C, D za točke euklidskog prostora, ako je tako jednostavnije i ako se ne izvode operacije s vektorima.

Definicija 1.1. (Singularna točka za familiju kružnica).*Neka su u ravnini $\mathbb{R}^2$ dane kružnica k i familija kružnica $\mathcal{F}$. Pritom pravce i točke također smatramo kružnicama, kao granične slučajeve. Za točku z kažemo da je* ***singularna za familiju*** *$\mathcal{F}$ ako više od dvije kružnice iz $\mathcal{F}$ prolaze točkom z.*

Pretpostavimo da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(a) kružnica k ne sadrži singularne točke za familiju kružnica $\mathcal{F}$;
(b) kružnica $k \notin \mathcal{F}$.

Formirajmo niz kružnica (v_n) na sljedeći način. Uzmimo proizvoljnu točku $D_1 \in k$ i kroz nju nacrtajmo kružnicu $v_1 \in \mathcal{F}$. Pritom pretpostavljamo da takva kružnica postoji, a ukoliko su dvije, uzimamo bilo koju od njih. Nadalje, sa D_2 označimo drugu točku presjeka v_1 i k. U slučaju tangencijalnosti stavimo da je $D_2 = D_1$.

Nacrtajmo dalje kroz točku D_2 kružnicu $v_2 \in \mathcal{F}$ različitu od v_1. Ako takva kružnica ne postoji, stavimo da je $v_2 = v_1$. Zatim sa D_3 označimo drugu točku presjeka kružnica v_2 i k

te nastavimo postupak. Na ovaj način stvaramo željeni niz kružnica.

Kažemo da niz nastao ovim postupkom ima period n ako vrijedi da je $v_{n+1} = v_1$ odnosno da je $D_{n+1} = D_1$.

Definicija 1.2. (Svojstvo zatvaranja za familiju kružnica). *Kaže se da familija kružnica $\mathcal{F}$ posjeduje svojstvo zatvaranja na kružnici k ako uz uvjete (a) i (b) vrijedi sljedeće: ako za neku početnu točku D_1 postupak ima period $n \geq 3$ i sve točke $D_1, ..., D_n$ su međusobno različite, tada taj postupak ima jednaki period za bilo koji izbor početne točke $D_1 \in k$ koja pripada nekoj kružnici iz $\mathcal{F}$.*

Nakon prethodnih definicija u mogućnosti smo izreći četiri klasična teorema. U ovom radu se neće izravno dokazivati svaki pojedini od tih teorema, no pokazat ćemo kako oni i njihova poopćenja u višim dimenzijama kao korolari slijede iz poopćenog teorema zatvaranja za sfere u $\mathbb{R}^d$.

Teorem 1.3. (Poncelet). *Za bilo koju koniku C i kružnicu k u ravnini, skup pravaca koji dodiruju C posjeduje svojstvo zatvaranja na k.*

Pritom konikom nazivamo krivulju drugog reda, dakle posebni slučaj kvadrike u $\mathbb{R}^d$ kada je $d = 2$. Kvadriku u prostoru $\mathbb{R}^d$ definiramo kao skup točaka $x \in \mathbb{R}^d$ takvih da je

$$(x, Ax) + (b, x) + c = 0,$$

gdje je A simetrični operator, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$.
Tijekom ovog rada podrazumijevat ćemo samo realne neprazne kvadrike.

Ako je konika u Teoremu 1.3 degenerirana (par pravaca, pravac, točka) onda u slučaju pravca i para pravaca zamjenjujemo tangente paralelnim pravcima, a u slučaju točke pravcem koji prolazi kroz tu točku.

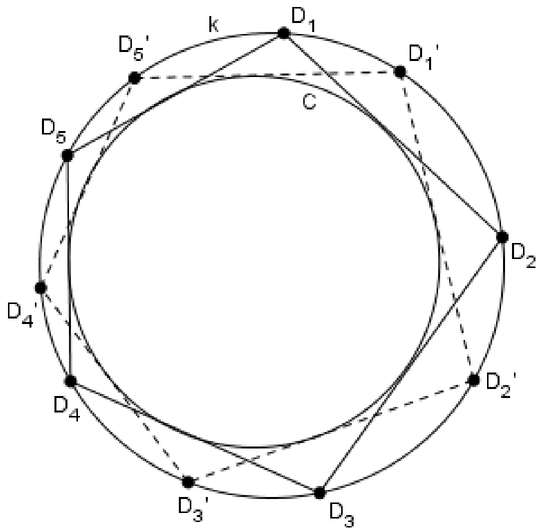
Ponceletov teorem obično se iskazuje za dvije konike C i k, a uvijek možemo pretpostaviti da je jedna od njih kružnica. Naime, ako je konika k nedegenerirana onda je možemo preslikati u kružnicu prikladnom stereografskom projekcijom. Na taj način Ponceletov teorem za dvije konike poprima oblik Teorema 1.3. Ako je k degenerirana, onda je Ponceletov teorem trivijalan i lako se dokaže.

Kako bismo vizualizirali Ponceletov teorem, razmotrimo slučaj kada su C i k obje kružnice, takve da C leži unutar k.

Kroz odabranu točku $D_1 \in k$ nacrtamo tangentu na C. Drugu točku presjeka te tangente sa kružnicom k označimo sa D_2. Osim konstruirane tangente D_1D_2 postoji još jedna tangenta D_2D_3 na kružnicu C koja prolazi točkom D_2. Pritom je D_3 točka presjeka te tangente sa kružnicom k. Uzmemo li novu točku D_4 na kružnici k dobit ćemo još jednu tangentu D_3D_4 koja se ne podudara sa prethodnom itd.

Ako se ovaj postupak završi nakon n koraka, primjerice ako dobijemo $D_{n+1} = D_1$ (slika 1.1), Ponceletov teorem kaže da će se tada završiti u istom broju koraka n za bilo koji izbor početne točke D_1.

Također, ako postoji jedan poligon sa n vrhova upisan kružnici k i opisan kružnici C, onda postoji beskonačno mnogo takvih poligona. Štoviše, bilo koja točka kružnice k je je vrh jednog od tih upisanih/opisanih poligona.



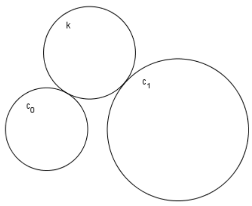
Slika 1.1: Ponceletov teorem

Kako bismo iskazali sljedeći klasični teorem u njegovoj najopćenitijoj formi prethodno je potrebno definirati neke nove pojmove.

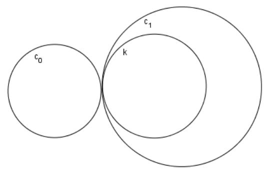
Definicija 1.4. (Unutrašnji dodir).*Dodir dviju kružnica zovemo* ***unutrašnjim*** *ako jedna od tih kružnica leži unutar druge.*

U skladu s iskazanom definicijom govorit ćemo i o unutrašnjem diralištu.

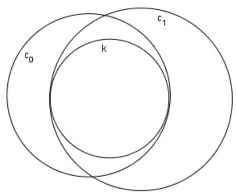
Definicija 1.5. (Indeks tangencijalnosti).*Pretpostavimo da su c_0 i c_1 kružnice u ravnini. Za proizvoljnu kružnicu k koja dira obje kružnice c_0 i c_1* ***indeks tangencijalnosti*** *jednak je 0 ako je ukupni broj unutrašnjih dodira k sa c_0 i c_1 paran. Ako je taj broj neparan onda je indeks tangencijalnosti jednak 1.*



(a) 0 unutrašnjih dodira



(b) 1 unutrašnji dodir



(c) 2 unutrašnja dodira

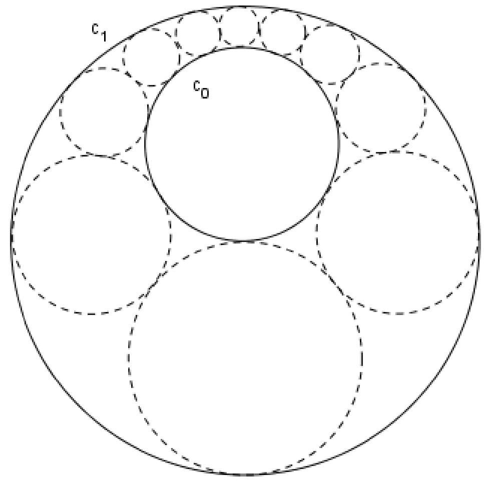
Slika 1.2: Prikaz definicije 1.5 u tri slučaja

U slučaju kada neka od kružnica c_0, c_1 pređe u pravac indeks tangencijalnosti ovisi o orijentaciji pravca, a proizlazi iz orijentacije niza kružnica (pozitivne ili negativne) od kojeg pravac nastaje graničnim procesom.

Za danu vrijednost $i = 0, 1$, označimo s $\mathcal{F}_i$ familiju kružnica koje dodiruju kružnice c_0 i c_1 s indeksom i. Ako je neka od kružnica c_0, c_1 točka, tada vrijedi $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1$. Istu notaciju koristit ćemo kasnije i za familije sfera u $\mathbb{R}^3$ koje dodiruju dvije zadane sfere, no prije toga definirajmo *Steinerov postupak*.

Definicija 1.6. (Steinerov postupak). *Neka su u ravnini dane dvije kružnice c_0 i c_1 tako da je c_0 unutar c_1. Neka familija $\mathcal{F}_1$ sadrži sve kružnice upisane u kružni prsten omeđen kružnicama c_0 i c_1. Kažemo da je niz kružnica $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_1$ dobiven* ***Steinerovim postupkom*** *ako je $v_1 \in \mathcal{F}_1$ proizvoljna, $v_2 \in \mathcal{F}_1$ dodiruje v_1, a za $k \geq 2$ kružnica v_{k+1} dodiruje v_k, a različita je od v_{k-1}. Kažemo da postupak ima period $n \geq 3$ ako je $v_{n+1} = v_1$.*

Teorem 1.7. (Steiner).*Ako je Steinerov postupak periodički za neku početnu kružnicu v_1, onda ima isti period za bilo koju kružnicu $v_1 \in \mathcal{F}_1$.*



Slika 1.3: Steinerov teorem

Dakle, ako postoji zatvoreni lanac od n kružnica koje se međusobno dodiruju i upisane su u kružni prsten omeđen kružnicama c_0 i c_1 (slika 1.3), tada postoji beskonačno mnogo takvih lanaca. Bilo koja kružnica upisana u taj prsten može biti prva u lancu.

Za razliku od ostalih teorema zatvaranja Teorem 1.7 ima nekoliko elementarnih dokaza. Najpoznatiji je dokaz gdje se dvije kružnice c_0 i c_1 pomoću inverzije preslikaju u koncentrične kružnice, a za takve je tvrdnja trivijalna.
Ipak, niti jedan od elementarnih dokaza ovoga teorema ne može biti proširen na druge tipove Ponceletovih teorema.

Sljedeći klasični teorem je Zigzag teorem koji također govori o dvije kružnice, no ovaj put one mogu imati proizvoljan položaj u prostoru. Kako bismo ga iskazali, pretpostavimo da je dan $\rho > 0$ i dvije kružnice s i k u prostoru $\mathbb{R}^3$. Nadalje, pretpostavimo da kružnice s i k zadovoljavaju sljedeći uvjet:

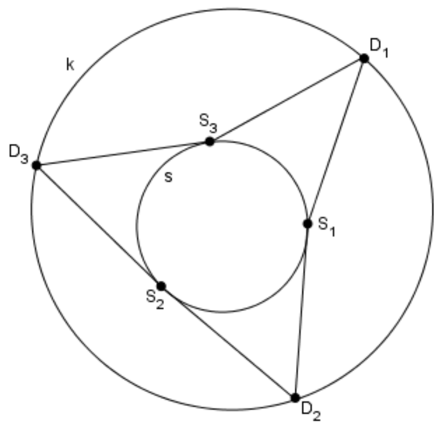
(c) Ortogonalna projekcija bilo koje od kružnica na dvodimenzionalnu ravninu koja sadrži drugu kružnicu ne prolazi središtem druge kružnice.

Dakle, okomica na ravninu u kojoj se nalazi jedna od kružnica, podignuta iz središta te kružnice, neće se sjeći sa drugom kružnicom. Posebno, ako su kružnice u istoj ravnini, to znači da niti jedna ne prolazi središtem druge kružnice.

Neka je $D_1 \in k$ proizvoljna točka. Neka je S_1 jedna od točaka presjeka sfere radijusa $\rho > 0$ i središtem u D_1 sa kružnicom s. Nadalje, neka je $D_2 \in k$ takva da vrijedi $D_2S_1 = \rho$ i $D_2 \neq D_1$. Ako takva točka ne postoji stavimo $D_2 = D_1$. Također, neka je točka $S_2 \in s$ takva da je $S_2D_2 = \rho$ i $S_2 \neq S_1$. Ako takva točka ne postoji, neka je $S_1 = S_2$. Na taj način dobit ćemo niz točaka, a ovako opisani postupak se naziva *Zigzag postupak*.

Zigzag postupkom kreirali smo nizove $\{D_k\}$ i $\{S_k\}$ s periodom $D_{n+1} = D_1$ za dani početni segment D_1S_1 duljine ρ.

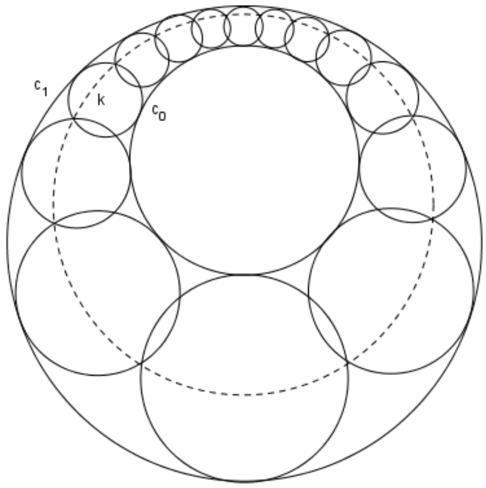
Teorem 1.8. (Zigzag).*Ako Zigzag postupak ima period $n \geq 3$ za neku početnu točku $D_1 \in k$ i sve točke $D_1, ..., D_{n+1}$ su međusobno različite, tada postupak ima isti period neovisno o izboru početne točke $D_1 \in k$.*



Slika 1.4: Zigzag teorem

Na slici 1.4 prikazan je Zigzag postupak koji se često slikovito interpretira pomoću "skokova buhe" s jedne kružnice na drugu sa istom duljinom skoka ρ. Ako nakon $2n$ skokova buha stigne u početnu točku D_1 onda će se isto to dogoditi neovisno o izboru početne točke na kružnici k.

Dakle, ako postoji poligon sa $2n$ vrhova takav da su mu sve stranice jednake duljine ρ i takav da mu parni vrhovi leže na kružnici k, a neparni na kružnici s, onda postoji beskonačno mnogo takvih poligona.



Slika 1.5: Emchov teorem

Preostalo je iskazati još četvrti teorem zatvaranja, Emchov teorem. Ovaj teorem smatramo najjačim među teoremima zatvaranja budući da prethodna tri slijede iz njega, što ćemo kasnije i pokazati.

Teorem 1.9. (Emch).*Neka su u ravnini dane kružnice c_0, c_1 i k, pri čemu svaka od njih može biti točka. Tada za bilo koju vrijednost $i \in \{0, 1\}$ familija kružnica $\mathcal{F}_i$ u odnosu na kružnice c_0 i c_1 zadovoljava svojstvo zatvaranja na kružnici k, uz pretpostavku da $k \notin \mathcal{F}_i$.*

Na slici 1.5 nalazi se prikaz teorema za familiju kružnica $\mathcal{F}_1$ kada kružnica k leži između kružnica c_0 i c_1. Teorem kaže da ako postoji zatvoren lanac od n kružnica upisanih u prsten koji čine c_0 i c_1 takav da se svaki par susjednih kružnica siječe na k, tada postoji beskonačno mnogo takvih lanaca. Štoviše, bilo koja kružnica upisana u prsten može biti prva u lancu.

Poglavlje 2

Kružnice u ravnini i sfere u prostoru $\mathbb{R}^3$

U ovom poglavlju prisjetit ćemo se pojmova i tvrdnji iz elementarne geometrije vezanih uz kružnice i sfere, a koje ćemo koristiti tijekom sljedećih poglavlja.

2.1 Potencija točke s obzirom na kružnicu. Potencijala

Neka je u ravnini zadana kružnica $k(z, r)$ sa središtem u točki z i polumjerom r. *Potencija točke x s obzirom na kružnicu k* definira se kao realan broj $p(x) = |x - z|^2 - r^2$.

Očito je $p(x) = 0$ ako i samo ako točka x pripada kružnici k, $p(x) > 0$ vrijedi za točke izvan kružnice k, a $p(x) < 0$ za točke unutar kružnice k.

Pokazuje se da je potencija $p(x)$ jednaka skalarnom umnošku $(x - q_1, x - q_2)$, pri čemu su q_1 i q_2 sjecišta bilo kojeg pravca točkom x sa kružnicom k (ako takva sjecišta postoje, što je za unutarnju točku kružnice uvijek ispunjeno, ali za vanjsku nije).

Posebno, $p(x) = |x - d|^2$ za dirалište d tangente na kružnicu kroz (vanjsku) točku x.

Od interesa je skup svih točaka ravnine koje imaju jednaku potenciju s obzirom na dvije zadane kružnice $k_0(z_0, r_0)$ i $k_1(z_1, r_1)$ koje nisu koncentrične ($z_0 \neq z_1$).

Iz uvjeta $|x - z_0|^2 - r_0^2 = |x - z_1|^2 - r_1^2$ može se pokazati da je skup svih točaka x pravac koji je okomit na spojnicu središta c_0 i c_1 (tzv. centralu kružnica k_0 i k_1). Taj pravac naziva se *potencijalom kružnica k_0 i k_1* ili *radikalnom osi* tih kružnica. Točka na potencijali očito ispunjava svojstvo da su odsječci do dirališta tangenti iz te točke na dvije kružnice jednaki (u slučaju da te tangente postoje). Iz toga se pokazuje da je svaka točka potencijale središte jedne kružnice koja siječe obje kružnice k_0 i k_1 ortogonalno.

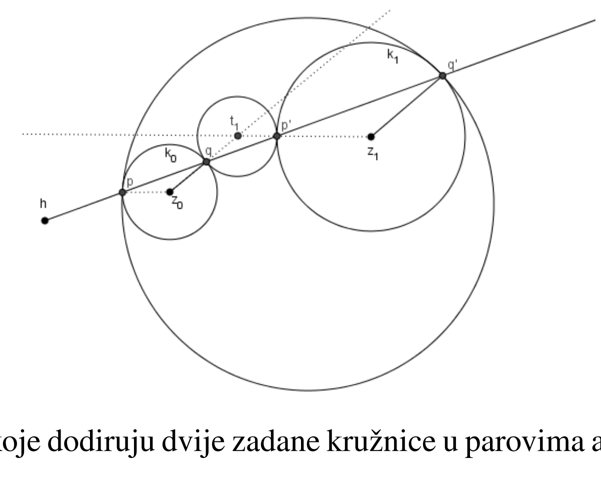
Pritom uobičajeno vrijedi da su dvije kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.

Tri radikalne osi pridružene po dvjema od tri kružnice sijeku se u jednoj točki, tzv. *potencijalnom središtu* ili *radikalnom centru* koji ima svojstvo da su potencije iz te točke s obzirom na sve tri kružnice jednake.

2.2 Homotetične kružnice. Homologne i antihomologne točke

Neka su $k_0(z_0, r_0)$ i $k_1(z_1, r_1)$ dvije kružnice u ravnini koje nisu koncentrične, odnosno $z_0 \neq z_1$ i čiji su polumjeri različiti, $r_0 \neq r_1$. Tada postoje dvije homotetije koje preslikavaju k_0 u k_1 (ili obratno). Centar jedne homotetije je vanjski, to jest vanjska točka segmenta $\overline{z_0 z_1}$, a centar druge homotetije je unutarnja točka segmenta $\overline{z_0 z_1}$. Vanjski centar točka je sjecišta zajedničkih vanjskih tangenti obje kružnice.

Neka su zadane k_0 i k_1 takve kružnice da je kružnica k_1 slika kružnice k_0 pri homotetiji sa (vanjskim) centrom u točki h_1 i koeficijentom c. Neka je uzet polupravac iz centra homotetije tako da siječe te kružnice u četiri točke. Kažemo da su dvije od tih točaka *homologne* ako radijusi kružnica povučeni u tim točkama tvore jednake kutove sa zrakom koja spaja središta tih kružnica, a kažemo da su dvije točke *antihomologne* ako su kolinearne sa centrom homotetije h_1 i nisu homologne. Na slici 2.1 prikazane točke q i q' su homologne, dok su točke q i p' antihomologne.



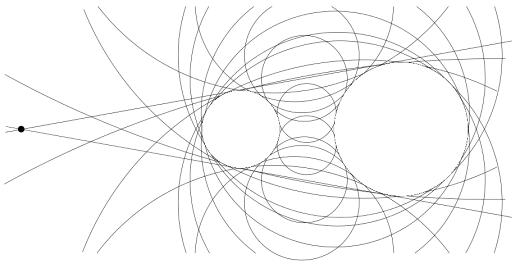
Slika 2.1: Kružnice koje dodiruju dvije zadane kružnice u parovima antihomolognih točaka

Za svaki par antihomolognih točaka tako odabranih kružnica postoji treća kružnica koja dodiruje dane kružnice u antihomolognim točkama. Dodatno, vrijedi i obratna tvrdnja, odnosno svaka kružnica koja dodiruje dvije homotetijom zadane kružnice, dodiruje ih u antihomolognim točkama.

Dakle, vrijedi da za svaki $i = 0, 1$ pravac koji spaja točke dodira bilo koje kružnice sa k_0 i k_1, prolazi kroz h_i, gdje je h_0 centar jedne homotetije (unutarnji), a h_1 centar druge homotetije (vanjski). Pokažimo ovu tvrdnju.

Pretpostavimo da su k_0 i k_1 kružnice sa središtima z_0 i z_1 i neka je h_1 vanjski centar homotetije kako je prikazano na slici 2.1. Neka zraka iz h_1 siječe kružnice u točkama q, p, q' i p'. Označimo sa t_1 sjecište zraka z_0q i z_1p'. Iz homotetije slijedi da su trokuti z_0pq i $z_1p'q'$ slični. Nadalje, budući da je $z_0p = z_0q$ (polumjeri), ti trokuti su jednakokračni. Također $\angle z_0pq = \angle z_0qp = \angle z_1p'q' = \angle z_1q'p' = \angle t_1qp' = \angle t_1p'q$. Dakle, trokut t_1pq je također jednakokračan i postoji kružnica sa središtem t_1 i polumjerom $t_1p' = t_1q$. Ova kružnica dodiruje dvije dane kružnice u točkama q i p'. Sličnim zaključivanjem dobili bismo tvrdnju i za unutarnji centar homotetije.

Kada bismo na ovaj način za svaki par antihomolognih točaka konstruirali kružnicu koja dodiruje dane kružnice, dobili bismo dvije familije kružnica, po jednu za svaki centar homotetije. Na slici 2.2 je prikazana familija kružnica za vanjski centar homotetije. Kružnice iz familije pridružene vanjskom centru homotetije diraju kružnice k_0 i k_1 ili obje izvana ili obje iznutra, dok kružnice iz druge familije imaju točno jedan vanjski i jedan unutarnji dodir.



Slika 2.2: Familija kružnica s obzirom na vanjski centar homotetije

Nadalje, centar homotetije h_i ima jednaku potenciju u odnosu na sve kružnice iz svake od tih familija. Pokažimo da vrijedi ta tvrdnja.

Neka su, kako je prikazano na slici 2.3, dane dvije zrake iz centra homotetije koja preslikava kružnicu k_0 u k_1.

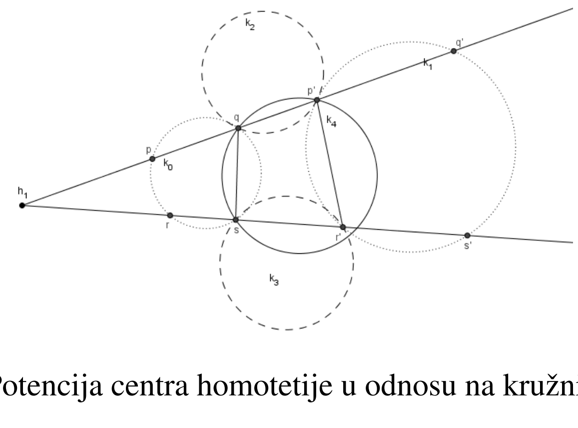
Kako smo prethodno pokazali, tada postoje kružnice k_2 i k_3 koje ih dodiruju u antihomolognim točkama p', q, r' i s, respektivno.

Promotrimo trokute h_1qs i $h_1q's'$. Ti trokuti su slični jer je $\angle qh_1s = \angle q'h_1s'$ i jer je h_1 centar homotetije, pa vrijedi $\frac{h_1q}{h_1q'} = \frac{h_1s}{h_1s'}$. Iz te sličnosti slijedi da je $\angle h_1sq = \angle h_1s'q'$. Po svojstvu tetivnog četverokuta vrijedi $\angle h_1p'r' = \angle h_1s'q'$ te jer je suplementan kutu $\angle h_1sq$, vrijedi da je kut $\angle qsr' = 180° - \angle h_1sq$.
Iz četverokuta $qsr'p'$ slijedi $\angle qsr' + \angle qp'r' = 180° - \angle h_1sq + \angle h_1p'r' = 180°$, odnosno tome četverokutu može se opisati neka kružnica k_4, pa tada slijedi $|h_1q||h_1p'| = |h_1s||h_1r'|$.

Dakle, parovi antihomolognih točaka leže na kružnici k_4. Analogno se ova tvrdnja pokaže za unutrašnji centar homotetije.

Dakle, zadane zrake homotetije će biti radikalne osi za parove kružnica k_2 i k_4 te k_3 i k_4. Tada točka presjeka dviju radikalnih osi također pripada radikalnoj osi za kružnice k_2 i k_3 i ta točka je upravo centar homotetije h_1.

U posebnom slučaju, ako kružnice k_2 i k_3 dodiruju kružnice k_0 i k_1 u kolinearnim parovima antihomolognih točaka, tada zbog homotetije vrijedi $\frac{|h_1p|}{|h_1p'|} = \frac{|h_1q|}{|h_1q'|}$, to jest $|h_1p||h_1q'| = |h_1q||h_1p'|$, pa vrijedi tvrdnja.



Slika 2.3: Potencija centra homotetije u odnosu na kružnice familije

2.3 Inverzija s obzirom na kružnicu. Inverzija s obzirom na sferu

Neka je $k(z, r)$ kružnica u ravnini $\mathbb{R}^2$ sa centrom z i polumjerom r. *Inverzija* s obzirom na kružnicu k je preslikavanje σ skupa točaka ravnine zadano tako da za svaku točku $x \neq z$ i njezinu sliku $\sigma(x) = x'$ vrijedi:

(1) točke z, x i x' su kolinearne,

(2) $(x - z, x' - z) = r^2$.

Pritom se ne definira slika središta z kružnice k.

Točka z naziva se *centrom inverzije*, a r^2 *konstantom inverzije*.

Uočimo da se točke x i x' nalaze na istoj zraci iz točke z, to jest da su vektori $x - z$ i $x' - z$ jednake orijentacije.

Navodimo nekoliko osnovnih svojstava inverzije:

(a) Inverzija je involutorno preslikavanje, to jest $\sigma^2(x) = x$, za svaku točku $x \neq z$;

(b) Svaka točka kružnice k preslikava se inverzijom sama u sebe;

(c) Pravac koji prolazi točkom z preslika se sam u sebe (s iznimkom same točke z);

(d) Kružnica koja ne prolazi centrom z preslika se također u neku kružnicu koja ne prolazi centrom;

(e) Kružnica koja prolazi centrom z preslika se u pravac koji ne prolazi točkom z. Obrnuto, pravac koji ne prolazi centrom z preslika se u kružnicu koja prolazi centrom inverzije;

(f) Dvije kružnice koje se uzajamno preslikavaju inverzijom homotetične su s obzirom na centar inverzije kao centar homotetije;

(g) Svaka kružnica koja je ortogonalna na kružnicu k preslika se inverzijom sama u sebe.

Uočimo još sljedeće: središte z inverzije, kao granični slučaj koncentričnih kružnica sa centrom z čiji polumjer teži u nulu, preslika se u beskonačno daleki pravac, kao granični slučaj kružnica sa centrom z čiji polumjer neograničeno raste, to jest teži u beskonačno.

Analogno možemo definirati inverziju u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$, s obzirom na sferu $S(z, r)$.

Svojstva inverzije u ravnini na očiti se način prenose na inverziju prostora. Uloge kružnica preuzimaju sfere, a uloge pravaca preuzimaju ravnine.
Primjerice, dvije sfere koje se uzajamno preslikavaju inverzijom homotetične su s obzirom na centar z kao centar homotetije.

Na kraju, središte z inverzije, kao granični slučaj sfere čiji polumjer teži u nulu, preslika se inverzijom u beskonačno daleku ravninu, kao granični slučaj sfere čiji polumjer teži u beskonačno.

2.4 Potencija točke s obzirom na sferu. Familije zajedničkih tangencijalnih sfera za dvije zadane sfere

Za točke u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ možemo definirati potenciju s obzirom na bilo koju sferu $S(z, r)$ analogno kao u ravnini s obzirom na kružnicu.

Ako je točka x vanjska za tu sferu, sve tangente na sferu pripadaju konusu s vrhom u x, a dirališta pripadaju jednoj kružnici na sferi S koja se nalazi u ravnini okomitoj na segment $\overline{xz}$. Duljina segmenta od točke x do bilo kojeg dirališta je konstantna.

Za unutarnje točke sfere lako se vidi da je $|x - z|^2 - r^2$ konstantna (negativni realni broj). Stoga definiramo $p(x) = |x - z|^2 - r^2$ kao *potenciju bilo koje točke x s obzirom na zadanu sferu*.

Nadalje, pokazuje se da je, kao i u ravnini, skalarni umnožak $(x - q_1, x - q_2)$ jednak $p(x)$ za probodišta q_1 i q_2 sfere s bilo kojim pravcem kroz x koji probada sferu.
Naime, ako su l_1,l_2 i l_3 tri različita pravca kroz x koji probadaju sferu S, onda usporedbom vrijednosti spomenutih skalarnih umnožaka u ravnini određenoj pravcima l_1 i l_2, odnosno ravnini određenoj pravcima l_1 i l_3 vidimo da su sva tri umnoška jednaka (iako svih šest probodišta ne moraju pripadati jednoj kružnici).

Analogno potencijali dviju kružnica u ravnini, za dvije nekoncentrične sfere postoji potencijala, ali ovdje je to ravnina, s obzirom na dvije sfere. Račun koji to pokazuje posve je sličan onome za kružnice u ravnini.
Također, vrijede svojstva u vezi s homotetijom sfera kao i za kružnice. Vanjski centar homotetije vrh je konusa u kojeg su upisane obje sfere, pa se vrh konusa nalazi na centrali tih sfera.

Svaka točka potencijale dviju sfera S_0 i S_1 središte je jedne sfere Q koja obje S_0 i S_1 siječe ortogonalno. Pritom pod pojmom ortogonalnost sfera uobičajeno podrazumijevamo da su tangencijalne ravnine dviju sfera u njihovoj zajedničkoj točki međusobno ortogonalne. Dakle, sfere su ortogonalne ukoliko dva radijusa sfera s početkom u njihovoj zajedničkoj točki tvore pravi kut.

Ako promotrimo slučaj kada je sfera Q ravnina, tada je neka sfera ortogonalna ravnini Q ako i samo ako se njeno središte nalazi na ravnini Q. U slučaju kada je Q točka onda je neka sfera ortogonalna točki Q ako i samo ako prolazi točkom Q.

Nadalje, za svake dvije homotetične sfere S_0 i S_1 (dakle, različitih radijusa i centara) postoje familije sfera koje ih obje diraju, analogno situaciji objašnjenoj za homotetične kružnice u ravnini. Postavimo li bilo koju ravninu kroz centralu sfera S_0 i S_1, ona će sjeći te sfere u glavnim kružnicama k_0 i k_1 (tj. kružnicama sa središtima i radijusima jednakim onima za odgovarajuće sfere). Prema svojstvu dokazanom za kružnice, postoje kružnice koje diraju k_0 i k_1 u antihomolognim parovima točaka. Središte z svake takve kružnice k radijusa r ujedno je središte sfere $S(z,r)$ koja dira i S_0 i S_1.

Preostaje pokazati da npr. vanjski centar homotetije h ima jednaku potenciju s obzirom na sve sfere iz jedne od upravo opisanih familija.

Neka su S_2 i S_3 sfere iz iste familije, sa centrima z_2, odnosno z_3. Centrala sfera S_0 i S_1 zajedno s točkom z_2 određuje jednu ravninu (α), a s točkom z_3 drugu ravninu (β). Presjeci sfera S_0, S_1 i S_2, odnosno S_0, S_1 i S_3 ravninama α, odnosno β daju nam ravninske figure s kružnicama k_2 i k_3 kakve su prije opisane.

Neka u ravnini α točke p_2 i q_2 čine antihomologni par u kojem k_2 dodiruje presječne kružnice na S_0 i S_1, a u ravnini β neka su odgovarajuće točke p_3 i q_3. Treba pokazati da vrijedi $(p_2 - h, q_2 - h) = (p_3 - h, q_3 - h)$.

No, ako rotiramo ravninu β oko centrale z_0z_1 tako da se poklopi s ravninom α, zraka točkom h na kojoj leže p_3 i q_3 poklopit će se sa zrakom u ravnini α na kojoj se nalazi antihomologni par točaka na istim kružnicama na kojima se nalaze p_2 i q_2. Time u ravnini α dobivamo poznatu figuru (kao na slici 2.3) te vrijedi $(p_2 - h, q_2 - h) = (p_3 - h, q_3 - h)$. Na desnoj strani zapravo je najprije umnožak za rotirane točke, no on se rotacijom nije promijenio pa je jednak $(p_3 - h, q_3 - h)$. Na taj način smo dobili traženu jednakost.

Poglavlje 3

Opći princip zatvaranja

U ovom poglavlju izvest ćemo osnovni teorem formuliran u prostoru $\mathbb{R}^d$ koji ne implicira samo ranije iskazane klasične teoreme nego i njihove višedimenzionalne generalizacije. Iskazat ćemo ga za nizove euklidskih sfera. No, za početak ćemo se upoznati sa notacijom i novim pojmovima.

Pretpostavimo da je $S(z, r) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x - z| = r\}$ euklidska sfera u $\mathbb{R}^d$ s radijusom r i središtem u točki z te da je $P(n, c) = \{x \in \mathbb{R}^d, (n, x) = c\}$ hiperravnina s vektorom normale n, $|n| = 1$, $c \in \mathbb{R}$.

Niz sfera $S(z_k, r_k)$, $k \in \mathbb{N}$ konvergira prema hiperravnini $P(n, c)$ ako za $k \to \infty$ vrijede uvjeti:

1. niz radijusa sfera konvergira prema beskonačnosti, $r_k \to \infty$,
2. niz normiranih vektora središta sfera konvergira prema vektoru normale hiperravnine, $z_k/|z_k| \to n$,
3. niz unutrašnjih točaka sfera konvergira prema točkama hiperravnine $(|z_k|^2 - r_k^2)/2|z_k| \to c$.

Pritom govoreći o sferama treba uzeti u obzir također i ravnine i točke.
Ipak, koristeći oznaku $S(z, r)$ podrazumijevat ćemo sferu ili točku (za $r = 0$), ali ne i ravninu.

Definicija 3.1. (Singularna točka za familiju sfera).*Neka je u prostoru $\mathbb{R}^d$ dana familija sfera $\mathcal{F}$. Točku $z \in \mathbb{R}^d$ zovemo **singularna točka familije** $\mathcal{F}$ ako postoje više od dvije sfere iz $\mathcal{F}$ koje prolaze točkom z.*

Kako bismo prešli sa kružnica na sfere, uvodimo i proširenja svojstava (a) i (b) iz drugog poglavlja:

(a') kružnica k ne sadrži singularne točke za $\mathcal{F}$,
(b') ne postoji sfera u $\mathcal{F}$ koja sadrži k.

Analogno kao i za kružnice u drugom poglavlju, provest ćemo odgovarajući postupak za sfere.

Kroz proizvoljnu točku $D_1 \in k$ postavimo sferu $v_1 \in \mathcal{F}$ uz pretpostavku da takva sfera postoji. Ako postoje dvije takve sfere, odabrat ćemo jednu od njih. Sa D_2 označimo drugu točku presjeka sfere v_1 i kružnice k. U slučaju tangencijalnosti stavimo da je $D_1 = D_2$.

Nadalje, postavimo sferu $v_2 \in \mathcal{F}$ kroz točku D_2 različitu od sfere v_1. Ako takva sfera ne postoji, pretpostavimo da vrijedi $v_1 = v_2$. Nastavljamo postupak tako da sa D_3 označimo drugu točku presjeka sfere v_2 sa kružnicom k.
Nastavimo li dodavati sfere i odgovarajuće presjeke, dobivamo niz sfera $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Kažemo da niz sfera nastao ovim postupkom ima period n ako vrijedi $v_{n+1} = v_1$ odnosno $D_{n+1} = D_1$.

Sada možemo definirati svojstvo zatvaranja za familiju sfera u $\mathbb{R}^d$.

Definicija 3.2. (Svojstvo zatvaranja za familiju sfera). *Kaže se da familija sfera $\mathcal{F}$ posjeduje svojstvo zatvaranja na kružnici k ako kružnica k ne sadrži singularne točke za $\mathcal{F}$, ako ne postoji sfera u $\mathcal{F}$ koja sadrži k te ako je ispunjen uvjet: kada za neku početnu točku D_1 postupak ima period $n \geq 3$ i sve točke $D_1, ..., D_n$ su međusobno različite, tada taj postupak ima isti period za bilo koji izbor početne točke $D_1 \in k$ koja pripada nekoj sferi iz $\mathcal{F}$.*

Tijekom ovog poglavlja doći ćemo do rezultata koji će dati dovoljne uvjete potrebne da bi familije sfera posjedovale svojstvo zatvaranja na bilo kojoj kružnici.

Neka je dan skup $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ koji je ili konika ili podskup pravca. Promotrimo skup sfera $\{S(z, r) \subset \mathbb{R}^d\}$ definiranih jednadžbama:

$$r^2 = |z - a|^2 + b, \tag{1}$$

za $z \in \Gamma$ i proizvoljne $a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}$.

Ova familija se sastoji od svih sfera $S(z, r)$ takvih da je $z \in \Gamma$ te da je $|z - a|^2 + b \geq 0$, odnosno $r = \sqrt{|z - a|^2 + b}$.

Kako bi nam smisao uvjeta (1) postao geometrijski jasniji, napišimo ga u obliku $|a - z|^2 - r^2 = -b$, $z \in \Gamma$.

Ako je a čvrsta točka i b čvrsti realni broj, ovaj uvjet može se shvatiti kao uvjet da točka a ima jednaku vrijednost potencije (i ta vrijednost iznosi $-b$) za sve sfere $S(z, r)$ iz stanovite familije sfera čiji centri pripadaju skupu Γ.

Pokazat će se da je taj uvjet ispunjen ako je točka a centar homotetije nekih sfera S_0 i S_1, a familija sfera sastoji se od onih $S(z, r)$ koje diraju obje sfere S_0 i S_1 na jedan od načina (obje diraju izvana, ili obje iznutra, odnosno jednu od sfera iznutra, a drugu izvana) te su pritom još i ortogonalne na neku zadanu sferu Q.

Također, pokazat će se da svi centri iz takve familije pripadaju jednoj konici, a da centar homotetije a ima jednaku potenciju s obzirom na sve sfere iz opisane familije.

Ako je skup Γ neomeđen, tada proširimo tu familiju sa jednom ili dvije granične ravnine, a ako je Γ hiperbola ili par pravaca, tada proširujemo familiju sa dvije ravnine $P(n_k, c_k)$, $k = 0, 1$. Pritom n_k označava vektor smjera pravaca ili asimptota hiperbole $c_k = (n_k, a)$. Ako je Γ podskup pravca, tada familiju proširujemo jednom ravninom $P(n, c)$ sa n kao vektorom smjera pravca $c = (n, a)$.

Teorem 3.3. *Familija sfera zadanih relacijom (1) zadovoljava svojstvo zatvaranja na bilo kojoj kružnici $k \subset \mathbb{R}^d$ koja ne sadrži singularne točke za tu familiju i ne leži na sferama te familije.*

Dokaz. Pomoću ortogonalne projekcije svedimo teorem na slučaj kada je $d = 2$. Pritom promatramo samo sfere iz familije (1), a isti rezultat za ravnine, ako ih ima, slijedi prijelazom na limes.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se ishodište nalazi u dvodimenzionalnoj afinoj ravnini α koja sadrži kružnicu k. Presjek neke sfere $S(z, r)$ iz familije (1) sa ravninom α je kružnica sa središtem z_1 i radijusom r_1. Točka z_1 je tada ortogonalna projekcija točke z na ravninu α. Vektor $z - z_1$ predstavlja okomicu na ravninu α, pa iz ortogonalnosti z_1 i $z - z_1$ slijedi $|z|^2 = |z_1|^2 + |z - z_1|^2$.

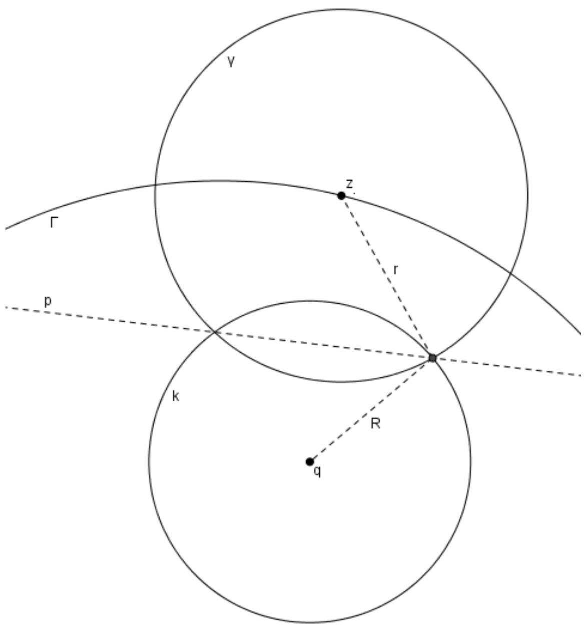
Nadalje, uočimo pravokutan trokut kojem je jedan vrh z, drugi vrh je bilo koja točka sa presječne kružnice radijusa r_1 i središtem u z_1, a pravi kut je u vrhu z_1. Iz toga trokuta imamo da je $|z - z_1|^2 = r^2 - r_1^2$. Iz dobivene dvije jednadžbe slijedi da je $|z|^2 = |z_1|^2 + r^2 - r_1^2$, odnosno vrijedi $r^2 - |z|^2 = r_1^2 - |z_1|^2$.

Dakle, z_1 i r_1 zadovoljavaju relaciju oblika (1), tako da dobivamo familiju kružnica $k(z_1, r_1)$ u ravnini α, pri čemu z_1 pripada ortogonalnoj projekciji konike Γ na tu ravninu. Kružnice iz te familije dobivene su presjecanjem sfera ravninom α, a točka a zamjenjuje se svojom ortogonalnom projekcijom na tu ravninu.

Pretpostavimo dalje da je q središte kružnice k radijusa R. Uzimimo proizvoljnu kružnicu γ iz familije (1) koja siječe kružnicu k.

Neka je p pravac koji sadrži zajedničku tetivu kružnica k i γ (slika 3.1). Bilo koja točka $x \in p$ ima istu potenciju točke s obzirom na kružnicu k i s obzirom na kružnicu γ, stoga vrijedi $|x-q|^2 - R^2 = |x-z|^2 - r^2$. Uvrstimo li r^2 iz relacije (1) u tu jednadžbu, imamo $(x,z) - (x,q) - (z,a) = \frac{R^2-|a|^2-|q|^2-b}{2}$. Dodamo li s obje strane (a,q) i definiramo $\lambda = \frac{R^2-|a|^2-|q|^2-b}{2} + (a,q)$, vrijedit će $(x-a, z-q) = \lambda$. Iz ove linearne jednadžbe $z-q$ i λ ne mogu nestati istovremeno, osim kada je $z = q$, odnosno kada se kružnice γ i k podudaraju, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da kružnica k ne leži na sferama familije sfera zadanih relacijom (1).

Dakle, pronašli smo familiju pravaca $\mathcal{P} = \{p(z), z \in \Gamma\}$, gdje je $p(z) = p = \{x \in \mathbb{R}^2, (x-a, z-q) = \lambda\}$.



Slika 3.1: Dokaz Teorema 3.3

Kako smo ranije definirali, Γ je konika ili podskup pravca. U slučaju kada je Γ podskup pravca svi pravci iz $\mathcal{P}$ prolaze jednom točkom ili su paralelni. Pokažimo tu tvrdnju.

Budući da je Γ podskup pravca, vrijedi da točka z prolazi nekim točkama pravca, pa se za svaki z dobiva pripadni pravac $p(z)$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da kružnica k radijusa R ima središte u ishodištu, pa vrijedi $q = 0$. Tada njena jednadžba glasi $x^2 + y^2 = R^2$.

Pravac koji sadrži skup Γ neka je horizontalni pravac $y = h > 0$, pa su točke koje pripadaju tome pravcu s koordinatama oblika (x, h), za h koji je konstantan.

Kružnice sa središtima oko svake točke z zadane su radijusom r koji zadovoljava jednadžbu $r^2 = |z - a|^2 + b$, pri čemu su a i b konstantni. Stavimo da je $a = (a_1, a_2)$ te $z = (x_0, h) \in \Gamma$. Sada kružnica γ ima jednadžbu

$$(x - x_0)^2 + (y - h)^2 = r^2 = |z - a|^2 + b = (x_0 - a_1)^2 + (h - a_2)^2 + b.$$

Presjekom kružnica k i γ slijedi:

$$(x - x_0)^2 + (y - h)^2 = R^2 - 2x_0x - 2hy + x_0^2 + h^2 = x_0^2 - 2x_0a_1 + a_1^2 + h^2 - 2ha_2 + a_2^2 + b.$$

Kada se to sredi, dolazimo do oblika:

$$x_0x + hy = x_0a_1 + ha_2 + \frac{R^2 - |a|^2 - b}{2}.$$

U slučaju kada je $h \neq 0$, dobijemo jednadžbu pravca

$$y = \frac{-x_0}{h}x + x_0\frac{a_1}{h} + a_2 + \frac{R^2 - |a|^2 - b}{2h}.$$

Kako bismo pokazali da svi pravci iz familije pravaca zadanih dobivenom relacijom prolaze jednom točkom uzmimo dva pravca $p(z)$ i $p(z')$ iz te familije. Njihovim presjekom dolazimo do relacije $-\frac{x_0}{h}x + x_0\frac{a_1}{h} = -\frac{x_0'}{h}x + x_0'\frac{a_1}{h}$ iz čega slijedi da je $x = a_1$.

Za tako odabrani x vrijedi dalje da točke presjeka zadovoljavaju relaciju $y = a_2 + \frac{R^2-|a|^2-b}{2h}$ koja ne ovisi o izboru pripadnih x_0, odnosno x_0', pa se svi pravci iz familije sijeku u jednoj točki.

U slučaju kada je $h = 0$, sličnim računom pokaže se da se dobivaju paralelni pravci.

Dakle, kada je Γ podskup pravca, za bilo koju točku $D_1 \in k$ postupak završi za period 2, bez obzira na početak.

U slučaju kad je Γ (nesingularna) konika, pokazuje se izravnim računom da svi pravci familije $\mathcal{P}$ dodiruju drugu nesingularnu koniku C. Tada teorem slijedi iz Teorema 1.3.

Pokazat ćemo na jednom jednostavnom primjeru kako su povezane konike Γ i C. Poslužit ćemo se pravokutnim (x, y)-koordinatama u ravnini, s ishodištem u točki $q = (0, 0)$.

Jednadžba pravca iz familije $\mathcal{P}$ sada glasi $(x - a_1)z_1 + (y - a_2)z_2 = \lambda$. Za koniku Γ izaberimo parabolu $y = x^2$ te izrazimo z_1 i z_2 pomoću parametra t: $z_1 = t$, $z_2 = t^2$.

Nadalje, uvedimo nove koordinate $u = x - a_1$, $v = y - a_2$, budući da će se konika C lakše izraziti primjenom translacije za vektor $a = (a_1, a_2)$. Jednadžba pravca dobiva oblik $tu + t^2v = \lambda$.

Lako se provjeri da ovaj oblik imaju tangente konike C zadane jednadžbom $v = (\frac{-1}{4\lambda})u^2$, odnosno $u^2 + 4\lambda v = 0$.

U točki (u_0, v_0) ove konike jednadžba tangente može se napisati u obliku $tu + t^2v = \lambda$, pri čemu je $t = \frac{2\lambda}{u_0}$. Dakle, točki $z = (t, t^2)$ konike Γ pridružena je točka (u_0, v_0) konike C kao diralište pravca $l(z)$, povezana sa z relacijom $u_0 = \frac{2\lambda}{t}$.

Konika C dobivena je iz Γ translacijom za vektor a i množenjem s faktorom koji na jednostavan način ovisi o parametru λ. Ovakav oblik veze konika Γ i C vrijedi i općenito, ako se za ishodište izabere točka q, što se može učiniti bez gubitka općenitosti.

$\square$

Poglavlje 4

Teorem zatvaranja u prostoru $\mathbb{R}^3$ i četiri klasična teorema

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako se pomoću teorema 3.3 može dokazati teorem zatvaranja za sfere u prostoru $\mathbb{R}^3$ koji kao jednostavne posebne slučajeve implicira sva četiri teorema zatvaranja. Pritom ćemo se koristiti nekim pojmovima i činjenicama iz elementarne geometrije koje smo pokazali u prethodnim poglavljima.

Neka je u prostoru $\mathbb{R}^3$ dana sfera Q i sfere $S_0, S_1 \subset \mathbb{R}^3$ koje nisu simetrične u odnosu na Q, odnosno ne preslikavaju se jedna u drugu inverzijom s obzirom na sferu Q. Pritom uzimamo u obzir da sfere Q, S_0 i S_1 u graničnim slučajevima mogu postati točke.

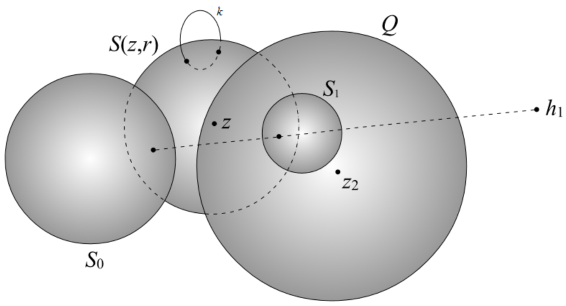
Neka su $\mathcal{F}_i$, $i = 0, 1$ odgovarajuće familije sfera koje dodiruju sfere S_0 i S_1. Za odabrani $i \in \{0, 1\}$ promotrimo familiju sfera $\mathcal{F}$ koja sadrži one sfere iz $\mathcal{F}_i$ koje su ortogonalne na sferu Q. Uočimo da za svaku vanjsku točku sfere Q postoji sfera sa centrom u toj točki koja je ortogonalna na Q, ali samo neke od sfera koje diraju S_0 i S_1 bit će ujedno ortogonalne na Q (to ovisi o radijusu).

Nešto kasnije pokazat ćemo da postoje najviše dvije singularne točke u $\mathbb{R}^3$ za tako odabranu familiju sfera $\mathcal{F}$.

Teorem 4.1. *Familija sfera $\mathcal{F}$ posjeduje svojstvo zatvaranja na bilo kojoj kružnici $k \subset \mathbb{R}^3$ koja ne prolazi singularnim točkama i ne leži na sferi iz familije $\mathcal{F}$.*

Naknadno ćemo pokazati kako ovaj teorem implicira sva četiri klasična teorema iako je njegova geometrijska interpretacija radi uvjeta ortogonalnosti manje očita od one u četiri klasična teorema. Dokaz ovoga teorema svodi se na dokaz tvrdnje da familija $\mathcal{F}$ zadovoljava pretpostavke Teorema 3.3.

Dokaz. (Teorema 4.1) Primjenom prikladne inverzije, ako je potrebno, možemo postići da su Q, S_0 i S_1 sfere, a ne ravnine te da su S_0 i S_1 različitih radijusa. Dakle pretpostavljamo da vrijedi $r_0 \neq r_1$ za $S_k = S(z_k, r_k)$, $k = 0, 1$. Odaberimo neki $i \in \{0, 1\}$ i odgovarajući podskup $\mathcal{F}$ iz familije sfera $\mathcal{F}_i$.
Promotrimo proizvoljnu sferu $S(z, r) \in \mathcal{F}$ (slika 4.1).



Slika 4.1: Teorem zatvaranja 4.1 u $\mathbb{R}^3$

Potencija točke h_i u odnosu na ovu sferu jednaka je p_i, dakle $|z - h_i|^2 - r^2 = p_i$. Tada za $a = h_i$, $b = -p_i$ sfera $S(z, r)$ zadovoljava (1).

Budući da je ova sfera iz familije $\mathcal{F}$ ona je ortogonalna sferi Q. Iz pravokutnog trokuta kojemu su stranice r, r_2 te dužina koja spaja središta z i z_2, tada vrijedi $|z - z_2|^2 = r^2 + r_2^2$, pri čemu je z_2 središte, a r_2 radijus sfere Q. Oduzimanjem dvije dobivene jednakosti dolazimo do linearne jednadžbe
$(z_2 - h_i)z + \frac{r_2^2 + h_i^2 - z_2^2 - p_i}{2} = 0$ u ovisnosti o z. Tom jednadžbom je definirana neka ravnina $L \subset \mathbb{R}^3$.

Nadalje, u slučaju kad su sfere "razdvojene" vrijedi $|z - z_0| - r_0 = |z - z_1| - r_1$, što daje $|z - z_0| - |z - z_1| = r_0 - r_1$, (uz $r_0 > r_1$) što vodi na hiperbolu u ravnini, odnosno hiperboloid u prostoru. Dakle, središta svih sfera iz $\mathcal{F}_i$ tvorit će u prostoru $\mathbb{R}^3$ hiperboloid sa fokusima z_0 i z_1. Dodatno, središta z sfera $S(z, r) \in \mathcal{F}$ leže na presjeku tog hiperboloida sa dobivenom ravninom L, odnosno leže u ravnini u kojoj leži kvadrika Γ.

U slučaju da se S_0 nalazi unutar S_1 (ili obratno) vrijedi $|z_2 - z_0| - r_0 = r_1 - |z_2 - z_1|$, odnosno $|z_2 - z_0| + |z_2 - z_1| = r_0 + r_1$, pa na analogan način dobijemo jednadžbu elipse u ravnini, to jest tražena središta z_2 nalaze se na elipsoidu u $\mathbb{R}^3$
Na ovaj način stvorili smo uvjete za primjenu Teorema 3.3 iz kojega slijedi tvrdnja.

□

Pokažimo kako upravo izrečeni teorem zatvaranja za sfere u prostoru $\mathbb{R}^3$ implicira četiri klasična teorema.

Teorem 4.1 → Teorem 1.3. Neka su S_0 i S_1 proizvoljne sfere upisane konusu koji u presjeku sa ravninom ima kvadriku C, a njegov vrh je (vanjski) centar homotetije sfera S_0 i S_1. Neka je Q točka u beskonačnosti. Tada su sve sfere iz $\mathcal{F}$ ravnine jer sadrže točku u beskonačnosti. Ravnina koja dodiruje obje sfere S_0 i S_1 sadrži izvodnicu stošca te u presjeku s ravninom u kojoj se nalazi kvadrika C ima pravac koji dodiruje C. Ponovimo li postupak za ostale ravnine iz $\mathcal{F}$, dobit ćemo upravo tvrdnju Teorema 1.3.

Teorem 4.1 → Teorem 1.8. Neka je Q ravnina u kojoj se nalazi kružnica s radijusa r. Neka su sfere S_0 i S_1 radijusa $|r \pm \rho|$ tako da su koncentrične kružnici s. Tada kružnice iz familije $\mathcal{F}$ imaju središta na kružnici s. Tada je izbor točaka $D_1 \in k$ i $D_1' \in s$ tako da je $|D_1 D_1'| = \rho$, ekvivalentan izboru kružnice iz familje $\mathcal{F}$ koja prolazi točkom D_1. Stoga vrijedi tvrdnja Teorema 1.8.

Teorem 4.1 → Teorem 1.9. Neka je Q ravnina u kojoj se nalaze kružnice c_0, c_1 i k. Sfera S_i ima središte u ravnini Q i siječe je duž kružnica c_i, $i = 0, 1$. U ovom slučaju sve sfere iz $\mathcal{F}$ imaju središta u ravnini Q i sjeku tu ravninu u kružnicama koje dodiruju c_0 i c_1, pa vrijedi teorem 1.9.

Teorem 4.1 → Teorem 1.7. U sedmom poglavlju pokazat ćemo da je Teorem 1.7 poseban slučaj Teorema 1.9.

Dakle, Ponceletov teorem odgovara slučaju Teorema 4.1 kada je Q točka u beskonačnosti, Zigzag teorem odgovara slučaju kada su S_0 i S_1 različite od sfere Q i ortogonalne na nju, a Emchov teorem odgovara posebnom slučaju kada kružnica k leži na sferi Q i sfere S_0 i S_1 su obje ortogonalne sferi Q.

Pokažimo da Teorem 4.1 vrijedi za sfere Q, S_0, S_1 i kružnicu k koje se nalaze u općem položaju, odnosno da bilo koje tri sfere i kružnica u općem položaju zadovoljavaju njegove pretpostavke. U tu svrhu dokažimo prije spomenutu tvrdnju da postoje najviše dvije singularne točke u $\mathbb{R}^3$ za familiju $\mathcal{F}$.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su radijusi sfera S_0 i S_1 različiti. Neka je z singularna točka za familiju $\mathcal{F}$. Radimo inverziju sa središtem u z. Slike inverzije ćemo označavati znakom $'$. Kada je $z \notin Q$ inverzija preslika sferu Q u sferu Q'. Tada sfere iz familije $\mathcal{F}$ koje sadrže točku z (takve postoje budući da je z singularna točka) inverzija preslika u ravnine koje prolaze središtem sfere Q' i dodiruju sfere S_0' i S_1'.

U slučaju kada je $z \in Q$ slika sfere Q je ravnina Q'. Tada se sfere iz familije $\mathcal{F}$ koje sadrže točku z preslikaju u ravnine okomite na ravninu Q'. Postoje najviše dvije takve ravnine osim ako se središte sfere Q' podudara sa središtem homotetije sfera S'_0 i S'_1. U tom slučaju pravac koji spaja točku z sa $\tilde{z}$, njenom inverznom slikom u odnosu na sferu Q, prolazi kroz h te vrijedi $(h_i - z, h_i - \tilde{z}) = p_i$. Postoje najviše dvije točke sa ovim svojstvom.

Nadalje, kao još jednu izravnu posljedicu Teorema 3.3, iskažimo i dokažimo proširenje Zigzag teorema na višedimenzionalne prostore.

Korolar 4.2. *Teorem 1.8 vrijedi za bilo koje dvije kružnice u $\mathbb{R}^d$ koje zadovoljavaju uvjet da ortogonalna projekcija bilo koje od kružnica na dvodimenzionalnu ravninu koja sadrži drugu kružnicu ne prolazi središtem druge kružnice.*

Dokaz. Neka su s i k proizvoljne kružnice u $\mathbb{R}^d$ i $\rho > 0$ duljina skoka.
Familija sfera $\mathcal{F}$ radijusa ρ sa središtima na kružnici s može se definirati relacijom (1), za odabrane $\Gamma = s$, a središte, r radijus kružnice s i $b = \rho^2 - r^2$.

□

Poglavlje 5

Teorem zatvaranja za sfere u prostoru $\mathbb{R}^d$

Kasnije ćemo dokazati da Ponceletov teorem za dvije kružnice, Steinerov teorem i Zigzag teorem u slučaju kružnica u ravnini, kako je i ranije spomenuto, lako slijede iz Emchovog teorema.

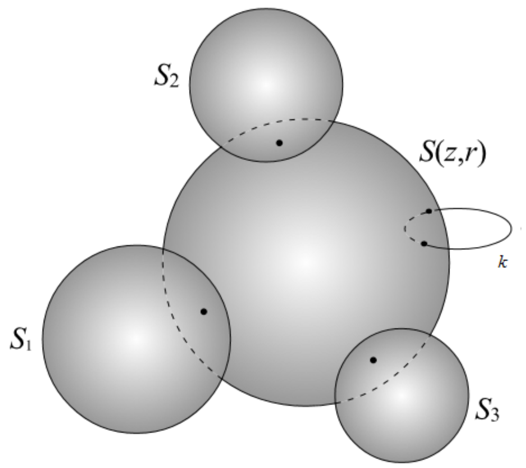
No, prije toga, u ovome poglavlju iskazat ćemo Emchov teorem u prostoru $\mathbb{R}^d$ za bilo koji $d \geq 2$. To će svakako biti korisno budući da se zbog svega navedenog ovaj teorem smatra najopćenitijim među četiri klasična teorema.

U Teoremu 1.9 promatrali smo familiju kružnica $\mathcal{F}$ koja dodiruje dvije zadane kružnice c_0 i c_1 u ravnini, a sada ćemo umjesto toga promatrati familiju sfera koja dodiruje d zadanih sfera u $\mathbb{R}^d$ (slika 5.1).

Uz određene pretpostavke ova familija će posjedovati svojstvo zatvaranja na bilo kojoj kružnici $k \subset \mathbb{R}^d$. To znači da postojanje jednog zatvorenog lanca sastavljenog od n sfera u $\mathbb{R}^d$ koje dodiruju d zadanih sfera tako da se svaki par susjednih sfera siječe na kružnici k, implicira postojanje beskonačno mnogo takvih lanaca.

Također, za bilo koju točku na kružnici k postoji neki lanac koji ima početak u toj točki. Upravo ova tvrdnja predstavlja neformalno izrečenu generalizaciju Emchovog teorema na $\mathbb{R}^d$.

Prije formalnog iskaza prisjetimo se da smo se u Teoremu 1.9 koristili dvjema familijama kružnica $\mathcal{F}_0$ i $\mathcal{F}_1$ koje su dodirivale dvije zadane kružnice. Pokušamo li isto napraviti u prostoru, primjetit ćemo da za d sfera u prostoru $\mathbb{R}^d$ može postojati 2^{d-1} takvih familija



Slika 5.1: Generalizirani teorem zatvaranja

sfera s obzirom na tip dodira. Kako bismo ih na neki način klasificirali uvest ćemo pojam orijentirane sfere.

Definicija 5.1. (Orijentirana sfera).***Orijentirana sfera*** *$S(z, r)$ radijusa $r \in \mathbb{R}$ sa središtem u z je skup točaka $x \in \mathbb{R}^d$ takvih da je $|x - z| = |r|$.*

Iz definicije je jasno da radijus orijentirane sfere može poprimiti bilo koju realnu vrijednost. Također, primjetimo da je u slučaju kada je $r \neq 0$, $S(z, r)$ i $S(z, -r)$ predstavljaju dvije različite sfere iako odgovaraju istom skupu točaka u $\mathbb{R}^d$.

Orijentiranu ravninu koja se sastoji od točaka $x \in \mathbb{R}^d$ takvih da $(n, x) = c$ ćemo označavati kao $P(n, c)$. Ravnine $P(n, c)$ i $P(-n, -c)$ također smatramo različitima iako odgovaraju istom skupu točaka.

Tijekom ovog poglavlja pretpostavljat ćemo da su sve sfere i ravnine orijentirane.

Uočimo i da sfera $S(z, r)$ dodiruje sferu $S(z_0, r_0)$ kada vrijedi $|z - z_0| = |r + r_0|$, a dodiruje ravninu $P(n, c)$ kada $(z, n) + r = c$.

Ako je $z \in \mathbb{R}^d$ i $r \in \mathbb{R}$, uređeni par (z, r) identificirat ćemo na očiti način s točkom prostora $\mathbb{R}^{d+1}$ kad god to bude potrebno.

Definicija 5.2. (Sfere u općem položaju).*Kažemo da je skup sfera $S_i = S(z_i, r_i)$, $i = 1, ..., d$* ***u općem položaju*** *ako je afina ljuska točaka $(z_i, r_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$ dimenzije $d - 1$. To znači da su točke (z_i, r_i) vrhovi $(d - 1)$-dimenzionalnog simpleksa.*

Pritom pod pojmom afina ljuska skupa podrazumijevamo skup svih afinih kombinacija točaka iz toga skupa. Afina kombinacija nekih vektora $x_1, ..., x_{d-1}$ je svaki vektor x koji se može prikazati u obliku $x = \sum \lambda_i x_i$, gdje su λ_i realni brojevi takvi da je $\sum \lambda_i = 1$, za $i = 1, ..., d-1$.

Uočimo da se kod afine ljuske uzimaju koeficijenti λ_i koji mogu poprimiti bilo koju vrijednost iz $\mathbb{R}$, a $\sum \lambda_i = 1$, dok se za konveksnu ljusku uzimaju samo nenegativni koeficijenti λ_i, također uz uvjet $\sum \lambda_i = 1$. Na taj način, sa svake dvije točke afina ljuska sadrži cijeli pravac, pa je afina ljuska uvijek afini prostor, odnosno potprostor.

Svojstvo općeg položaja je invarijantno u odnosu na translacije i ortogonalne transformacije prostora $\mathbb{R}^d$, ali nije invarijantno na inverzije.

Definicija 5.3. (Ekvivalentni skupovi sfera). *Kažemo da su dva skupa sfera* ***ekvivalentna*** *ako se jedan može dobiti iz drugog koristeći konačno mnogo izometrija i inverzija. Pritom i ravnine smatramo sferama.*

Pretpostavimo nadalje da je $S_i = S(z_i, r_i)$, $i = 1, ..., d$ skup koji sadrži d sfera. Pretpostavit ćemo i da neke od njih, ali ne sve istovremeno, mogu postati točke.

Promotrimo familiju sfera $\mathcal{F}$ koje dodiruju sfere S_i. Primjetimo da u slučaju $d \geq 3$ familija $\mathcal{F}$ može biti prazna za neke skupove sfera. Ovisno o orijentaciji, za skup od d neorijentiranih sfera postoji do 2^{d-1} takvih familija.

Teorem 5.4. *Neka je skup koji sadrži d sfera ekvivalentan skupu u općem položaju i neka je familija sfera $\mathcal{F}$ koja ih dodiruje neprazna. Ako kružnica $k \subset \mathbb{R}^d$ ne sadrži singularne točke i ne leži na sferi iz $\mathcal{F}$, onda familija $\mathcal{F}$ zadovoljava svojstvo zatvaranja na k.*

Kako bismo bolje razumijeli iskazani teorem promotrimo ga u malim dimenzijama.

Slučaj kada je $d = 2$. Bilo koji par različitih kružnica u ravnini nalazi se u općem položaju, pa tada teorem postaje Emchov teorem.

Slučaj kada je $d = 3$. Primjetimo da teorem vrijedi za bilo koju trojku sfera u $\mathbb{R}^3$ za koju postoji zajednička sfera koja ih dodiruje. Ako trojka $S(z_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$ nije u općem položaju, tada su točke $(z_i, r_i) \in \mathbb{R}^4$ kolinearne, a to povlači da su i središta z_i također na istom pravcu. Primjenom inverzije sa središtem izvan toga pravca dobijemo sfere u općem položaju.

Uočavamo da je u slučaju malih dimenzija bilo koji skup sfera ekvivalentan onom u općem položaju, no za $d \geq 4$ to ne mora biti slučaj. Ipak, skup koji sadrži d sfera koje su u općem položaju i jedna kružnica u $\mathbb{R}^d$ zadovoljavaju pretpostavke Teorema 5.4. Prije nego dokažemo teorem, pokazat ćemo da vrijedi ta tvrdnja.

Primjetimo da bilo koja sfera $S(z,r) \in \mathcal{F}$ zadovoljava sljedeći sustav jednadžbi:

$$r^2 = |z|^2 - 2(z_i, z) - 2r_i r + |z_i|^2 - r_i^2, \qquad i = 1, ..., d; \tag{2}$$

i bilo koja ravnina $P(n,c) \in \mathcal{F}$ zadovoljava sustav:

$$(z_i, n) + r_i = c, \qquad i = 1, ..., d. \tag{3}$$

Kako bismo dokazali spomenutu tvrdnju, pokažimo da vrijede tri pomoćna rezultata.

Lema 5.5. *Za bilo koji skup sfera u općem položaju familija $\mathcal{F}$ sadrži najviše dvije ravnine.*

Dokaz. Oduzimanjem prve jednadžbe sustava (3) od ostalih dobijemo linearni sustav $(z_i - z_1, n) = r_i - r_1$, $i = 2, ..., d$ ranga $d - 1$. Njegova rješenja za vektor n formiraju pravac u $\mathbb{R}^d$ koji sadrži najviše dvije točke takve da $|n| = 1$.

□

Ako u familiji $\mathcal{F}$ postoje ravnine, one su granice za sfere te familije. U nastavku ćemo obrazložiti slučajeve kada sfere koje čine afinu ravninu u prostoru sfera mogu dodirivati jednu sferu.

Lema 5.6. *Pretpostavimo da je afina ravnina $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$, a $dimL \geq 1$ takva da postoji sfera (ili točka) $S_0 \subset \mathbb{R}^d$ koja dodiruje sve sfere iz familije $\mathcal{L} = \{S(z,r)|(z,r) \in L\}$. Tada je L pravac i $\mathcal{L}$ je pramen sfera koje se dodiruju u jednoj točki. Štoviše, $S_0 \in \mathcal{L}$.*

Dokaz. Ako je $dimL = 1$, tada središte z bilo koje sfere iz $\mathcal{L}$ leži na fiksnom pravcu $b \subset \mathbb{R}^d$ i njezin radijus r je linearna funkcija u ovisnosti o z. Ako sve sfere iz $\mathcal{L}$ dodiruju S_0, tada središte sfere S_0 leži također na b, inače r nije linearna funkcija u ovisnosti o z.

Nadalje, $\mathcal{L}$ je pramen sfera koje se dodiruju. Posebno, S_0 također pripada $\mathcal{L}$. U slučaju kada je $dimL \geq 2$ svi pravci na L se sijeku u jednoj točki koja odgovara sferi S_0, što je nemoguće.

□

Posljednji pomoćni rezultat odnosi se na položaj singularnih točaka familije $\mathcal{F}$.

Lema 5.7. *Sve singularne točke familije $\mathcal{F}$ za skup koji čini d sfera u općem položaju leže u nekoj afinoj ravnini E dimenzije $d-2$. Ako $\mathcal{F}$ sadrži dvije ravnine, onda se njihov presjek podudara sa ravninom E.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da za singularnu točku z_0, točka $(z_0, 0)$ pripada ravnini $E_0 \subset \mathbb{R}^{d+1}$ koja je afina ljuska točaka (z_i, r_i), $i = 1, ..., d$. Primjetimo da je $dimE = d - 1$. Jednadžba sfere $S(z, r)$ koja prolazi točkom z_0 je $r^2 = |z|^2 - 2(z_0, z) + |z_0|^2$. Oduzimanjem te jednadžbe od bilo koje jednadžbe iz (2) dobijemo sljedeći sustav:

$$(z_i - z_0, z) + r_i r = \frac{1}{2}(|z_i|^2 - r_i^2 - |z_0|^2), \qquad i = 1, ..., d. \tag{4}$$

Ako točka $(z_0, 0)$ nije iz E_0 onda je matrica ovog sustava punog ranga d. Također, njegova rješenja, odnosno točke (z, r) tvore pravac $p \in \mathbb{R}^{d+1}$. Supstitucijom riješenja iz (2) dobijemo kvadratnu jednadžbu. Ako su svi njeni koeficijenti jednaki nula, onda sve sfere korespodentne rješenjima (z, r) dodiruju sferu S_1.

Prema Lemi 5.6 sve te sfere čine pramen tangirajućih sfera.Tada i sve sfere S_i pripadaju tom pramenu, štoviše, sve točke (z_i, r_i) leže na pravcu, što je kontradikcija pretpostavci da se nalaze u općem položaju.

Dakle, izvedena kvadratna jednadžba je netrivijalna i ima najviše dva rješenja. Dakle, postoje najviše dvije sfere iz $\mathcal{F}$ koje prolaze točkom z_0. Stoga slijedi da točka z_0 nije singularna ako ne pripada ravnini iz $\mathcal{F}$. Ako pripada ravnini iz $\mathcal{F}$, tada prema (3) zadovoljava jednadžbe $(z_i - z_0, n) - r_i = 0$, $i = 1, ..., d$. Ovaj sustav je punog ranga d i zato ima najviše jedno rješenje n. Uspoređujući ga sa sustavom (4) zaključujemo da je pravac p paralelan vektoru $(n, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$.

Uvrstimo li rješenja $(z, r) \in p$ u prvu jednadžbu iz (2) i uzimemo u obzir da je $|n| = 1$ nestanu kvadratni izrazi i dobijemo linearnu jednadžbu koja ima najviše jedno rješenje. Tako postoji jedinstvena ravnina i najviše jedna sfera iz $\mathcal{F}$ koja prolazi kroz z_0.

□

Dakle, ako kružnica k ne siječe $(d - 2)$-dimenzionalnu ravninu E, onda ona ne sadrži singularne točke. Za proizvoljnu točku $z \in k$ postoje najviše dvije sfere iz $\mathcal{F}$ koje prolaze kroz z. Ako kružnica k nije sadržana u niti jednoj od ove dvije sfere onda ne leži na niti jednoj sferi iz $\mathcal{F}$. Tada skup od d sfera u općem položaju i jedna kružnica u $\mathbb{R}^d$ zadovoljavaju pretpostavke Teorema 5.4.

Dokažimo sada teorem 5.4.

Dokaz. (Teorema 5.4) Dovoljno je promotriti slučaj u kojemu se d sfera nalazi u općem položaju. Pokazat ćemo da familija $\mathcal{F}$ može biti definirana pomoću (1) i na to primijeniti Teorem 3.3. Pritom promatramo samo sfere iz familije $\mathcal{M}$, a isti rezultat za ravnine, ako ih ima, slijedi prijelazom na limes.

Pretpostavimo prvo da među sferama S_i postoje dvije različitih radijusa s obzirom na predznak. Oduzimanjem prve jednadžbe sustava (2) od ostalih dobijemo $d-1$ linearnih jednadžbi $2(z_1 - z_i, z) + 2(r_1 - r_i)r = c_i$, $i = 2, ..., d$,a c_i su neke konstante. Za barem jednu od njih koeficijent $r_1 - r_i$ nije nula. Izražavajući $r = r(z)$ iz te jednadžbe i supstitucijom u ostale jednadžbe dobijemo sustav od $d-2$ linearne jednadžbe (ranga $d-2$) s varijablom z. Njegova rješenja z tvore dvodimenzionalnu afinu ravninu $L_0 \subset \mathbb{R}^d$. Budući da je funkcija $r(z)$ linearna, točke $(z, r(z))$ tvore dvodimenzionalnu afinu ravninu $L \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

Supstitucijom $r(z)$ u prvu jednadžbu sustava (2) dobijemo jednadžbu u nepoznanici z, koja je kvadratna ili linearna. Ako sve točke iz L_0 zadovoljavaju dobivenu jednadžbu, tada sve sfere pridružene točkama $(z, r) \in L$ dodiruju sferu S_1, što je nemoguće (Lema 5.6). Nadalje, točke $z \in L_0$ koje zadovoljavaju tu jednadžbu tvore koniku (ili pravac) $\Gamma \subset L_0$.

Supstituirajmo sada $r(z)$ u desnu stranu prve jednadžbe iz (2) i dobit ćemo $r^2 = |z|^2 - (a, z) + c$ gdje je $a \in \mathbb{R}^d$ i $c \in \mathbb{R}$. Transformacijom u oblik $r^2 = (z - \frac{1}{2}a, z - \frac{1}{2}a) - \frac{1}{4}|a|^2 + c$, odnosno $r^2 = |z - \frac{1}{2}a|^2 - \frac{1}{4}|a|^2 + c$, dobijemo jednadžbu tipa (1).

Konačno, ako su svi radijusi r_i jednaki, tada središta sfera iz $\mathcal{F}$ leže na pravcu Γ i lako se zapiše jednadžba (1).

$\square$

Poglavlje 6

Elementarni dokaz i poopćenje Emchovog teorema

U ovom poglavlju ponovno ćemo razmotriti Emchov teorem u ravnini (Teorem 1.9) te prikazati preostala tri kao njegove posebne slučajeve.

Uzmemo li da je kružnica c_1 točka, tada će inverzija sa centrom u toj točki voditi Teoremu 1.3 za dvije kružnice. Ako c_0 leži unutar c_1, a kružnica k je ortogonalna na sve kružnice iz familije $\mathcal{F}_1$, tada dobijemo Teorem 1.7. Pritom koristimo činjenicu da središte homotetije h_1 kružnica c_0 i c_1 ima istu potenciju točke p_1 s obzirom na sve kružnice iz $\mathcal{F}_1$.

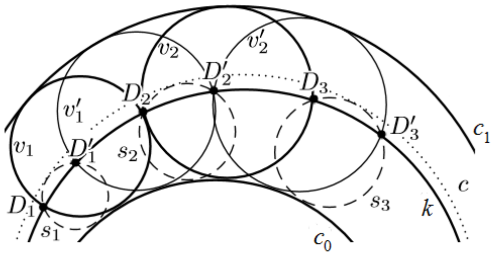
Nadalje, kružnica k radijusa $\sqrt{p_1}$ sa središtem u h_1 je ortogonalna svim kružnicama iz $\mathcal{F}_1$ i sadrži sve njihove dodirne točke te na taj način Teorem 1.7 slijedi iz Emchovog teorema.

Konačno, ako su kružnice c_0 i c_1 koncentrične, a kružnice s i k se nalaze u istoj ravnini te ako uzmemo kružnice c_0 i c_1 radijusa $|r \pm q|$ koncentrične kružnici s radijusa r, dobit ćemo Teorem 1.8.

Dakle, za koncentrične kružnice c_0 i c_1 Teorem 1.9 postaje planarna verzija Zigzag teorema; u slučaju kada je c_0 točka u beskonačnosti, dobijemo Ponceletov teorem za dvije kružnice, a ako je c_0 unutar c_1 i k je ortogonalna na sve kružnice familije $\mathcal{F}_1$, dobijemo Steinerov teorem.

U ovom poglavlju dat ćemo dokaz Teorema 1.9 koji će biti elementaran i neće se oslanjati na Ponceletov teorem, za razliku od Teorema 4.1 i 5.4. U dokazu ćemo koristiti inverziju i pramen kružnica. Također, ograničit ćemo se na sljedeće slučajeve međusobnih položaja kružnica u Teoremu 1.9:

(d) kružnica k je unutar kružnice c_1, kružnica c_0 je unutar k, a familija kružnica $\mathcal{F}_1$ dodiruje c_1 iznutra i c_0 izvana (slika 6.1).



Slika 6.1: Dokaz Teorema 1.9

U dokazu ćemo pretpostaviti da lanac kružnica upisanih prstenu koji čine c_0 i c_1 siječe kružnicu k u uzastopnim točkama $D_1, D_2, ...$ te da drugi lanac kružnica upisanih prstenu siječe k u točkama $D_1', D_2', ...$

Za bilo koji $i = 1, 2, ...$ nacrtat ćemo novu kružnicu s_i koja dodiruje c_0 u točkama D_i i D_i'. Tada sve takve nove kružnice s_i, $i = 1, 2, ...$ dodiruju neku kružnicu c. Štoviše, c, k i c_1 pripadaju jednom pramenu kružnica.

Iz ovoga slijedi da ukoliko prve kružnice tvore lanac, odnosno $D_{n+1} = D_1$, tada će isto vrijediti i za druge kružnice, odnosno $D_{n+1}' = D_1'$.

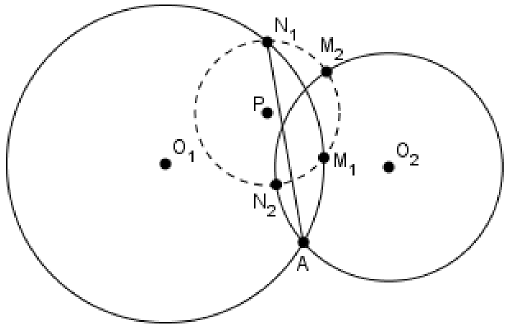
Kako bismo realizirali ovu ideju potrebno je uspostaviti nekoliko pomoćnih rezultata.

U nastavku ćemo pretpostaviti da luk AB koji pripada kružnici ima pozitivan smjer od A do B. Sa $\breve{AB}$ ćemo označiti kut definiran tim lukom.

Lema 6.1. *Pretpostavimo da se dvije kružnice radijusa r_1, r_2 sa središtima u O_1, O_2 sijeku u točkama A i B. Neka je P četvrti vrh paralelograma O_2AO_1P. Tada za bilo koju kružnicu sa središtem u P koja siječe prvu kružnicu u nekim točkama M_1, N_1 i drugu u točkama M_2, N_2 kako je prikazano na slici 6.2, vrijedi sljedeće:*

a)pravci M_1M_2 i N_1N_2 prolaze kroz točku A;

b)$\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.



Slika 6.2: Lema 6.1

Dokaz. (a) Trokuti PO_1M_1 i M_2O_2P su jednaki prema S-S-S teoremu o sukladnosti trokuta, budući da je $\angle M_1O_1P = \angle M_2O_2P$. Nadalje $\angle PO_1B = \angle PO_2B$, budući da je O_2O_1PB jednakostranični trapez. Oduzimanjem druge jednadžbe od prve, dobijemo da je $\angle M_1O_1B = \angle M_2O_2B$ i vrijedi $B\breve{M}_1 = B\breve{M}_2$. Posljedično, $\angle M_1AB = \angle M_2AB$ te pravac M_1M_2 prolazi točkom A. Dokaz za N_1N_2 je identičan.

(b) Iz (a) dijela dokaza slijedi da tetive M_1N_1 i M_2N_2 određuju jednake kutove na dvije kružnice: $\angle M_1AN_1 = \angle M_2AN_2$. Stoga $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Slično, $\frac{BM_1}{BM_2} = \frac{BN_1}{BN_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Konačno, budući da je četverokut $M_1M_2N_1N_2$ upisan kružnici, slijedi da su kružnice M_1AN_1 i N_2AM_2 slične s faktorom $\frac{M_1N_1}{M_2N_2} = \frac{r_1}{r_2}$ te vrijedi $\frac{AN_1}{AM_2} = \frac{AM_1}{AN_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

□

Prije iskaza teorema, podsjetimo da pojam pramena kružnica podrazumijeva skup svih kružnica koje su ortogonalne na dvije različite kružnice (pri čemu bilo koja od kružnica može degenerirati u pravac ili točku, osim ako se ne pretpostavi drukčije).

Bilo koji par kružnica $m, n \subset \mathbb{R}^2$ je sadržan u jedinstvenom pramenu koji ćemo označiti sa $\mathcal{P}\{m, n\}$. Za svaki $t \in \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$, skup točaka ravnine za koje omjer potencija s obzirom na dvije zadane kružnice m i n iznosi t, ili je prazan skup ili je kružnica koja pripada pramenu $\mathcal{P}\{m, n\}$.

Pretpostavimo u nastavku da su dane dvije kružnice sa zajedničkim središtem P, zvat ćemo ih veća i manja kružnica. Promotrimo familiju kružnica $\mathcal{F}_j$, $j = 0, 1$ koje ih dodiruju. Uzmimo proizvoljan par kružnica $m_0, m_1 \in \mathcal{F}_0$ i par kružnica $n_0, n_1 \in \mathcal{F}_1$. Označimo sa $A_{i_k}^0$ i $A_{i_k}^1$ točke presjeka m_i i n_k i neka je pritom prva točka udaljenija od središta P nego druga.

Konačno, nacrtat ćemo još jednu kružnicu sa središtem u P. Neka se ona siječe sa svakom od kružnica m_i i n_k u dvije točke M_i^s te N_k^s, $s = 0, 1$, respektivno.

Kao što je prikazano na slici 6.3, ako točka obilazi kružnice m_i u smjeru kazaljke na satu krenuvši od točke dodira sa većom kružnicom, onda će se prvo sresti u točki M_i^0, a zatim u točki M_i^1. Isto će se dogoditi s točkama N_k^s. U notaciji Teorema 6.2 sve potencije u nazivima su uzete *modulo* 2, npr. $A_{1_0}^{\,2} = A_{1_0}^{\,0}$, $c_1^3 = c_1^1$.

Teorem 6.2. *Neka su dane dvije kružnice sa zajedničkim središtem P i proizvoljne kružnice $m_i \in \mathcal{F}_0$, $n_k \in \mathcal{F}_1$, $i, k = 0, 1$. Pretpostavimo da su $A_{i_k}^{\,s}$ odgovarajućih osam točaka njihova presjeka. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

a)Četiri točke $A_{i_k}^{\,i+k}$, $i, k \in \{0, 1\}$ leže na jednoj kružnici koju ćemo označiti sa k_0, a četiri točke $A_{i_k}^{\,i+k+1}$, $i, k \in \{0, 1\}$ leže na kružnici koju ćemo označiti k_1.

b)Neka proizvoljna kružnica sa središtem u P dodiruje m_i, n_k respektivno u točkama M_i^s, N_k^s. Tada za svaki $i, k \in \{0, 1\}$ pravci $M_i^0 N_k^0$ i $M_i^1 N_k^1$ prolaze točkom $A_{i_k}^{\,0}$.

c)Odaberimo proizvoljne $q, j \in \{0, 1\}$ i nacrtajmo kružnicu koja dodiruje kružnice m_i u točkama M_i^{i+q}, $i = 0, 1$ i kružnicu koja dodiruje kružnice n_k u točkama $N_k^{k+q+j+1}$, $k = 0, 1$. Ove dvije kružnice pripadaju pramenu kružnica kao i kružnice k_j.

Prije samog dokaza, razmotrimo malo detaljnije složenu konfiguraciju iz iskaza teorema.

Ako četiri kružnice m_i, n_k, $i, k \in \{0, 1\}$ dodiruju dvije koncentrične kružnce, onda je osam točaka njihova presjeka $A_{i_k}^{\,s}$ prirodno podijeljeno na dvije skupine po četiri, gdje svaka od tih skupina leži na jednoj kružnici.

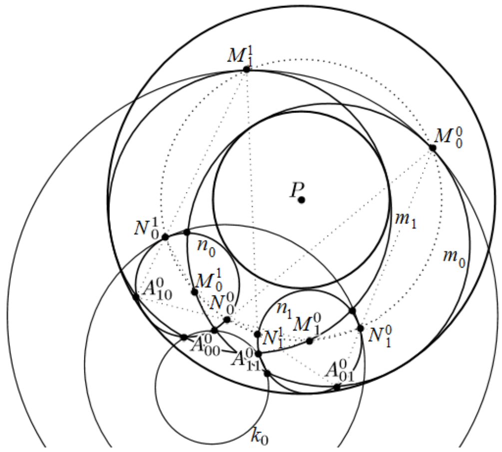
Nacrtamo li treću koncentričnu kružnicu dobit ćemo osam dodatnih točaka presjeka M_i^s, N_k^s koje formiraju osam trojki kolinearnih točaka kako je prikazano na slici 6.3.

Također, promotrimo dva para kružnica koje dodiruju kružnice m_i i n_k u točkama njihova presjeka sa trećom kružnicom. Na taj način uočavamo četiri pramena kružnica od kojih svaki sadrži tri kružnice.

Ova konfiguracija od sedam kružnica (tri koncentrične te m_i, n_k, $i, k \in \{0, 1\}$) tvori dvije kružnice, osam pravaca i četiri pramena kružnica.

Dokaz. Neka su R i r polumjeri, a 0_1 i 0_2 središta kružnica m_0 i n_0 redom. Tada je $O_2 A_{0_0}^{\,0} O_1 P$ paralelogram sa stranicama duljina r i R. Prema Lemi 6.1 pravci $M_0^0 N_0^0$ i $M_0^1 N_0^1$ se sijeku u točki $A_{0_0}^{\,0}$ što dokazuje tvrdnju b) za $i = k = 0$. Dokaz ostalih slijedi slično.

Nacrtajmo dalje kružnicu **m** koja dodiruje m_0 i m_1 u točkama M_0^0 i M_1^1. Zatim nacrtajmo



Slika 6.3: Teorem 6.2

kružnicu **n** koja dodiruje n_0 i n_1 u točkama N_0^1 i N_1^0. Pretpostavljamo da obje kružnice, **m** i **n** ne degeneriraju u pravce. Označimo sa x radijus kružnice **m** uzimajući u obzir i predznak: pozitivan je ako kružnica **m** dodiruje m_0 iznutra, a negativan inače. Slično, neka je y radijus kružnice **n** sa predznakom.

Označimo sa B drugu točku presjeka pravca $M_0^0 A_{0_0}^0$ sa kružnicom **m**, te sa C drugu točku presjeka pravca $N_0^1 A_{0_0}^0$ sa kružnicom **n**. Sličnost kružnica povlači $M_0^0 B = \frac{x}{R} M_0^0 A_{0_0}^0$.

Nadalje, potencija točke $A_{0_0}^0$ s obzirom na kružnicu **m** je jednaka $A_{0_0}^0 M_0^0 * A_{0_0}^0 B = (1 + \frac{x}{R})(A_{0_0}^0 M_0^0)^2$. Slično, potencija točke $A_{0_0}^0$ s obzirom na kružnicu **n** je $(1 + \frac{y}{R})(A_{0_0}^0 N_0^1)^2$. Tada iz Leme 6.1 slijedi $A_{0_0}^0 M_0^0 / A_{0_0}^0 N_0^1 = R/r$.

Dodatno, omjer potencija točke $A_{0_0}^0$ s obzirom na kružnice **m** i **n**, jednak je $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$.

Na isti način dođemo do zaključka da je za svaku od točaka $A_{1_1}^0$, $A_{1_0}^1$, $A_{0_1}^1$ omjer potencija točke s obzirom na kružnice **m** i **n** također jednak $\frac{(R+x)R}{(r+y)r}$.
Uočavamo da se ove četiri točke nalaze na jednoj kružnici (k_0) koja pripada pramenu kružnica $\mathcal{P}\{m, n\}$.

Time su dokazane tvrdnje a) i c) za $j, q = 0$. Dokaz za ostale j i q slijedi na isti način.

□

Korolar 6.3. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 6.2. Tada za bilo koji* $j = 0, 1$ *vrijedi sljedeće:*

za proizvoljnu kružnicu $\boldsymbol{m}$ *koja dodiruje kružnice* m_0 *i* m_1 *na isti način (obje iznutra ili obje izvana) postoji kružnica* $\boldsymbol{n} \in \mathcal{P}\{k_j, \boldsymbol{m}\}$ *koja dodiruje* n_0 *i* n_1 *na isti način(obje iznutra ili obje izvana).*

Napomena. Kroz bilo koju točku A kružnice n_0 (različitu od točaka dodira sa većom i sa manjom kružnicom) možemo nacrtati dvije kružnice iz familije $\mathcal{F}_0$. Preciznije, za jednu od njih A je najbliže točki P, točki presjeka sa n_0.
Teorem 6.2.b povlači također da za bilo koje $i, k \in \{0, 1\}$ pravac koji spaja točke dodira kružnica m_i, n_k sa većom kružnicom, prolazi kroz točku $A_{i_k}^0$.
Isto vrijedi i za manju kružnicu.

Lema 6.4. *Pretpostavimo da proizvoljni pravac prolazi točkom dodira danih kružnica c i m i siječe ih u točkama A i B, respektivno. Kružnica s prolazi točkom B i dodiruje kružnicu c u točki A. Tada sve takve kružnice s dodiruju fiksnu kružnicu različitu od c. Ta kružnica dodiruje kružnicu m i koncentrična je kružnici c.*

Sada ćemo formulirati tvrdnju iz koje odmah slijedi Teorem 6.2.

Neka su dane kružnice c_0, c_1 i k koje zadovoljavaju uvjet (d). Uzmimo dva niza kružnica $\{v_k\}, \{v'_k\} \subset \mathcal{F}_1$ i odgovarajuće točke $\{D_k\}$ i $\{D'_k\}$ na kružnici k. Pretpostavljamo da oba ova niza obilaze k u pozitivnom smjeru te da D'_1 pripada luku D_1D_2. Označimo sa s_k kružnicu koja prolazi točkama D_k, D'_k i dodiruje c_0 izvana.

Propozicija 6.5. *Sve kružnice* s_k, $k \in \mathbb{N}$ *dodiruju jednu čvrstu kružnicu iz pramena kružnica* $\mathcal{P}\{k, c_1\}$.

Dokaz. Dokaz se sastoji od uzastopnih primjena Teorema 6.2 na parove kružnica v_k, v'_k i s_k, s_{k+1} za sve $k \geq 1$.

Prikladna inverzija preslikava parove v_1, v'_1 i s_1, s_2 u parove m_0 , m_1 i n_0, n_1 iz Teorema 6.2. Pokažimo to.

Neka su E, F, G točke dodira kružnice c_0 sa s_1, s_2, v_1 respektivno, a U i V su druge točke presjeka kružnice v_1 sa kružnicama s_1 i s_2, respektivno. Napravimo inverziju sa središtem u drugoj točki presjeka kružnica FUE i FVG, pri čemu je prva točka presjeka F.

Prema Lemi 6.4 slike kružnica s_1, s_2, v_1 dodiruju dvije koncentrične kružnice od kojih je jedna slika od c_0. Kako bismo ju definirali pretpostavit ćemo da je slika od c_0 manja koncentrična kružnica te da su slike od s_1, s_2 smještene između ovih koncentričnih kružnica. Tada su s_1, s_2, v_1 preslikane u kružnice n_0, n_1, m_0, a točke D_1 i D_2 su preslikane u $A_{0_0}^1$ i $A_{0_1}^0$, respektivno.

Neka su X_1, X_2 slike točaka D_1', D_2'. Prema napomeni kroz X_2 možemo nacrtati kružnicu m_1 na način da dodiruje obje ove koncentrične kružnice i to tako da je X_2 centru najbliža točka presjeka kružnica n_1 i m_1. Dakle, X_2=$A_{1_1}^{1}$.

Prema Teoremu 6.2.a točke $A_{0_0}^{1}$, $A_{0_1}^{0}$, $A_{1_1}^{1}$, $A_{1_0}^{0}$ leže na kružnici, a prema pretpostavkama $A_{0_0}^{1}$, $A_{0_1}^{0}$, $A_{1_1}^{1}$ i X_1 su također na kružnici. Stoga vrijedi $A_{1_0}^{0} = X_1$ i m_1 je slika od v_1'.

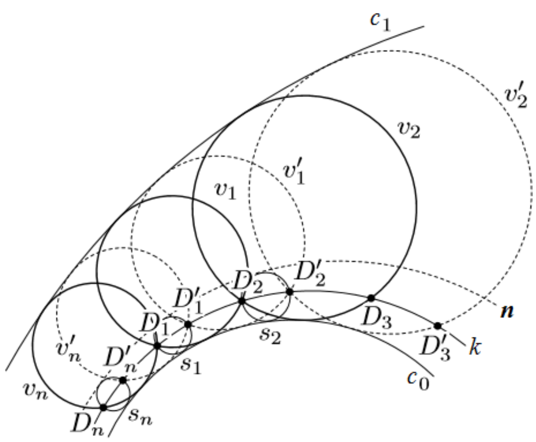
Nadalje, inverzija preslika kružnice v_1, v_1', s_1, s_2 u kružnice m_0, m_1, n_0 i n_1, respektivno. Prema korolaru 6.3 pramen $\mathcal{P}\{k, c_1\}$ sadrži neku kružnicu $\mathbf{n}$ koja dodiruje s_1 i s_2 na isti način. Ona je smještena između kružnica k i c_1.

Naime, ako fiksiramo točke D_1, D_2 i pomičemo točku D_1' duž luka D_1D_2, tada ćemo u krajnjim položajima dobiti $\mathbf{n} = k$ u slučaju kada je $D_1' = D_1$ te $\mathbf{n} = c_1$ kada je $D_1' = D_2$.

Kružnica $\mathbf{n}$ se mijenja neprekinuto unutar pramena kružnica $\mathcal{P}\{k, c_1\}$ kada se D_1' pomiče. S obzirom da za neki D_1' kružnica $\mathbf{n}$ nije između kružnica k i c_1, za neku unutarnju točku D_1' luka D_1D_2 vrijedi da je ili $\mathbf{n} = k$ ili $\mathbf{n} = c_1$.
No niti jedan od ovih slučajeva nije moguć budući da za bilo koju unutarnju točku luka D_1D_2 kružnica s_1 ne dodiruje niti k niti c_1. Krenemo li ponavljati ovaj postupak, pokazali bismo da $\mathbf{n}$ dodiruje sve kružnice s_k.

□

Dokažimo sada Teorem 1.9 u slučaju kada je kružnica k unutar kružnice c_1, kružnica c_0 je unutar kružnice k, a familija kružnica $\mathcal{F}_1$ dodiruje c_1 iznutra i c_0 izvana.



Slika 6.4: Dokaz Teorema 1.9

Dokaz. Neka su $v_1, ..., v_n$ periodički nizovi kružnica ($v_{n+1} = v_1$), $D_1, ..., D_n$ pripadne točke na kružnici k. Uzmimo proizvoljan niz $v'_1, v'_2, ...$ i odgovarajuće nizove točaka $D'_1, D'_2, ...$ Pretpostavimo (uz renumeraciju, ako je potrebno) da oba ova niza obilaze kružnicu k u pozitivnom smjeru te da je točka D'_1 na luku D_1D_2.

Neka su dane kružnice s_k, $k \geq 1$ iz propozicije 6.5 tako da dodiruju kružnicu $\mathbf{n} \in \mathcal{P}\{k, c_1\}$.

Luk D_1D_2 sadrži samo jednu točku D'_1 za koju kružnica $\mathbf{n}$ dodiruje kružnicu koja prolazi točkama D'_1 i $D_{n+1} = D_1$ i koja dodiruje c_0 iznutra. Nadalje, vrijedi da je $D_{n+1}' = D_1$ te $s_{n+1} = s_1$, čime je dokaz teorema završen.

□

Metoda koju smo razvili omogućuje poopćenje Emchovog teorema za nekoliko pramenova kružnica analogno velikom Ponceletovom teoremu. Formulirat ćemo ga samo za jedan slučaj međusobnog položaja kružnica.

Neka je dana kružnica k i dva niza kružnica $\{c_0^k\}$ i $\{c_1^k\}$. Svaki niz kružnica $\{c_i^k\}$ neka je sadržan u pramenu $\mathcal{A}_i$, $i = 0, 1$ koji sadrži i kružnicu k.

Pretpostavljamo da su kružnice $\{c_0^k\}$ unutar k te da je k unutar svih kružnica $\{c_1^k\}$. Sa $\mathcal{F}_1^k$ označimo familiju kružnica koje dodiruju c_0^k izvana i c_1^k iznutra.

Nacrtajmo kružnicu $v_1 \in \mathcal{F}_1^1$ kroz proizvoljnu točku $D_1 \in k$. Neka je D_2 presjek kružnice v_1 sa kružnicom k. Kroz točku D_2 nacrtajmo kružnicu $v_2 \in \mathcal{F}_1^2$, itd. Kružnice v_k u svakoj iteraciji su odabrane na način da se niz točaka $\{D_k\}$ nalazi duž k u pozitivnom smjeru.

Teorem 6.6. *Ako postupak krene u točki D_1, ima period $n \neq 3$ i sve točke $D_1, ..., D_n$ su različite, tada ima isti period neovisno o početnoj točki.*

Dokaz. Dokaz je isti kao i za Teorem 1.9. Neka su dana dva niza kružnica $\{v_k\}$, $\{v'_k\}$ gdje su $v_k, v'_k \in \mathcal{F}_1^k$, $k \in \mathbb{N}$ i odgovarajući nizovi točaka $\{D_k\}, \{D'_k\}$ na k.

Pretpostavimo da je D'_1 na luku D_1D_2. Odaberimo proizvoljnu kružnicu $c_0 \in \mathcal{A}_0$ koja leži unutar k i označimo sa s_k kružnicu koja kroz D_k, D'_k i dodiruje c_0 izvana.

Tada sve kružnice s_k, $k \in \mathbb{N}$ dodiruju jednu kružnicu iz pramena $\mathcal{A}_0$ što dokažemo kao u dokazu propozicije 6.5.

□

Bibliografija

[1] J.L. Coolidge, A treatise on the circle and the sphere, Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1916.

[2] L. Halbeisen, N. Hungerbühler, *A Simple Proof of Poncelet's Theorem (on the Occasion of Its Bicentennial)*, Amer. Math. Monthly 122 (2015), 537-551.

[3] Homothetic center, dostupno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Homotheticcenter` (ožujak 2017.)

[4] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 2004.

[5] Poncelet's Porism, dostupno na `http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html` (travanj 2017.)

[6] V.Ju. Protasov, *Generalized closing theorems*, Elem. Math. 66 (2011), 98-117.

[7] A.K. Sharma, Textbook of 3-D Sphere, Cone and Cylinder,Discovery Publishing House, New Delhi, 2005.

Sažetak

Ponceletov teorem koji govori o svojstvu "zatvaranja" niza poligona koji su upisani jednoj, a opisani drugoj zadanoj konici svakako je jedan od najpoznatijih i najviše proučavanih teorema u geometriji. Poznato je još nekoliko teorema sličnog tipa, kao što su Steinerov teorem, "Zigzag" teorem i Emchov teorem koji se u stanovitom smislu može smatrati najopćenitijim među njima.

U ovom radu najprije je za familiju kružnica iskazano opće svojstvo zatvaranja na nekoj kružnici k u istoj ravnini, a zatim se formulira odgovarajuće svojstvo familije sfera u d-dimenzionalnom euklidskom prostoru, u odnosu na neku kružnicu k.

Dokazano je da svojstvo zatvaranja na nekoj kružnici ima svaka familija $\mathcal{F}$ takvih sfera koje uz stanovite uvjete nesingularnosti ispunjavaju jednostavnu analitičku relaciju, a središta im pripadaju jednoj kvadrici Γ. Taj se uvjet geometrijski intepretira tako da sfere iz $\mathcal{F}$ diraju dvije zadane sfere S_0 i S_1, a ortogonalne su na zadanu sferu Q.

Pokazuje se kako četiri klasična teorema zatvaranja slijede iz tog općeg principa zatvaranja za sfere.

U završnom dijelu rada izložen je elementarni dokaz Emchovog teorema u ravnini te njegovo proširenje u d-dimenzionalnom prostoru.

Summary

Poncelet closure theorem, which is a theorem about closing property for a sequence of polygons inscribed in one and circumscribed about the other given conic, is one of the most explored and most important theorems of projective geometry. Besides Poncelet theorem, there are more theorems of this type, such as Steiner theorem, "Zigzag" theorem and Emch theorem, which is in a sense the strongest one among these four.

At the beginning, we present a generalized closing property on a circle k in the plane and later on a corresponding property is formulated for spheres and a given circle k in d-dimensional Euclidean space.

It is proved that any family of spheres $\mathcal{F}$, that satisfies certain nonsingularity conditions and a simple analytical relation, possesses the closing property on a circle. In that case, the centres of all spheres from $\mathcal{F}$ belong to a certain quadric Γ. The geometrical meaning of this condition is that spheres from $\mathcal{F}$ are tangential to two spheres S_0 and S_1 and orthogonal to a given sphere Q.

It is shown that four classical theorems of Poncelet type are corollaries of the general closing property for spheres.

In the last section, we focus on the elementary proof of Emch's theorem in the plane and its extension to the Euclidean space $\mathbb{R}^d$.

Životopis

Rođena sam 12. rujna 1992. godine u Zadru.

Nakon završene opće gimnazije, 2011. godine upisala sam studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu gdje sam u srpnju 2014. godine stekla diplomu prvostupnice edukacije matematike.

Nakon završenog preddiplomskog studija upisala sam diplomski studij Financijska i poslovna matematika. Iste godine postala sam članicom studentske udruge eSTUDENT u Zagrebu. Radila sam kao demonstratorica iz kolegija 'Euklidski prostori' i 'Engleski jezik struke'.

Godinu dana kasnije otišla sam na program studentske razmjene na Tehničko Sveučilište u Dresdenu u Njemačkoj gdje sam između ostalog stekla i osnovna znanja njemačkog jezika. Uz to, tečno se služim engleskim i vrlo dobro talijanskim jezikom.

Radeći razne dinamične poslove uz studij, volontirajući i držeći instrukcije usavršila sam svoje komunikacijske i organizacijske vještine te stekla sposobnost rada u timu.

Tijekom studija koristila sam se programskim jezicima poput R-a i MATLAB-a, usvojila znanja iz MySQL-a i Latex-a te usavršila znanja iz Microsoft Office alata.

Od kolovoza 2016. godine zaposlena sam na mjestu konzultantice u odjelu za informacijske rizike unutar PwC kompanije.