

# Shema usrednjenja prijenosa za zakone sačuvanja

---

**Budiša, Ana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:187592>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-02**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ana Budiša

**SHEMA USREDNJENJA PRIJENOSA**  
**ZA ZAKONE SAČUVANJA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc.dr.sc. Boris Muha

Zagreb, lipanj 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

|   |            |
|---|------------|
| <b>Sadržaj</b>                                      | <b>iii</b> |
| <b>Uvod</b>   | <b>2</b>   |
| <b>1 Skalarni zakoni sačuvanja</b>                  | <b>3</b>   |
| 1.1 Motivacija . . . . .                            | 3          |
| 1.2 Klasična rješenja . . . . .                     | 5          |
| 1.3 Generalizirana rješenja . . . . .               | 10         |
| 1.4 Entropijski uvjeti . . . . .                    | 14         |
| <b>2 Shema usrednjenja prijenosa</b>                | <b>22</b>  |
| 2.1 Geometrijska konstrukcija usrednjenja . . . . . | 22         |
| 2.2 Transport-kolaps operator . . . . .             | 26         |
| 2.3 Svojstva transport-kolaps operatora . . . . .   | 29         |
| 2.4 Kinetička formulacija . . . . .                 | 30         |
| <b>3 Implementacija i primjeri</b>                  | <b>34</b>  |
| <b>Bibliografija</b>                                | <b>42</b>  |

# Uvod

Parcijalne diferencijalne jednačbe jedne su od najvažnijih oblika jednačbi koje matematičari promatraju i analiziraju. Posebno, parcijalne diferencijalne jednačbe prvog reda opisuju mnoge fizikalne probleme i stoga je bitno uvesti potrebnu teoriju za postojanje i jedinstvenost rješenja tih jednačbi. U ovom radu promatramo poseban slučaj tih jednačbi - *skalarne zakone sačuvanja*. Prirodno je tražiti glatka rješenja zakona sačuvanja, no pokazuje se da se s vremenom u rješenju mogu javiti singulariteti. Takva rješenja potrebno je pravilno interpretirati pa se nameće proširivanje koncepta rješenja na tzv. *slaba rješenja* - rješenja u smislu distribucija. Ovakvim poopćenjem možemo izgubiti bitno svojstvo jedinstvenosti rješenja te je zato potrebno uvesti određene uvjete na rješenje kako bismo odabrali pravo rješenje koje dobro opisuje promatrani fizikalni problem. Takve uvjete zovemo *entropijskim uvjetima*, a pripadna rješenja *entropijskim (dopustivim) rješenjima*.

Klasična metoda rješavanja zakona sačuvanja je *metoda karakteristika*. Međutim, ova metoda nakon određenog vremena može dati netočno višeznačno rješenje. Unatoč tome, metodom koju ćemo izvesti u ovom radu ipak možemo takvo rješenje *usrednjiti* tako da dobijemo točno entropijsko rješenje. Shema usrednjenja može se zadati geometrijski pravilom jednakih površina, ali i analitički definiranjem operatora koji djeluje na početni uvjet zakona sačuvanja.

Budući da su skalarni zakoni sačuvanja u pravilu nelinearne jednačbe, teže ih je numerički implementirati nego neke druge linearne jednačbe. Zbog toga ćemo izvesti modifikaciju sheme usrednjenja kojom ćemo prvo linearizirati početni problem i zatim primijeniti usrednjenje prikladnim definiranjem operatora usrednjenja. Linearizaciju vršimo uvođenjem funkcija (Kružkovljevih) entropija i dodatne (kinetičke) varijable u jednačbu te deriviranjem po toj varijabli kako bismo dobili kinetičku formulaciju početnog problema zakona sačuvanja. Cijena linearizacije je dodavanje još jedne prostorne dimenzije u jednačbu. Dobivenu linearnu jednačbu je lako numerički implementirati preko poznatih metoda konačnih diferencija prvog reda - Lax-Friedrichsova metoda i upwind metoda.

Metodu smo primijenili na najpoznatijim primjerima zakona sačuvanja - (neviskozna) Burgersova jednačba i Buckley-Leverettova jednačba. Burgersova jednačba opisuje gibanje čestica fluida bez međusobne interakcije i bez utjecaja vanjskih sila, dok Buckley-Leverettova jednačba opisuje dvofazni tok fluida kroz poroznu sredinu. Kao početni uvjet

za obje jednačbe zadan je Riemannov problem s dva različita stanja. Zbog određenih svojstava funkcija toka (fluksa), ove jednačbe pokazuju različito ponašanje rješenja stvarajući šokove i/ili razrjeđujuće valove.

# Poglavlje 1

## Skalarni zakoni sačuvanja

### 1.1 Motivacija

Prije nego što uvedemo definiciju skalarnog zakona sačuvanja, promotrimo sljedeći problem. Promotrimo medij u jednoj prostornoj dimenziji bez utjecaja vanjskih sila u kojem sastavne čestice međusobno ne djeluju. Neka je  $u(t, x)$  brzina čestice koja se u trenutku  $t$  nalazi u točki  $x$ . Također, neka  $x = \phi(t)$  označava trajektoriju gibanja te čestice. Tada je njena brzina  $\dot{\phi}(t) = u(t, \phi(t))$ . Budući da smo pretpostavili da među česticama nema interakcije niti da na njih djeluju vanjske sile, tada po drugom Newtonovom zakonu akceleracija svake čestice je jednaka nuli:

$$0 = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d}{dt}u(t, \phi(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\dot{\phi} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u.$$

Dakle, jednačba gibanja čestica glasi

$$u_t + uu_x = 0 \tag{1.1}$$

i naziva se *neviskozna Burgersova jednačba*. Primijetimo da jednačbu možemo zapisati u obliku:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0.$$

To nam daje ideju generalizacije ove jednačbe u oblik

$$u_t + (f(u))_x = 0 \tag{1.2}$$

gdje je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dovoljno glatka funkcija. Također, prirodno je generalizirati jednačbu u više dimenzija.

**Definicija 1.1.1.** *Skalarni zakon sačuvanja je kvazilinearna jednačba prvog reda oblika*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} f(u) = 0 \quad (1.3)$$

gdje je  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  nepoznata te  $f = (f_1, \dots, f_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  poznata funkcija koju nazivamo fluks.

Kao što i sam naziv kaže, navedena jednačba upućuje da određena veličina ostaje sačuvana, odnosno da se ona ne gubi u promatranom prostoru i vremenu. Naime, pretpostavimo li da su funkcije  $u$  i  $f$  iz jednačbe (1.2) dovoljno glatke i integriramo li jednačbu na nekom intervalu  $[a, b]$ , dobivamo

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(t, x) dx = \int_a^b \frac{du(t, x)}{dt} dx = - \int_a^b f(u(t, x))_x dx = f(u(t, a)) - f(u(t, b)).$$

Dakle, promjena ukupne vrijednosti veličine  $u$  u prostoru može se dogoditi samo zbog toka na granici prostora.

Skalarni zakoni sačuvanja opisuju razne fizikalne pojave toka u različitim sredinama, poput toka fluida u poroznoj sredini ili protoka vozila na cesti, koje daju poznate fizikalne identitete poput zakona sačuvanja mase, količine gibanja ili energije. Jednu od takvih pojava modelira *Buckley-Leverettova jednačba* koja opisuje dvofazni tok nemješivih fluida kroz poroznu sredinu u kojoj su kapilarne sile zanemarive. Neka  $s$  predstavlja zasićenje jednog fluida u drugom. Pretpostavimo li da je poroznost sredine konstantna i jednaka 1, dobivamo zakon sačuvanja

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0$$

gdje je fluks dan s

$$f(s) = \frac{k_{ra}(s)/\mu_a}{k_{ra}(s)/\mu_a + k_{rb}(s)/\mu_b}.$$

Za fluide  $a$  i  $b$  veličina  $\mu$  predstavlja viskoznost, a  $k_r$  relativnu poroznost. Primjer relativnih poroznosti su funkcije

$$k_{ra}(s) = s^2 \quad \text{i} \quad k_{rb}(s) = (1 - s)^2$$

pa fluks ima oblik

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + c(1 - s)^2}$$

gdje je  $c = \mu_a/\mu_b$ . Više o Buckley-Leverettovoj jednačbi govorit ćemo u Poglavlju 3.



## 1.2 Klasična rješenja

U ovom dijelu, promatrat ćemo jednodimenzionalni slučaj skalarnog zakona sačuvanja (1.2) s početnim uvjetom

$$u|_{t=0} = u_0(x) \quad (1.4)$$

na pruzi

$$P_T = \{(t, x) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$$

u pretpostavku da je  $f \in C^2$ . Pretpostavimo da imamo glatko rješenje  $u = u(t, x)$  ove Cauchyjeve zadaće, to jest  $u \in C^1(P_T)$ .

**Propozicija 1.2.1.** *Rješenje  $u = u(t, x)$  inicijalnog problema (1.2)-(1.4) je konstantno na integralnim krivuljama obične diferencijalne jednačbe*

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(t, x)). \quad (1.5)$$

*Dokaz.* Deriviranjem funkcije  $u = u(t, x)$  u smjeru integralnih krivulja  $(t, x(t))$  dobivamo

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = u_t + u_x \cdot f'(u) = u_t + (f(u))_x = 0.$$

□

Budući da je  $u$  konstantno po navedenim integralnim krivuljama, tada su rješenja jednačbe (1.5) linearne funkcije  $x = tf'(u) + C$ . Slijedi da je u bilo kojoj točki  $(t_0, x_0)$  vrijednost rješenja  $u(t_0, x_0)$  jednačbe (1.2) očuvana na čitavom pravcu

$$x - f'(u(t_0, x_0))t = C = x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0.$$

Produžimo li ovaj pravac do sjecišta s x-osi u točki  $(0, y_0)$ , vrijednost rješenja u toj točki je  $u_0(y_0)$ . Dakle, budući da je  $y_0 = x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0$  dobivamo

$$u(t_0, x_0) = u_0(y_0) = u_0(x_0 - f'(u(t_0, x_0))t_0).$$

Točka  $(t_0, x_0)$  je bila proizvoljna pa slijedi da rješenje Cauchyjeve zadaće (1.2)-(1.4) zadovoljava

$$u = u_0(x - f'(u)t). \quad (1.6)$$

Naš problem (1.2)-(1.4) možemo rješavati i preko *metode karakteristika*.

**Definicija 1.2.2.** *Za kvazilinearnu jednačbu*

$$a_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + a_d(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_d} = f(x, u) \quad (1.7)$$

definiramo karakteristični sustav kao sustav običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_d, u), \\ \dots \\ \dot{x}_d = a_d(x_1, \dots, x_d, u), \\ \dot{u} = f(x_1, \dots, x_d, u). \end{cases} \quad (1.8)$$

Rješenja  $(x, u) = (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^{d+1}$  navedenog sustava nazivamo karakteristikama, a vektor koeficijenata  $(a_1(x, u), \dots, a_d(x, u), f(x, u))$  karakterističnim poljem.

Neka hiperploha  $M \subset \mathbb{R}^{d+1}$  predstavlja graf funkcije  $u = u(x)$ . Tada je vektor normale u koordinatama te plohe zadane u koordinatama  $(x, u)$  upravo  $(\nabla_x u, -1)$ , što znači da kvazilinearna jednadžba (1.7) daje da je karakteristično polje jednadžbe ortogonalno na normalni vektor hiperplohe  $M$ .

**Teorem 1.2.3.** *Funkcija  $u = u(x)$  je rješenje jednadžbe (1.7) ako i samo ako je u svim svojim točkama graf  $M = \{(x, u(x))\}$  tangencijalan na karakteristično polje  $(a_1, \dots, a_d, f)$ .*

**Korolar 1.2.4.** *Graf rješenja  $u = u(x)$  jednadžbe (1.7) razapet je karakteristikama.*

Riješimo pomoću karakteristika našu Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = u_t + f'(u)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < T, \\ u = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \quad t = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Karakteristični sustav ima oblik

$$\begin{cases} \dot{t} = 1, \\ \dot{x} = f'(u), \\ \dot{u} = 0. \end{cases}$$

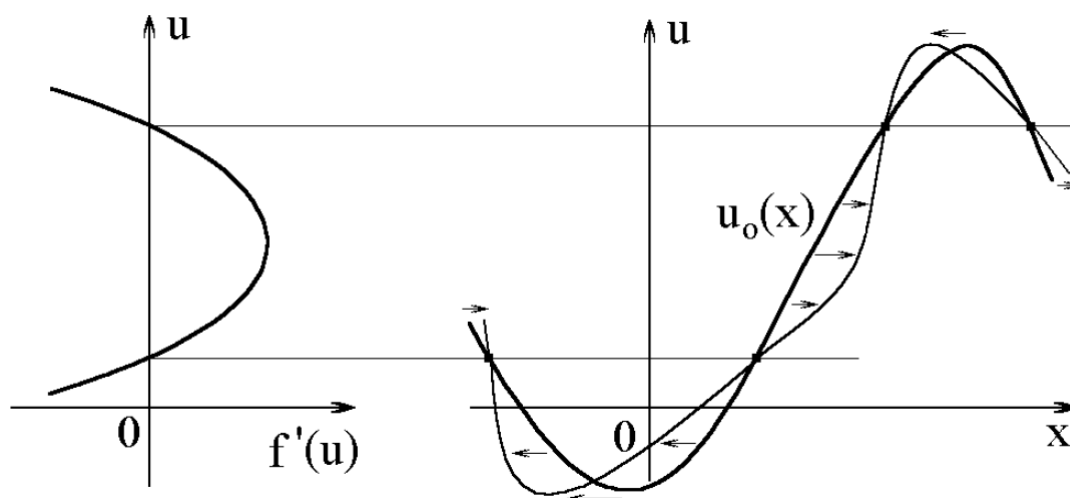
Prva jednadžba u gornjem sustavu, zajedno s početnim uvjetom  $t(0) = 0$  daje da se varijabla podudara s vremenskom varijablom jednadžbe u zadaći (1.9) pa je možemo zanemariti. Uz ostale početne uvjete dobivene iz početnih uvjeta u (1.9), imamo sustav

$$\begin{cases} \dot{x} = f'(u), & x(0) = y, \\ \dot{u} = 0, & u(0) = u_0(y). \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava, to jest karakteristike Cauchyjeve zadaće (1.9) su pravci

$$u = u_0(y), \quad x = y + f'(u_0(y))t \quad (1.10)$$

u trodimenzionalnom prostoru varijabli  $(t, x, u)$ . Unija karakteristika, počevši od inicijalnih uvjeta, čini graf rješenja  $u = u(t, x)$ . Stoga rješenje u različitim vremenskim trenucima  $t > 0$  možemo konstruirati na sljedeći način: graf funkcije početnog uvjeta  $u_0 = u_0(x)$  transformiramo tako da svaku točku  $(x, u)$  vodoravno pomaknemo (u smjeru x-osi) brzinom  $f'(u)$  ulijevo ili udesno ovisno o predznaku brzine. Ako je  $f'(u) = 0$ , tada imamo stacionarno rješenje, to jest točke  $(x, u)$  se ne pomiču (primijetimo da tada jednačba glasi  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ).



Slika 1.1: Evolucija grafa početnog uvjeta.

Očito, što je  $f'(u)$  veći, točke se brže pomiču (v. Slika 1.2). Budući da brzina ovisi o rješenju  $u$  koje onda ovisi o prostornoj varijabli, može se dogoditi da se neke točke puno brže pomiču od drugih točaka, čime u određenom trenutku  $T > 0$  može doći do toga da transformirana krivulja rješenja prestane predstavljati graf neke glatke funkcije  $u(T, \cdot)$ . Dakle, rješenje u nekom trenutku  $T$  može poprimiti više vrijednosti, odnosno može se dogoditi prekid u rješenju i od trenutka  $T$  rješenje više ne možemo promatrati u klasičnom smislu.

Izračunajmo maksimalnu vrijednost trenutka  $T > 0$  do kojeg jednačba (1.9) ima glatko rješenje na pruzi  $P_T$ . Odnosno, tražimo najveću vrijednost  $T$  takvu da jednačba

$$\Phi(t, x, u) := u - u_0(x - f'(u)t) = 0$$

u nepoznanici  $u$  ima jedinstveno rješenje za svaki  $t \in [0, T)$  i svaki  $x \in \mathbb{R}$ . U  $t = 0$  funkcija  $\Phi(0, x, u)$  je rastuća u varijabli  $u$  pa po teoremu o implicitnoj funkciji vrijednost  $T$  možemo

dobiti iz relacije

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(t, x, u) = 1 + u'_0(x - f'(u)t) \cdot f''(u) \cdot t > 0,$$

za sve  $(t, x, u)$  takve da  $\Phi(t, x, u) = 0$  i  $t \in [0, T)$ .

Pretpostavimo li  $|f''(u)| \leq L$  na području vrijednosti funkcije  $u_0$  i  $|u'_0| \leq K$ , tada je gornja nejednakost zadovoljena za sve  $t$  takve da  $1 - KL \cdot t > 0$ . Dakle, klasično rješenje (1.9) postoji na pruzi

$$0 < t < \frac{1}{KL}.$$

Ezgaktnu vrijednost trenutka  $T$  možemo dobiti na sljedeći način: Neka je  $y = x - f'(u)t$  (tada je  $u = u_0(y)$ ). Slijedi da je

$$1 + u'_0(y) \cdot f'(u_0(y)) \cdot t > 0.$$

Dakle,

$$T = \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y) \cdot f'(u_0(y))]} = \frac{1}{-\inf_{y \in \mathbb{R}} [\frac{d}{dy} f'(u_0(y))]} \quad (1.11)$$

ako je navedeni infimum negativan. Ako je  $\inf_{y \in \mathbb{R}} [u'_0(y) \cdot f'(u_0(y))] \geq 0$ , tada je  $T = +\infty$ , odnosno klasično rješenje postoji za sve  $t > 0$ .

**Primjer 1.2.5.** Promotrimo sljedeću Cauchyjevu zadaću s fluksom  $f(u) = u^2/2$  (Burger-ova jednačnja):

$$u_t + uu_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (1.12)$$

gdje je  $u_0$  dan s

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3, \\ \psi_1(x) & -3 < x < -1, \\ -x & -1 \leq x \leq 1, \\ \psi_2(x) & 1 < x < 3, \\ -2 & x \geq 3. \end{cases}$$

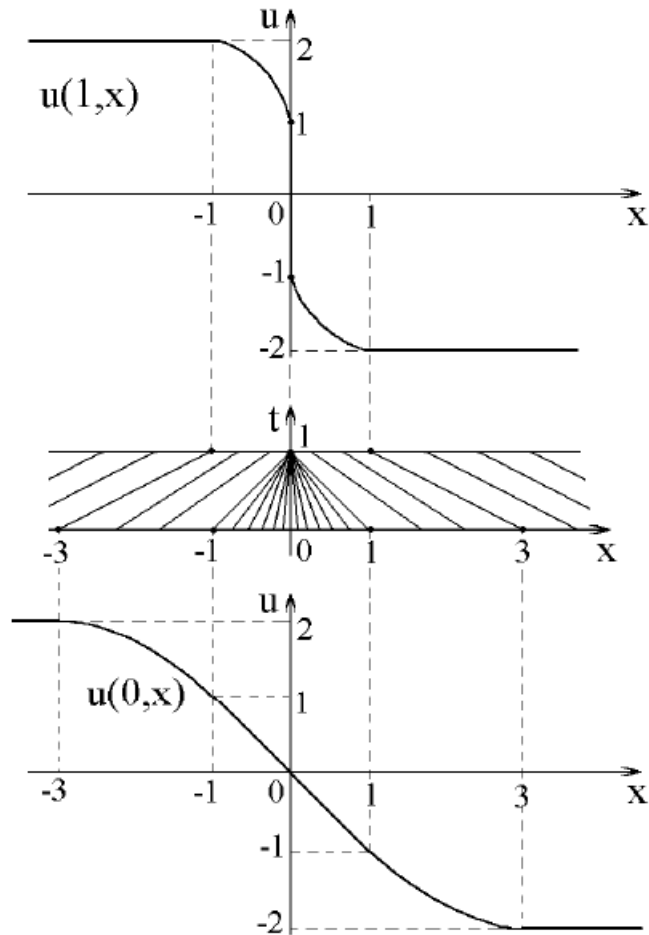
Funkcije  $\psi_1$  i  $\psi_2$  su neprekidne i neprekidno povezuju konstantne vrijednosti (za  $|x| \geq 3$ ) s linearnom funkcijom (za  $|x| \leq 1$ ). Bez smanjenja općenitosti možemo odabrati da za takve funkcije  $\psi_1$  i  $\psi_2$  vrijedi  $-1 < \psi'_i \leq 0$ ,  $i = 1, 2$  na  $1 < |x| < 3$  (v. Slika 1.2.5).

Uvažavajući ove pretpostavke imamo da je  $|u'_0| \leq 1$  i  $f'' = 1$ , po prethodnom dobivamo da postoji jedinstveno glatko rješenje  $u = u(t, x)$  na  $0 < t < 1$ . Rješenje konstruiramo kao pravce

$$y = x - u_0(y)t, \quad (1.13)$$

iz svake točke  $(t, x) = (0, y)$  na pravcu  $t = 0$  i na njima definiramo rješenje (konstantno po karakteristikama)

$$u(t, x) = u_0(y).$$



Slika 1.2: Karakteristike iz primjera 1.2.5 - formiranje prekida.

Za  $y \leq -3$  iz (1.13) dobivamo familiju paralelnih pravaca oblika  $x = 2t + y$  pa je rješenje za  $0 \leq t \leq 1$

$$u(t, x) = 2, \quad x \leq 2t - 3.$$

Analogno, za  $y \geq 3$  dobivamo familiju pravaca  $x = -2t + y$  i rješenje za  $0 \leq t \leq 1$

$$u(t, x) = -2, \quad x \leq 3 - 2t.$$

Za  $|y| \leq 1$  odgovarajući pravci su oblika  $x = y(1 - t)$  i na njima je rješenje dano s  $u = -y$ ,

tj. za  $0 \leq t \leq 1$

$$u(t, x) = \frac{-x}{1-t}, \quad |x| \leq 1-t.$$

Na skupu  $1-t < |x| < 3-2t$  za  $0 \leq t \leq 1$ , ne možemo dati eksplicitnu formulu za karakteristike bez da točno navedemo funkcije  $\psi_i$ , ali budući da smo pretpostavili da  $|\psi_i| < 1$ , to garantira da se pravci oblika (1.13) za  $y \in \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle$  neće sjeći unutar pruge  $0 \leq t \leq 1$ .

Pogledajmo što se događa kada je  $t = 1$ . Za  $|y| > 1$  kroz svaku točku  $(t, x) = (1, x)$ ,  $x \neq 0$  prolazi točno jedan pravac dan formulom (1.13) i on prenosi vrijednost rješenja  $u = u_0(y)$  do točke  $(1, x)$ . Ako  $x \rightarrow 0^-$ , tada  $y \rightarrow -1$ , a ako  $x \rightarrow 0^+$ , tada  $y \rightarrow 1$  (v. Slika 1.2.5). Dakle, za  $t = 1$  imamo glatku funkciju  $x \mapsto u(1, x)$  na  $x < 0$  i  $x > 0$ , dok u  $x = 0$  ima prekid:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} u(1, x) = \lim_{y \rightarrow \pm 1} u_0(y) = \mp 1.$$

Također, u točki  $(1, 0)$  različite karakteristike prenose različite vrijednosti rješenja  $u$ . Primijetimo da svi pravci oblika (1.13) za  $|y| \leq 1$  prolaze kroz  $(1, 0)$  i tako donose različite vrijednosti rješenja  $u = -y$  te tako stvaraju prekid.

U ovom primjeru smo pokazali kako, iako imamo glatki početni uvjet, u konačno vrijeme izgubimo regularnost rješenja. To nam nameće da uvedemo slabije pretpostavke na rješenje.

### 1.3 Generalizirana rješenja

Kao što smo vidjeli u prošlom primjeru, nakon nekog trenutka  $T$  ne možemo više promatrati rješenje u klasičnom smislu. Općenito, u stvarnim problemima možemo se susresti s početnim uvjetom koji sadrži prekide i ne možemo očekivati da će se oni izgaditi s vremenom. Zbog toga, generaliziramo klasično rješenje skalarnog zakona sačuvanja na klasu funkcija koje mogu sadržavati singularitete.

Pretpostavimo da je  $u = u(t, x) \in C^1(P_T)$  klasično rješenje skalarnog zakona sačuvanja

$$u_t + (f(u))_x = 0 \tag{1.14}$$

gdje su  $f \in C^1(\mathbb{R})$  i  $P_T = \{(t, x) : x \in \mathbb{R}, 0 < t < T\}$ . Pomnožimo (1.14) s test funkcijom  $\phi \in C_c^\infty(P_T)$  i integrirajmo po  $P_T$ . Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{P_T} [u_t + (f(u))_x] \phi dt dx \\ &= \int_{P_T} u_t \phi dt dx + \int_{P_T} (f(u))_x \phi dt dx \\ &= \int_{\partial P_T} [(u + f(u)) \cdot \nu] \phi dS - \int_{P_T} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dt dx \\ &= - \int_{P_T} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dt dx, \end{aligned}$$

gdje je  $\nu$  jedinična vanjska normala na rub  $\partial P_T$ .

**Definicija 1.3.1.** Za funkciju  $u = u(t, x)$  na domeni  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  kažemo da je generalizirano ili slabo rješenje skalarnog zakona sačuvanja (1.14) ako ono zadovoljava integralnu jednakost

$$\int_{\Omega} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dt dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.15)$$

Ovom definicijom smo izbjegli pretpostavku glatkoće na slabo rješenje. Primijetimo da ako imamo funkciju  $u \in C^1(\Omega)$  koja zadovoljava (1.15), tada prijašnjih računom u obratnom smjeru dobivamo da je  $u$  rješenje jednadžbe (1.14). Dakle, klasično rješenje skalarnog zakona sačuvanja je ujedno i slabo rješenje, dok obratno općenito ne vrijedi. Također, ako neprekidna funkcija  $[u_t + (f(u))_x]$  zadovoljava

$$\int_{\Omega} [u_t + (f(u))_x] \phi dt dx = 0 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

slijedi da je  $u_t(t, x) + (f(u(t, x)))_x = 0$  za svaki  $(t, x) \in \Omega$ .

Vratimo se na Primjer 1.2.5 i pokušajmo konstruirati rješenje nakon trenutka  $t = 1$ . Svaka karakteristika koja ulazi u točku  $(t, x) = (1, 0)$  prenosi različitu vrijednost rješenja i trebamo odabrati koja od njih se prenosi za  $t > 1$ . Promotrimo to u općem slučaju za zadaću (1.9). Da bismo odredili kako se rješenje prenosi nakon prekida, moramo uvesti dodatne uvjete koji se prirodno nameću ako razmislimo o fizikalnoj interpretaciji naše početne zadaće (zakon sačuvanja mase). Takvi uvjeti se zovu *Rankine-Hugoniotovi uvjeti* (*RH uvjeti*) i dani su u sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 1.3.2.** Neka je  $\Gamma \subset \Omega$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , krivulja koja je graf glatke funkcije  $x = x(t)$  i neka je  $u = u(t, x)$  slabo rješenje jednadžbe (1.14) na  $\Omega$  takvo da ima prekid na krivulji  $\Gamma$ , ali je glatko u  $\Omega$  s obje strane krivulje  $\Gamma$ . Tada  $u$  zadovoljava

$$\sigma = \frac{dx}{dt} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (1.16)$$

na krivulji  $\Gamma$ , gdje su  $u^+(t)$  i  $u^-(t)$  odgovarajući limesi rješenja s lijeva i zdesna krivulje  $\Gamma$ .

*Dokaz.* Promotrimo jednadžbu na intervalu  $[a, b]$  po prostornoj varijabli  $x$ . Masa na tom intervalu prije prekida je dana s

$$M(t) = \int_a^b u(t, x) dx \approx u^+(t)(b - a) = u^+(t)[x(t + \Delta t) - x(t)],$$

a poslije prekida

$$M(t + \Delta t) = \int_a^b u(t + \Delta t, x) dx \approx u^-(t + \Delta t)(b - a) = u^-(t + \Delta t)[x(t + \Delta t) - x(t)],$$

gdje je  $\Delta t$  jako malen. Promjena mase na tom intervalu je

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [u^-(t + \Delta t) - u^+(t)] \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= [u^-(t) - u^+(t)] \frac{dx}{dt},\end{aligned}$$

dok je tok mase u svakom  $\tau \in \langle t, t + \Delta t \rangle$  dan s

$$\frac{dM}{dt} = f(u(\tau, a)) - f(u(\tau, b)) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} f(u^-(t)) - f(u^+(t)).$$

Izjednačavanjem gornjih dviju jednadžbi dobivamo

$$f(u^-(t)) - f(u^+(t)) = [u^-(t) - u^+(t)] \frac{dx}{dt}.$$

□

Ova propozicija daje nužan uvjet za slabo rješenje skalarnog zakona sačuvanja.

**Definicija 1.3.3.** *Generalizirano prekidno rješenje jednadžbe (1.14) zovemo udarni val.*

Vrijednost  $\sigma$  iz RH uvjeta predstavlja brzinu širenja udarnog vala s fluksom  $f = f(u)$  i graničnim vrijednostima  $u^+$  i  $u^-$  generaliziranog rješenja  $u = u(t, x)$  na krivulji prekida. Primijetimo da ako je  $u$  neprekidno na krivulji  $\Gamma$ , a prekidi se javljaju samo u derivacijama  $u_t$  i  $u_x$ , tada je RH uvjet također zadovoljen (skok u rješenju  $u^+ - u^-$  i u fluksu  $f(u^+) - f(u^-)$  su jednaki nuli). Dakle, uvođenjem RH uvjeta ne mijenjamo činjenicu da je bilo koje klasično (neprekidno) rješenje jednadžbe (1.14) generalizirano rješenje. Takvi prekidi koji se javljaju samo u derivacijama rješenja zovu se *slabi prekidi*.

Primijetimo još jednu zanimljivu posljedicu. Pustimo li formalno limes  $u^\pm \rightarrow u$  u jednakosti (1.16), dobivamo

$$\frac{dx}{dt} = f'(u(t, x))$$

na krivulji  $\Gamma = \{(t, x) : x = x(t)\}$ . Ovo znači da se slabi prekidi prenose po karakteristikama. Izvedimo to detaljnije. Neka  $\Gamma$  razdvaja dva klasična rješenja  $u$  i  $v$ . Tada vrijedi

$$u(t, x(t)) = v(t, x(t)).$$

Deriviranjem po  $t$  dobivamo

$$u_t(t, x(t)) + u_x(t, x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} = v_t(t, x(t)) + v_x(t, x(t)) \cdot \frac{dx}{dt}$$



gdje su  $u_t, u_x, v_t, v_x$  odgovarajući limesi derivacija oba rješenja u točkama  $(t, x)$  na krivulji prekida  $\Gamma$ . Izrazimo li parcijalne derivacije  $u_t$  i  $v_t$  iz početne jednadžbe (1.14) i uzmemo li u obzir da su rješenja jednaka u svim točkama  $(t, x)$ , imamo

$$[u_x(t, x(t)) - v_x(t, x(t))] \left[ \frac{dx}{dt} - f'(u(t, x(t))) \right] = 0.$$

Budući da na  $\Gamma$  rješenja imaju slabi prekid, tada je  $u_x(t, x) \neq v_x(t, x)$  pa slijedi tvrdnja.

Proširenjem koncepta rješenja s klasičnog na generalizirano, iako nam generalno olakšava što ne zahtijevamo glatkoću rješenja, ipak možemo izgubiti važna svojstva poput jedinstvenosti rješenja. Pokažimo to na jednostavnom primjeru.

**Primjer 1.3.4.** *Promotrimo opet jednadžbu*

$$u_t + uu_x = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (1.17)$$

*s početnim uvjetom*

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Ovakvu zadaću zovemo Riemannovim zadaćom. Karakteristike su dane formulom  $x = y + u_0(y)t$  imamo dva slučaja. Ako je  $y < 0$ , tada su karakteristike oblika  $x = y$ , a ako je  $y > 0$ , tada je  $x = y + t$ . Dobivene karakteristike se ne sijeku, ali unatoč tome nastaje problem - imamo područje u kojem nemamo nikakve podatke o rješenju. To područje možemo popuniti na više načina (v. Slika 1.3.4). Jedna mogućnost je

$$u_1(t, x) = \begin{cases} 0 & x < t/2, \\ 1 & x > t/2. \end{cases} \quad (1.19)$$

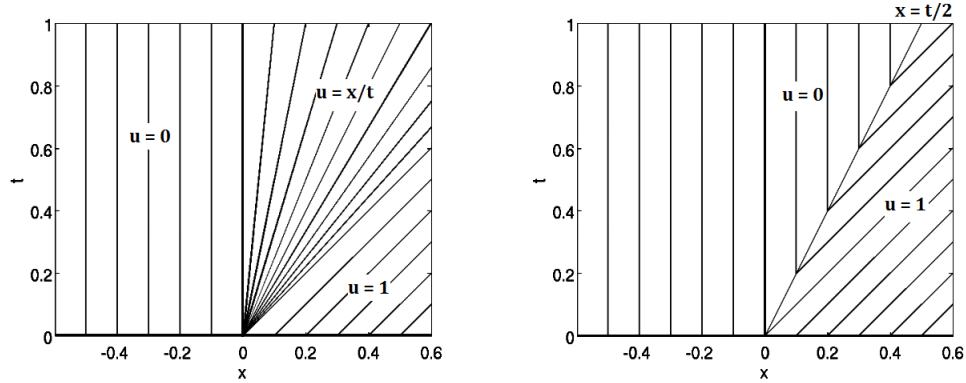
Ovakvo rješenje daje klasično rješenje na objema stranama krivulje  $x(t) = \frac{t}{2}$ , a na toj krivulji je zadovoljen RH uvjet. Druga mogućnost je

$$u_2(t, x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x/t & 0 < x < t, \\ 1 & x \geq t. \end{cases} \quad (1.20)$$

Ovakvo rješenje čini razrjeđujući val. Primijetimo da smo u ovom slučaju dobili neprekidno rješenje.

Sada se nameće pitanje - koje od ovih rješenja uzeti u obzir? Budući da skalarni zakoni sačuvanja opisuju fizikalne procese, očekuje se da će isti imati jedinstveno rješenje.

Kao što smo tvrdili, u ovom primjeru smo pokazali kako generalizirana rješenja nisu nužno jedinstvena. Kako bismo osigurali jedinstvenost, moramo uvesti dodatne uvjete na rješenja - entropijske uvjete.



Slika 1.3: Karakteristike za rješenja (1.20) i (1.19), respektivno

## 1.4 Entropijski uvjeti

### Uvjet dopustivosti - konveksni fluks

Pretpostavimo sljedeće uvjete na fluks i početni uvjet:

$$f'' \geq 0, \quad f \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_0 \in C^2(\mathbb{R}),$$

Želimo istražiti svojstva glatkih rješenja (za  $t < T$ , gdje je  $T$  maksimalna vrijednost vremena za koje imamo klasično rješenje na intervalu  $[0, T)$ ) koja se neće izgubiti dok se približavamo kritičnom trenutku  $t = T$ . Ta svojstva su bitna jer će nam pomoći okarakterizirati singularitete (prekide) koji se javljaju u rješenju  $u$  nakon trenutka  $t = T$ . Definirajmo  $p = u_x$  i derivirajmo

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

po  $x$ . Imamo

$$0 = p_t + f'(u)p_x + f''(u)p^2 \geq p_t + f'(u)p_x.$$

Na karakteristikama  $x = x(t)$  vrijedi  $\dot{x} = f'(u(t, x(t)))$  pa nejednakost postaje

$$0 \geq p_t + \frac{dx}{dt}p_x = \frac{dp(t, x(t))}{dt}.$$

Zaključujemo da funkcija  $p$  ne raste po karakteristikama  $x = x(t)$ , iz čega slijedi

$$p(t, x(t)) \leq p(0, x(0)) = u_x(0, x(0)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} u'_0(x) =: C_0.$$

za  $t \in [0, T)$ . Za vrijeme  $t = T$  parcijalne derivacije  $u_x(T, x)$  nisu definirane za sve vrijednosti  $x$  pa navedenu nejednakost možemo pisati o obliku

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} \leq C_0 \quad \forall x_1, x_2. \quad (1.21)$$

Iz ovoga slijedi da za  $x_1 < x_2$  imamo  $u(t, x_2) - u(t, x_1) \leq C_0(x_2 - x_1)$ . Pustimo li  $x_2 \rightarrow x^+$  i  $x_1 \rightarrow x^-$  (gdje je  $x$  točka prekida funkcije  $u(T, \cdot)$ ), dobivamo

$$u^+ = u(t, x^+) < u(t, x^-) = u^-. \quad (1.22)$$

Neka vrijedi (1.22) u svim točkama prekida generaliziranog rješenja  $u$ . Ovaj uvjet zovemo *uvjet dopustivosti* ili *entropijski uvjet* na prekide (skokove) generaliziranog (po dijelovima glatkog) rješenja. Kažemo da je generalizirano rješenje *dopustivo* ako je na svakoj krivulji prekida zadovoljen uvjet dopustivosti.

Postoji fizikalna interpretacija ovog uvjeta u slučaju kada je  $f'$  strogo monotona (rastuća). Na bilo koju točku na krivulji dopustivih prekida  $x = x(t)$  neka su dane brzine  $f'(u^-)$  i  $f'(u^+)$  na karakteristikama  $x = f'(u^\pm)t + C$  koje se u danoj točki prekida susreću. Promotrimo vrijednost  $\sigma = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+}$ . Zbog pretpostavki na glatkost funkcije  $f$ ,  $\sigma$  je jednaka  $f'(u^*)$  za neki  $u^*$  između  $u^+$  i  $u^-$ . Ove vrijednosti fluksa zadovoljavaju *Laxov uvjet dopustivosti* (*Laxov entropijski uvjet*)

$$f(u^+) < \sigma = \frac{f(u^-) - f(u^+)}{u^- - u^+} = f'(u^*) < f(u^-). \quad (1.23)$$

Zaista, ako je  $f$  strogo konveksna funkcija, tada je  $f'$  strogo rastuća i zadovoljen je uvjet  $u^+ < u^* < u^-$ .

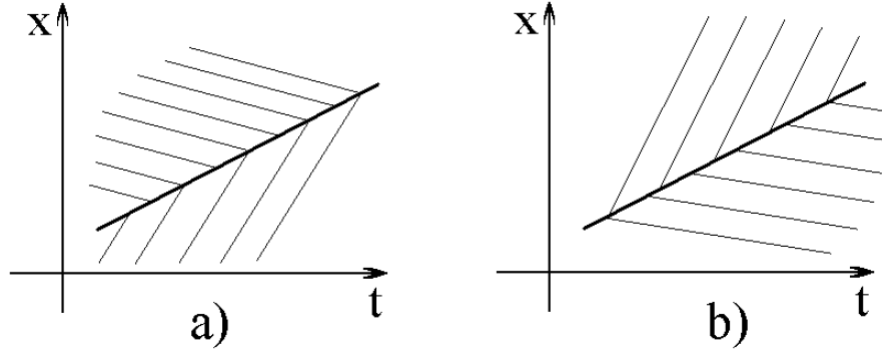
Grafički, možemo uočiti da kako vrijeme  $t$  raste, karakteristike ulaze u krivulju prekida s obje strane. S druge strane, situacija kada karakteristike počinju i izlaze iz krivulje prekida nije dopustiva. Skica se može vidjeti na Slici 1.4.

**Definicija 1.4.1.** *Kažemo da je generalizirano rješenje skalarnog zakona sačuvanja dopustivo entropijsko rješenje ako su svi prekidi dopustivi.*

## Metoda iščezavajuće viskoznosti

Entropijske uvjete možemo dobiti regularizacijom jednadžbe takozvanom *viskoznom perturbacijom*. Promatramo sljedeću jednadžbu

$$u_t^\varepsilon + (f(u^\varepsilon))_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon. \quad (1.24)$$



Slika 1.4: Laxovi entropijski uvjeti: a) dopustive i b) nedopustive krivulje prekida

Ideja je zakon sačuvanja predstavlja granični model ove jednadžbe kada je difuzijski član  $\varepsilon u_{xx}$  jako malen. U tom smislu, tražit ćemo rješenje zakona sačuvanja kao limes regularizirane jednadžbe (1.24) kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pretpostavimo da imamo *jednostavni val* dan formulom

$$u(t, x) = u^- + \frac{u^+ - u^-}{2} [1 + \operatorname{sgn}(x - \sigma t)] = \begin{cases} u^- & x < \sigma t, \\ u^+ & x > \sigma t, \end{cases} \quad (1.25)$$

gdje je  $\sigma = \textit{konst.}$  generalizirano rješenje jednadžbe (1.14). Za takvo rješenje nužno je i dovoljno da je zadovoljen RH uvjet

$$\sigma = \frac{dx}{dt} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \quad (1.26)$$

na krivulji prekida  $x(t) = \sigma t$ . Kažemo da rješenje  $u = u(t, x)$  oblika (1.25) zadovoljava *entropijski uvjet putujućeg vala* ako se može dobiti kao limes po točkama (za  $x \neq \sigma t$ ) rješenja  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t, x)$  jednadžbe (1.24) kada  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Uzimajući ovo u obzir, tražit ćemo rješenja jednadžbe (1.24) u obliku

$$u^\varepsilon(t, x) = v(\xi), \quad \xi = \frac{x - \sigma t}{\varepsilon}. \quad (1.27)$$

Uvrstimo li ovo u početnu jednadžbu, dobivamo

$$-\sigma v' + (f(v))' = v''. \quad (1.28)$$

S druge strane, kako smo i definirali, funkcija  $u^\varepsilon = v(\frac{x - \sigma t}{\varepsilon})$  konvergira po točkama prema funkciji  $u$  oblika (1.25) kada  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  ako i samo ako su zadovoljeni uvjeti

$$v(-\infty) = u^-, \quad v(+\infty) = u^+. \quad (1.29)$$

Integriramo li (1.27), imamo

$$v' = -\sigma v + f(v) + C = F(v) + C, \quad C = \text{konst.} \quad (1.30)$$

Vidimo da smo dobili običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda s glatkom desnom stranom  $F(v) + C$ . Tada rješenje gornje jednadžbe teži prema konstantnim stanjima  $u^-$  ( $\xi \rightarrow -\infty$ ) i  $u^+$  ( $\xi \rightarrow +\infty$ ) ako i samo ako zadovoljava

1.  $u^-$  i  $u^+$  su stacionarne točke, to jest zadovoljavaju

$$F(u^-) + C = F(u^+) + C = 0,$$

odnosno  $C = -F(u^+) = -F(u^-)$ . Raspišemo li to kao  $F(u^+) = F(u^-)$ , odnosno  $-\sigma u^+ + f(u^+) = -\sigma u^- + f(u^-)$ , dobivamo točno RH uvjet.

2. Ne postoji ni jedna stacionarna točka na intervalu između  $u^+$  i  $u^-$ . Štoviše, za svaki  $v$  između  $u^+$  i  $u^-$  treba vrijediti

- a) ako  $u^- < u^+$ , onda  $F(v) - F(u^-) > 0$ ;

- b) ako  $u^- < u^+$ , onda  $F(v) - F(u^+) < 0$ .

Ako su gornji uvjeti zadovoljeni, rješenja jednadžbe (1.28) su dana formulom

$$\int_{v_0}^v \frac{dw}{F(w) - F(u^-)} = \xi - \xi_0, \quad v_0 = \frac{u^+ + u^-}{2}.$$

Uvrstimo li  $F(v) = -\sigma v + f(v)$  u gornje uvjete, slijedi da je

$$f(v) > f(u^-) + \sigma(v - u^-), \quad \forall v \in \langle u^-, u^+ \rangle, \quad u^- < u^+,$$

$$f(v) < f(u^+) + \sigma(v - u^+), \quad \forall v \in \langle u^+, u^- \rangle, \quad u^+ < u^-.$$

Kombinirajući ova dva slučaja, možemo zapisati ekvivalentni oblik entropijskog uvjeta putujućeg vala

$$\begin{aligned} \sigma|v - u^-| &< \text{sgn}(v - u^-)(f(v) - f(u^-)), & \forall v \in \langle u^-, u^+ \rangle, & \quad u^- < u^+, \\ \sigma|v - u^+| &< \text{sgn}(v - u^+)(f(v) - f(u^+)), & \forall v \in \langle u^+, u^- \rangle, & \quad u^+ < u^-. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Pomoću ovog oblika uvjeta, motivirani smo izvesti takozvani *Kružkovljev entropijski uvjet* kojeg ćemo dalje koristiti. Slijedeće što želimo dobiti jest definiciju slabog rješenja koje u sebi već sadrži entropijski uvjet. Postupak koji slijedi motivirat će nas da formuliramo teorem egzistencije i jedinstvenosti generaliziranog entropijskog rješenja skalarnog zakona sačuvanja.

Neka je  $\eta(u)$  dovoljno glatka konveksna funkcija. Pomnožimo (1.24) prvo s  $\eta'(u)$  uzimajući u obzir:

$$\begin{aligned}\eta'(u)u_t &= \frac{\partial \eta(u(t, x))}{\partial t}, \\ f'(u)\eta'(u)u_x &= \int^u f'(\xi)\eta'(\xi)d\xi, \\ \eta'(u)u_{xx} &= (\eta(u))_{xx} - \eta''(u)(u_x)^2.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\eta_t + \left( \int^u f'(\xi)\eta'(\xi)d\xi \right) = \varepsilon(\eta(u))_{xx} - \varepsilon\eta''(u)(u_x)^2 \geq \varepsilon(\eta(u))_{xx}.$$

Pomnožimo li ovo s testnom funkcijom  $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$  i integriramo, parcijalnom integracijom slijedi

$$- \iint (\eta(u)\psi_t + q(u)\psi_x) dxdt \leq \varepsilon \iint \eta(u)\psi_{xx} dxdt, \quad (1.32)$$

gdje je  $q(u) = \int^u f'(\xi)\eta'(\xi)d\xi$ . U smislu distribucija, zapravo imamo

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \leq \varepsilon \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Pustimo li  $\varepsilon \rightarrow 0$ , zbog pretpostavke konveksnosti funkcije  $\eta$  vrijedi

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \leq 0.$$

Po uzoru na entropijske uvjete (1.31), želimo da je  $\eta$  oblika  $\eta(u) = |u - k|$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , no zbog pretpostavki regularnosti na  $\eta$  koristit ćemo

$$\eta_\delta(u) = \sqrt{(u - k)^2 + \delta^2}, \quad \delta > 0.$$

Uvrstimo li  $\eta_\delta$  u  $q'$  i pustimo li  $\delta \rightarrow 0$ , dobivamo

$$q(u) = \operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)).$$

**Definicija 1.4.2.** Kažemo da je  $u = u(t, x)$  Kružkovljevo entropijsko rješenje zadane (1.2)–(1.4) ako

1. vrijedi nejednakost

$$\frac{\partial}{\partial t}|u - k| + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)) \leq 0 \quad (1.33)$$

u smislu distribucija za svaki  $k \in \mathbb{R}$ , odnosno

$$\iint |u - k| \psi_t + \operatorname{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)) \psi_x \geq 0, \quad (1.34)$$

za svaki  $k \in \mathbb{R}$  i svaku nenegativnu test funkciju  $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$ ;

2. vrijedi  $u(t, \cdot) \rightarrow u_0$  kada  $t \rightarrow 0^+$  u topologiji prostora  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , odnosno

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_a^b |u(t, x) - u_0(x)| dx = 0, \quad \forall [a, b] \subset \mathbb{R}. \quad (1.35)$$

**Propozicija 1.4.3.** *Ako je funkcija  $u$  generalizirano entropijsko rješenje zadatke (1.2)–(1.4) u smislu definicije 1.4.2, tada je u generalizirano rješenje jednadžbe u smislu (1.15).*

*Dokaz.* Primijetimo da je svaka konstantna funkcija  $u \equiv k$  klasično rješenje jednadžbe (1.2) pa je tako i generalizirano rješenje iste jednadžbe. Dakle, za svaku testnu funkciju  $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$  vrijedi

$$\int (k \psi_t + f(k) \psi_x) dx dt = 0.$$

Uzmimo da je  $k > \operatorname{ess\,sup}_{(t,x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}} u(t, x)$  i uvrstimo u (1.34):

$$\int ((k - u) \psi_t + (f(u) - f(k)) \psi_x) dx dt \geq 0$$

za sve nenegativne  $\psi$ . Kombiniramo li ova dva izraza, dobivamo

$$- \int (u \psi_t + f(u) \psi_x) \geq 0.$$

Na isti način, uzimajući  $k < \operatorname{ess\,inf}_{(t,x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}} u(t, x)$  dobivamo

$$\int (u \psi_t + f(u) \psi_x) \geq 0.$$

Dakle, vrijedi

$$\int (u\psi_t + f(u)\psi_x) = 0, \quad \forall \psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}), \psi(t, x) \geq 0.$$

Želimo da nam gornja jednakost vrijedi za sve testne funkcije, ne nužno nenegativne. Naime, znamo da se svaka testna funkcija  $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$  može zapisati u obliku  $\psi = \phi_1 - \phi_2$ , gdje su  $\phi_1, \phi_2$  nenegativne test funkcije. Budući da gornja jednakost vrijedi za  $\phi_1$  i  $\phi_2$ , vrijedi i za  $\psi$ .  $\square$

**Napomena 1.4.4.** Konveksnu funkciju  $\eta = \eta(u)$  zovemo entropijom skalarnog zakona sačuvanja, a  $q = q(u)$  entropijskim fluksom. U slučaju konveksnog fluksa  $f = f(u)$ , nejednakost (1.34) možemo zamijeniti definicijom generaliziranog rješenja (1.15) i nejednakošću (1.32) za neku fiksnu strogo konveksnu funkciju  $\eta = \eta(u)$ .

Definiciju generaliziranog entropijskog rješenja možemo lako proširiti na više dimenzija, u slučaju skalarnog zakona sačuvanja (1.3). Rješenja  $u = u(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  i familiju entropija  $|u - k|$ ,  $k \in \mathbb{R}$  nazivamo *Kružkovljevim rješenjima* (*Kružkovljevim entropijama*). Nameće se pitanje možemo li još poopćiti definiciju generaliziranog entropijskog rješenja na više dimenzija za drukčije odabrane entropijski par  $\eta$  i  $q$  u odnosu

$$q(u) = \int^u \eta'(v)f'(v)dv \quad (1.36)$$

koje karakteriziraju entropijsku nejednakost

$$\partial_t \eta(u(t, x)) + \operatorname{div} q(u(t, x)) \leq 0. \quad (1.37)$$

Od važnosti će biti da se uvjeti regularnosti na  $\eta$  mogu smanjiti tako da je dovoljno promatrati entropije koje su samo lokalno Lipschitz-neprekidne, kao i samo Lipschitz-neprekidni fluksevi  $f$ . S takvim pretpostavkama moći ćemo formulirati teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja općeg skalarnog zakona sačuvanja.

**Definicija 1.4.5.** Ograničena izmjeriva funkcija  $u$  na  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  je dopustivo generalizirano rješenje zadaće

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} f(u) = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0, \quad (1.38)$$

gdje je  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ , ako nejednakost

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left( \eta(u) \partial_t \psi + \sum_{i=1}^d q_i(u) \partial_{x_i} \psi \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(0, x) \eta(u_0(x)) dx \geq 0 \quad (1.39)$$

vrijedi za svaku konveksnu funkciju  $\eta$  (i  $q$  danu s (1.36)) i za svaku nenegativnu test funkciju  $\psi \in C_c^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ .



Promotrimo zadaću na  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} f(u) = \varepsilon \Delta u, \quad (1.40)$$

za neki  $\varepsilon > 0$ . Primijetimo da je zadaća parabolička pa uz ograničeni početni uvjet  $u_0$  (bit će dovoljno  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ) uvijek dobivamo jedinstveno glatko rješenje za  $t > 0$ .

**Teorem 1.4.6.** *Neka je  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  niz pozitivnih vrijednosti takvih da  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  za  $k \rightarrow \infty$  i neka za svaki  $\varepsilon_k$  imamo zadaću (1.40) s početnim uvjetom  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  i s pripadajućim rješenjima  $u_{\varepsilon_k}$ . Pretpostavimo da  $u_{\varepsilon_k}$  teže ka funkciji  $u = u(t, x)$  po točkama skoro svuda na  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ . Tada je  $u = u(t, x)$  dopustivo generalizirano rješenje (1.38) na  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ .*

*Dokaz.* Dokaz se provodi slično kao za slučaj u jednoj prostornoj dimenziji. Neka je  $\eta$  proizvoljna konveksna funkcija i  $q$  dana s (1.36). Pomnožimo (1.40) s  $\eta'(u_{\varepsilon_k})$  da dobijemo

$$\partial_t \eta(u_{\varepsilon_k}) + \operatorname{div} q(u_{\varepsilon_k}) = \varepsilon_k \Delta \eta(u_{\varepsilon_k}) - \varepsilon_k \eta''(u_{\varepsilon_k}) |\nabla(u_{\varepsilon_k})|^2.$$

Množeći s nenegativnom testnom funkcijom  $\psi$  i integrirajući po  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  slijedi

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left( \eta(u_{\varepsilon_k}) \partial_t \psi + \sum_{i=1}^d q_i(u_{\varepsilon_k}) \partial_{x_i} \psi \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \psi(0, x) \eta(u_0(x)) dx \geq -\varepsilon_k \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \eta(u_{\varepsilon_k}) \nabla \psi dx dt.$$

Pustimo li  $k \rightarrow \infty$  ( $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ) zaključujemo da limes  $u$  niza  $(\varepsilon_k)_k$  zadovoljava definiciju (1.39) ( $\psi$  i  $\eta$  su bile proizvoljne).  $\square$

Može se pokazati da gornji teorem vrijedi i kada su  $\eta$  i  $\psi$  samo lokalno Lipschitz-neprekidne. Dokaz te tvrdnje, kao i sljedećih teorema, može se naći u [7].

**Teorem 1.4.7.** *Neka su  $u$  i  $v$  dopustiva generalizirana rješenja zadaće (1.38) s pripadajućim početnim uvjetima  $u_0$  i  $v_0$  s vrijednostima na intervalu  $[a, b]$ . Tada postoji  $s > 0$ , koji ovisi samo o izboru intervala  $[a, b]$ , takav da za svaki  $t > 0$  i  $r > 0$  vrijedi*

$$\int_{K(x,r)} (u(t,x) - v(t,x))^+ dx \leq \int_{K(x,r+st)} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx, \quad (1.41)$$

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^1(K_r)} \leq \|u_0(\cdot) - v_0(\cdot)\|_{L^1(K_{r+st})}. \quad (1.42)$$

Nadalje, ako

$$u_0(x) \leq v_0(x) \quad \text{s.s. na } \mathbb{R}^d,$$

tada

$$u(t, x) \leq v(t, x) \quad \text{s.s. na } [0, \infty) \times \mathbb{R}^d. \quad (1.43)$$

**Teorem 1.4.8.** *Neka je  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Tada postoji dopustivo generalizirano rješenje  $u = u(t, x)$  od (1.38) i vrijedi*

$$u(t, \cdot) \in C^0([0, \infty); L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)).$$

## Poglavlje 2

# Schema usrednjenja prijenosa

U ovom poglavlju konstruirat ćemo numeričku metodu za rješavanje skalarnih zakona sačuvanja. Kao što smo vidjeli, metoda karakteristika nakon konačnog vremena može dati višeznačno rješenje koje više nije klasično rješenje početne zadaće. Slabijim pretpostavkama na regularnost rješenja i uvođenjem entropijskih uvjeta uspjeli smo izbjeći taj problem. Cilj nam je pokazati da se korektno entropijsko rješenje ipak može dobiti metodom karakteristika prikladnim usrednjavanjem višeznačnog rješenja.

### 2.1 Geometrijska konstrukcija usrednjenja

Promotrimo problem na  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} f(u) = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0. \quad (2.1)$$

Uz pretpostavke na glatkoću funkcija  $f = f(u)$  i  $u = u(t, x)$  zapišimo problem u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \cdot \nabla u = 0. \quad (2.2)$$

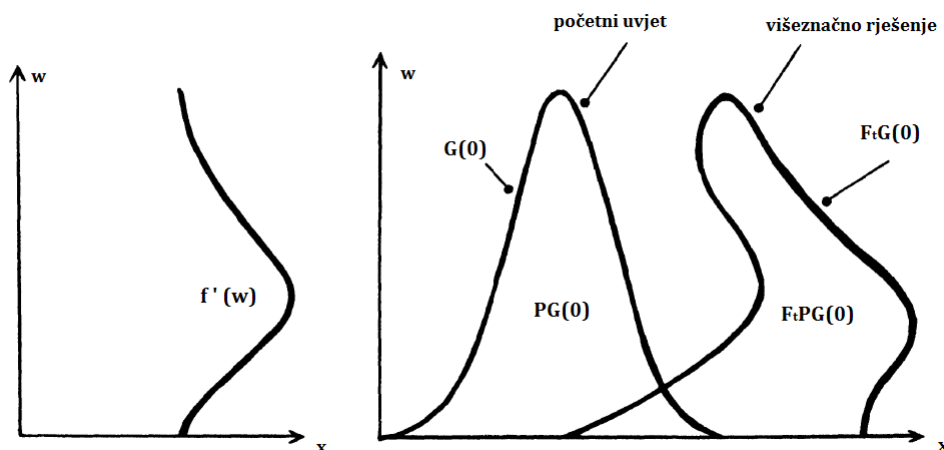
Metodom karakteristika gornju jednadžbu smo sveli na sustav

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = f'(u). \quad (2.3)$$

Neka je  $(X_t(x_0, u_0), U_t(x_0, u_0)) = F_t(x_0, u_0)$  jedinstveni par rješenja gornjeg sustava uz početne uvjete  $x(0) = x_0, u(0) = u_0(x_0)$ . Graf rješenja zadaće (2.1) u trenutku  $t > 0$

$$G(t) = \{(x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : w = u(t, x)\}.$$

Tada znamo da  $G(t)$  nastaje propagiranjem grafa  $G(0)$  brzinom  $f'(u)$ , odnosno  $G(t) = F_t G(0)$ . Međutim, znamo da nakon konačnog vremena se može dogoditi da  $F_t G(0)$  prestaje reprezentirati graf neke (neprekidne) funkcije. Ovisno o brzini transporta rješenja, graf se može "iskriviti" do oblika kada u nekoj točki prostora  $x$  može poprimiti više vrijednosti.



Slika 2.1: Evolucija grafa početnog uvjeta u graf višeznačnog rješenja.

Umjesto grafa rješenja  $G(t)$  možemo promatrati i podgraf u trenutku  $t > 0$

$$PG(t) = \{(x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : w \leq u(t, x)\}.$$

Dakle, dok god imamo glatko rješenje naše jednadžbe vrijedi  $PG(t) = F_t PG(0)$ , a nakon određenog trenutka  $F_t PG(0)$  više nije podgraf neprekidne funkcije (Slika 2.1). Znamo otprije da je rješenje sustava (2.3) dano s

$$F_t(x, w) = (x + f'(w)t, w)$$

pa imamo

$$F_t G(0) = \{(x + f'(w)t, w) : (x, w) \in G(0)\},$$

odnosno

$$F_t G(0) = \{(x, w) : (x - f'(w)t, w) \in G(0)\}.$$

Na isti način dobivamo

$$F_t PG(0) = \{(x, w) : (x - f'(w)t, w) \in PG(0)\}.$$

Za početak, iz višeznačnog rješenja dobivenog metodom karakteristika konstruirat ćemo entropijsko rješenje na jednostavan (prirodan) način – u svakoj točki prostora  $x$  uzet ćemo

jednu vrijednost višeznačnog rješenja tako da zadovoljava tzv. "princip sačuvanja": mjera područja između grafa  $G(t)$  entropijskog rješenja i "multigrafa"  $F_t G(0)$  mora biti jednaka nuli. Dakle,

$$m(PG(t) \setminus F_t PG(0)) = m(F_t PG(0) \setminus PG(t)), \quad (2.4)$$

za neku mjeru  $m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  (npr. Lebesgueova mjera).

U slučaju zadaće u jednoj prostornoj dimenziji, ovaj princip daje dobro rješenje kada je fluks  $f$  konveksan (ili konkavan), no u općem slučaju ne. U više dimenzija ovaj princip je teško izvesti jer zahtijeva za svaku točku  $x$  pravilan izbor entropijskog rješenja iz vrijednosti višeznačnog rješenja pomoću gornje jednakosti koja uključuje sve ostale točke u prostoru. Zato predložimo sličan, ali jednostavniji princip aproksimacije entropijskog rješenja. Ideja je usrednjiti vrijednosti višeznačnog rješenja u svakoj točki  $x$  tako da vrijedi

$$m_x(PG(t) \setminus F_t PG(0)) = m_x(F_t PG(0) \setminus PG(t)), \quad (2.5)$$

gdje  $m_x(A)$  jednodimenzionalnu Lebesgueovu mjeru vertikalnog reza  $\{w \in \mathbb{R} : (x, w) \in A\}$  proizvoljnog izmjerivog podskupa  $A \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ . Primijetimo da zbog

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}^d} m_x(A) dx$$

primjenom Fubinijevog teorema slijedi prvotni (2.4) za skoro svaki  $x \in \mathbb{R}^d$ . Sada još trebamo naći prikladnu tehniku usrednjenja.

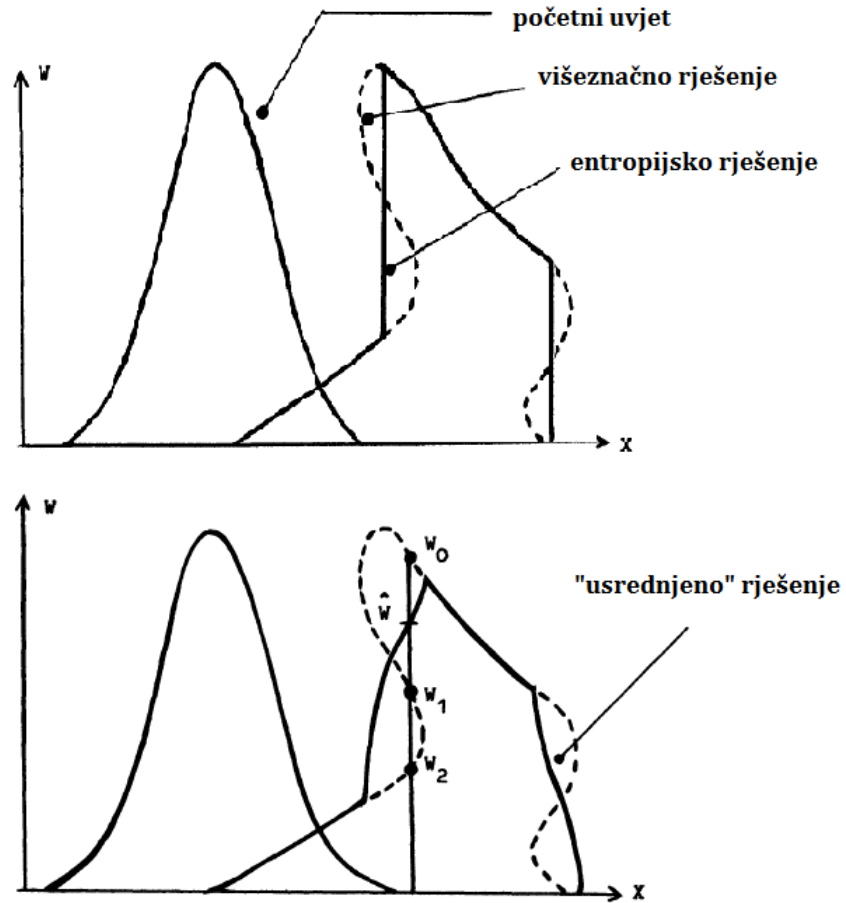
Neka je  $x \in \mathbb{R}^d$  fiksna i neka su  $w_0, w_1, \dots, w_{2n}$  sve vrijednosti višeznačnog rješenja u točki  $x$  (primijetimo da je točaka baš  $2n + 1$ , odnosno neparno mnogo, što se zaključuje budući da višeznačno rješenje nastaje neprekidnom transformacijom početnog grafa  $G(0)$ ). Pretpostavimo da su vrijednosti sortirane uzlazno

$$w_0 \leq \dots \leq w_{2n}.$$

Označimo s  $\hat{w}$  srednju vrijednost koju tražimo. Tada vrijedi

$$m_x(PG(t) \setminus F_t PG(0)) = \sum_{k=1}^n (\max(\hat{w}, w_{2k}) - \max(\hat{w}, w_{2k-1})) + \max(\hat{w}, w_0) - \hat{w},$$

$$m_x(F_t PG(0) \setminus PG(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} (\min(\hat{w}, w_{2k+1}) - \min(\hat{w}, w_{2k})) - \min(\hat{w}, w_{2n}) + \hat{w}.$$



Slika 2.2: Geometrijska konstrukcija usrednjenja.

Oduzimajući ova dva izraza i koristeći činjenicu da je  $\max(a, b) + \min(a, b) = a + b, \forall a, b \in \mathbb{R}$ , dobivamo

$$m_x(PG(t) \setminus F_t PG(0)) - m_x(F_t PG(0) \setminus PG(t)) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k w_k - \hat{w}.$$

Dakle, da bi vrijedilo (2.5), traženo usrednjenje mroa imati oblik

$$\hat{w} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k w_k. \tag{2.6}$$

Primijetimo da za  $\hat{w}$  vrijedi

$$w_0 \leq \hat{w} \leq w_{2n}.$$

Štoviše, može se pokazati da za proizvoljnu konveksnu funkciju  $\eta$  vrijedi

$$\eta(\hat{w}) = \eta\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k w_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \eta(w_k)$$

što zapravo govori da naše usrednjenje  $\hat{w}$  zadovoljava diskretnu verziju entropijskog uvjeta.

Objasnimo još geometrijsku interpretaciju usrednjenja (2.6). Ako višeznačno rješenje poprima vrijednost  $w_0, w_1, \dots, w_{2n}$  u točki  $x$ , znači da vertikalni rez

$$\{w \in \mathbb{R} : (x, w) \in F_t PG(0)\} = \langle -\infty, w_0 \rangle \cup [w_1, w_2] \cup \dots \cup [w_{2n-1}, w_{2n}]$$

nije povezan. Naš cilj je zamijeniti ovaj nepovezani rez s povezanim oblika  $\langle -\infty, \hat{w} \rangle$  tako da je  $\hat{w}$  onda entropijsko rješenje u točki  $x$ . Princip sačuvanja nam u ovom slučaju govori da novi rez mora biti jednake mjere kao i početni nepovezani rez, to jest:

$$\hat{w} - m = (w_{2n} - w_{2n-1}) + \dots + (w_2 - w_1) + (w_0 - m)$$

za neki  $m \in \mathbb{R}, m < w_0, \hat{w}$ . Ovom tehnikom usrednjenja zapravo smo sve dijelove  $[w_{2k-1}, w_{2k}]$ ,  $k = 1, \dots, n$  nepovezanog reza kolabirali u jedan povezan dio  $\langle -\infty, \hat{w} \rangle$ , dok ih pritom nismo saželi. Zbog toga se navedena metoda usrednjenja još naziva *transport-kolaps metoda* i prikladno tome definirat ćemo operator transformacije metodom usrednjenja kao *transport-kolaps operator (TC operator)*.

## 2.2 Transport-kolaps operator

Neka imamo zadaću (2.1) i pretpostavimo da je  $f$  Lipschitz-neprekidna na  $\mathbb{R}$ , a  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . *Totalna varijacija* funkcije  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$  se definira kao

$$TV(u) = \sup_{h \in \mathbb{R}^d, h \neq 0} \frac{1}{\|h\|} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x+h) - u(x)| dx. \quad (2.7)$$

Ako je  $u$  dovoljno glatka, tada totalna varijacija postaje  $TV(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla u\| dx$ .

Neka je  $\chi : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  nelinearan operator takav da za svaku  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$(\chi u)(x, w) = \begin{cases} 1 & 0 < w < u(x), \\ -1 & u(x) < w < 0, \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (2.8)$$

Iz definicije može se lako pokazati da  $\chi$  zadovoljava zanimljiva svojstva:

$$(1) u \leq v \implies \chi u \leq \chi v, \quad \forall u, v \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

$$(2) \chi 0 = 0$$

$$(3) \forall u \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}),$$

$$\iint (\chi u)(x, w) g(x, w) dx dw = \int \int_0^{u(x)} g(x, w) dw,$$

$$(4) \forall u \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lipschitz-neprekidnu funkciju}$$

$$h(u(x)) - h(0) = \int (\chi u)(x, w) h'(w) dw,$$

$$(5)$$

$$TV(u) = \int TV((\chi u)(\cdot, w)) dw$$

Posebno, ako uzmemo  $g(x, w) = 1$  i  $h(w) = w$ , slijedi

$$\iint (\chi u)(x, w) dx dw = \int u(x) dx,$$

te

$$u(x) = \int (\chi u)(x, w) dw.$$

Primijetimo da za  $\chi$  vrijedi

$$(\chi u)(x, w) = \mathbb{1}_{\{(x, w) \in PG\}} - \mathbb{1}_{\{w < 0\}} \quad \text{s.s. na } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

gdje je  $PG = \{(x, w) : w \leq u(x)\}$  podgraf funkcije  $u$ .

**Definicija 2.2.1.** *Transport-kolaps operator  $T(t)$  na  $L^1(\mathbb{R}^d)$  se definira kao*

$$(T(t)u)(x) = \int (\chi u)(x - f'(w)t, w) dw, \quad \text{s.s. na } \mathbb{R}^d \quad (2.10)$$

$\forall u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , odnosno  $\forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\int g(x) T(t)u(x) dx = \iint (\chi u)(x, w) g(x + f'(w)t) dx dw. \quad (2.11)$$

Usporedimo uvedenu definiciju TC operatora s geometrijskom konstrukcijom usrednjenja, odnosno, za dani početni uvjet  $u(0, \cdot) = u_0$ , želimo vidjeti koji rezultat daje geometrijska konstrukcija, a koji  $T(t)u(0, \cdot)$ . Neka je  $\hat{w}$  vrijednost koju daje usrednjenje. Tada po (2.5) vrijedi

$$m(\langle -\infty, \hat{w} \rangle \setminus F_t PG(0)_x) = m(F_t PG(0)_x \setminus \langle -\infty, \hat{w} \rangle)$$

gdje je

$$F_t PG(0)_x = \{w \in \mathbb{R} : (x - f'(w)t, w) \in PG(0)\} = \{w \in \mathbb{R} : w \leq u(0, x - f'(w)t)\}.$$

Dakle, za Lebesgueovu mjeru  $m$  dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\hat{w}} (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{\{w \leq u(0, x - f'(w)t)\}}) dw = \int_{\hat{w}}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{w \leq u(0, x - f'(w)t)\}} dw.$$

Iz svojstava funkcije  $\chi$  znamo da je za skoro svaki  $(x, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

$$(\chi u_0)(x, w) = \mathbb{1}_{\{(x, w) \in PG(0)\}} - \mathbb{1}_{\{w < 0\}} = \mathbb{1}_{\{w \leq u(0, x)\}} - \mathbb{1}_{\{w < 0\}}$$

pa gornju integralnu jednakost možemo zapisati kao

$$\int_{-\infty}^{\hat{w}} (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{\{w < 0\}} - (\chi u_0)(x - f'(w)t, w)) dw = \int_{\hat{w}}^{+\infty} (\mathbb{1}_{\{w < 0\}} + (\chi u_0)(x - f'(w)t, w)) dw.$$

Zato slijedi da je

$$\hat{w} - \int_{-\infty}^{\hat{w}} (\chi u_0)(x - f'(w)t, w) dw = \int_{\hat{w}}^{+\infty} (\chi u_0)(x - f'(w)t, w) dw$$

ako  $\hat{w} > 0$ , odnosno

$$\int_{-\infty}^{\hat{w}} (\chi u_0)(x - f'(w)t, w) dw = -\hat{w} + \int_{\hat{w}}^{+\infty} (\chi u_0)(x - f'(w)t, w) dw$$

za  $\hat{w} < 0$ . Spojimo li oba izraza u jedan dobivamo

$$\hat{w} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi u_0)(x - f'(w)t, w) dw = (T(t)u(0, \cdot))(x),$$

to jest definicija TC operatora se poklapa s geometrijskom konstrukcijom usrednjenja.



## 2.3 Svojstva transport-kolaps operatora

U ovom dijelu navest ćemo najvažnija svojstva TC operatora. Ona će biti dovoljna da dokažemo konvergenciju rješenja kojeg daje metoda usrednjenja prema entropijskom rješenju.

**Propozicija 2.3.1.** *Za proizvoljne  $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$  vrijedi*

$$(TC1) \quad |T(t)u - T(t)v| \leq |u - v|$$

$$(TC2) \quad u \leq v \text{ s.s.} \implies T(t)u \leq T(t)v \text{ s.s.}$$

$$(TC3) \quad \int T(t)u(x)dx = \int u(x)dx$$

$$(TC4) \quad |T(t)u| \leq |u| \text{ te } TV(T(t)u) \leq TV(u)$$

$$(TC5) \quad |T(t)u - u| \leq C(f)TV(u)t \text{ gdje je } C(f) = \sup_{w \in \mathbb{R}} \|f'(w)\|$$

$$(TC6) \quad \text{ako } u \text{ iščezava na } \{x \in \mathbb{R} : \|x\| > r\}, \text{ tada } T(t)u \text{ iščezava na } \{x \in \mathbb{R} : \|x\| > r + C(f)t\}.$$

Sljedeća propozicija daje da TC operator zadovoljava (diskretnu verziju) entropijske nejednakosti (1.37).

**Propozicija 2.3.2.** *Za proizvoljnu testnu funkciju  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  i konveksnu Lipschitz-neprekidnu  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vrijedi*

$$\int (\eta(T(t)u) - \eta(u))(x)\psi(x)dx \leq t \int q(u(x)) \cdot \nabla \psi(x)dx + Ct^2|u|, \quad (2.12)$$

gdje je  $C = C(\eta, f)$  te  $q(u) = \int_0^u \eta'(v)f'(v)dv$ .

Dokazi prethodnih dviju propozicija mogu se naći u [1, 10]. Sada smo spremni iskazati glavni teorem o konvergenciji k entropijskom rješenju.

**Teorem 2.3.3.** *Za svaki početni uvjet  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  jedinstveno entropijsko rješenje zadaje (2.1) u trenutku  $t$  je dano formulom*

$$u(t, \cdot) = S(t)u_0(t, \cdot) = L^1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left( T \left( \frac{t}{n} \right) \right)^n u_0, \quad (2.13)$$

gdje je  $S(t)$  operator koji prevodi početni uvjet  $u_0 = u_0(x)$  u rješenje  $u = u(t, x)$ .

*Dokaz.* Za  $\delta t$  mali vremenski korak definirajmo diskretne aproksimacije operatora  $S(t)$  za svaki  $t > 0$  kao

$$S_{\delta t}(t)u = (1 - s)T(\delta t)^k u + sT(\delta t)^{k+1}u, \quad (2.14)$$

gdje je  $t = (k + s)\delta t$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $s \in [0, 1]$ . Lako se pokazuje (iz svojstava operatora  $T(t)$  (2.3.1)) da vrijedi  $\forall u, v \in L^1(\mathbb{R}^d)$  i  $\forall t, s > 0$

$$(SC1) \quad |S_{\delta t}(t)u - S_{\delta t}(t)v| \leq |u - v|,$$

$$(SC2) \quad |S_{\delta t}(t)u| + TV S_{\delta t}(t)u \leq |u| + TV(u),$$

$$(SC3) \quad |S_{\delta t}(t)u - S_{\delta t}(s)u| \leq |t - s|TV(u),$$

$$(SC4) \quad \text{ako } u \text{ iščezava na } \{x \in \mathbb{R} : \|x\| > r\}, \text{ tada } S_{\delta t}u \text{ iščezava na } \{x \in \mathbb{R} : \|x\| > r + C(f)(t + \delta t)\}, \text{ gdje je } C(f) = \sup_{w \in \mathbb{R}} \|f'(w)\|.$$

Pokazujemo da je niz funkcija  $u_{\delta t}(t, \cdot) = S_{\delta t}(t)u$  strogo kompaktan u  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . Koristit ćemo Kolmogorov kriterij - niz funkcija u  $L^1(\mathbb{R}^d)$  je strogo kompaktan ako je uniformno  $L^1(\mathbb{R}^d)$ -neprekidan, tj.

$$(1) \quad \|u_{\delta t}(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C,$$

$$(2) \quad \text{za svaki relativno kompaktan } K \subset \subset \mathbb{R}^d \text{ i svaki } \varepsilon > 0 \text{ postoji } \Delta x > 0 \text{ takav da} \\ \|u_{\delta t}(t, x + \Delta x) - u_{\delta t}(t, x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Iz svojstva (SC1) slijedi (1), a iteriranjem svojstva (TC4) iz propozicije (2.3.1) dobivamo da je  $TV(u_{\delta t}) \leq C \cdot TV(u_0)$ . Budući da  $u_0$  ima ograničenu totalnu varijaciju, zaključujemo da je niz  $(u_{\delta t}(t, \cdot))$   $L^1$ -ekvineprekidan, tj. za svaki fiksni  $t > 0$  možemo naći strogo konvergentni podniz - označit ćemo ga opet s  $(u_{\delta t}(t, \cdot))$ . Sada iz svojstva (TC5) zaključujemo da podniz  $(u_{\delta t}(t, \cdot))$  strogo konvergira u  $C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^d))$  za svaki  $T \in \mathbb{R}_+$  prema  $u \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^d))$ . Još trebamo provjeriti da  $u$  zadovoljava entropijski uvjet, budući da je entropijsko rješenje jedinstveno. Dovoljno je to provjeriti za član  $T(\delta t)^k u$ .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta(T(\delta t)^k u) - \eta(u))\phi(x)dx &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta(T(\delta t)^{j+1} u) - \eta(T(\delta t)^j u))\phi(x)dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \delta t \int_{\mathbb{R}^d} q(T(\delta t)^j u(x))\nabla\phi(x)dx + \mathcal{O}(\delta t), \end{aligned}$$

gdje zadnja nejednakost slijedi iz propozicije 2.3.2. Pustimo li  $\delta t \rightarrow 0$  i uzmemo li u obzir da je  $t > 0$  proizvoljan, imamo da  $u$  zadovoljava entropijski uvjet (1.39).  $\square$

## 2.4 Kinetička formulacija

U ovom dijelu modificirat ćemo metodu usrednjenja tako da ćemo prvo nelinearnu jednadžbu zakona sačuvanja linearizirati, a zatim ćemo primijeniti TC operator. Modifikaciju metode koristit ćemo kasnije u implementaciji budući da je linearne jednadžbe lakše riješiti numerički. Cijena linearizacije jednadžbe je dodavanje još jedne prostorne dimenzije. Vratimo se na definiciju dopustivog generaliziranog rješenja skalarnog zakona sačuvanja

(1.39). Ako uvedemo Kružkovljeve entropije  $\eta = |u - \lambda|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vrijedi da je  $u$  dopustivo generalizirano rješenje ako vrijedi

$$\partial_t |u - \lambda| + \operatorname{div} [\operatorname{sgn}(u - \lambda)(f(u) - f(\lambda))] \leq 0 \quad (2.15)$$

u smislu distribucija na  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^d)$ . Formalno, deriviramo li gornju nejednakost po  $\lambda$ , dobivamo *kinetičku formulaciju* skalarnog zakona sačuvanja.

**Teorem 2.4.1.** *Funkcija  $u \in C([0, \infty)); L^1(\mathbb{R}^d)) \cap L_{loc}^\infty([0, \infty)); L^\infty(\mathbb{R}^d))$  je dopustivo generalizirano rješenje zadatke (2.1) ako i samo ako postoji nenegativna ograničena Radonova mjera  $m = m(\lambda)$  na  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^{d+1}$  i funkcija*

$$\chi(\lambda, u) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \lambda \leq u, \\ -1 & u \leq \lambda \leq 0, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

koja je u smislu distribucija rješenje zadatke

$$\partial_t \chi + f'(\lambda) \operatorname{div} \chi = \partial_\lambda m \quad (2.16)$$

$$\chi(\lambda, u(0, x)) = \chi(\lambda, u_0(x)). \quad (2.17)$$

Varijablu  $\lambda$  u zadatci (2.16) zovemo *kinetičkom varijablom*. Iako smo ovim konceptom sveli nelinearnu jednadžbu na linearnu (kinetičku), na desnoj strani pojavljuje se derivacija mjere. Naime, to otežava numeričku implementaciju problema i da bismo problem riješili dodatno ćemo aproksimirati zadatak: zanemarit ćemo derivaciju mjere, riješiti novu zadatak i usrednjiti rješenje linearne zadatke po kinetičkoj varijabli kako bismo dobili aproksimaciju entropijskog rješenja početne zadatke. Prije nego što formuliramo novi problem, navedimo svojstva funkcije  $\chi$  (primijetimo sličnost s operatorom  $\chi$  iz prethodnog dijela).

**Propozicija 2.4.2.** *Za funkciju  $\chi = \chi(\lambda, u)$  vrijedi*

$$(1) \quad \forall u, v \in L^1(\mathbb{R}^d) \text{ t.d. } u \leq v \implies \chi(\lambda, u) \leq \chi(\lambda, v),$$

$$(2) \quad \forall u \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$$

$$\iint \chi(\lambda, u) g(x, \lambda) dx d\lambda = \int \left( \int^{u(x)} g(x, \lambda) d\lambda \right) dx.$$

Posebno, ako je  $g(x, \lambda) = 1$  vrijedi

$$\iint \chi(\lambda, u) dx d\lambda = \int u(x) dx.$$

(3)  $\forall u \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-neprekidnu funkciju

$$h(u(x)) - h(0) = \int \chi(\lambda, u) h'(\lambda) d\lambda.$$

Posebno, ako je  $h(\lambda) = \lambda$  vrijedi

$$u = \int \chi(\lambda, u) d\lambda,$$

(4)

$$TV(u) = \int TV(\chi(\lambda, \cdot)) d\lambda.$$

Dakle, ideja modificirane sheme usrednjenja je da prvo riješimo zadaću

$$\partial_t h + f'(\lambda) \operatorname{div} h = 0, \quad h|_{t=0} = \chi(\lambda, u_0(x)). \quad (2.18)$$

Metodom karakteristika kao i prije lako dobivamo da je rješenje dano u obliku

$$h = \chi(\lambda, u_0(x - f'(\lambda)t)). \quad (2.19)$$

Kao i prije, pomoću ovako dobivenog rješenja možemo definirati novi transport-kolaps operator.

**Definicija 2.4.3.** *Transport-kolaps operator  $T(t)$  definiramo za svaki  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$  kao*

$$T(t)u(x) = \int \chi(\lambda, u(x - f'(\lambda)t)) d\lambda. \quad (2.20)$$

I u ovom slučaju može se pokazati da TC operator  $T(t)$  ima ista svojstva kao u propozicijama 2.3.1 i 2.3.2 te da vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.4.4.** *Neka je*

$$S_n(t)u = (1 - \alpha)T\left(\frac{t}{n}\right)^k u + \alpha T\left(\frac{t}{n}\right)^{k+1} u,$$

gdje je

$$t = \frac{k + \alpha}{n}, \quad k \in \mathbb{N}, \alpha \in [0, 1).$$

Tada za svaki početni uvjet  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  jedinstveno entropijsko rješenje zadaće (2.1) u trenutku  $t$  je dano formulom

$$u(t, \cdot) = L^1 - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)u_0. \quad (2.21)$$

Konačno možemo dati proceduru za aproksimativno rješenje zadatice (2.1). Fiksirajmo  $t > 0$  i  $n \in \mathbb{N}$ . Pretpostavimo da za početni uvjet vrijedi  $-a \leq u_0 \leq a$  za neki  $a \in \mathbb{R}_+$ . Prvo riješimo problem (2.18) koji daje rješenje (2.19). Konstruirajmo aproksimativno rješenje  $u_n$  na sljedeći način:

$$(1) \quad u_n(t', x) = T(t'/n)u_0(x) = \int_{-a}^a \chi(\lambda, u_0(x - f'(\lambda)t'))d\lambda, \quad t' \in \langle 0, t/n \rangle.$$

(2) Za svaki  $k = 1, \dots, n - 1$  uzimamo

$$u_n(t' + kt/n, x) = \int_{-a}^a \chi(\lambda, u_n(kt/n, x - f'(\lambda)t'))d\lambda, \quad t' \in \langle 0, t/n \rangle.$$

Prema prethodnom teoremu, niz  $(u_n)$  konvergira prema rješenju zadatice (2.1) u prostoru  $L^1([0, t] \times \mathbb{R}^d)$ .

## Poglavlje 3

# Implementacija i primjeri

U ovom poglavlju implementirat ćemo shemu usrednjenja prijenosa danu u prethodnom poglavlju te ju primijeniti na primjerima skalarnih zakona sačuvanja. Poseban naglasak će biti na ponašanju metode na Buckley-Leverettovoj jednadžbi kojoj rješenje može dati nestandardne šokove zbog određenih svojstava fluksa. U numeričkoj shemi korištene su metode konačnih diferencija prvog reda - *upwind* i *Lax-Friedrichsova metoda*.

### Burgersova jednadžba

Prvo ćemo promatrati ponašanje metode na primjeru konveksnog fluksa - Burgersovog fluksa  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ . Zadana je Riemannova zadaća

$$u_t + uu_x = 0, \quad [0, \infty) \times \mathbb{R} \quad (3.1)$$

s početnim uvjetom

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Lineariziranjem zadaće kinetičkom formulacijom i uzimanjem aproksimacije bez derivacije mjere dobivamo da  $h = \text{sgn}(u - \lambda)$  rješava

$$\begin{aligned} h_t + \lambda h_x &= 0, \\ h|_{t=0} &= \text{sgn}(u_0 - \lambda). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Za fiksni  $\lambda$  ova jednadžba je linearna i može se jednostavno riješiti metodom konačnih diferencija. U našem slučaju koristili smo metode prvog reda, *upwind* metodu i *Lax-Friedrichovu* metodu. Prije svega, budući da za numeričke metode moramo zahtijevati ograničenu domenu, promatrat ćemo zadaću na intervalu  $x \in [a, b]$ . Na rubovima intervala

najčešće se postavljaju periodički rubni uvjeti, no u našem slučaju prirodnije je zahtijevati da se rješenje na rubu ponaša kao i neposredno prije njega (to se može zaključiti iz danog početnog uvjeta (3.2)). Također, budući da je  $0 \leq u_0 \leq 1$ , dovoljno je uzeti  $\lambda \in [0, 1]$ . Vremensku varijablu možemo promatrati na bilo kojem intervalu  $[0, T] \subset [0, \infty)$ .

Neka su  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ,  $\Delta x = \frac{b-a}{M}$ , i  $\Delta \lambda = \frac{1}{K}$  za  $M, N, K \in \mathbb{N}$ . Uzmimo ekvidistantne mreže  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 1, \dots, N$  intervala  $[0, T]$ ,  $x_m = a + m\Delta x$ ,  $m = 1, \dots, M$  intervala  $[a, b]$  i  $\lambda_k = k\Delta \lambda$ ,  $k = 1, \dots, K$  intervala  $[0, 1]$ . Standardna eksplicitna Lax-Friedrichsova metoda daje sljedeću diskretizaciju jednadžbe (3.3)

$$H_m^{n+1} = \frac{1}{2}(H_{m-1}^n + H_{m+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \lambda_k (H_{m+1}^n - H_{m-1}^n)$$

a eksplicitna upwind (za  $f' \geq 0$ ; u našem slučaju je  $\lambda \geq 0$ )

$$H_j^{n+1} = H_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_k (H_m^n - H_{m-1}^n),$$

gdje je  $H_m^n$  aproksimacija vrijednosti rješenja  $h(t_n, x_m)$ . Općenito, može se pokazati da za glatko rješenje ove dvije metode daju greške reda  $O(\Delta t)$  te su stabilne kada  $\max_k \lambda_k \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

Međutim, kako rješenje jednadžbe ima prekid (već u početnom uvjetu), stabilnost ovih metoda gubi se u okolini prekida. Zbog toga ćemo metode modificirati tako da na desnoj strani jednadžbe dodamo difuzijski član  $h_{xx}$ . Ideja je dati dobru aproksimaciju entropijskog rješenja kojeg možemo dobiti metodom iščezavajuće viskoznosti. Prikladna modifikacija Lax-Friedrichsove metode je dana s

$$H_m^{n+1} = \frac{1}{2}(H_{m-1}^n + H_{m+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \lambda_k (H_{m+1}^n - H_{m-1}^n) + \frac{1}{2\Delta t} \left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \lambda_k^2\right) (H_{m-1}^n - 2H_m^n + H_{m+1}^n), \quad (3.4)$$

a upwind metode

$$H_j^{n+1} = H_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_k (H_m^n - H_{m-1}^n) + \frac{1}{2\Delta x} \lambda_k \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_k\right) (H_{m-1}^n - 2H_m^n + H_{m+1}^n). \quad (3.5)$$

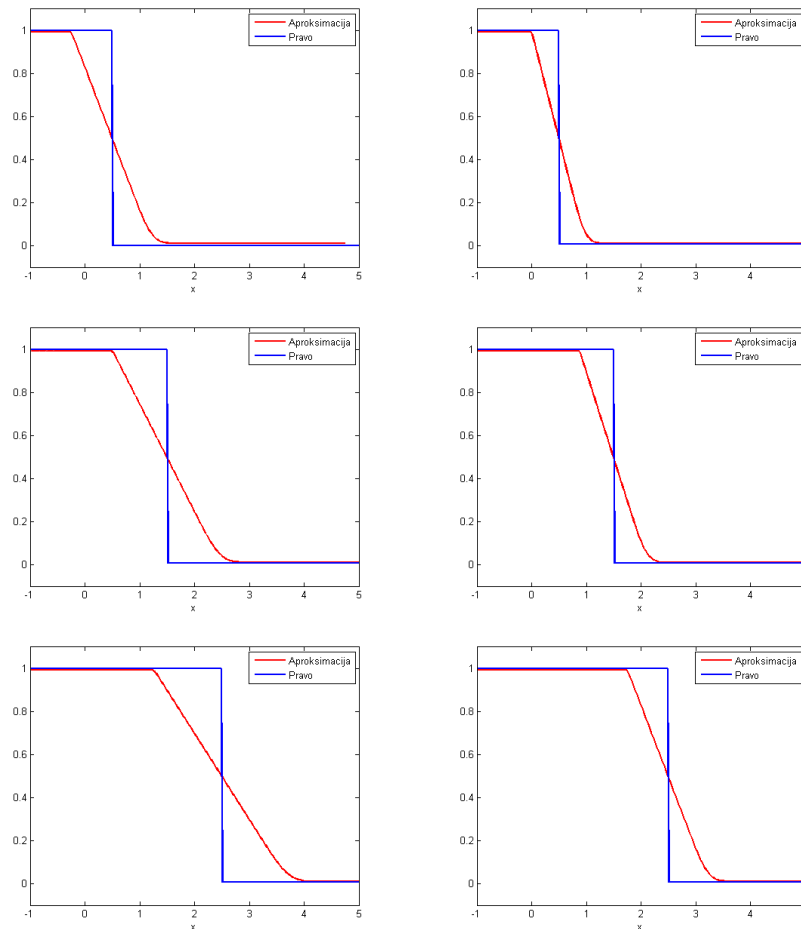
Za ove metode stabilnost osiguravaju isti uvjeti na odnos  $\Delta x$  i  $\Delta t$  kao i prije, ali se točnost metode smanjuje na  $O(\sqrt{\Delta t})$ .

Iteraciju  $H_m^{n+1}$  trebamo izračunati za svaki  $\lambda_k$  te je zatim usrednjiti po  $\lambda$ . Primijetimo da vrijedi

$$u(t, x) = \int_0^1 h(t, x, \lambda) d\lambda,$$

stoga ćemo svaku iteraciju  $H_m^{n+1}$  numerički integrirati po varijabli  $\lambda$  preko Simpsonove formule. Dakle, svaka iteracija se sastoji od dva dijela

- (1) izračunaj iteraciju  $H_m^{n+1}$  linearne jednadžbe (3.3) preko (3.4) ili (3.5) za sve  $x_m$  i sve  $\lambda_k$ ;
- (2) integriraj dobiveni  $H^{n+1}$  po varijabli  $\lambda$  Simpsonovom formulom da dobijemo  $U^{n+1}$  koji aproksimira  $u(t_n, \cdot)$ .



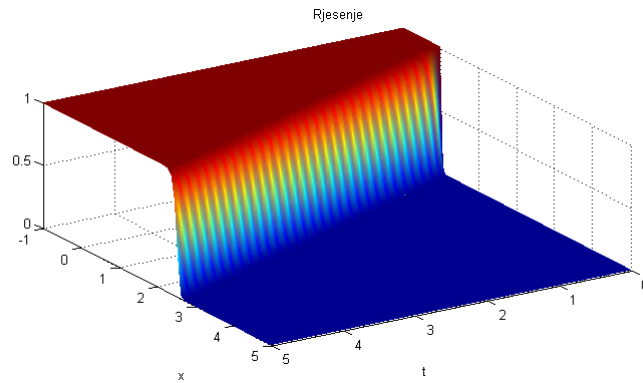
Slika 3.1: Rješenje jednadžbe (3.1) na intervalu  $[-1, 5]$  za  $\Delta t = 0.0005$ . U prvom stupcu korištena je Lax-Friedrichs metoda, a u drugom upwind metoda. Po retcima rješenje je dato u trenutcima redom  $t = 1, 3, 5$ .

Na Slici 3.1 vidimo da upwind metoda bolje aproksimira rješenje nego Lax-Friedrichs, što je i za očekivati budući da upwind metoda računa novu iteraciju tako da uzima vrijed-



nosti prethodne iteracije slijeva te time koristi činjenicu da karakteristike također dobivaju informacije o rješenju slijeva.

Obje metode su se pokazale disipativne oko šoka u rješenju, a gubitak točnosti se smanjuje kako se smanjuje  $\Delta t$ . Također, očekivano je da će Lax-Friedrichsova metoda biti više difuzivna nego upwind metoda budući da je koeficijent uz difuzivni član u Lax-Friedrichsovoj metodi veličine  $\frac{3\Delta x}{4}$ , dok je kod upwind metode veličine  $\frac{\Delta h}{4}$ .



Slika 3.2: Rješenje jednadžbe (3.1) na intervalu  $[-1, 5]$  za  $\Delta t = 0.0005$ .

## Buckley-Leverettova jednadžba

Buckley-Leverettova jednadžba modelira dvofazni tok kroz poroznu sredinu. Fizikalnu interpretaciju jednadžbe možemo pokazati na jednostavnom primjeru simulacije rezervoara s naftom. Kada se pronade podzemni izvor nafte, zbog velikog pritiska fluida određena količina nafte odmah izađe na površinu, dok većina ipak ostane pod zemljom. Taj ostatak nafte treba ekstrahirati, a standardni postupak za to jest da se upumpava voda u naftno polje kroz jedan dio bušotina tjerajući naftu van kroz ostale. U ovom slučaju dvofazni tok čine voda i nafta, a porozni medij stijene ili pijesak.

Neka je  $s$  zasićenost vodom ( $s \in [0, 1]$ ) te pretpostavimo da je poroznost sredine konstantna i jednaka 1. Dobivamo zakon sačuvanja

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial f(s)}{\partial x} = 0,$$

gdje je fluks dan s

$$f(s) = \frac{k_{rv}(s)/\mu_a}{k_{rv}(s)/\mu_a + k_{rn}(s)/\mu_b}.$$

Za vodu i naftu veličina  $\mu$  predstavlja viskoznost, a  $k_r$  relativnu poroznost. Primjer relativnih poroznosti su funkcije

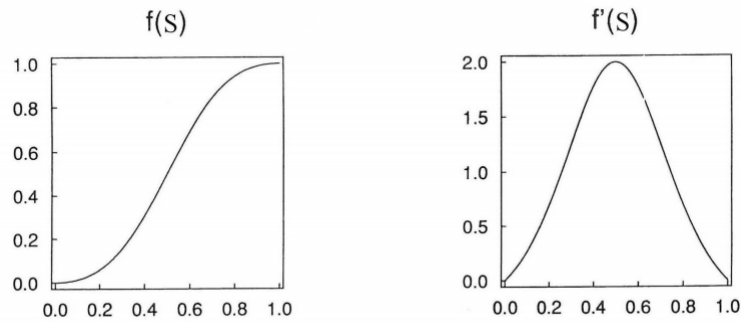
$$k_{rv}(s) = s^2 \quad \text{i} \quad k_{rm}(s) = (1 - s)^2$$

čime dobivamo fluks

$$f(s) = \frac{s^2}{s^2 + a(1 - s)^2},$$

gdje je  $a = \mu_v/\mu_n$ . Lako se vidi da je

$$f'(s) = \frac{2as(1 - s)}{(s^2 + a(1 - s)^2)^2}.$$



Slika 3.3: Funkcija toka vode za  $a = 0.5$ .

Proučavat ćemo tok do kojeg dolazi zbog utiskivanja čiste vode ( $s = 1$ ) u čistu naftu ( $s = 0$ ). To odgovara Riemannovoj zadaći oblika:

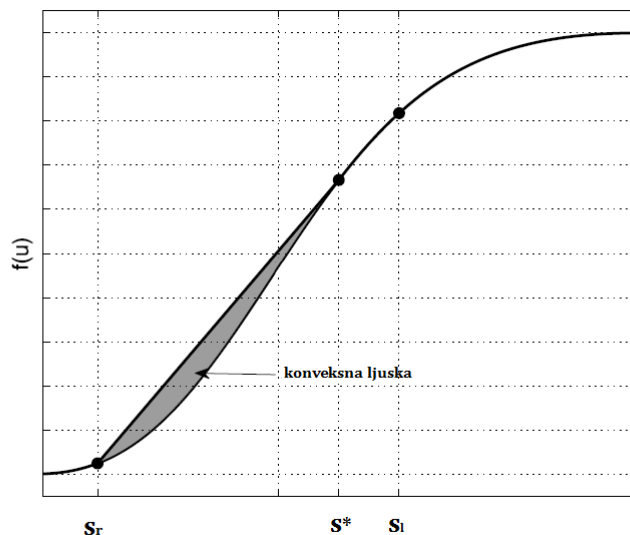
$$s_t + f'(s)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{3.6}$$

$$s(0, x) = s_0(x) = \begin{cases} s_l = 1 & x < 0, \\ s_r = 0 & x > 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Vidjeli smo da, kada je  $f$  konveksna funkcija, rješenje Riemannove zadaće ima oblik ili šoka ili razrjeđujućeg vala. Ako  $f$  nije konveksna funkcija, kao u ovom slučaju (v. Slika 3), u rješenju se mogu naći oba oblika.

Karakteristike za danu jednadžbu su oblika

$$x(t) = x(0) + f'(s_0(x(0)))t.$$



Slika 3.4: Konveksna ljuska funkcije  $f$ , pri čemu afini dio predstavlja šok, a konveksni dio razrjeđujući val.

Funkcija  $f'$  u točkama 0 i 1 (vrijednosti početnog uvjeta  $s_0$ ) ima vrijednost 0 pa u  $x - t$  koordinatnom sustavu karakteristike su pravci paralelni s  $t$ -osi u svim točkama osim  $x(0) = 0$ .

Uočimo prvo da  $s(t, x) = 1$  za  $x < 0$  i  $s(t, x) = 0$  za  $x > 0$  nije slabo rješenje jer prekid u  $x = 0$  ne zadovoljava RH uvjet. Stoga, da zadovoljimo uvjete (1.31) stanje  $s_r = 0$  ćemo spojiti šokom s nekim drugim stanjem  $s^* > 0$ , dok ćemo stanje  $s_l = 1$  spojiti razrjeđujućim valom  $s^* < 1$ . Vrijednost šoka  $s^*$  odredit ćemo iz RH uvjeta. Dakle, za brzinu šoka  $\sigma^*$  mora vrijediti

$$\sigma^* = \frac{f(s^*) - 0}{s^* - 0} = \frac{f(s^*)}{s^*}.$$

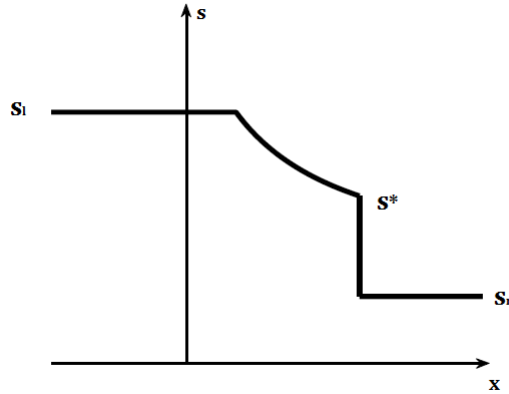
S druge strane, za razrjeđujući val mora vrijediti  $\sigma^* = f'(s^*)$  i time dolazimo do jednadžbe

$$f'(s^*) = \frac{f(s^*)}{s^*},$$

tj. pravac kroz  $(0, 0)$  i  $(s^*, f(s^*))$  je tangenta na graf funkcije  $f$ . U našem slučaju lako se pokaže da je  $s^* = \sqrt{\frac{a}{a+1}}$ , tj.  $s^*$  ovisi samo o omjeru viskoznosti vode i nafte.

Dakle, rješenje sadrži i šok i razrjeđujući val. Da je funkcija  $f$  imala više točaka infleksije, imali bismo više pojava tih oblika rješenja. S fizikalne strane, to možemo interpretirati tako da voda, kako se utiskuje u bušotinu, trenutno istisne određenu količinu nafte. Period

tijekom kojeg izlazi čista nafta odgovara razrjeđujućem valu. Trenutak nakon šoka predstavlja istjecanje mješavine nafte i vode, uz sve manje nafte kako vrijeme odmiče.



Slika 3.5: Rješenje zadatke (3.6), (3.7).

Kao i kod Burgersove jednadžbe, pomoću metode usrednjenja možemo jednadžbu (3.6) svesti na oblik

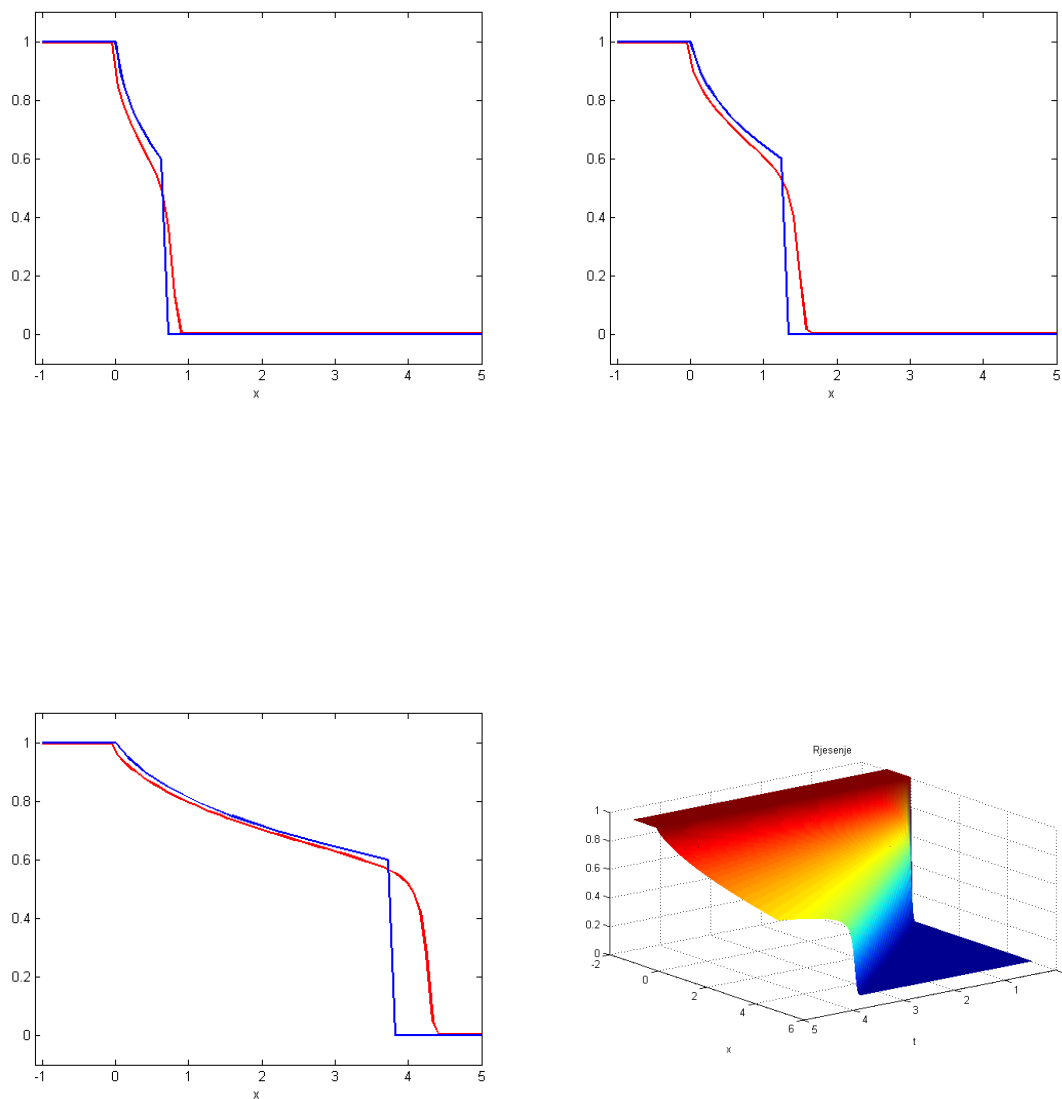
$$\begin{aligned} h_t + f'(\lambda)h_x &= 0, \\ h|_{t=0} &= \text{sgn}(u_0 - \lambda), \end{aligned}$$

gdje je  $f'(\lambda) = \frac{2a\lambda(1-\lambda)}{(\lambda^2+a(1-\lambda)^2)^2}$ . Koristimo iste diskretizacije pomoću modificirane Lax- Friedrichsove metode

$$\begin{aligned} H_m^{n+1} &= \frac{1}{2}(H_{m-1}^n + H_{m+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(\lambda_k)(H_{m+1}^n - H_{m-1}^n) \\ &+ \frac{1}{2\Delta t} (1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} f'(\lambda_k)^2)(H_{m-1}^n - 2H_m^n + H_{m+1}^n) \end{aligned}$$

i modificirane upwind metode

$$\begin{aligned} H_j^{n+1} &= H_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\lambda_k)(H_m^n - H_{m-1}^n) \\ &+ \frac{1}{2\Delta x} f'(\lambda_k)(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\lambda_k))(H_{m-1}^n - 2H_m^n + H_{m+1}^n). \end{aligned}$$



Slika 3.6: Rješenje jednadžbe (3.6), (3.7) na intervalu  $[-1, 5]$  za  $\Delta t = 0.0005$  upwind metodom. Prva tri grafa prikazuju rješenje redom u trenutcima  $t = 0.5, 1, 3$ , dok zadnji graf prikazuje cijelo rješenje na vremenskom intervalu  $[0, 5]$ .

# Bibliografija

- [1] Y. Brenier, *Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws*, SIAM J. on Numerical Analysis, **21**, (1984) 1013–1037.
- [2] G. A. Chechkin, A. Yu. Goritsky, *S. N. Kruzhkov's lectures on first-order quasilinear PDEs*, Analytical and Numerical Aspects of PDEs, de Gruyter (2009).
- [3] M. G. Crandall, A. Majda, *Monotone difference approximations for scalar conservation laws and related equations*, Math. Comput., **34**, (1981) 1–21.
- [4] A. L. Dalibard, *Kinetic formulation for heterogeneous scalar conservation laws*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, **23**, (2006) 475–500.
- [5] H. Holden, N. H. Risebro, *Front tracking for hyperbolic conservation laws*, Applied Mathematics Sciences 152, Springer (2011).
- [6] H. Kalisch, D. Mitrović, J. M. Nordbotten, *Non-standard shocks in the Buckley-Leverett equation*, J. Math. Anal. Appl, **428**, (2015) 882–895.
- [7] S. N. Kružkov, *First order quasi-linear equations in several independent variables*, Math. USSR Sbornik, **10** (2), (1970) 217–243.
- [8] R. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Lectures in Mathematics, ETH-Zurich Birkhauser-Verlag, Basel (1990).
- [9] P. L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor, *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, J. Amer. Math. Soc., **7**, (1994) 169–191.
- [10] D. Mitrović, A. Novak, *Transport-collapse scheme for scalar conservation laws - initial and boundary value problems*, <http://arxiv.org/abs/1508.01312>.

# Sažetak

Zakoni sačuvanja opisuju brojne prirodne pojave, između ostalog tok u poroznoj sredini (Buckley-Leverettove jednađbe). U ovom diplomskom radu opisat ćemo nedavno uvedenu numeričku metodu za zakone sačuvanja te dokazati konvergenciju metode prema entropijskom rješenju. Metoda povezuje suvremene s poznatim tehnikama iz tog područja, poput kinetičke formulacije i entropijskih uvjeta. Opisno govoreći, osnova metode je pretvaranje nelinearne jednađbe skalarnog zakona sačuvanja u linearnu (kinetičku) jednađbu. Usrednjavanjem rješenja linearne jednađbe dobiva se dopustivo entropijsko rješenje inicijalnog problema. Na kraju dajemo numeričku implementaciju metode na poznatim problemima Burgersove i Buckley-Leverettove jednađbe.

# Summary

Scalar conservation laws are key in modelling different natural phenomena, for example two-phase flow in porous media (Buckley-Leverett equations). In this thesis a new numerical method for conservation laws is described and it is proven that the solution given by this method converges to the entropy solution. This method includes both modern and classic methods for solving conservation laws, such as entropy conditions in method of characteristics and kinetic formulation. Basic idea is to make a linear (kinetic) equation from a nonlinear homogeneous conservation law and then average out the solution to get the entropy admissible solution of the initial problem. We also provide numerical examples of implementing the described method on Burgers' equation and Buckley-Leverett equation.



# Životopis

Ana Budiša rođena je 4. rujna 1992. godine u Splitu. Pohađala je Osnovnu školu "Ostrog" u Kaštel Lukšiću koju završava 2007. godine. Srednju školu, III. gimnaziju u Splitu, završava 2011. godine. Školovanje je nastavila na Sveučilištu u Zagrebu gdje je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu 2014. godine završila Preddiplomski sveučilišni studij Matematika. Iste godine upisala je Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika.