

# Modeliranje prijenosa raspršenog zračenja u svemiru

---

**Nazifović, Tomislav**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2014**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:058370>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-16**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: PROFESOR FIZIKE I INFORMATIKE

**Tomislav Nazifović**

Diplomski rad

**Modeliranje prijenosa raspršenog zračenja  
u svemiru**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr.sc. Dejan Vinković

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2014

## Sadržaj

1. Pregled rada.....	3
2. Širenje svjetlosti iz zvijezde.....	5
2.1. Informativna narav svjetlosti.....	5
2.2. Motivirajuća demonstracija.....	5
2.3. Raspršenje svjetlosti.....	7
2.4. Prijenos zračenja na cirkumstelarnoj prašini.....	8
2.5. Opis analiziranog problema .....	10
2.6. Pregled dosadašnjih numeričkih rješenja .....	11
2.7. Jednostavno Monte Carlo rješenje .....	12
3. Rješenje .....	17
3.1. Pretpostavke rješenja.....	17
3.2. Parametri rješenja.....	18
3.3. Detektor i ovisnost intenziteta o udaljenosti .....	18
3.4. Programsko rješenje .....	20
4. Rezultati simulacije.....	23
4.1. Ovisnost broja fotona o rednom broju detektora.....	23
4.2. Usporedba promjene broja fotona .....	24
4.3. Usporedba promjene optičke dubine.....	28
4.4. Usporedba različitih razlučivosti .....	29
4.5. Prikaz cjelokupnog područja promatranja .....	31
5. Diskusija.....	34
6. Hubbleov svemirski teleskop u nastavi fizike.....	38
7. Zaključak.....	42
8. Programski kod .....	46
Literatura .....	49

## 1. Pregled rada

U ovom radu ćemo napraviti pregled fizike emitiranja i širenja svjetlosti iz zvijezda, raspršenja svjetla na sitnim česticama, analizirati problem prijenosa zračenja u cirkumstelarnoj prašini, kao i primjer programa koji problem rješava Monte Carlo metodom. Fokus će dodatno biti na pojednostavljivanju teškog i egzaktnog matematičkog i fizikalnog problema na razinu srednjoškolskog znanja i vještina. Cilj pojednostavljivanja je omogućavanje učenicima srednjih škola da riješe stvaran problem, te rezultate kvalitativno usporede s postojećim mjerilima. U tom kontekstu ćemo pogledati i načine korištenja Hubbleovog svemirskog teleskopa u školi. Program ćemo analizirati na primjeru početnih parametara za sferno simetričnu raspodjelu optički tankog medija prašine te dobivene rezultate uspoređivati s analitičkim rješenjima i javno dostupnim slikama s Hubbleovog teleskopa.

S razvojem moderne znanosti smo konačno u poziciji da iz zvijezda (kako našeg Sunca tako i njegovih pandana kroz ostatak Svemira) dobijemo daleko više informacija nego naši antički predci. Uz izravne metode poput analize spektralnih linija bitna komponenta spoznaje je i izgradnja modela čiju točnost provjeravamo uspoređivanjem s uočenim pojavama. Tako smo, na primjer, spoznali kojeg oblika je Mliječni Put, prethodno znan kao mliječna maglica na nebeskom svodu. Danas se izgradnja modela uvelike oslanja na računala, bilo za obradu podataka dobivenih na druge načine (recimo optičkom teleskopijom), bilo za generiranje (i obradu) samih podataka za uspoređivanje.

Temeljna tehnologija odrednica početka kraja 20. i početka 21. stoljeća je sigurno informatička tehnologija, u kojoj programiranje čini samu srž. Nažalost, samo programiranje se danas među učenicima doživljava kao teška i naporna aktivnost, usporediva s vježbanjem matematike i fizike. Smatram da većina negativnih asocijacija na programiranje dolazi iz učenja na temelju suhoparnih i iz realne upotrebe izoliranih primjera. Jedna alternativa tom pristupu je učenje kroz igru: izgradnja malih programa-igara, kao i modula za postojeće igre. Druga alternativa je ilustriranje realne uloge programiranja u znanstvenim spoznajama (a i humanističkim i društvenim znanostima) za što su primjeri ovakvog tipa odlični.

U ovom radu je obrađen problem čije je potpuno fizikalno objašnjenje van dosega kurikuluma srednjih škola, no čije se temeljne ideje mogu kvalitetno prenijeti prikladnim pojednostavljivanjem koncepata (umjesto uvođenja koncepata raspršenja, apsorpcije i emisije svjetlosti na česticama prašine, učenicima se prezentira paralela sa sudaranjem pikula i

odbijanjem u nepredvidljivom smjeru). Samu matematiku problema je također moguće prikladno pojednostaviti (u potpunosti izbjeći uvođenje integrala te ga zamijeniti sa serijom suma), dok programerski zahtjevi ne iskaču iz kurikulumu programiranja (kojeg, doduše, češće obrade matematičke i prirodoslovne gimnazije nego ostale škole). Stoga je ovaj problem primjer kategorije problema koji nominalno jesu van dosega rada srednje škole, no koji bi pojavljivanjem u istoj omogućili učenicima da se užive u ulogu znanstvenika ili istraživača koji programiranjem rješava realne probleme. Time bi se mogla iskoristiti težnja većine srednjoškolaca: da se afirmiraju i budu prihvaćeni kao odrasli, kao i već postojeća znanja koje pojedini učenici imaju.

## 2. Širenje svjetlosti iz zvijezde

### 2.1. Informativna narav svjetlosti

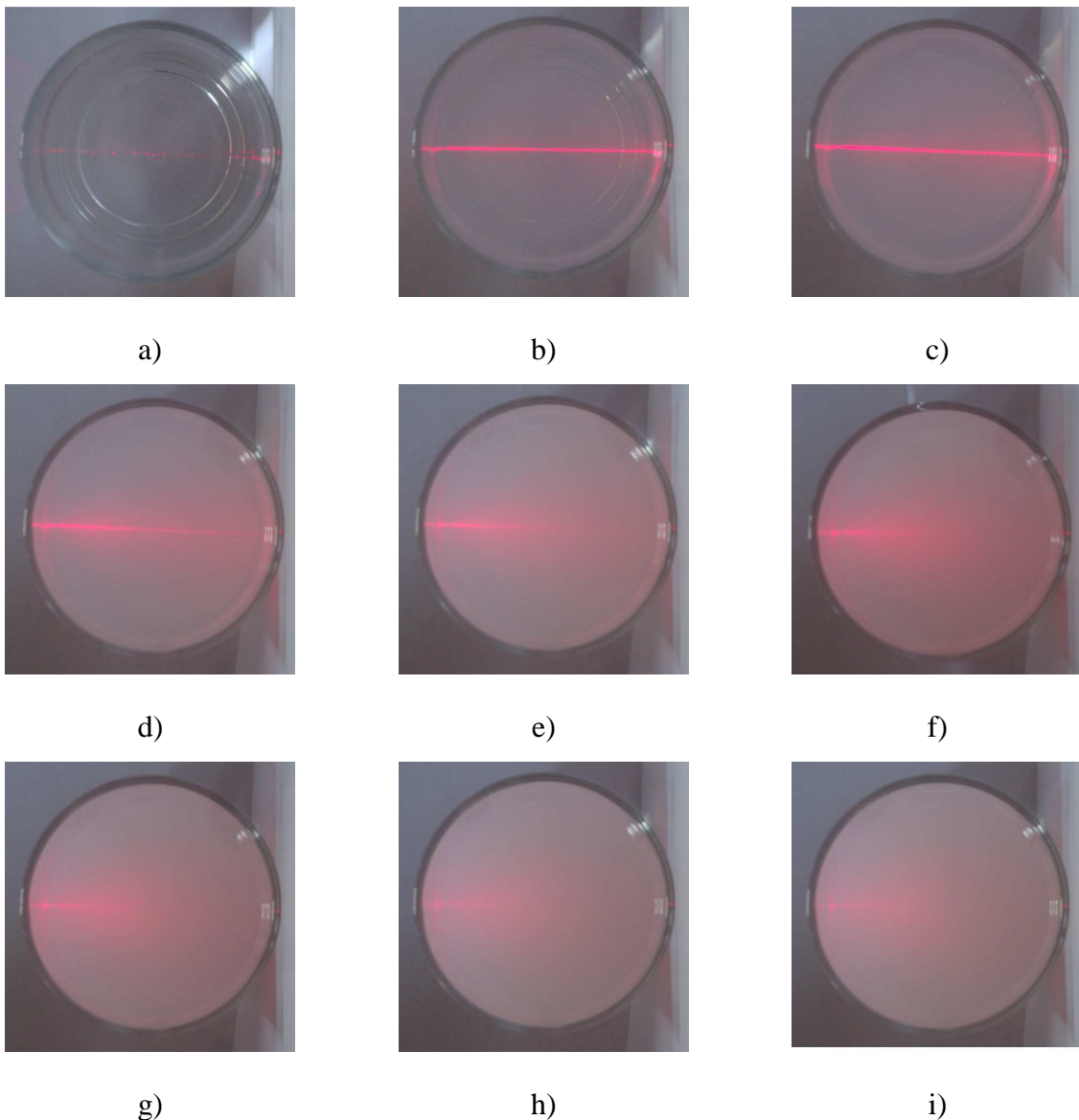
Svjetlost emitirana iz zvijezde, uz očiglednu biološku i termodinamičku korist, nosi i pregršt informacija koje možemo izvući iz nje i time obogatiti naše znanje o zvijezdi i okolini. S obzirom na to da značajan dio emitiranih fotona dolazi od energijskih prijelaza u atomima, u spektru svjetlosti sa zvijezde moguće je uočiti apsorpcijske linije spektra, čime možemo saznati kemijski sastav zvijezde. Pomak linija u usporedbi s laboratorijski fiksiranim frekvencijama linija nam govori o gibanju zvijezde preko Dopplerovog efekta. Time možemo saznati ne samo ukupno gibanje zvijezde, nego i promjenjivu komponentu njene brzine kojoj je uzrok rotiranje oko baricentra (zvijezde i bliskog planeta). Upravo je ta primjena Dopplerovog efekta jedan od prvih načina detekcije ekstrasolarnih planeta. Uz emisijski spektar, preostala komponenta zvjezdanog spektra je bliska zračenju crnog tijela, preko kojeg možemo dobiti informaciju o temperaturi fotosfere. Dodatno, ako svjetlost sa zvijezde na putu do nas prođe kroz neki oblak plina ili prašine, u spektru se mogu pojaviti i apsorpcijske linije hladnog plina u Svemiru, preko kojih možemo saznati o sastavu interstelarne materije.

Naposljetku, ako je zvijezda okružena oblakom prašine, na istoj će se dogoditi raspršenje svjetla, te slika zvijezde neće biti točkasti izvor, nego će biti zamućena halom reflektirane svjetlosti. Jednadžba koja nam opisuje taj problem je izuzetno teška za riješiti osim pri nekim pravilnijim raspodjelama i uvjetima, stoga pribjegavamo izgradnji računalnih modela raspodjele prašine, te uspoređujemo s postojećim slikama. Time možemo saznati ne samo geometrijsku raspodjelu prašine oko zvijezde, nego i temperaturu i građu istog.

### 2.2. Motivirajuća demonstracija

Interaktivan metodički pristup u nastavi pokušava primarno zainteresirati učenike za neki problem s kojim se susreću u životu i onda tu motivaciju iskoristiti za učenje novog znanja. Pošto je raspršenje svjetlosti predaleko od svakodnevnog životnog iskustva učenika, poželjno je ilustrirati na nekoj ekvivalentnoj pojavi. Raspršenje svjetla u magli, prašini ili kakvom dimu je pojava s kojom su se vjerojatno svi učenici susreli i poznata im je. Ono što u tim primjerima manjka je mogućnost variranja gustoće i proučavanje promjene raspršenja svjetlosti. Stoga uz navođenje gornjih primjera možemo ponuditi i jednostavan ilustrativan pokus kojeg je moguće ostvariti i doma.

Cilj pokusa je ilustrirati raspršenje svjetla na koloidnoj otopini različite gustoće. Za to nam je potrebna mala prozirna posuda (u ovom slučaju staklena čaša od 2 dl), voda, malo mlijeka i laserski pokazivač (danas prilično jeftini i dostupno i u lokalnim dućanima). Snimljeni su efekti prolaska svjetla kroz čistu vodu, nakon dodavanja jedne kapi i nakon dodavanja po 5 dodatnih kapi u čašu, te prikazani u sljedećoj slici. Slovom a) je označena fotografija čaše s čistom vodom, slovom b) fotografija čaša s dodanom jednom kapi mlijeka, a od c) do i) su označene fotografije progresivno gušće mješavine mlijeka i vode.



Slika 2.1: Ilustracija jednostavnog pokusa s raspršenjem svjetla

Ovo je samo jedna od inačica mogućeg ilustrativnog pokusa raspršenja. Ova specifična varijanta je odabrana jer je jednostavna za izvesti i jednoj osobi te ne zauzima puno prostora ili zahtjeva puno opreme, a raspršenje je jednostavno i jasno vidjeti.

### 2.3. Raspršenje svjetlosti

Širenje svjetlosti je jedan od fundamentalnih problema astrofizike, a na njega nailazimo već pri izgradnji modela zvijezde. Poznato je da fotoni u zvijezdi nastaju fuzijskim reakcijama u središtu te da moraju proputovati do fotosfere iz koje naposljetku napuštaju prostor zvijezde. Pošto na putu učestalo interagiraju s materijom u zvijezdi, vrijeme prolaska je iznimno dugo (za razliku od neutrina koji, neopterećeni interakcijama, iz zvijezde izlaze ubrzo po nastanku). Simulirajući proces apsorpcije i reemisije fotona u unutrašnjosti Sunca s jednostavnim slučajnim šetačem, određeno je da je prosječno vrijeme prolaska fotona od nastanka u jezgri do izlaska iz fotosfere oko 170 000 godina [7].

Atenuaciju intenziteta snopa fotona na putu kroz neku tvar možemo opisati veličinom optička dubina. S obzirom na to da intenzitet svjetlosti na nekom putu, započevši od točke  $\vec{l}$ , opada proporcionalno s gustoćom materijala  $n(\vec{l})$ , udarnim presjekom za fotone  $\sigma(\vec{l})$  i veličinom promatranog puta  $\Delta l$ , moguće je zapisati izraz za smanjenje intenziteta svjetlosti:

$$\Delta I = -In(\vec{l})\sigma(\vec{l})\Delta l \quad (2.1)$$

Iz izraza (2.1) se mogu izdvojiti članovi koji množe intenzitet, što nazivamo optičkom dubinom:

$$\Delta\tau = n(\vec{l})\sigma(\vec{l})\Delta l \quad (2.2)$$

Optička dubina sadrži informaciju o vjerojatnosti interakcije s česticama na nekom putu, te ovisi o tipu čestica, gustoći i fizikalnoj duljini puta. Očigledno je da optička dubina ovisi o fizičkoj dubini, no ne obavezno linearno. Izraz (2.1) se u infinitezimalnom obliku može napisati kao:

$$dI = -Id\tau \quad (2.3)$$



Integriramo li izraz (2.3) nakon separacije varijabli, dobijemo izraz za intenzitet u ovisnosti o prijedenoj optičkoj dubini:

$$I = I_0 e^{-\tau} \quad (2.4)$$

Što se također može zapisati i obliku koji omogućuje alternativno objašnjenje optičke dubine, kao negativni prirodni logaritam omjera konačnog i početnog intenziteta pri prolazu kroz neki medij:

$$\tau = -\ln \frac{I}{I_0} \quad (2.5)$$

#### 2.4. Prijenos zračenja na cirkumstelarnoj prašini

Prašina kojom su zvijezde okružene igra veliku ulogu u prijenosu zračenja od zvijezde do međuzvjezdanog prostora i, naposljetku, u formiranju slike zvijezde koju vidimo. Čestice prašine su odgovorne za apsorpciju i raspršenje svjetlosti, kao i za naknadnu emisiju apsorbiranih fotona. Slika zvijezde koju promatramo je pod utjecajem ta tri procesa, što dovodi do formiranja svjetlosne izmaglice oko same zvijezde. Proces prijenosa zračenja jedan je od intenzivnijih računalnih problema u astrofizici.

U proučavanju prijenosa zračenja metodom praćenja putanji fotona ne promatraju se pojedinačni fotoni, nego „statistički“ fotonski paket (u daljnjem tekstu zvan "fotonom"). Time možemo promatrati intenzitet fotona (odnosno, broj pojedinačnih fotona u paketu) umjesto da pratimo put svakog pojedinog. Luminozitet (ukupno izračena energija u vremenu) tada dijelimo u  $N$  zasebnih paketa snage  $\xi$ :

$$\xi = \frac{L}{N} \quad (2.6)$$

Intenzitet fotona, odnosno promjenu intenziteta, tada možemo pratiti tijekom propagacije fotona kroz medij. Faktori koji pridonose promjeni intenziteta su: primarna emisija, apsorpcija, raspršenje i sekundarna (termalna) emisija iz prašine. Uključimo li sve faktore u izraz, formula za prijenos zračenja na poziciji  $\vec{x}$ , u smjeru  $\vec{n}$  i u valnoj dužini  $\lambda$  ima oblik:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds}(\vec{x}, \vec{n}, \lambda) = & -\kappa_{ext}(\vec{x}, \lambda)\rho(\vec{x})I(\vec{x}, \vec{n}, \lambda) + j_*(\vec{x}, \vec{n}, \lambda) + j_d(\vec{x}, \lambda) \\ & + \kappa_s(\vec{x}, \lambda)\rho(\vec{x}) \int_{4\pi} \Phi(\vec{n}, \vec{n}', \vec{x}, \lambda)I(\vec{x}, \vec{n}', \lambda)d\Omega' \end{aligned} \quad (2.7)$$

U gornjem izrazu  $\kappa_{ext} = \kappa_a + \kappa_s$  je koeficijent gašenja, koji se sastoji od koeficijenta apsorpcije  $\kappa_a$  i koeficijenta raspršenja  $\kappa_s$ , a  $\rho(\vec{x})$  je gustoća prašine na mjestu  $\vec{x}$ .  $j_*$  predstavlja primarnu emisiju (najčešće sa zvijezde, rjeđe aktivne galaktičke jezgre, ioniziran plin, kočiono zračenje, ...), dok  $j_d$  predstavlja emisiju iz prašine. Integral, i pripadni koeficijent raspršenja, predstavljaju raspršenje fotona na česticama prašine, gdje  $\Phi$  opisuje vjerojatnost da će foton koji dolazi iz smjera  $\vec{n}'$  imati novi smjer  $\vec{n}$ . Ovako iskazano, integral raspršenja predstavlja raspršenje u snop. Raspršenje iz snopa je uključeno u  $\kappa_{ext}$  preko koeficijenta raspršenja.

U realnim primjerima se prašina sastoji od raznih tipova čestica koje se razlikuju bilo po fizikalnim bilo po kemijskim karakteristikama. Stoga bi se gornjoj jednadžbi trebale izvršiti sljedeće zamjene, gdje s  $w_i(\vec{x})$  označavamo udio čestica tipa  $i$  na lokaciji  $\vec{x}$ ,  $\kappa_{s,i}(\lambda)$ ,  $\kappa_{a,i}(\lambda)$  i  $\kappa_{ext,i}(\lambda)$  označavaju (redom) koeficijent raspršenja, apsorpcije i gašenja za pojedini tip čestice u ovisnosti o valnoj duljini upadne svjetlosti, a  $\Phi_i(\vec{n}, \vec{n}', \lambda)$  predstavlja vjerojatnost da će se svjetlosna zraka valne duljine  $\lambda$  i upadnog smjera  $\vec{n}'$  raspršiti u smjeru  $\vec{n}$  za pojedini tip čestice  $i$ :

$$\kappa_s(\vec{x}, \lambda) = \sum_i w_i(\vec{x})\kappa_{s,i}(\lambda) \quad (2.8)$$

$$\kappa_a(\vec{x}, \lambda) = \sum_i w_i(\vec{x})\kappa_{a,i}(\lambda) \quad (2.9)$$

$$\kappa_{ext}(\vec{x}, \lambda) = \sum_i w_i(\vec{x})\kappa_{ext,i}(\lambda) \quad (2.10)$$

$$\Phi(\vec{n}, \vec{n}', \vec{x}, \lambda) = \frac{\sum_i w_i(\vec{x})\kappa_{s,i}(\lambda)\Phi_i(\vec{n}, \vec{n}', \lambda)}{\sum_i w_i(\vec{x})\kappa_{s,i}(\lambda)} \quad (2.11)$$

S obzirom na prirodu ove zamjene, ako ne promatramo emisiju iz prašine, prijenos zračenja za mješavinu raznih čestica u prašini je ekvivalentan izrazu za jedan tip čestica, dobivenih kao prosjek prisutnih čestica.

Pošto sekundarna emisija iz prašine ovisi o temperaturi zrna,  $j_d$  član komplicirano i nelinearno ovisi o intenzitetu zračenja, što višestruko komplicira dani problem. U pretpostavci toplinske ravnoteže, izraz za  $j_d$  ima jednostavniji oblik (gdje je  $B(T, \lambda)$  Planckova funkcija):

$$j_d(\vec{x}, \lambda) = \sum_i w_i(\vec{x}) \kappa_{a,i}(\lambda) \rho(\vec{x}) B[T_i(\vec{x}), \lambda] \quad (2.12)$$

Na prvi pogled ovaj izraz za  $j_d$  bi mogao biti skraćen kao i izrazi za koeficijente apsorpcije i raspršenja te bi se mogla izračunati prosječna temperatura zrnâ, čime bi se gornji izraz pojednostavnio u:

$$j_d(\vec{x}, \lambda) = \kappa_a(\vec{x}, \lambda) B[T(\vec{x}), \lambda] \quad (2.13)$$

## 2.5. Opis analiziranog problema

U ovom radu je, radi pojednostavljenja problema, promatrana sferno simetrična raspodjela prašine. Korišten je model zvijezde veličine Sunca, okružen prašinom od 0.1AU do 100AU, kojoj gustoća opada s drugom potencijom udaljenosti od zvijezde. Takva ovisnost gustoće o udaljenosti je posljedica raspodjele konstantne mase na rastući volumen sferne ljuske. Naime, oblaci prašine oko zvijezde nastaju kao posljedica izbačaja materijala sa zvijezde, koji se onda radijalno širi. Sferična ljuska na kojoj je konačna i konstantna masa raspodijeljena se udaljavanjem povećava, te se gustoća smanjuje po izrazu:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{m}{4\pi r^2 \Delta r} \quad (2.14)$$

Pretpostavljeno je da su čestice jednog tipa (ili bar iskazive u srednjoj vrijednosti), da su apsorpcija i sekundarna emisija zanemarive, te da je raspršenje na česticama izotropno. Ukupno, izraz za prijenos zračenja u promatranom problemu izgleda:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds}(\vec{x}, \vec{n}, \lambda) = & -\kappa_s(\vec{x}, \lambda) \rho(\vec{x}) I(\vec{x}, \vec{n}, \lambda) + j_*(\vec{x}, \vec{n}, \lambda) \\ & + \kappa_s(\vec{x}, \lambda) \rho(\vec{x}) \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I(\vec{x}, \vec{n}', \lambda) d\Omega' \end{aligned} \quad (2.15)$$

Umjesto da se gornji izraz rješava odabirom nekog smjera i rješavanjem integro-diferencijalne jednadžbe, u radu je odabran Monte Carlo pristup praćenja pojedinih fotona od izlaska iz fotosfere do izlaska iz oblaka prašine. Pretpostavljeno je da nakon izlaska iz oblaka prašine fotonski paket ne interagira s drugom materijom do dolaska u detektor.

U svrhu povećavanja statistike ubrojani su svi fotoni koji izlaze iz oblaka prašine, tako da je osno simetrični detektor postavljen okomito na vektor smjera fotona  $\vec{n}$ , na način da mu os simetrije prolazi kroz centar zvijezde (ishodište koordinatnog sustava). Za svaki primljeni foton je određena udaljenost od centra (tj. udaljenost položaja od osi simetrije).

## 2.6. Pregled dosadašnjih numeričkih rješenja

Problem transfera zračenja se generalno rješava na dva načina: ray tracing metodom i Monte Carlo metodom.

U ray tracing metodi se određuje jedan smjer (zraka) te se rješava jednadžba prijenosa zračenja. Time se u svakom polju proučavanog prostora određuje intenzitet zrake, odnosno količina apsorbirane i emitirane energije u tom polju. Ray tracing se može prikazati u tri temeljna koraka:

1. Određivanje polja u koje će zraka ući po izlazu iz trenutnog
2. Određivanje točaka u kojima će zraka ući u sljedeće polje
3. Izračunati intenzitet zrake u svakom polju po izrazu:

$$I(s + \Delta s, \lambda) = I(s, \lambda)e^{-\tau_0(\lambda)} + \frac{j_0(\lambda)\Delta s}{\tau_0(\lambda)}(1 - e^{-\tau_0(\lambda)}) \quad (2.16)$$

Gdje  $\tau_0(\lambda) = \kappa_0(\lambda)\rho_0\Delta s$  predstavlja optičku dubinu.

Glavna mana ray tracing metode je u prvom koraku, gdje određivanje sljedećeg polja može zahtijevati velike proračunske resurse, pogotovo u naprednijim mrežnim strukturama poput oktalnog stabla. Pri korištenju oktalnog stabla je potrebno pretraživati po roditeljima i djeci u stablu dok se ne dođe do susjednog polja. U slučaju 3D problema, ray tracing postaje daleko kompliciranija varijanta rješavanja i zahtjeva više računalnih resursa nego Monte Carlo metoda. Stoga većina 3D simulatora transfera zračenja koristi Monte Carlo metodu za generiranje izlazne slike, dok je omjer puno ravnomjerniji za 2D i 1D distribucije.

Dodatna prednost koju Monte Carlo metoda ima u usporedbi s ray tracing metodom je što se rješenje Monte Carlo metodom za 2D problem može jednostavno proširiti na dodatnu dimenziju (i obratno).

S rastom performansi računala (kako velikih tako i stolnih), postaje sve jednostavnije napraviti vlastitu implementaciju bilo kojeg od navedenih rješenja. Naime, i ray tracing i Monte Carlo metoda u svojoj osnovi ne sadrže zahtjevne matematičke procedure niti zahtijevaju napredno programiranje (van, opcionalno, osnovnih principa objektno orijentiranog programiranja) te su rješive na razini naprednijeg srednjoškolskog znanja matematike i informatike. Najzahtjevnija komponenta u izradi programa za rješavanje problema prijenosa zračenja je u optimizaciji i ubrzavanju koda (višedretvenost, programiranje za grafičke procesore, visoki paralelizam ...). Steinacker, Beas i Gordon [6] daju pregled 30 trenutačno korištenih numeričkih rješenja, od kojih su samo dva ray tracing implementacije, 26 su Monte Carlo a preostala 2 su druge varijante.

## 2.7. Jednostavno Monte Carlo rješenje

Monte Carlo metoda, kako joj samo ime govori, koristi slučajno dobivene brojeve da bi statistički generirala rješenje. Temeljna misao vodilja u Monte Carlo metodi je drugačija od one u ray tracingu. Dvije glavne razlike su a) korištenje slučajnih brojeva i b) promjena smjera kod raspršenja (nasuprot promjeni intenziteta u istom smjeru kod ray tracinga). Primarni zahtjev za korištenje Monte Carlo rješenja je izvor slučajnih brojeva koji ne pokazuje korelacije između prethodnih i budućih generiranih brojeva. S obzirom na determinističku prirodu računala, prave slučajne brojeve je teško dobiti, tako da se u pisanju programa koje koriste Monte Carlo metodu zadovoljavamo s pseudo slučajnim brojevima, odnosno brojevima kod kojih se korelacija pojavljuje tek na vrlo velikim nizovima.

Monte Carlo rješenja prijenosa zračenja počivaju na ideji stvaranja pojedinačnih fotona i praćenja njihovog puta kroz oblak prašine. U tom smislu svi događaji koji mijenjaju intenzitet zrake (fotonskog paketa) će u Monte Carlo metodi mijenjati smjer ili druge karakteristike fotona. Apsorpcija time rezultira brisanjem trenutačnog fotona, bilježenjem mjesta gdje je nestao (radi računanja apsorbirane energije) te prelaskom na sljedeći foton. Emisija rezultira stvaranjem novog fotona na mjestu emisije sa slučajnim smjerom. Raspršenje rezultira mijenjanjem smjera, ovisno o tome kakav tip raspršenja simuliramo.

Jednostavno Monte Carlo rješenje se sastoji od tri temeljna koraka:

1. Stvaranje fotona na površini zvijezde
2. Propagacija fotona do mjesta interakcije
3. Određivanje tipa interakcije i posljedice iste

**Korak 1:** stvaranje fotona

Stvaranje fotona uključuje određivanje točke iz koje foton izlazi i smjer u kojem izlazi. U slučaju zračenja iz zvijezde (nasuprot, recimo, aktivnih galaktičkih jezgri) zračenje je izotropno, pa je samo potrebno odrediti točku na sferi. S obzirom da je veličina sfere zadana (veličina zvijezde), određivanje točke nastanka se u praksi svodi na određivanje  $\varphi$  i  $\vartheta$ :

$$\cos \vartheta_1 = 2R_1 - 1 \quad (2.17)$$

$$\varphi_2 = 2\pi R_2 \quad (2.18)$$

gdje su  $R_1$  i  $R_2$  slučajni realni brojevi između 0 i 1. Nakon određivanja mjesta nastanka fotona potrebno je odrediti i smjer kretanja. S obzirom na to da imamo ograničenje u odabiru smjera na poluprostor ograničen točkom nastanka fotona (odnosno tangencijalnom ravninom na zvijezdu u toj točki) i usmjeren od centra zvijezde (foton ne smije udariti nazad u zvijezdu), određivanje smjera se svodi na određivanje točke na jediničnoj polusferi:

$$\sin \vartheta_2 = \sqrt{R_3} \quad (2.19)$$

$$\varphi_2 = 2\pi R_4 \quad (2.20)$$

gdje su  $R_3$  i  $R_4$  slučajni brojevi u rasponu  $[0, 1]$ .

S obzirom da se u programu, radi matematičke jednostavnosti, koristi kartezijev pravokutni sustav, dobiveni podaci su pretvoreni u dva vektora: radij-vektor položaja ( $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ) i jedinični vektor smjera ( $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j} + n_z\hat{k}$ ). Najizravniji način prebacivanja je korištenjem dva kartezijeva i dva sferna sustava. Prvi kartezijev sustav (PKS1) je temeljni sustav kojeg koristimo u programu. Drugi kartezijev sustav (PKS2) postavimo tako da su vektori baze identični vektorima baze prvog sfernog sustava (SS1) određenog kutovima  $\varphi_1$  i  $\vartheta_1$ . Drugi sferični sustav (SS2) (određen kutovima  $\varphi_2$  i  $\vartheta_2$ ) se tada postavlja preko drugog pravokutnog sustava. Iz toga slijedi da:

$$\widehat{r}_1 \equiv \widehat{z}_2 \quad (2.21)$$

$$\widehat{\varphi}_1 \equiv \widehat{y}_2 \quad (2.22)$$

$$\widehat{\vartheta}_1 \equiv \widehat{x}_2 \quad (2.23)$$

Tada vektor smjera  $\widehat{n} = n\widehat{r}_2$  prikažemo rastavljanjem vektora  $\widehat{r}_2$  preko baze drugog kartezijevog sustava, zamjenom kartezijevih vektora sferičnim po gornjim jednakostima, te uvrštavanjem raspisa sferične baze u kartezijevoj:

$$\widehat{r}_i = \sin \vartheta_i \cos \varphi_i \widehat{x}_i + \sin \vartheta_i \sin \varphi_i \widehat{y}_i + \cos \vartheta_i \widehat{z}_i \quad (2.24)$$

$$\widehat{\vartheta}_i = \cos \vartheta_i \cos \varphi_i \widehat{x}_i + \cos \vartheta_i \sin \varphi_i \widehat{y}_i - \sin \vartheta_i \widehat{z}_i \quad (2.25)$$

$$\widehat{\varphi}_i = -\sin \varphi_i \widehat{x}_i + \cos \varphi_i \widehat{y}_i \quad (2.26)$$

Po izvršavanju svih navedenih operacija možemo prikazati vektor smjera preko vektora baze osnovnog kartezijevog sustava:

$$n_x = \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 - \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \quad (2.27)$$

$$n_y = \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 + \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \quad (2.28)$$

$$n_z = -\sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 \sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_1 \quad (2.29)$$

Gdje su  $\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi_1$  i  $\varphi_2$  koordinate dobivene u postupku slučajne generacije kutova.

## **Korak 2:** određivanje mjesta interakcije

U drugom koraku opet imamo karakteristiku Monte Carlo metode kroz slučajno određivanje mjesta interakcije s česticama prašine. Funkciju vjerojatnosti koja opisuje vjerojatnost interakcije je najjednostavnije prikazati preko optičke dubine:

$$p(\tau)d\tau = e^{-\tau}d\tau \quad (2.30)$$

S obzirom na to da vjerojatnost nije ravnomjerna nego eksponencijalna, moguće ju je dobiti koristeći linearnu raspodjelu vjerojatnosti tako da integriramo gornji izraz i izrazimo  $\tau$ :

$$\tau = -\ln R \quad (2.31)$$

$R$  je slučajni broj između 0 i 1. Ovime odredimo optičku dubinu prijedenu do sljedeće interakcije. S obzirom na to da optička dubina nije isto što i fizički put, potrebno je koristiti definiciju optičke dubine da bi odredili fizičku lokaciju interakcije:

$$\tau = \int_0^s \kappa_a \rho(l) dl \quad (2.32)$$

Umjesto analitičkog rješavanja gornjeg integrala, rješavamo ga numerički, pretvarajući ga u sumu po poljima u fizičkom prostoru. Takvu sumu tada iterativno određujemo dok ne dobijemo gore generiranu optičku dubinu. Precizno izračunavanje ove sume je proračunski najzahtjevniji dio programa pošto zahtjeva veliki broj koraka.

### **Korak 3:** određivanje tipa interakcije i posljedice

Nakon određivanja mjesta interakcije potrebno je odrediti i tip interakcije, raspršenje ili apsorpcija. Tip interakcije se određuje koristeći koeficijente apsorpcije i raspršenja tako da se linearna raspodjela vjerojatnosti prebaci u diskretnu, promatrajući jeli slučajno dobiveni broj veći ili manji od nekog faktora  $\chi$ , gdje je  $\chi$  definiran kao omjer koeficijenta apsorpcije i zbroja koeficijenata apsorpcije i raspršenja:

$$\chi = \frac{\kappa_a}{\kappa_a + \kappa_s} \quad (2.33)$$

Tada je interakcija apsorpcija ako je  $R \in [0, \chi]$ , a raspršenje ako je  $R \in (\chi, 1]$ . Faktor  $\chi$  je moguće definirati i obratno, koristeći koeficijent raspršenja u brojniku, što bi u gornjoj logici zamijenilo definicije apsorpcije i raspršenja.

U slučaju apsorpcije foton se na tom mjestu poništava, bilježi se polje na kojem je foton bio apsorbiran kao i njegova energija te se započinje se s novim fotonom iz prvog koraka.



Statistika o mjestu apsorpcije i energiji nam služi za, po potrebi, generiranje sekundarnog izvora fotona - emisijom iz oblaka prašine. Tada bi se cijeli proces ponovio s dodatnim slučajnim sekundarnim izvorom iz samog oblaka. Proces se iterira sve dok novo izračunati sekundarni izvori ne konvergiraju unutar zadanog parametra.

Ukoliko se oblak prašine sastoji od više tipova čestica s različitim koeficijentima apsorpcije i raspršenja potrebno je prethodno ustanoviti na kojem tipu čestice će se dogoditi interakcija. To se također postiže slučajnim brojem, na sličan način kao i gore: izračunaju se faktori  $\psi_i$ , gdje  $i = 0, \dots, n$ , a  $n$  je broj raznih tipova čestica:

$$\psi_i = \frac{\sum_{k=0}^i \rho_k(\vec{r})}{\sum_{k=0}^n \rho_k(\vec{r})} \quad (2.34)$$

Tada se određivanje tipa čestice svodi na određivanje u kojem se intervalu nalazi slučajni broj  $R$ : za  $R \in [\psi_{i-1}, \psi_i)$ , čestica je tipa  $i$ . Nakon određivanja koja čestica sudjeluje u interakciji bi slijedilo određivanje tipa interakcije s nešto izmijenjenim izrazom (indeks  $i$  predstavlja tip čestice):

$$\chi_i = \frac{\kappa_{a,i}}{\kappa_{a,i} + \kappa_{s,i}} \quad (2.35)$$

## 3. Rješenje

### 3.1. Pretpostavke rješenja

Program koji je napisan kao dio rada implementira jednostavnu Monte Carlo metodu za rješavanje problema prijenosa zračenja. Od šablone opisane u prethodnom poglavlju se razlikuje u nekoliko pretpostavki:

**Monokromatičnost:** S obzirom na to da se u modelu ne promatra apsorpcija i ne dolazi do sekundarne emisije, valna duljina promatranih fotona se ne mijenja.

**Zanemariva apsorpcija:** Apsorpcija u promatranom modelu je zanemarivo mala, tako da se interakcija fotona s česticama odvija samo u obliku raspršenja. Alternativno, ovo bi se moglo promatrati i u obliku trenutačne reemisije, koja je navedena usporedbe radi. S obzirom na ovu pretpostavku, prvi dio trećeg koraka (određivanje tipa interakcije) u gore opisanom postupku jednostavne Monte Carlo metode se preskače, odnosno automatski primjenjujemo postupak za raspršenje.

**Trenutačna reemisija:** umjesto skupljanja podataka o apsorbiranim fotonima i iteracije rješenja do konvergencije, u programu je pretpostavljeno da čestice prašine odmah reemitiraju apsorbiran foton s istom energijom, tj. valnom duljinom. U praksi to znači da se apsorpcija tretira kao i raspršenje, tj. foton nastavi dalje, s drugim smjerom.

**Homogenost prašine:** pretpostavljen je samo jedan tip čestica u prašini. S obzirom na ovu pretpostavku, drugi dio trećeg koraka (određivanje tipa čestice na kojoj se odvija interakcija) se također preskače, odnosno ova varijanta Monte Carlo rješenja se sastoji od samo prva dva koraka.

**Izotropnost izvora i raspršenja:** pretpostavljeno je da se fotoni iz izvora (zvijezde) emitiraju jednako u svim smjerovima, kao i u slučaju raspršenja na česticama.

Za oblak prašine je pretpostavljen sferično simetrični oblik sferične ljuske od  $r_2 = 0.1$  AU do  $r_3 = 100$  AU. Gustoća je proporcionalna s  $r^{-2}$ . Pri određivanju fotona koji su došli do detektora iskorištena je simetričnost problema tako da je detektor određen kao osno simetričan, položen okomito na smjer izlaska fotona, centriran tako da os simetrije prolazi ishodištem.

### 3.2. Parametri rješenja

Program koji obavlja Monte Carlo simulaciju u sebi koristi tri temeljna parametra. To su ukupna optička dubina promatranog oblaka prašine, broj fotona koje detektiramo, te rezolucija detektora.

Ukupna optička dubina predstavlja gustoću samog oblaka, te se koristi u određivanju  $\sigma$ . U radu promatramo oblake prašine male ukupne optičke dubine (optički tanke oblake), kao i nekoliko primjera s nešto većom optičkom dubinom. Stoga se za  $\tau$  ograničavamo na vrijednosti 0,1, 0,2, 0,4, 1, 2 i 4.

O broju fotona nam ovisi preciznost generirane statistike, te je poželjno uzeti što veći broj. No povećavanje broja detektiranih fotona uvelike povećava vrijeme vrtnje same simulacije, koje se (zbog neoptimiziranosti koda za brzinu) može popeti na nekoliko sati za više od milijun fotona. Stoga ćemo u simulaciji odabrati  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  i  $10^6$  fotona. Prve dvije vrijednosti nisu izravno korisne za analizu samog problema, no mogu ilustrirati povećanje točnosti samog programa pri vrlo velikim brojevima, odnosno validnost Monte Carlo pristupa.

Rezolucija detektora se odnosi na širinu prikazanih grupa podataka. U ovakvom problemu rezultatima je moguće pristupiti na dva načina: generiranjem čistih podataka (udaljenosti jednog detektiranog fotona od centra detektora) ili generiranjem obrađenih podataka (brojanjem detektiranih fotona u određenim područjima detektora). Prvi pristup bi omogućavao proizvoljnu obradu podataka nakon njihovog generiranja, no zauzima bi puno više mjesta u samom programu i ispisu podataka. S druge strane, drugi pristup automatski obrađuje podatke pa se može iskoristiti samo za određenu specifičnu rezoluciju detektora (to jest za drugačiju rezoluciju se mora ponovo pokrenuti simulacija), no uvelike pojednostavljuje spremanje i ispis podataka. U ovom radu je korišten drugi pristup, te je rezolucija detektora dodatan parametar simulacije. U osnovnoj verziji koristimo rezoluciju od 50 točaka, te za određene setove podataka dodatno generiramo podatke za rezoluciju od 100 i 200 točaka.

### 3.3. Detektor i ovisnost intenziteta o udaljenosti

S obzirom na sfernu simetričnost problema, odabrali smo model cilindričnog detektora s logaritamskom skalom između  $r_2 = 0,1\text{AU}$  i  $r_3 = 100\text{AU}$ . Skala je podijeljena na  $q$  dijelova, što nam daje širinu pojedinog segmenta:

$$d = \frac{\ln q_3 - \ln q_2}{q} = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{q} \quad (3.1)$$

Dani foton udaljen od centra detektora za  $r$  po tome spada u segment:

$$i = \frac{q \ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \quad (3.2)$$

Alternativno, prošla formula se može izraziti u obliku početne udaljenosti od centra detektora za pojedini segment  $i$ :

$$r_i = r_2 \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^{\frac{i}{q}} \quad (3.3)$$

S obzirom na to da intenzitet detektiranih fotona ovisi o njihovom broju, određivanje ovisnosti intenziteta o udaljenosti od centra,  $I(r)$ , se svodi na promatranje ovisnosti broja detektiranih fotona o rednom broju segmenta,  $n(i)$ . Kako ćemo se uvjeriti u prvom prikazu podataka, ovisnost je eksponencijalna

$$n = Ae^{Bi} \quad (3.4)$$

iz čega možemo vidjeti da je korisnije prikazivati podatke preko logaritamske skale za broj fotona:

$$\ln n = \ln A + Bi \quad (3.5)$$

Uvrštavanjem izraza za  $i$  te sređivanjem izraza dolazimo do

$$n = \frac{e^A}{\ln \frac{r_3}{r_2} \sqrt{r_2^{Aq}}} \cdot r^{\frac{qB}{\ln \frac{r_3}{r_2}}} \quad (3.6)$$

Tj. općenitije:

$$n = C \cdot r^k \quad (3.7)$$

S obzirom da nas u radu zanima ovisnost  $n(r)$ , odnosno potencija  $k$ , da bi ju odredili moramo odrediti  $B$ , tj. nagib pravca u  $\log n - i$  grafu. Nakon toga je moguće odrediti  $k$  po izrazu:

$$k = \frac{qB}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \quad (3.8)$$

### 3.4. Programsko rješenje

Sam program koristi objektno orijentirane principe programiranja u obliku dvije nove klase: Foton i Vektor. Klasa Vektor opisuje matematičke operacije na vektorima, te su joj atributi komponente vektora u kartezijevom sustavu, a metode su operacije potrebne za funkcioniranje programa: dva konstruktora (za nul-vektor i vektor s određenim komponentama), vektorsko zbrajanje i oduzimanje, skalarno množenje vektora, kao i množenje vektora sa skalarom, te duljina vektora.

```
class Vektor {
public:
    double x, y, z;

    Vektor() { x = y = z = 0; };
    Vektor(double a, double b, double c){ x = a; y = b; z = c; };

    double distance() { return sqrt( x*x + y*y + z*z ); };
    Vektor operator+ (Vektor v) { return Vektor( x + v.x , y + v.y , z + v.z ); };
    Vektor operator- (Vektor v) { return Vektor( x - v.x , y - v.y , z - v.z ); };
    Vektor operator* (double f) { return Vektor( x * f , y * f, z * f ); };
    double operator* (Vektor v) { return x * v.x + y * v.y + z * v.z; };
};
```

Klasa Foton kao attribute ima položaj i smjer fotona u obliku objekata klase Vektor. Od metoda, klasa Foton sadrži dva konstruktora (za foton generiran s određenom pozicijom i smjerom te osnovni, za foton generiran na površini zvijezde kojeg se počinje promatrati tek na ulasku u oblak prašine) te metode za odabir slučajnog smjera pri raspršenju, izračun položaja na unutrašnjoj ljušci oblaka (kada se foton odbije prema unutrašnjosti, tj. zvijezdi), provjeru udara li foton u zvijezdu, te izračun udaljenosti detektiranog fotona od centra detektora. Konstruktor koji slučajno generira foton implementira izraze opisane u sekciji 2.5.

Parametri same simulacije (razlučivost detektora, veličina zvijezde i udaljenost početka i kraja oblaka prašine) su definirani kao konstante, zbog upotrebe unutar klase Foton.

Program svaki foton vrti u beskonačnoj petlji iz koje se izlazi kada je zadovoljan jedan od uvjeta: foton izađe iz oblaka i bude detektiran ili foton udari u zvijezdu. U beskonačnoj petlji se vrši numerička integracija optičkog puta. Za metodu numeričke integracije je odabran kompromis točnosti i brzine tako da je ukupna slučajna generirana optička dubina  $\tau$  podijeljena na mnogo dijelova (na primjer 1000), te je za svaki taj dio izračunat ekvivalent u fizičkoj udaljenosti koju foton mora proći. Time se računaju iznosi koji iznose 0.1% ukupnog optičkog puta, čime se jamči da ukupno zbrojen iznos neće premašiti zadani. Druga poželjna karakteristika ovakvog izračuna je činjenica da se time jamči točno određen broj koraka u integraciji, te se izbjegava nepoželjna varijanta da se izračunava nepotrebno velik broj koraka (u jednoj varijanti više od čak 250 tisuća koraka za jednu interakciju).

Alternativna metoda, koja je u početku korištena, je izračunavanje početne fizičke udaljenosti kao one koja odgovara malom dijelu ukupnog optičkog puta, te zbrajanja optičkog puta kao funkcije dobivene korištenjem fizičkog puta kao koraka u integraciji. Po potrebi je korak bio modificiran, to jest smanjen kako se suma približavala ukupnom iznosu optičkog puta. Ta metoda je u vanjskim dijelovima oblaka rezultirala vrlo malim fizičkim putem, te vrlo velikim brojem koraka u integraciji.

Nakon svakog koraka integracije se provjerava položaj fotona (tj. udaljenost od centra zvijezde) te se, u ovisnosti o položaju, izvršavaju određeni procesi:

- a) Ako je udaljenost manja od  $r_2$ , foton je ušao u područje u kojem nema oblaka prašine te se prekida petlja integracije. Foton se pušta da se nastavi gibati dok ne opet ne dođe do unutrašnje ljuske oblaka prašine. Pomak fotona se postiže korištenjem metode u klasi Foton `inner_to_inner()`. Nakon toga se opet kreće u numeričku integraciju optičkog puta, za različiti ukupni tau.
- b) Ako uz udaljenost manju od  $r_2$  foton ima smjer koji ide kroz zvijezdu, smatra se da će biti apsorbiran i time eliminiran iz promatranja. Stoga se prekida beskonačna petlja te se generira novi foton za promatranje.
- c) Ako je foton udaljeniji od  $r_3$ , vanjske ljuske oblaka prašine, smatra se da je napustio oblak i da je detektiran. Tada se prekida numerička integracija, te se bilježi njegova udaljenost od centra detektora, pravca koji prolazi kroz ishodište a paralelan je sa smjerom gibanja fotona. U ovisnosti o udaljenosti se povećava brojač u jednodimenzionalnom polju koje predstavlja detektor.

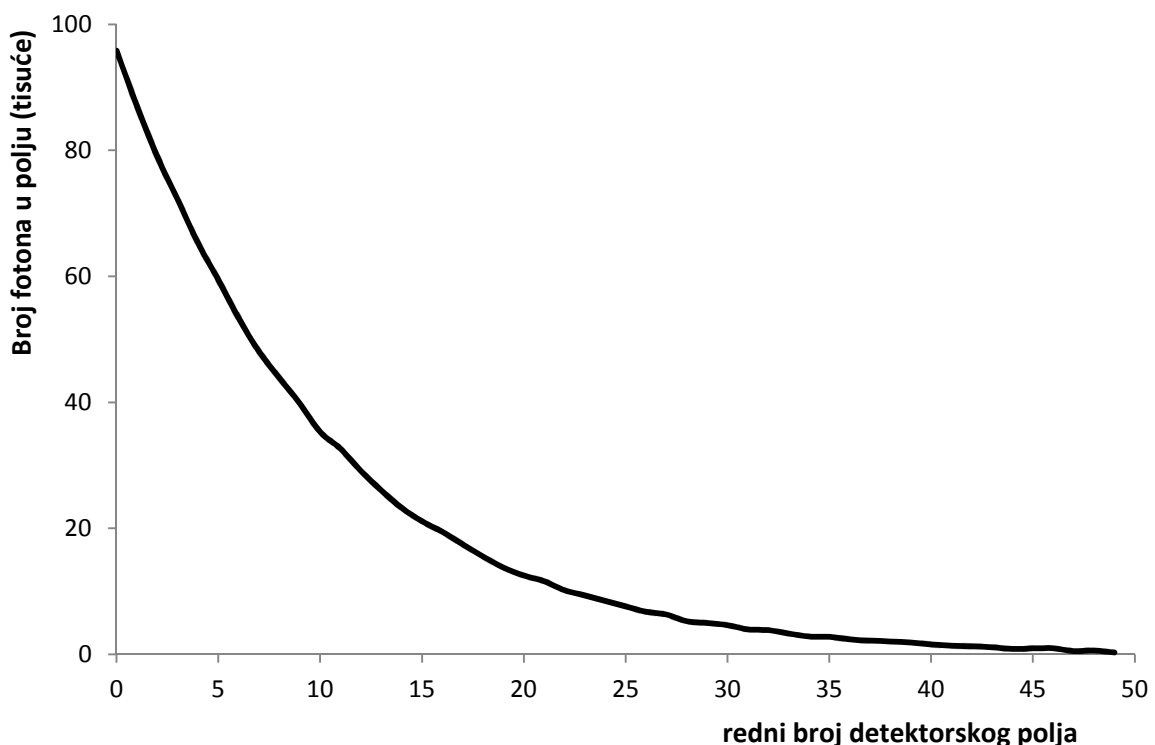
Ako ništa od navedenog nije zadovoljeno, foton se i dalje nalazi unutar oblaka plina, pa po završetku integracije slučajno odaberemo novi smjer fotona, te ponovo radimo integraciju s novom slučajno odabranom optičkom dubinom.

## 4. Rezultati simulacije

U prvom dijelu simulacije (poglavlja 4.1 – 4.4) su prikazani fotoni koji u detektor upadaju iz područja između  $r_2 = 0,1\text{AU}$  i  $r_3 = 100\text{AU}$ . Time se testira funkcionalnost programskog rješenja, uspoređujući analitičko i numeričko rješenje. Zbog toga se u prikazu ignorira područje bliže od  $r_2$  koje sadrži iznimno jak izvor fotona izravno iz zvijezde, nagli pad odmah na rubu zvijezde te postepeni rast do  $r_2$ , unutarnje granice oblaka prašine. Zbog toga u sljedećim grafovima 0, odnosno prvo detektorsko polje, odgovara početku oblaka plina  $r_2$  a ne središtu zvijezde.

Podatke koje smo dobili simulacijom je potrebno prvo prikazati bez ikakve izmjene. Tako možemo vidjeti kojeg je tipa ovisnost vrijednosti (broj fotona) o testiranom parametru (udaljenost od centra detektora). Pošto svaki tip ovisnosti (linearna, eksponencijalna, logaritamska...) ima nešto drugačiji oblik obrade (kod linearne ovisnosti radi se s nepromijenjenim podacima, kod eksponencijalne ih logaritmiramo, ...) na ovaj način možemo odabrati najprikladniji način obrade podataka.

### 4.1. Ovisnost broja fotona o rednom broju detektora



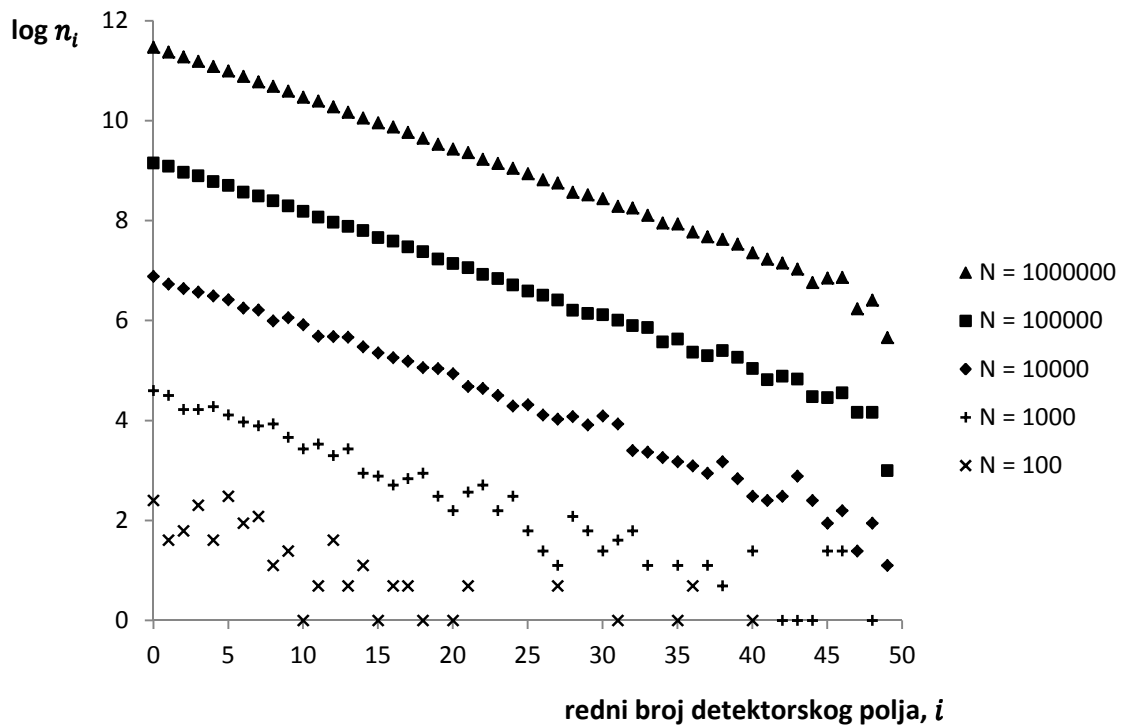
Slika 4.1: Ovisnost broja detektiranih fotona od udaljenosti od centra detektora



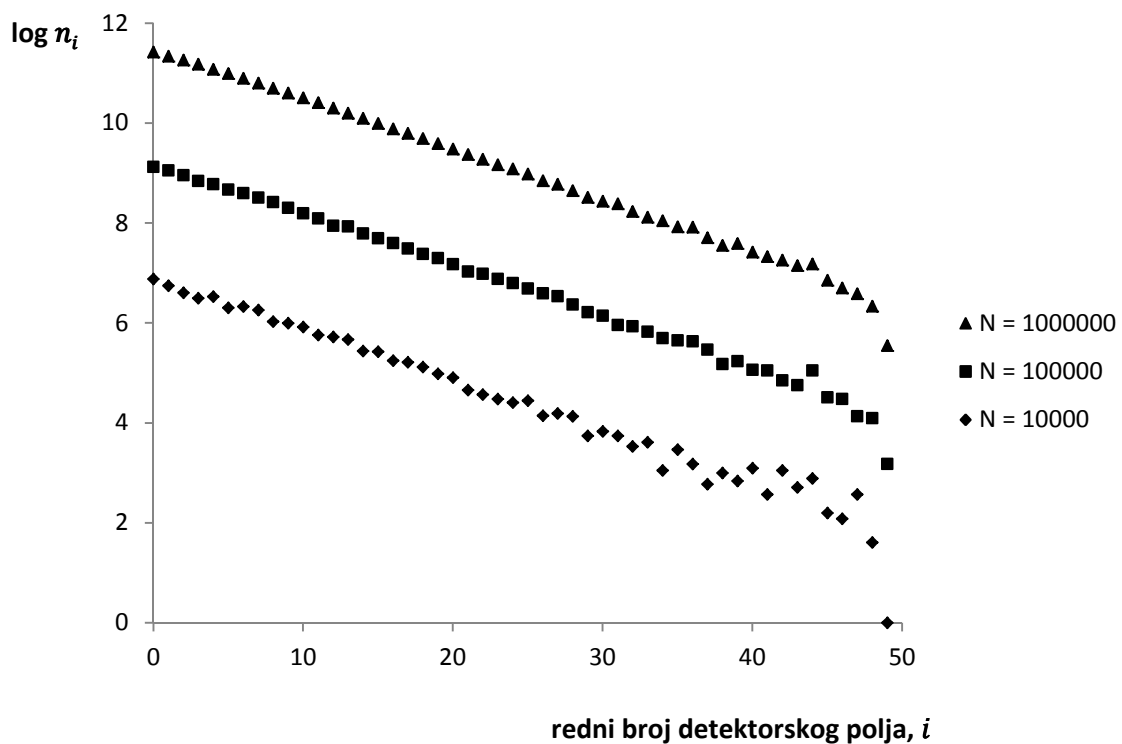
Kao što se može uočiti iz priloženog grafa, u pitanju je ovisnost koja je eksponencijalna, tj. ima oblik  $y = Ae^{Bx}$ . U tom slučaju logaritmiranjem izraza dobijemo izraz  $\ln y = \ln A + Bx$ , koji opisuje linearnu ovisnost između prirodnog logaritma vrijednosti (u ovom slučaju broja detektiranih fotona u pojedinom detektorskom polju) i varijable  $x$  (rednog broja tog polja). Stoga ćemo sve daljnje podatke prezentirati u  $\ln y - x$  grafu kod kojeg onda možemo izravno koristiti metodu najmanjih kvadrata za određivanje parametara ovisnosti  $y$  o  $x$ .

#### 4.2. Usporedba promjene broja fotona

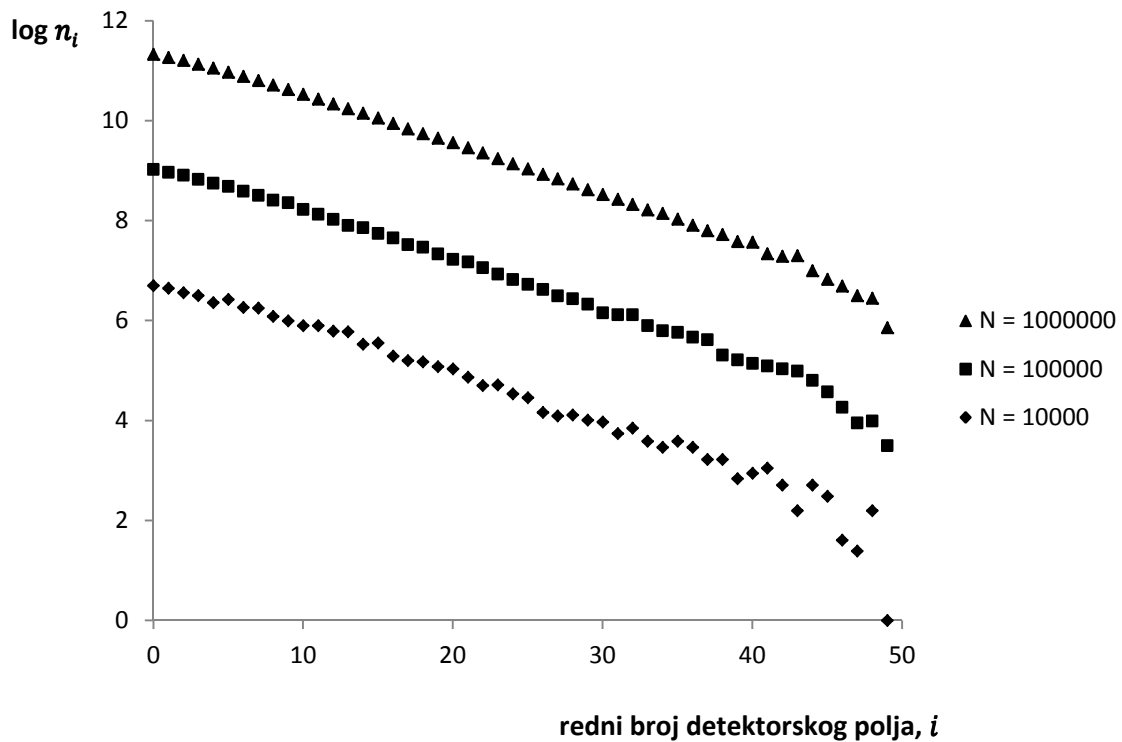
Na sljedećim grafovima su prikazane vrijednosti dobivene za različite vrijednosti parametra  $\tau$ , odnosno za različite optičke dubine. Na svakom pojedinom grafu su postavljeni rezultati simulacija za jednu određenu optičku dubinu, no za različite količine detektiranih fotona. Cilj variranja broja fotona je proučavanje koliko broj fotona utječe na pravilnost statističke raspodjele odnosno provjeravanje validnosti Monte Carlo metode za rješavanje ovog problema utvrđivanjem donje granice za količinu generiranih fotona koja i dalje ima zadovoljavajuću točnost. Ono što možemo na prvi pogled primijetiti je loša razlučivost raspodjele za mali broj detektiranih fotona, koja se značajno popravlja već od  $10^4$  detektiranih fotona. Simulacije s brojem detektiranih fotona većih od  $10^4$  daju konzistentne podatke za opis ovisnosti intenziteta o udaljenosti od centra detektora, uz očekivani pomak prema većim vrijednostima koji odražava povećanje ukupnog broja detektiranih fotona (multiplikativno povećanje pretvoreno u aditivno logaritmiranjem). Vrijednosti dobivene za uzorak od 100 i 1000 fotona su samo ilustrativno prikazane za  $\tau = 0,1$  na slici 4.2.



Slika 4.2: Ovisnost raspodjele detektiranih fotona o ukupnom broju emitiranih fotonskih paketa  $N$ , za  $\tau = 0,1$

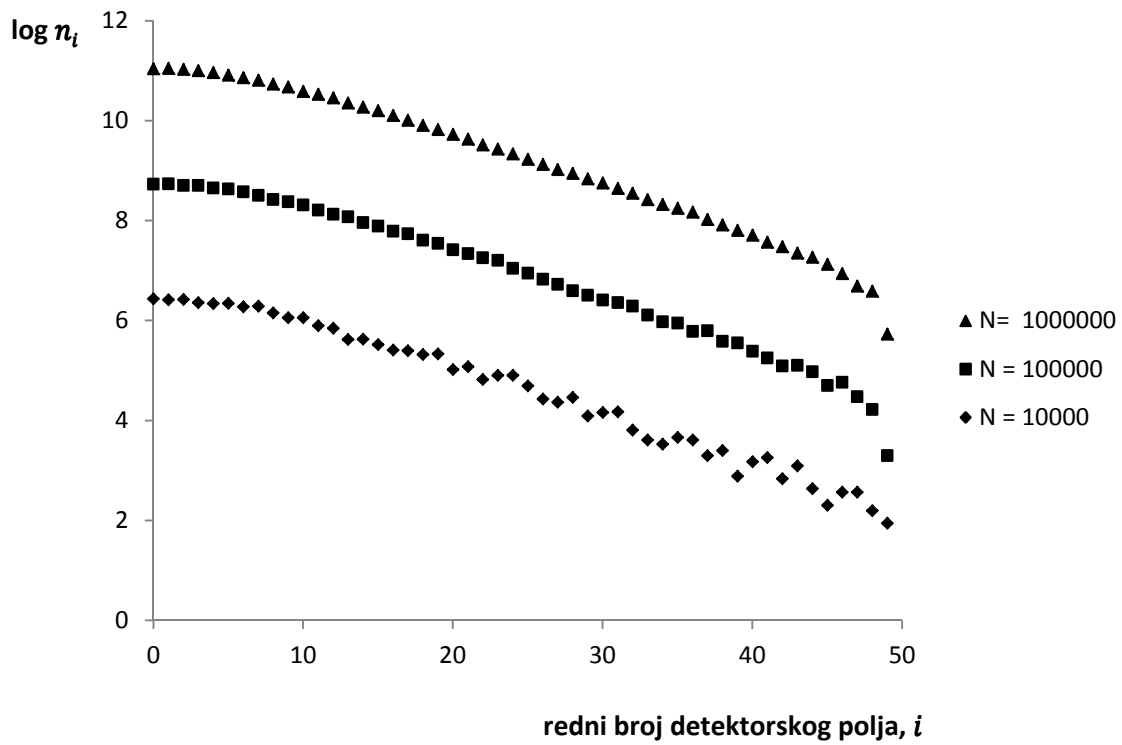


Slika 4.3: Ovisnost raspodjele detektiranih fotona o ukupnom broju emitiranih fotonskih paketa  $N$ , za  $\tau = 0,2$

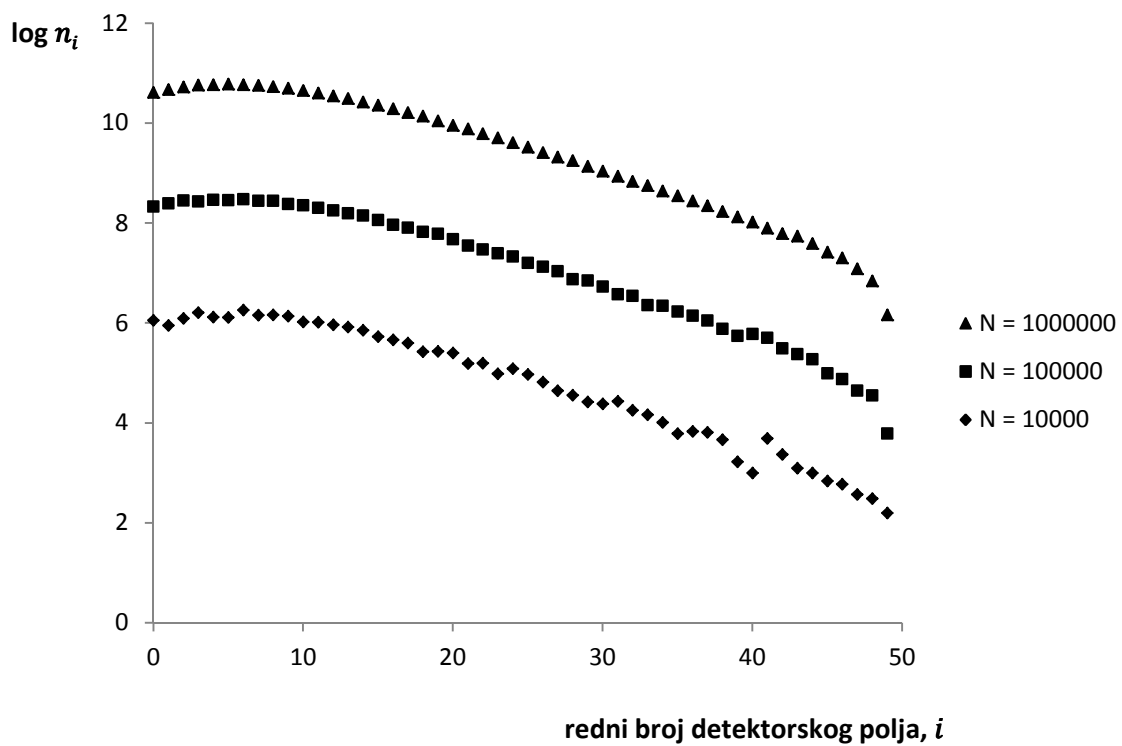


Slika 4.4: Ovisnost raspodjele detektiranih fotona o ukupnom broju emitiranih fotonskih paketa  $N$ , za  $\tau = 0,4$

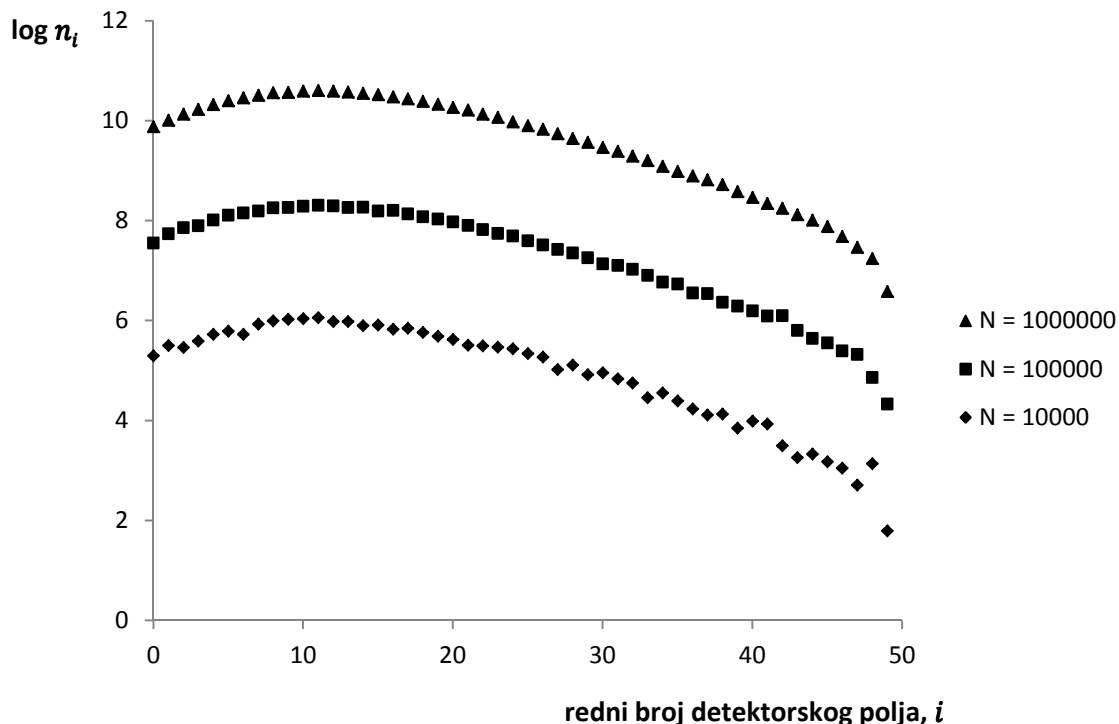
Za slijedeće grafove je bitno primijetiti rastući parametara optičke dubine, čime izlazimo iz režima optički tankog plina i naša simulacija više odstupa od analitički riješenog modela. Ono što je vidljivo pri porastu optičke dubine plina je da se pojavljuje maksimum intenziteta koji se nalazi između  $r_2$  i  $r_3$  (nasuprot optički rjeđoj prašini, gdje je maksimum prije  $r_2$ ).



Slika 4.5: Ovisnost raspodjele detektiranih fotona o ukupnom broju emitiranih fotonskih paketa  $N$ , za  $\tau = 1$



Slika 4.6: Ovisnost raspodjele detektiranih fotona o ukupnom broju emitiranih fotonskih paketa  $N$ , za  $\tau = 2$

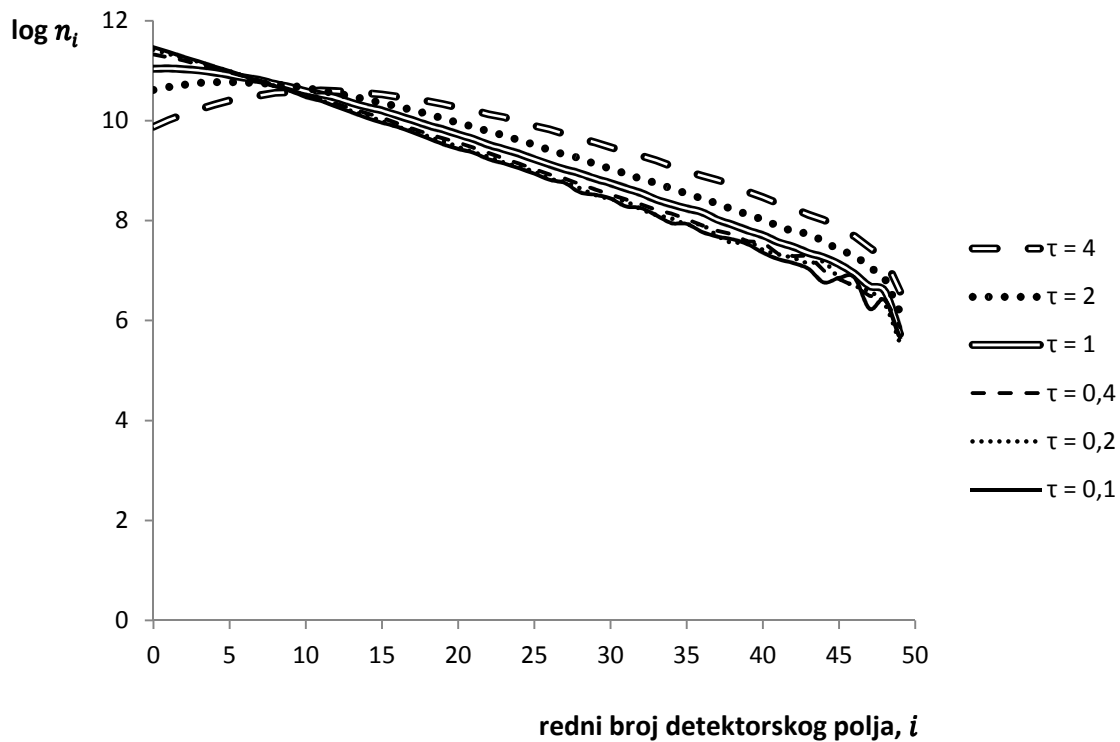


Slika 4.7: Ovisnost raspodjele detektiranih fotona o ukupnom broju emitiranih fotonskih paketa  $N$ , za  $\tau = 4$

### 4.3. Usporedba promjene optičke dubine

Razliku između optički tankog i optički debljeg oblaka plina možemo najbolje dočarati prikazivanjem podataka dobivenih za različite optičke dubine. Možemo primijetiti da za  $\tau < 1$  intenzitet detektirane svjetlosti pokazuje isto ponašanje, što nazivamo režimom optički tankog oblaka plina.

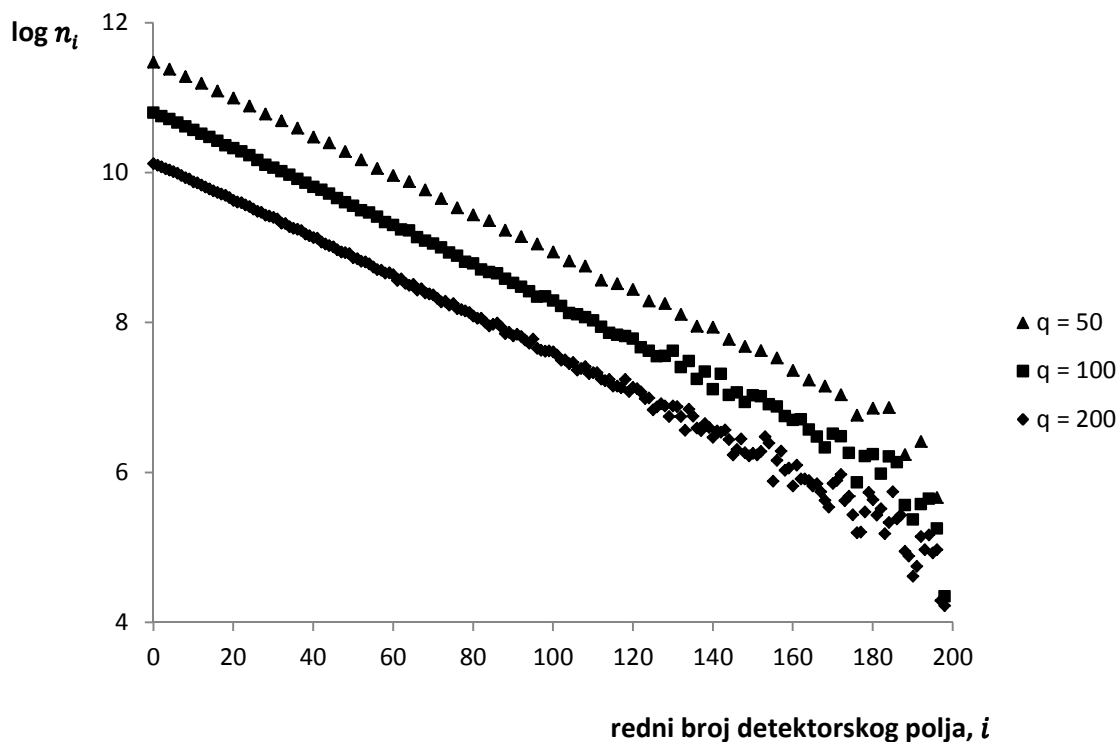
Za  $\tau > 1$  situacija se značajno mijenja. Maksimum intenziteta sada nastaje između  $r_2$  i  $r_3$ , za razliku od optički tankog oblaka plina, gdje maksimum intenziteta nastaje prije  $r_2$ , te u području između  $r_2$  i  $r_3$  bilježimo samo pad. Promjena ponašanja je očekivana, s obzirom na značenje optičke dubine i činjenicu da nemamo apsorpcije. Naime, rastom optičke dubine područje u kojem izračeni foton u prosjeku prođe kroz manje od jednog raspršenja prije upada u detektor biva pomaknuto više prema rubu promatranog oblaka. U fizici zvijezda se, recimo, fotosfera definira kao lokacija u zvijezdi gdje je optička dubina jednaka  $2/3$ . Kao što možemo vidjeti, u gornjim primjerima se nalazimo u optičkom sredstvu manje optičke dubine, dok su druga tri primjera u optički debelom sredstvu.



Slika 4.8: Usporedba raspodjele za različite optičke dubine  $\tau$

#### 4.4. Usporedba različitih razlučivosti

Uz variranje optičke dubine promatranog oblaka prašine, također smo varirali i parametar broja polja od kojeg se detektor sastoji (odnosno povećavana je razlučivost detektora). Time je testiran učinak odabira širine statističkih grupa na dobivene rezultate. Podaci koji su generirani simulacijom s različitim parametrima su prikazani u sljedećem grafu.



Slika 4.9: Usporedba raspodjele za različite razlučivosti

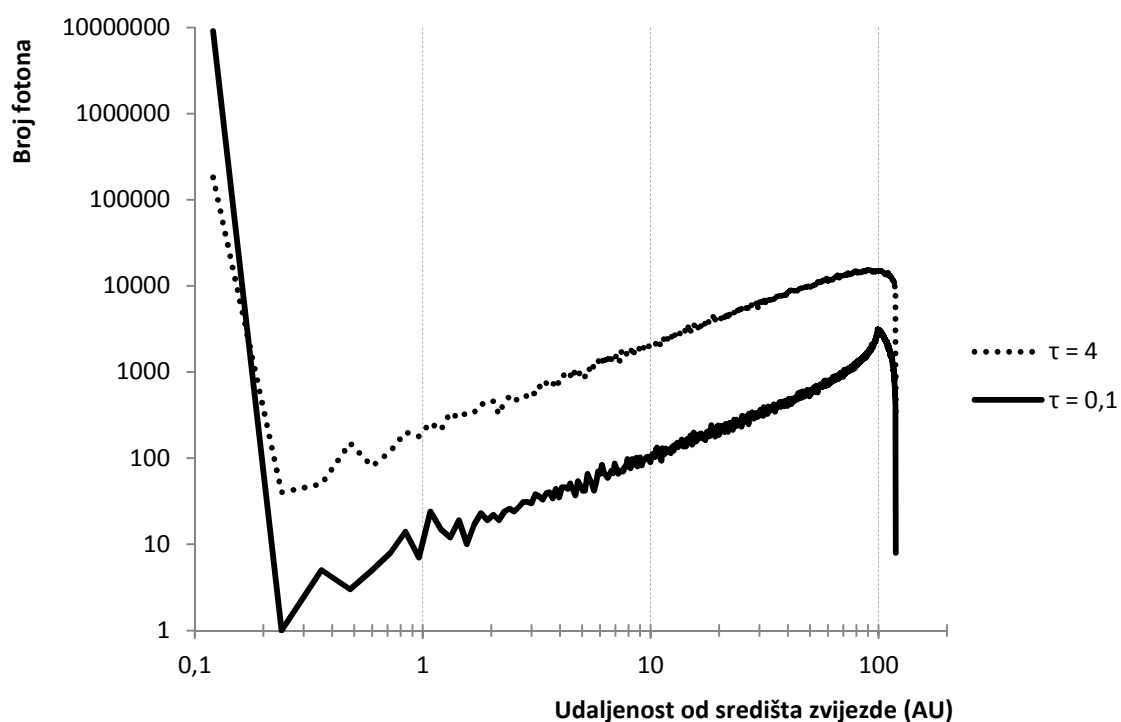
Valja napomenuti da izravno postavljanje različitih skupova podataka na jedan graf rezultira varljivo drugačijim nagibom pravca. Naime problem slijedi iz načine prikaza podataka. Unatoč tome što u radu testiramo ovisnost intenziteta fotona (broja) o udaljenosti, na grafu je prikazana ovisnost broja fotona o rednom broju detektorskog polja na kojem je foton detektiran. Jednostavno je vidjeti da povećanje razlučivosti detektora dovodi po povećanja rednog broja detektorskog polja za istu udaljenost od centra (primjerice, fotoni detektirani na udaljenosti  $r_3$  pripadaju polju broj 50, 100 ili 200, ovisno o razlučivosti). Stoga su podaci modificirani da to uzme u obzir. Položaji za manje razlučive detektore su pomnoženi s faktorom 4, odnosno 2, čime se redni brojevi detektorskih polja izjednačuju i bolje ilustriraju jednaku udaljenost od centra detektora. Time dobijemo grafički prikaz koji različite razlučivosti detektora prikazuje na istoj skali, te kvalitetno ilustrira efekt smanjenja raspona za grupiranje podataka (poglavito – razrjeđenje točaka i smanjena vrijednost za svaku).

Iz priloženog grafa (a i rezultata dobivenog analizom podataka) možemo zaključiti da razlučivost detektora ne povećava značajno preciznost generirane slike. Male razlike postoje jedino na vanjskom rubu  $r_3$  prašinate ovojnice jer je tu gustoća prašine tako mala da je i broj interakcija vrlo malen. Stoga ulogu u tom dijelu igra i rezolucija i broj fotona.

#### 4.5. Prikaz cjelokupnog područja promatranja

Nakon koncentriranja na područje koje odgovara ortogonalnoj projekciji oblaka prašine na ravninu detektora, možemo se osvrnuti i na cjelokupnu sliku zvijezde okružene optički tankim oblakom prašine. Time ćemo usporediti izgrađen računalni model s izravno observiranim sistemima oblaka prašine oko zvijezda.

Za potrebe ove analize ćemo promatrati oblake prašine između  $r_2 = 100\text{AU}$  i  $r_3 = 120\text{AU}$ , optičkih dubina  $\tau = 0.1$  i  $\tau = 4$ . Dobiveni podaci su prezentirani u log-log skali zbog velike razlike u broju fotona primljenih iz same zvijezde i okolnog oblaka plina.



Slika 4.10: Usporedba slike zvijezde i plina za različite optičke dubine

Osvrnemo li se na generiranu cjelokupnu sliku (slika 4.10), možemo uočiti nekoliko bitnih karakteristika. Prva je činjenica da je u oba slučaja zvijezda najsjajniji dio slike, neovisno o optičkoj dubini oblaka. U slučaju optički dubljeg oblaka, broj fotona koji na detektor upadaju iz smjera zvijezde je smanjen za red veličine, no i dalje je istaknuti izvor. Povećavanje optičke dubine na proizvoljno veliki broj je za programsko rješenje vremenski izuzetno zahtjevan zadatak (za generiranje podataka o oblaku optičke dubine 4 je bilo potrebno red veličine više vremena nego za optičku dubinu 0.1), no izvedemo li misaoni eksperiment

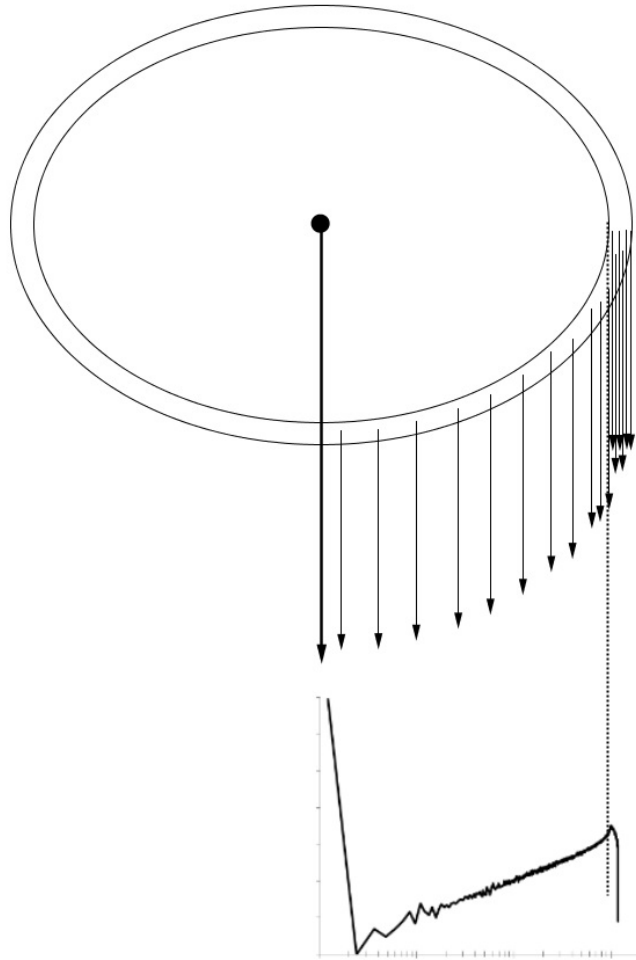


možemo zaključiti da će, u slučaju optički vrlo dubokih oblaka prašine, svjetlost iz smjera zvijezde biti usporediva sa svjetlošću prašine.

Vežano uz prethodno, u slučaju optički dubljeg oblaka prašine je broj fotona koji dolazi iz oblaka znatno veći. To je i očekivano, s obzirom da povećanjem optičke dubine oblaka povećavamo vjerojatnost raspršenja fotona u oblaku, što taj oblak čini snažnijim izvorom nego u slučaju optički tankog oblaka. Interesantno je primijetiti da je u slučaju  $\tau = 4$  broj fotona koji dolazi iz pravca zvijezde znatno manji nego ukupan broj fotona iz ostatka oblaka. Oblak prašine oko zvijezde (isključujući dio između zvijezde i detektora) ima oko 50 puta veći ukupni intenzitet od zvijezde i dijela oblaka između zvijezde i detektora.

Uz gornje zaključke bitno je uočiti oštar vrh na udaljenosti od 100 AU, što odgovara početku oblaka prašine. Na tom mjestu značajno raste količina oblaka u kojem se može dogoditi zadnje raspršenje, odnosno iz kojeg foton može biti usmjeren prema detektoru. U području bližem od 100 AU zadnje raspršenje se događa samo u dijelu sferične ljuske okrenute prema detektoru. Fotoni koji se rasprše iz ljuske na drugoj strani opet moraju proći kroz dio ljuske bliže detektoru, te se mogu ponovo raspršiti. Na udaljenosti većoj od 100 AU se ta dva dijela ljuske spajaju u jednu cjelinu te se povećava područje zadnjeg raspršenja. Nagli pad koji uslijedi iza vrha je posljedica toga što to područje gledamo skoro tangencijalno, te se i područje oblaka brzo smanjuje. Na udaljenosti većoj od 120 AU se više ne uočavaju nikakvi izvori svjetlosti, te se ne detektira nikakav izvor.

Shematski nastanak uočenog uzorka je prikazan na slici 4.11. Prikazane veličine su samo ilustrativne te nisu proporcionalne stvarnim veličinama.



Slika 4.11: Shematski prikaz nastanka uočenog uzorka

## 5. Diskusija

S obzirom na veliku inherentnu grešku u podacima dobivenim simulacijom s manjim brojem točaka, te bolju konzistenciju simulacije s velikim brojem točaka, za daljnje razmatranje su uzeti samo podaci s  $10^4$ - $10^6$  generiranih fotona.

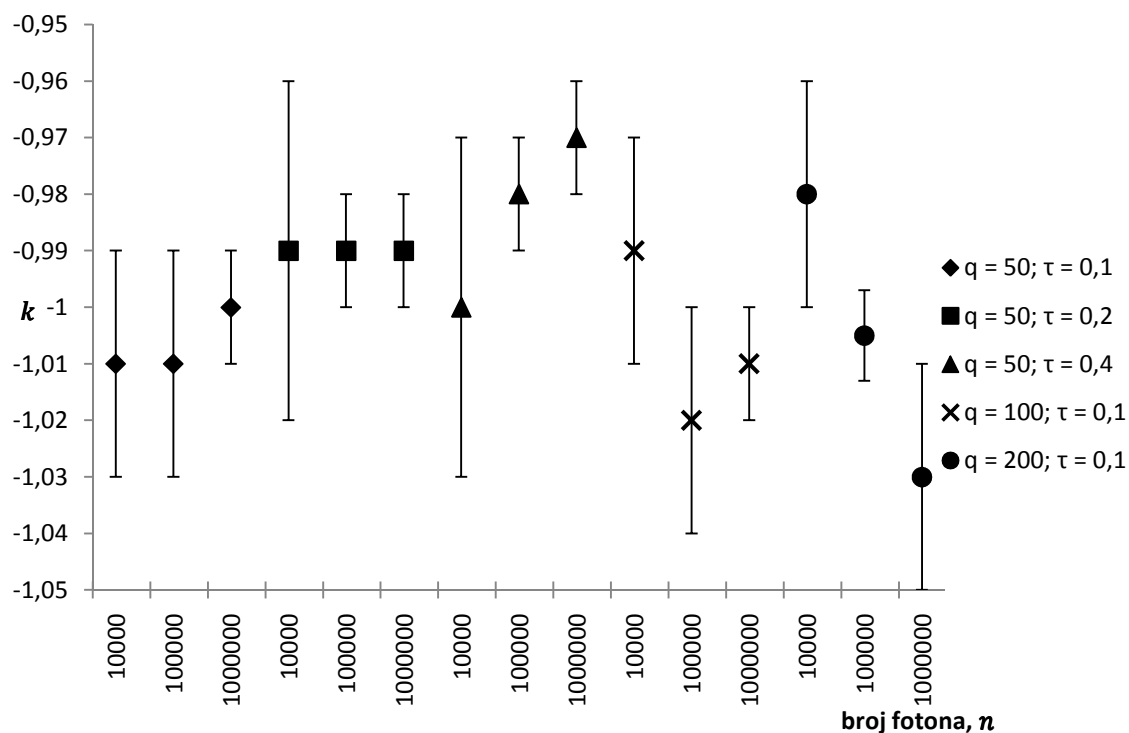
Iz odabranih setova podataka prikazanih u poglavlju 4.2. metodom najmanjih kvadrata su određeni koeficijent nagiba pravca  $B$  i prikladna greška  $M_B$ . Iz tih podataka su izračunate potencije  $k$ . Dobiveni podaci su prikazani u tablici 5.1.

Navedeni podaci ukazuju na to da intenzitet detektirane svjetlosti opada s povećanjem udaljenosti od centra slike s potencijom  $k$ . To je u skladu s analitički dobivenim rezultatom [3] koje kaže da optički tanka sfera gustoće  $r^k$  generira svjetlost intenziteta  $r^{k+1}$ .

$q$	$\tau$	$n$	$B$	$k$
50	0,1	10000	$-0,107 \pm 0,002$	$-1,01 \pm 0,02$
		100000	$-0,107 \pm 0,002$	$-1,01 \pm 0,02$
		1000000	$-0,106 \pm 0,001$	$-1,00 \pm 0,01$
	0,2	10000	$-0,105 \pm 0,003$	$-0,99 \pm 0,03$
		100000	$-0,105 \pm 0,002$	$-0,99 \pm 0,01$
		1000000	$-0,105 \pm 0,001$	$-0,99 \pm 0,01$
	0,4	10000	$-0,106 \pm 0,003$	$-1,00 \pm 0,03$
		100000	$-0,104 \pm 0,002$	$-0,98 \pm 0,01$
		1000000	$-0,103 \pm 0,001$	$-0,97 \pm 0,01$
100	0,1	10000	$-0,0525 \pm 0,0009$	$-0,99 \pm 0,02$
		100000	$-0,0543 \pm 0,0009$	$-1,02 \pm 0,02$
		1000000	$-0,0537 \pm 0,0006$	$-1,01 \pm 0,01$
200	0,1	10000	$-0,0260 \pm 0,0004$	$-0,98 \pm 0,02$
		100000	$-0,0266 \pm 0,0002$	$-1,005 \pm 0,008$
		1000000	$-0,2719 \pm 0,0005$	$-1,03 \pm 0,02$

Tablica 5.1: Prikaz obrađenih podataka

Gornje podatke i njihove pripadajuće greške možemo prikazati i grafički:



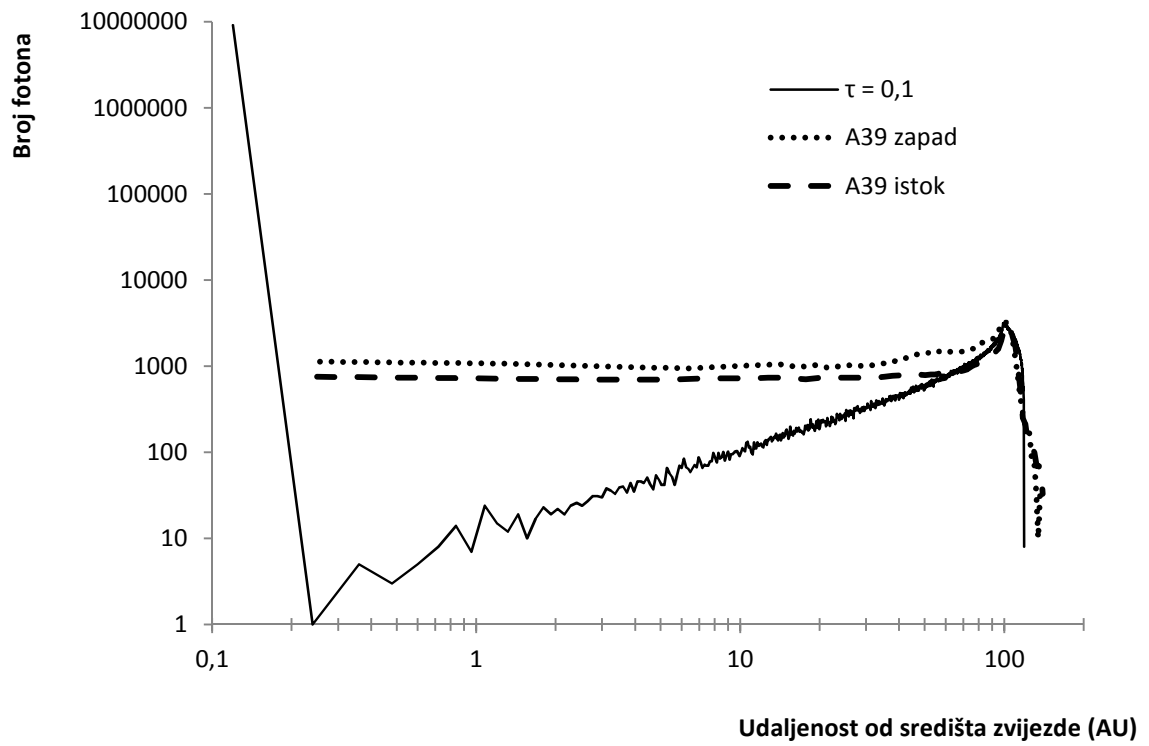
Slika 5.1: Prikaz eksponenta u ovisnosti  $n \sim r^k$  za različite setove podataka

Gornju pojavu je moguće vidjeti na stvarnim slikama kao sjajne (no ne pretjerano) prstene oko zvijezde, bilo da je jedan prsten ili više koncentričnih. Pojava prstena je povezana s planetarnim maglicama, zvijezdama koje dio svoje mase izbacuju u obliku tankih ljusaka oblaka prašine. Primjer maglice s jednim prstenom je Abell 39 (slika 5.2), planetarna maglica udaljena oko 6800 svjetlosnih godina od Zemlje, s polumjerom sferične ljuske od oko 2.5 svjetlosne godine.

U [14] Jacoby, Ferland i Korista analiziraju planetarnu maglicu Abell 39 kao potencijalno mjerilo pouzdanosti numeričkih modela oblaka prašine i fotoioniziranog plina. U navedenom radu je prikazana usrednjena radijalna distribucija intenziteta po promjeru istok-zapad. Njihova analiza je kvalitativno uspoređena s rezultatima dobivenim preko programa te je usporedba prikazana na slici 5.3. Podaci dobiveni iz analize snimke maglice Abell 39 su skalirani tako da vrh raspodijele mjerenog intenziteta odgovara vrhu raspodijele generiranog, tako da je svaka strana prikazana kao poseban set podataka. Može se primijetiti da u području koji odgovara unutarnjoj granici oblaka plina postoji dobro poklapanje, dok u unutrašnjosti model rezultira približno linearnim rastom.

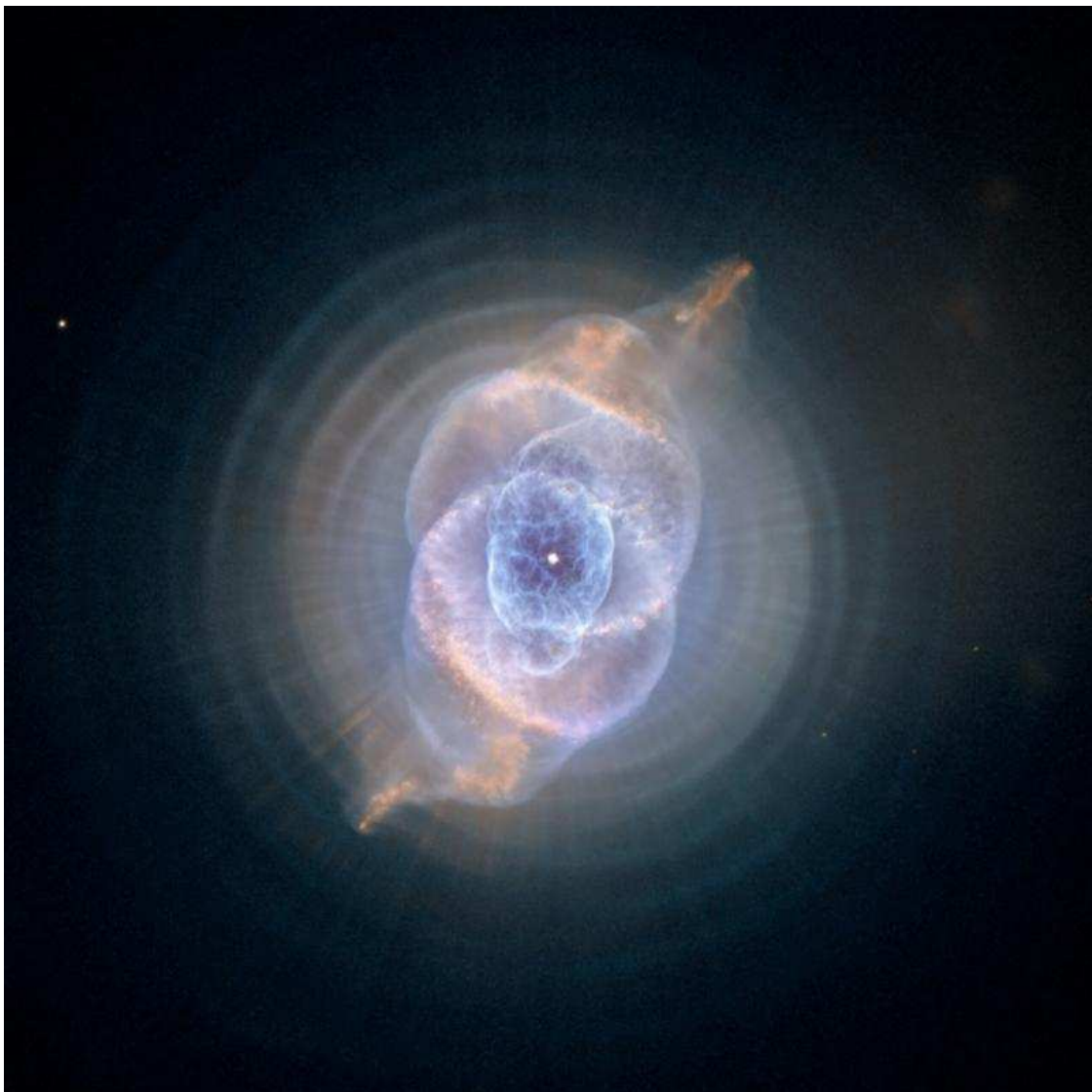


Slika 5.2: Maglica Abell 39



Slika 5.3: Usporedba intenziteta maglice Abell 39 i generirane raspodjele

Primjer planetarne maglice s koncentričnim krugovima je maglica Mačje Oko (Cat's Eye, NGC 6543). Nalazi se oko 3300 svjetlosnih godina od Zemlje, te sadrži najkompleksniju strukturu od do sada zabilježenih maglica. Na priloženoj fotografiji možemo uočiti tri jasne pojave: mlazove u gornjem i donjem dijelu, centralnu eliptičnu strukturu i vanjsku koncentričnu strukturu. Upravo se ta vanjska koncentrična struktura pojavljuje kao posljedica raspršenja svjetla na optički tankim ljuskama oblaka prašine. Mjerenja koja su izvršena na Hubbleovom svemirskom teleskopu ukazuju na to da su koncentrične ljuske nastale s periodom od oko 1500 godina tijekom faze crvenog diva centralne zvijezde. Mehanizam periodičkog emitiranja ljusaka je još uvijek nepoznat.



Slika 5.3: Maglica Mačje oko (Cat's Eye, NGC 6543)

## 6. Hubbleov svemirski teleskop u nastavi fizike

Još od lansiranja Hubbleovog svemirskog teleskopa javnost je zainteresirana za njega, njegov rad i slike. Hubbleov teleskop je u očima javnosti postao prepoznatljiv simbol, te se često pojavljuje u SF filmovima koji prikazuju orbitu oko Zemlje (ponekad čak ni kada to nije realno). Zanimljivo je da igra ključnu ulogu u Oskarom nagrađenom SF filmu Gravitacija (Gravity), koji prikazuje fiktivnu misiju servisiranja teleskopa. Upravo misije servisiranja koje film uzima za inspiraciju su jedna od stvari koje su plijenili pažnju široke populacije. Druga je, naravno slike koje je Hubbleov teleskop vraćao, čak i prije dovršetka servisa.

Sam teleskop predstavlja, uz informiranje o astronomiji, pregršt ilustracija raznih fizikalnih zakona i koncepata. Tako primjerice možemo promatrati sam čin lansiranja teleskopa u sklopu kojeg možemo istraživati rakete, od kemijskih reakcija goriva do zakona očuvanja količine gibanja. Orbita samog teleskopa nam, s druge strane, nudi mogućnost demonstriranja tema koje su ionako dio kurikuluma, poput općeg zakona gravitacije, gravitacijske potencijalne energije ili kružnog gibanja. Dodatna interesantna stvar koja se može demonstrirati s orbitom teleskopa je razlika inercijalnih i neinercijalnih sustava, odnosno demonstracija sustava u slobodnom padu. To je bio jedan od hvaljenijih aspekata spomenutog filma Gravitacija gdje se, za razliku od većine drugih popularnih SF filmova, realno prikazuje sustav u slobodnom padu.

Naravno, uz navedene koncepte, Hubbleov teleskop je odličan primjer za proučavanje fizikalne optike (kako konvergentnih leća tako i konstrukcije teleskopa), te pripadne digitalne optike (detektorskih kamera). Tu je moguće upoznati se i s procesom dobivanja slika iz monokromatskih signala, kao i upoznavanje s detekcijom van vidljivog spektra (bliske infracrvene i ultraljubičaste frekvencije). S obzirom na grešku u originalnoj optici teleskopa, moguće je proučiti i greške u optici, poput sferične aberacije. Interesantno je objasniti kolika je mala greška ( $2.2 \mu\text{m}$  na rubovima) bila potrebna za stvaranje katastrofalne greške koja je značajno degradirala kvalitetu slika.



Slika 4.1: Galaksija M100 snimljena prije (lijevo) i poslije (desno) popravka leće.

No uvjerljivo najimpresivnija komponenta djelovanja svemirskog teleskopa su fotografije koje je snimio. Snimljene fotografije plijene pažnju javnosti svojom estetskom privlačnošću, dok sa znanstvene strane predstavljaju tehničko-znanstveni trijumf, te jedan od rubova dosega astrofizike. Fotografije poput Hubble deep field s pripadnim objašnjenjem što je na fotografiji čine odličnu vezu između laicima dostupne popularizacije znanosti i stvarnih znanstvenih činjenica, teorije i metoda.

Upravo ta uloga mosta između laičke dostupnosti i estetike s jedne strane i znanosti s druge je najjače oružje u arsenalu poboljšanja znanstvene edukacije. Od plakata s odabranim fotografijama i objašnjenjima istih (dodatno učinkovitijih ako su ih stvorili učenici), do obrade raznih aspekata Hubbleovog svemirskog teleskopa.

Nažalost, astrofizika kao takva nije izravno zastupljena u kurikulumu srednjoškolske fizike, nego su njene komponente (uz iznimku Keplerovih zakona koji se takvim izričito navode) rasute po raznim dijelovima (recimo, nuklearna fuzija u modernoj fizici). Stoga je najbolja uloga Hubbleovog svemirskog teleskopa u redovnoj nastavi upravo popularizatorska, no daleko ga je više moguće koristiti u vannastavnim aktivnostima poput dodatne nastave fizike ili astronomske grupe.

U zadnje vrijeme se, doduše, pojavljuje još jedna poveznica Hubbleovog svemirskog teleskopa, popularizacije znanosti i nastave (ako ne redovne, onda sigurno dodatne) fizike. Porast broja astronomskog softvera poput Celestie, Orbitera (simulator svemirskog leta s



realističnim modelom fizike), Universe Sandbox ili Kerbal Space Program (igra u fiktivnom svijetu gdje je cilj napraviti funkcionalni svemirski program) omogućava učenicima da se susretnu s rezultatima astronomskih promatranja u atmosferi koja im je u tinejderskim godinama poglavito poznata i ugodna – u atmosferi igara. Tako primjerice Universe Sandbox omogućuje dodjeljivanje *achievementa* (digitalna značka koja predstavlja određen uspjeh od strane igrača, tj. korisnika) za pretvorbu Sunca u crnu rupu. Universe Sandbox, Celestia i Orbiter u svojim modelima uključuju i snimke koje je snimio Hubbleov svemirski teleskop (pošto su slobodne za korištenje, javno dobro), te je moguće kretati se kroz artistsku reprezentaciju otkrivenih galaksija. Celestia i Orbiter su slobodni za download, Kerbal Space Program i Universe Sandbox se plaćaju, iako oba imaju verziju (doduše, nešto ograničeniju) koja je ponuđena na korištenje školama u edukativne svrhe.

Gornji primjeri ukazuju na inherentno povezivanje informatike i fizike (u obliku astrofizike i astronomije) u čemu program Hubbleovog svemirskog teleskopa ne posustaje. Već jednostavnom pretragom imena Hubble nas prvi rezultat vodi na [hubblesite.org](http://hubblesite.org), stranicu posvećenu Hubbleovom svemirskom teleskopu koja sadržava do sad u javnost puštene obrađene slike, kao i pregršt interaktivnog sadržaja. Stranicu održava STScI (Space Telescope Science Institute), neprofitni znanstveni centar s ciljem približavanja NASAine misije širokoj populaciji. Primarni sadržaj stranice je već navedena kolekcija snimljenih slika, prezentiranih u raznim rezolucijama za lakšu upotrebu na više načina, od seminarskih radova do prezentacijskih panoa. Posebno interesantni segmenti su slike prezentirane kao višedijelni mural i objašnjenje nastanka i obrade samih slika.

Drugi, i za popularizaciju znanosti i školstvo bitniji segment stranice je interaktivni sadržaj prezentiran kroz dva oblika. „[Get involved](#)“ („Uključi se“) sekciju stranice približava znanstveni rad na Hubbleovom svemirskom teleskopu laicima, te ih uključuje u obradu podataka. Tamo je moguće povezati se s HST projektom kroz društvene mreže Facebook i Google Plus. Na Google Plusu se redovito odvijaju tjedni video sastanci (koristeći Google hangout tehnologiju) na kojima se priča o vijestima vezanim za HST i astronomiju općenito, te je moguće postavljati pitanja na koje sugovornici daju odgovore. Uz socijalne mreže također se nudi i sudjelovanje u projektima laika-znanstvenika („Citizen science“) i obradama sirovih fotografija, te čak i dvije igre vezane uz stelarnu evoluciju i razvoj planeta ([MyStar](#) i [Starchitect](#) koja je u beta fazi razvoja).

Drugi oblik interaktivnog sadržaja je „[Amazing space](#)“ („Čudesan svemir“) sestrinska stranica posvećenu interaktivnom istraživanju koncepata vezanih za astronomiju generalno i Hubbleov svemirski teleskop specifično. Stranica je razdijeljena na dva segmenta: za sve i za edukatore. U prvom dijelu je interesantno za izdvojiti interaktivne materijale za samostalno učenje, u obliku malih igrice rađenih u Adobe Flashu. Primjerice, „[Planet Impact!](#)“ u kojem gađate Jupiter kometima pri čemu se proučava utjecaj mase, brzine i smjera u gravitacijskom privlačenju, putanji i udaru ili [Hubble Deep Field Academy](#), interaktivna demonstracija analize Hubble Deep Field fotografije u kojoj učenici uče proces prebrojavanja i klasificiranja objekata na fotografiji, te podatke koje su dobili uspoređuju s podacima koje je dobila znanstvena zajednica. Upravo taj zadnji korak usporedbe sa znanstveno određenim brojem je ključna komponenta u znanstvenoj edukaciji – demonstrira proces kojim se dolazi do novog saznanja, i osnažuje i osvještava korisnika idejom da je taj proces i njemu na dohvat ruku.

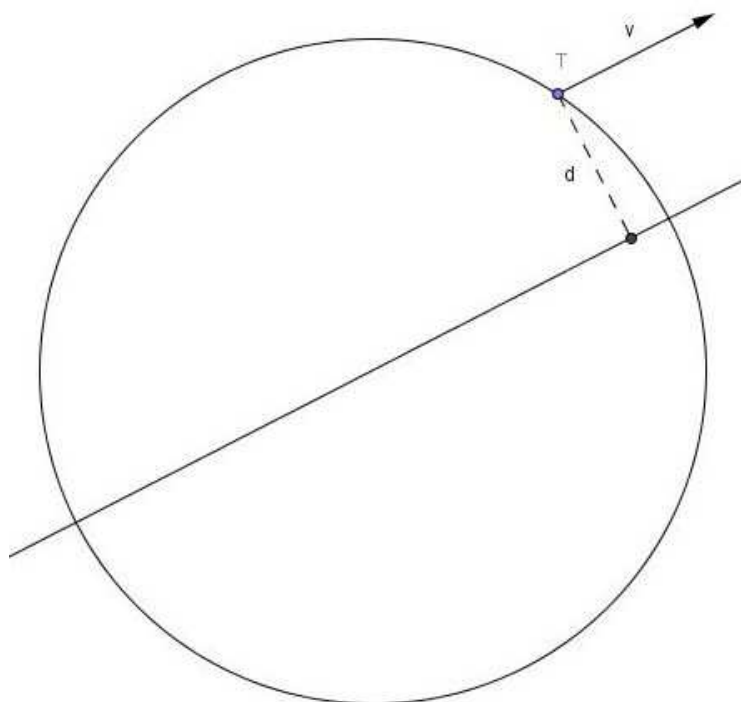
Edukatorski dio stranice [Amazing space](#) je, suprotno prethodno spomenutim dijelovima, metodički orijentirana te korisna kao resurs za planiranje nastave. Materijali su organizirani po temama, od povijesti fizike do statistike ili crnih rupa. Svaka tema se sastoji od međusobno povezanih sadržaja na ostatku stranice (dakle slike, interaktivne prezentacije, igrice...) te su posebno obogaćeni stranicama s listom činjenica ili čestih pitanja, kao i izvedbenih planova i aktivnosti u učionici. Iako je prezentirane materijale (uz iznimku materijala o gravitaciji i elektromagnetskom spektru) teško uklopiti u nastavu u sklopu definiranog kurikulumu, izrazito su zanimljivi za bilo kakav oblik dodatne aktivnosti ili kao dio motivacijske digresije od kurikulumu.

## 7. Zaključak

Nakon obrađenog rješenja i analize dobivenih rezultata, trebalo bi se osvrnuti na pretpostavku izrečenu u uvodu, da je problem i program prikladan za izvedbu u srednjoj školi.

Sam fizikalni dio problema uključuje odbrojavanje udaljenosti do sljedećeg sudara, kada se odabire novi smjer. To je moguće prilagoditi pojednostavljivanjem i konceptualno objasniti pozivanjem na korpuskularnu teoriju svjetla, te opisati analogijom s odbijanjem biljarskih kugli ili špekula.

Veći preostali problemi su geometrijske naravi: udaljenost od zvijezde, udaljenost fotona od osi detektora pri izlasku te je li foton usmjeren u zvijezdu. Naime, problem je u svojoj naravi trodimenzionalan, dok se u srednjoj školi analitička geometrija obrađuje isključivo u dvodimenzionalnom prikazu. To znači da bi u slučaju prezentiranja i izrade ovog programa u školi morali odabrati jedan od dva pristupa: pretvoriti problem u samo dvodimenzionalni prikaz (slika 7.1, koristi se obrađena formula za udaljenost točke od pravca), ili prezentirati izraze trodimenzionalne analitičke geometrije kao izravno primjenjive gotove formule. Alternativa je da se pri rješavanju problema radi interdisciplinarno i vannastavno s učenicima koji pokazuju veće shvaćanje matematičke osnove (dakle matematičke ili fizičke grupe), te se izrazi interaktivno izvedu tako da se učenike potakne na dublje razumijevanje potrebne matematike. Na sličan način je moguće interdisciplinarno povezati i druge dijelove matematike, poput kvadratne jednadžbe gdje je presjek pravca kojim se foton giba i zvjezdane sfere kvadratna jednadžba, odnosno do udara dođe ako je diskriminanta manja ili jednaka nuli.



Slika 7.1: 2D varijanta određivanja udaljenosti od središta detektora

Interesantan problem koji se pojavio pri pisanju programa bi se mogao iskoristiti kao ilustracija numeričke matematike, odnosno nekih karakteristike iste. Naime, integral optičkog puta se računa numerički. No zbog vrlo niske gustoće oblaka prašine na rubovima se umjesto sumacije po fizičkom putu u programu se određuje ukupni optički put, isti se razdjeli na 1000 dijelova, te se za svaki od dijelova izračuna pripadni fizički put. No pri prvoj implementaciji programa se optički put, s ciljem smanjivanja koraka, dijelio na 100 dijelova, što je urodilo greškom u konačnom rezultatu oko 20% u usporedbi s analitički dobivenim rezultatom [3]. Proučavanjem numeričkog izračuna tog integrala se mogu demonstrirati načela numeričke matematike kao i problem vezan uz veličinu koraka.

Sukladno pretpostavljenome u uvodu, izrada prikazanog rješenja problema raspršenja svjetla zvijezde na cirkumstelarnom oblaku prašine se ispostavila nekomplikiranom. U programu su korišteni koncepti objektno orijentiranog programiranja, no isto je moglo biti ostvareno i konceptima funkcijskog programiranja. Primjerice, konstruktor za objekt foton može biti funkcija koju se poziva pri generiranju novog fotona. Razlika u pristupu u ovom slučaju je samo pitanje konvencije: s obzirom na to da program obrađuje jedan po jedan foton, u bilo kojem trenutku će postojati samo jedan objekt, te nema značajne uštede u preglednosti ili funkcionalnosti samog programa ako implementiramo objektno orijentirano programiranje.

S druge strane, ako ovaj problem koristimo za edukativne svrhe, ekvivalentnost objektnog i funkcijskog rješenja je odličan primjer za demonstraciju razlike između njih te bi mogao poslužiti kao primjer konverzije iz funkcijskog u objektno orijentirani dizajn.

Najkompliciraniji dio izvedenog programa (barem u kontekstu izrade u srednjoj školi) je vjerojatno IF-THEN-ELSE petlja kojom se upravlja tijekom programa u ovisnosti o udaljenosti fotona od središta zvijezde. Kompliciranost dolazi iz toga što program u sebi sadrži tri FOR, odnosno DO-WHILE petlje, redom: petlju za pojedini foton, petlju za interakciju i petlju za numeričku integraciju. Udaljenost fotona od središta se provjerava u svakom koraku petlje za numeričku integraciju, te se u ovisnosti o udaljenosti od središta zvijezde prekida prva, druga ili treća petlja, ili sve nastavljaju s radom. Pošto je u C++ i većini drugih programskih jezika (iznimke su primjerice java, javascript i PHP) nemoguće prekinuti izvođenje petlji proizvoljne dubine, potrebno je postaviti zastavice kojima se određuje sljedeći korak u izvođenju programa. Alternativni pristup ima, recimo, PHP koji ima sintaksu *break [x]* gdje *[x]* predstavlja opcionalan argument dubine petlje za prekid. Upravo taj princip zastavica predstavlja potencijalno najveći problem u programiranju na razini srednje škole, ali isto tako predstavlja i najveći izazov i najveći potencijal za učenje.

S obzirom na prethodno iznesene zaključke u vezi izrade ovog programskog rješenja, moguće je složiti pojednostavljen problem koji bi svejedno predstavljao programerski izazov, ali i bio povezan s fizikalnom realnošću, specifično s početnom demonstracijom raspršenja. Problem bi simulirao malu staklenu posudu koju obasjavamo snopom zraka te pokušavamo numerički izračunati osvjetljenost u ovisnosti o gustoći koloidne otopine u posudi. Takvom problemu je moguće postepeno povećavati kompleksnost i time se približavati realnom problemu.

Primjerice, najjednostavnija varijanta bi uzela posudu oblika polukugle, bez smanjenja intenziteta pri prolasku kroz sredstvo i samo jednim raspršenjem pri ulasku u sredstvo. Time se zapravo samo određuje kut otklona u sfernom koordinatnom sustavu.

Dodatno onda možemo uključiti realistične fenomene poput apsorpcije svjetla na česticama koloidne otopine (čime se smanjuje intenzitet svjetla pri prolasku kroz sredstvo), višestruka raspršenja (koja će rezultirati raspršenjem zrake koja prolazi kroz sredstvo), vjerojatnost da se raspršenje ne desi, odnosno da bude preferencijalno prema naprijed (čime se realističnije simulira činjenica da većina zrake ipak prolazi u originalnom smjeru) ili promjena geometrije posude (recimo kvadar umjesto polukugle, čime se uvodi geometrijska kompleksnost

problema). Tako se učenike može u koracima voditi od jednostavnog problema i jednostavnog rješenja k realnom problemu i kompleksnom rješenju, tako da u svakom trenutku mogu povezati ono što rade sa stvarnim efektima i opservacijama, odnosno stvarnim znanstvenim projektima i spoznajama.

Daljnja ekspanzija ovog rada bi uključivala i kvantitativnu usporedbu modela i slika, kao i variranje parametara modela. S tim na umu bi se program mogao dodatno izmijeniti tako da se određene komponente modela eksternaliziraju. Tako je već u startu eksternalizirana funkcija gustoće oblaka plina, što znači da se promjena tipa raspodjele mase prevodi u izmjenu jedne funkcije. Isto tako bi se mogli funkcijski eksternalizirati i odabir smjera nakon raspršenja i funkcioniranje detektora. Tako modificiran model ima potencijalnu upotrebu ne samo u astrofizici, nego i u drugim područjima fizike, ali i tehnike.

## 8. Programski kod

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <fstream>
using namespace std;

#define r1 1.0
#define r2 20000.0
#define r3 24000.0
#define pi 3,14159265358979
#define q 200
#define q2 1000

class Vektor {
public:
    double x, y, z;

    Vektor() { x = y = z = 0; };
    Vektor(double a, double b, double c){ x = a; y = b; z = c; };

    double distance() { return sqrt( x*x + y*y + z*z ); };
    Vektor operator+ (Vektor v) { return Vektor( x + v.x , y + v.y , z + v.z ); };
    Vektor operator- (Vektor v) { return Vektor( x - v.x , y - v.y , z - v.z ); };
    Vektor operator* (double f) { return Vektor( x * f , y * f, z * f ); };
    double operator* (Vektor v) { return x * v.x + y * v.y + z * v.z; };
};

class Photon {
public:
    Vektor p, n;

    Photon(Vektor a, Vektor b) { p = a; n = b; };
    Photon() {
        double c_theta1, s_theta1, phi1, c_phi1, s_phi1,
        double c_theta2, s_theta2, phi2, c_phi2, s_phi2;
        double x, y, z, nx, ny, nz;
        c_theta1 = ( (double)rand() / (double)RAND_MAX ) * 2 - 1;
        s_theta1 = sqrt( 1-c_theta1 * c_theta1);
        c_theta2 = sqrt( (double)rand() / (double)RAND_MAX );
        s_theta2 = sqrt( 1-c_theta2 * c_theta2);
        phi1 = ( (double)rand() / (double)RAND_MAX ) * 2 * pi;
        c_phi1 = cos( phi1 );
        s_phi1 = sin( phi1 );
        phi2 = ( (double)rand() / (double)RAND_MAX ) * 2 * pi;
        c_phi2 = cos( phi2 );
        s_phi2 = sin( phi2 );

        nx = s_theta2*c_phi2*c_theta1*c_phi1 - s_theta2*s_phi2*s_phi1 + c_theta2*s_theta1*c_phi1;
        ny = s_theta2*c_phi2*c_theta1*s_phi1 + s_theta2*s_phi2*c_phi1 + c_theta2*s_theta1*s_phi1;
        nz = -s_theta2 * c_phi2 *s_theta1 + c_theta2*c_theta1;
        n = Vektor(nx, ny, nz);

        x = r1*s_theta1*c_phi1;
        y = r1*s_theta1*s_phi1;
        z = r1*c_theta1;
        p = Vektor(x, y, z);
    }

    void random_direction(){
        double theta, phi, x, y, z;
        phi = ((double)rand()/(double)RAND_MAX)*2*pi;
        theta = ((double)rand()/(double)RAND_MAX)*pi;

        x = sin(theta)*cos(phi);
        y = sin(theta)*sin(phi);
        z = cos(theta);
        n = Vektor(x, y, z);
    }

    void inner_shell(){
```

```

        double t = p * n;
        double d = sqrt( t*t - r1*r1 + r2*r2 );
        double x = -t + d;
        p = p + n*x;
    }

    void inner_to_inner(){
        double a = pow(p*n, 2);
        double b = pow(p.distance(), 2) -pow(r2, 2);
        double c = sqrt( a - b );
        double t = c - (p * n);
        p = p + n*t;
    }

    bool will_hit(){
        double dist = (p*(-1.0) + n*(p*n)).distance();
        return (dist <= r1);
    }

    double det_dist(){
        double dist = (p - n*(p*n)).distance();
        return dist;
    }
};

double density(Vektor p) {
    double d = p.distance();
    return pow(d, -2);
};

int main ()
{
    srand((unsigned int)time(NULL));
    double t_ext, dT, sum, l0 = 0;
    int flag = 0;
    double d;
    vector<int> det(q, 0);
    vector<int> det_lin(q2, 0);
    int broj_skupljenih = 0;
    int broj_linearnih = 0;
    int i;
    int n = 200;
    double tau = 0.2;
    double x, y;
    int blah;
    double range = 1.01*r3;
    double sigma = tau / ( 1/r2 - 1/r3 );

    ofstream stat_out;
    stat_out.open("stat_out.txt");
    ofstream lin_stat_out;
    lin_stat_out.open("lin_stat_out.txt");

    while(broj_skupljenih < n) {
        Photon phot = Photon();

        phot.inner_shell();

        while(true) {
            double t = 0;
            while ( t == 0 ){
                t = (double)rand()/((double)RAND_MAX);
            }
            t_ext = - log(t);
            dT = t_ext/1000;

            sum = 0;

            while( sum < t_ext ){
                l0 = dT / (density(phot.p) * sigma);
                phot.p = phot.p + phot.n*l0;
                sum += dT;
            }
        }
    }
}

```



```

// Provjera pozicije fotona
    if (phot.p.distance() <= r2) {
        if (phot.will_hit()){
            flag = 2;
            break;
        }
        flag = 1;
        break;
    }
    else if (phot.p.distance() >= r3) {
        flag = 3;
        break;
    }
}
// Provjera zastavica
if (flag == 1) {
    // Foton u području prije oblaka
    flag = 0;
    phot.inner_to_inner();
}
else if (flag == 2) {
    // Foton će udariti u zvijezdu
    flag = 0;
    break;
}
else if (flag == 3) {
    // Foton izašao iz oblaka
    flag = 0;
    d = phot.det_dist();
}

// Logaritamski detektor rubnog dijela
if ( d >= r2 ) {
    i = (int)floor(q * log(d/r2)/log(r3/r2));
    i = min(i, q-1);
    broj_skupljenih++;
    det[i]++;
}

// Linearni detektor cijelog područja
if ( d < range ){
    i = q2*d / range;
    i = min(i, q2-1);
    broj_skupljenih++;
    det_lin[i]++;
}
break;
}
else {
    // Foton se rasprši
    phot.random_direction();
}
}
}

// Ispis podataka u txt dokument
stat_out << "detektor - " << r2 << " - " << r3 << " - " << q2 << endl;
for (i = 0; i < q; i++) {
    stat_out << i << "\t" << det[i] << "\n";
}

lin_stat_out << "detektor - " << r2 << " - " << r3 << " - " << q2 << endl;
for (i = 0; i < q2; i++) {
    lin_stat_out << i << "\t" << det_lin[i] << "\n";
}

stat_out.close();
lin_stat_out.close();
return 0;
}

```

## Literatura

- [1] B. Carrol, D. Ostlie, An Introduction to Modern Astrophysics 2nd ed, Pearson, 2007
- [2] Ž. Ivezić, M. Elitzur, Infrared imaging of late-type stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 279, Broj 3, Strana 1011-1018, 1996
- [3] D. Vinković, Ž. Ivezić, A. Miroshnichenko, M. Elitzur, Discs and haloes in pre-main-sequence stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 346, Broj 4, Strana 1151-1161, 2003
- [4] S. Wolf, MC3D–3D continuum radiative transfer, Version 2, Computer Physics Communications 150, Strana 99-115, 2003
- [5] F. Heymann, R. Siebenmorgen, GPU–based monte carlo dust radiative transfer scheme applied to AGN, arXiv:1203.2941, 2012
- [6] J. Steinacker, M. Baes, K. Gordon, Three-Dimensional Dust Radiative Transfer, arXiv:1303.4998, 2013
- [7] R. Mitalas, K. R. Sills, On the photon diffusion time scale for the Sun, Astrophysical Journal, Part 1, Volume 401, Broj 2, Strana 759-760, 1992
- [8] National Optical Astronomy Observatory,  
[http://www.noao.edu/image\\_gallery/html/im0636.html](http://www.noao.edu/image_gallery/html/im0636.html)
- [9] Space Telescope Science Institute, Office of Public Outreach, Hubble site,  
<http://hubblesite.org/>
- [10] Kerbal Space Program  
<https://kerbalspaceprogram.com/>
- [11] Universe Sandbox  
<http://universesandbox.com/>
- [12] Celestia  
<http://www.shatters.net/celestia/>

[13] Orbiter

<http://orbit.medphys.ucl.ac.uk/>

[14] G. H. Jacoby, G. J. Ferland, K. T. Korista, The planetary nebula A39: an observational benchmark for numerical modeling of photoionized plasmas, *Astrophysical Journal, Part 1*, Volume 560, Broj 1, Strana 272-286, 2001

[15] B. Balick, J. Wilson, A. R. Hajian, NGC 6543: the rings around the cat's eye, *The Astronomical Journal*, Volume 121, Broj 1, Strana 354-361, 2001

[16] R. Sahai i sur, Imaging of the Egg Nebula (CRL 2688) with WFPC2/HST: A History of AGB/Post-AGB Giant Branch Mass Loss, *The Astrophysical Journal*, Volume 493, Broj 1, 301-311, 1998