Modifikacije gravitacijskog međudjelovanja učincima kvantnih polja

Domazet, Silvije

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Silvije Domazet

Modifikacije gravitacijskog međudjelovanja učincima kvantnih polja

Doktorska disertacija

Zagreb, 2013.

University of Zagreb
Faculty of Science
Department of physics

Silvije Domazet

Modifications of gravitational interaction by the effects of quantum fields

Doctoral Thesis

Zagreb, 2013.

ovu disertaciju
posvećujem djedovima Mati i Stjepanu
te bakama Matiji i Mariji

Zahvale

Prije svega želim se zahvaliti svojim roditeljima bez čijeg ogromnog odricanja, ljubavi i potpore ne samo da ne bih nikada izradio ovu disertaciju, nego ne bih ni dobio priliku doći u situaciju da se bavim fizikom i radim ono što volim. Oduvijek su činili sve kako bi mi omogućili život koji je u skladu s mojim željama i nadama i na tome sam im neizmjerno zahvalan.

Zahvaljujem se Dariji koja je bila uz mene i u veselim trenucima, ali i onima ne tako sjajnima. Nije dopuštala da se obeshrabrim i bila mi je oslonac kroz sve uspone i padove koje čovjek neizbježno doživljava.

Zahvaljujem se svim svojim dragim prijateljima koji su kroz godine bili zaslužni za moje dobro raspoloženje, veselje, životnu radost, odmak od obaveza i teških životnih trenutaka, kako u danima mladosti i bezbrižnosti tako i u ovim već ponešto ozbiljnijim životnim fazama.

Također se moram zahvaliti i svim kolegama sa Zavoda za teorijsku fiziku na Institutu Ruđer Bošković koji su potporom, razgovorima i savjetima bili spremni pružiti pomoć mladom znanstveniku na njegovom putu.

Mojem mentoru dr. sc. Hrvoju Štefančiću zahvaljujem se na usmjeravanju mojih znanstvenih interesa i vođenju znanstvenih istraživanja koja su naposljetku rezultirala sadržajem ove disertacije.

I na kraju zahvaljujem se svom prof. Ceglecu koji mi je u osnovnoj školi otkrio dvije stvari koje i dan danas jako volim, fiziku i glazbu Pink Floyda koja ponekad može dočarati tajanstveni svemir jasnije nego li jednadžbe koje mi, teorijski fizičari, možemo zapisati.

...for long you live and high you fly
And smiles you'll give and tears you'll cry
And all you touch and all you see
Is all your life will ever be...

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Sveučilište u Zagrebu | Doktorska disertacija

Prirodoslovno-matematički fakultet

Fizički odsjek

Modifikacije gravitacijskog međudjelovanja učincima kvantnih polja

SILVIJE DOMAZET

Institut Ruđer Bošković, Zagreb

Razmatraju se modifikacije gravitacijskog međudjelovanja uzrokovane učincima kvantnih polja. Opisan je način na koji se u dvama teorijskim pristupima javlja ovisnost gravitacijskih parametara o skali kroz regularizaciju i renormalizaciju. Ta ovisnost omogućuje primjenu metoda renormalizacijske grupe. Predviđanja koja time slijede ovise o identifikaciji proizvoljne skale renormalizacijske grupe s fizikalnim energijskim skalama u izučavanom fizikalnom kontekstu. Kako bi se smanjila proizvoljnost i eliminirala potreba za kvalitativnom identifikacijom skale, koristi se sustavna procedura određivanja iste. Ta je procedura u prvom redu vođena zahtjevom očuvanja kovarijantnosti teorije. Procedura se primjenjuje na razini jednadžbi gibanja te na razini djelovanja. Primjena ove metode na astrofizikalne sustave, na razini jednadžbi gibanja sustavno vodi na Ansatz iskorišten u literaturi kako bi se prilično uspješno opisale rotacijske krivulje galaksija. Primjena na razini djelovanja vodi na modifikacije gravitacije koje spadaju u klasu $f(R)$ teorija ili u klasu teorija koje sadrže i druge invarijantne članove višeg reda u zakrivljenosti, a inače je teško objasniti razloge njihovom uvođenju u djelovanje za gravitaciju. U režimu fiksne točke koja se javlja u razmatranjima asimptotske sigurnosti gravitacije pokazana je univerzalnost gravitacijskog djelovanja, za polazna djelovanja koja su polinomi u R, te je predstavljena nova metoda rješavanja dinamike teorija $f(R) = R^{\alpha}$ kojima navedeno univerzalno djelovanje pripada.

(111 stranica, 6 slika, 126 literaturnih navoda, jezik izvornika hrvatski)

Ključne riječi: ovisnost parametara o skali, renormalizacijska grupa, kvantna teorija polja u zakrivljenom prostor-vremenu, usrednjeno efektivno djelovanje, određivanje skale, rotacijske krivulje galaksija, kozmologija, modificirana gravitacija, fiksne točke

Mentor: dr. sc. Hrvoje Štefančić, viši znanstveni suradnik, IRB, Zagreb

Ocjenjivači: doc. dr. sc. Maro Cvitan, Sveučilište u Zagrebu

dr. sc. Tihomir Surić, viši znanstveni suradnik, IRB, Zagreb

Rad prihvaćen: srpanj, 2013.

BASIC DOCUMENTATION CARD

University of Zagreb — Doctoral thesis
Faculty of science
Department of physics

Modifications of gravitational interaction by the effects of quantum fields

SILVIJE DOMAZET
Ruđer Bošković Institute, Zagreb

Modifications of gravitational interaction by the effects of quantum fields are considered. Dependence of gravitational parameters arising from regularization and renormalization of two chosen field theoretical approaches is described. This allows for use of renormalization group methods. Predictions that follow depend on identification of arbitrary scale with respect to physical scales involved in a given physical context. In order to reduce arbitrariness and eliminate the need for qualitative scale identification, a well defined procedure is used to determine the scale. The procedure is primarily based on preserving the covariance of the theory. Procedure is applied at the level of equations of motion and at the level of the action. When applied in astrophysical setting at the level of equations of motion this method results systematically in the choice of scale, which was used in the literature as an Ansatz in a rather successful attempt to explain galaxy rotation curves. Applying the procedure at the level of the action results in $f(R)$ modifications of gravity or some other modification with higher order gravitational invariants, otherwise difficult to explain the reasons for introducing them in the gravitational action. In the fixed point regime of asymptotic safety scenario for gravity the existence of universal action for gravity is demonstrated, when starting from the action which is polynomial in R, and a new method for solving the dynamics of $f(R) = R^\alpha$ theories, to which the aforementioned universal action belongs, is presented.

(111 pages, 6 figures, 126 references, original in Croatian)

Keywords: scale dependent parameters, renormalization group, quantum field theory in curved space-time, average effective action, scale-setting, galaxy rotation curves, cosmology, modified gravity, fixed points

Supervisor: dr. sc. Hrvoje Štefančić, Senior Research Associate, IRB, Zagreb
Reviewers: doc. dr. sc. Maro Cvitan, University of Zagreb
dr. sc. Tihomir Surić, Senior Research Associate, IRB, Zagreb
Thesis accepted: July, 2013.

Sadržaj

Uvod

U ovoj disertaciji razmatraju se korekcije gravitacijskom međudjelovanju koje proizlaze iz učinaka kvantnih polja. U različitim teorijskim modelima, koji uključuju kvantnu teoriju polja u zakrivljenom prostor-vremenu te pristup kvantnoj gravitaciji koji počiva na upotrebi usrednjenog efektivnog djelovanja, neizbježna je pojava ovisnosti tih parametara o proizvoljnoj energijskoj skali koju je potrebno uvesti kako bi se teoriju regulariziralo (dimenzionalna regularizacija, regularizacija gornjom graničnom vrijednošću integracije). Postojanje ovisnosti parametara o takvoj proizvoljnoj skali omogućuje primjenu metoda renormalizacijske grupe kojom se služimo kako bismo utvrdili funkcijsku ovisnost parametara o toj skali. U teorijama poput kvantne elektrodinamike tu je ovisnost moguće pretočiti u ovisnost efektivne konstante vezanja (efektivnog naboja) o energijskoj skali koja ima fizikalno značenje. U slučaju spomenute kvantne elektrodinamike relevantna fizikalna skala je impuls (prijenos impulsa) čestica koje sudjeluju u procesu. Međutim, kada razmatramo učinke kvantnih polja na parametre gravitacijskog međudjelovanja nije moguće na direktan način dovesti u vezu proizvoljnu regularizacijsku skalu s odgovarajućom fizikalnom skalom. Stoga se u toj situaciji pribjegava izboru fizikalne skale koji je motiviran kvalitativnim argumentima. U literaturi su prisutni različiti odabiri ovisno o razmatranom sustavu te su najčešće plod intuicije pojedinog znanstvenika o tome što je u danoj situaciji fizikalno najprimjereniji izbor. Kako o tom izboru ovise efektivne vrijednosti konstanti vezanja, njime su određena i sama predviđanja korištenih teorijskih modela. Kako se ona ne bi oslanjala na subjektivni osjećaj o tome što je fizikalno najprimjereniji izbor, javila se potreba iznalaženja metode koja bi smanjivala proizvoljnost tog izbora. Upravo je jedna takva metoda, zasnovana na zahtjevu očuvanja kovarijantnosti na odabranoj razini primjene, središnja tema izlaganja u ovoj disertaciji.

Disertacija je organizirana na sljedeći način:

- U prvom poglavlju izneseni su rezultati opažanja u kozmologiji i astrofizici koji zahtijevaju postojanje komponenti čija je priroda zasad nepoznata te su predstavljeni neki od modela koji nude moguće objašnjenje. Među njima su i modeli koji se oslanjaju na upotrebu renormalizacijske grupe za parametre gravitacijskog djelovanja. Istraživanja predstavljena u ovoj disertaciji bave se upravo njima.

- U drugom poglavlju prikazan je način na koji parametri gravitacijskog međudjelovanja postaju ovisni o skali regularizacije. Detaljno je iznesen teorijski pristup kvantne teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu koji se zasniva na upotrebi propagatora kvantnih polja koje se konstruira u Riemannovim normalnim koordinatama (RNK). Poznavanje tih propagatora omogućuje računanje efektivnog djelovanja kojeg je potrebno regularizirati. Regularizacijom se uvodi ovisnost parametara o skali upotrijebljenoj u tu svrhu. Taj je formalizam u ovom poglavlju ilustriran na primjeru jednog supersimetričnog modela. Isto tako, prikazan je i način na koji se ovisnost o regulatoru javlja u pristupu kvantnoj gravitaciji u kojem je središnji objekt razmatranja jedna vrsta efektivnog djelovanja koje se naziva usrednjeno efektivno djelovanje. Ono je različitog porijekla u odnosu na efektivno djelovanje kvantne teorije polja u zakrivljenom prostoru-vremenu. I u ovom slučaju regularizacija efektivnog djelovanja rezultira ovisnošću parametara gravitacijskog međudjelovanja o skali usrednjavanja koja određuje koji se modovi polja na danoj energiji razmatraju. Za oba su pristupa prikazani različiti rezultati u astrofizici i kozmologiji, odnosno predviđanja koja proizlaze iz određenih identifikacija proizvoljne skale pomoću fizikalnih veličina koje su motivirane kvalitativnim razmatranjima. Među njima je izložen i rezultat istraživanja koje polazeći od upotrebe renormalizacijske grupe za gravitacijske parametre analizira problem rotacijskih krivulja galaksija [1]. U tom istraživanju skala o kojoj ovise rečeni parametri također je izabrana na osnovu kvalitativnih argumenata, a postižu se jako dobri rezultati za brzine rotacija galaksija u usporedbi s ostalim predloženim modelima. Kvaliteta rezultata tog rada izravna je motivacija za istraživanja izložena u ovoj disertaciji kojima je cilj razviti sustavnu proceduru izbora fizikalne skale o kojoj parametri ovise, te time smanjiti proizvoljnost odabira iste.

- U trećem poglavlju prezentirana je metoda sustavnog određivanja fizikalne skale o kojoj ovise efektivne konstante vezanja. Ovo poglavlje opisuje primjenu metode na razini jednadžbi gibanja s posebnim naglaskom na astrofizikalne sustave. Rezultati ovog poglavlja potkrepljuju izbor koji je polazna točka rada [1] predstavljenog u drugom poglavlju. Samim time je osnažen i cjelokupan pristup ovoj izazovnoj problematici.

- Osim na razini jednadžbi gibanja za gravitacijsko polje, moguće je sličnu sustavnu metodu primijeniti i uvodeći ovisnost parametara o skali već na razini samog djelovanja. U četvrtom poglavlju vidjet ćemo na koji način određivanje skale ovim putem vodi na modifikacije gravitacijskog djelovanja koje pripadaju klasi $f(R)$ teorija te time pružaju teorijsku motivaciju uvođenju takvih članova višeg reda u derivacijama metričkog tenzora u opis gravitacije. Zanimljiv rezultat ovog poglavlja je i univerzalno djelovanje za gravitaciju, R^2 oblika, koje se javlja u slučaju postojanja netrivijalne (NG, od engl. *non gaussian*) fiksne točke za gravitaciju u okviru ideje asimptotske sigurnosti gravitacije. Primjenom procedure određivanja skale na razini jednadžbi gibanja također je moguće dobiti djelovanja za gravitaciju za koja je u literaturi pokazano da mogu voditi na jedan jako uspješan mehanizam koji može dati odgovore o maloj vrijednosti efektivne kozmološke konstante i problem koincidencije. Taj se mehanizam naziva mehanizam relaksacije. Na jednom jednostavnom primjeru analiziran je i slučaj kada je djelovanje za gravitaciju prošireno djelovanjem za polja materije sa interesantnim posljedicama.

- S obzirom na rezultate četvrtog poglavlja i prirodu univerzalnog djelovanja za gravitaciju u NG fiksnoj točki potrebno je imati metodu određivanja dinamike članova oblika R^n u djelovanju. Iako u literaturi postoji način da se ta dinamika odredi, peto poglavlje predstavlja jednu novu metodu kojom se to čini. Ona je znatno jednostavnija od postojećih, a s posebnim je interesom primijenjena na R^2 slučaj.

Glavni rezultati istraživanja predstavljenih u ovoj disertaciji su:

- Smanjivanje proizvoljnosti izbora fizikalne skale o kojoj ovise parametri gravitacijskog djelovanja primjenom sustavne metode koja se zasniva na malom broju pretpostavki u prvom redu vođenih zahtjevom da izbor skale bude u skladu s kovarijantnošću teorije.
- Rezultat primjene metode na astrofizikalne sustave, pri čemu se ovisnost parametara o skali uvodi na razini jednadžbi gibanja gravitacijskog polja, vodi na izbor skale koji je u radu [1] uspješno primijenjen na problem rotacijskih krivulja galaksija.
- Primjena metode na razini djelovanja može objasniti pojavu $f(R)$ članova u opisu gravitacije, koji su jedan od predloženih mehanizama koji teže objasniti trenutnu fazu ubrzanog širenja svemira.
- Također, pokazano je i da je gravitacijsko međudjelovanje u NG fiksnoj točki opisano R^2 članom iako početno djelovanje može sadržavati i veliki broj članova koji sadrže proizvoljne potencije od R.
- Primjenom metode određivanja skale moguće je pružiti motivaciju postojanju djelovanja koja mogu voditi na mehanizam relaksacije.
- Razmotreno je i kako određivanje skale može voditi na pojavu samointerakcijskog člana, te člana neminimalnog vezanja za skalarno polje materije i modifikaciju Einstein-Hilbert djelovanja uvođenjem djelovanja za materiju u proceduru određivanja skale.
- Predstavljen je i novi pristup rješavanju dinamike $f(R)$ teorija s posebnim osvrtom na dinamiku R^2 člana koji je dobiven kao univerzalan rezultat ponašanja gravitacije u NG fiksnoj točki.

1. Tamna materija i tamna energija: opažanja i modeli

Opća teorija relativnosti [2] je iznimno uspješna u opisivanju gravitacijskog međudjelovanja i mnogo je puta provjeravana i potvrđena proučavanjem svojstava i kretanja astrofizikalnih objekata, te ponašanjem svjetlosti u gravitacijskom polju. Primijenjena na svemir kao cjelinu, uz izbor Friedmann-Robertson-Walker linijskog elementa za opis homogenog i izotropnog prostor-vremena, dala je brojne odgovore na pitanja o njegovom nastanku, sastavu i evoluciji kroz dugotrajna vremenska razdoblja. Začuđujuća je stoga i zagonetna činjenica da, uprkos tome, već dulji niz godina, a i u nedavnoj povijesti, postoje opažanja koja se opiru objašnjenjima i predstavljaju veliki izazov fizikalnoj znanosti. Naime, već tridesetih godina prošlog stoljeća promatranjem kretanja zvijezda i njihovih brzina Oort dolazi do zaključka kako u našoj galaksiji mora postojati više materije nego što se može zaključiti na osnovu procjena mase vidljivih komponenti [3]. U isto se vrijeme Fritz Zwicky bavi proučavanjem galaktičkih skupova [4] te promatrajući brzine galaksija na rubovima tih skupova korištenjem virijalnog teorema dolazi do istog zaključka: vidljiva materija ne može sačinjavati svu masu tih objekata. Sedamdesetih godina, provođenjem opsežnog i sustavnog istraživanja rotacije galaksija [5], Rubin i suradnici su ustanovili da brzina rotacije zvijezda nije u skladu sa procjenama koje se dobiju razmatranjem vidljivih komponenti. U novije vrijeme, krajem prošlog stoljeća, opažanja putem učinaka gravitacijske leće na skupovima galaksija daju daljnji doprinos tom zaključku [6]. Razvojem kozmologije kao opažačke znanosti koja postaje sve sofisticiranija, devedesetih godina dvadesetog stoljeća opaženo je da se svemir suprotno očekivanjima znanstvene zajednice ubrzano širi [7, 8, 9, 10, 11]. Ove su pojave pripisane nepoznatim komponentama koje su dobile nazive tamna materija i tamna energija. Ono što dodatno iznenađuje jest to, da ove komponente, osim što postoje, čine i veći dio ukupne gustoće energije svemira. To jest, izražena preko kritične gustoće svemira, barionska komponenta koju poznajemo čini samo oko 0.05 ukupne gustoće svemira. Time je pred znanstvenike postavljen veliki izazov koji je rezultirao brojnim idejama o mogućim uzrocima ovih opažanja. U nastavku ćemo navesti samo neke od ideja koje pokušavaju rasvijetliti prirodu tamnih komponenti.

Kandidati za objašnjenje tamne tvari su razni [12, 13]. Jedna od predloženih mogućnosti je pretpostavka postojanja kompaktnih objekata u haloima galaksija (MACHO, od engl. *massive compact halo objects*) koji bi mogli biti smeđi patuljci, neutronske zvijezde ili crne rupe. Ova ideja je provjeravana opažanjima putem gravitacijskih leća. Istraživanja pokazuju da je brojnost takvih objekata premala da značajno doprinese tamnoj materiji [14, 15, 16]. Predloženi su i brojni čestični kandidati koji bi sačinjavali tamnu materiju. Pa su tako, među ostalima , u ovom pristupu, kao čestice koje bi doprinosile tamnoj materiji razmatrani neutrini, aksioni, zatim čestice kolektivno prozvane slabo interagirajućim masivnim česticama (WIMP, od engl. *weakly interacting massive particles*) u koje spadaju supersimetrične čestice, Kaluza-Klein pobuđenja i brojne druge. Međutim, ustanovljeno je da su količine tih čestica premale s obzirom na procijenjene količine tamne materije ili se radi o česticama čije postojanje nije potkrijepljeno opažanjima, odnosno njihovo postojanje nije eksperimentalno potvrđeno. Pokušalo se problemu pristupiti i modifikacijama dinamike, odnosno gravitacijskog međudjelovanja. Prva, fenomenološka ideja, relativno uspješna u objašnjavanju rotacijskih krivulja galaksija je modificirana newtonovska dinamika (MOND, od engl. *modified Newtonian dynamics*) koju je predložio Milgrom [17]. Ova se ideja pokazala prilično dobrom u reproduciranju izgleda rotacijskih krivulja galaksija, ali ne može objasniti neke fine detalje tih krivulja. Također, ova metoda primijenjena na neke druge astrofizikalne objekte, poput skupova galaksija ne daje tako dobre rezultate. Isto tako prisutan je i manjak teorijskih argumenata koji bi ukazivali na potrebu te i takve modifikacije dinamike. Kako bi se ovom pristupu dali snažniji temelji, daljnji pokušaji su se sastojali u kreiranju relativističke teorije koja bi rezultirala MOND fenomenologijom. Takva ideja je provedena pod nazivom TeVeS (od engl. *tensor-vector-scalar gravity*) [18, 19], a za njezino funkcioniranje nužno je uvesti nova skalarna i vektorska polja u opis gravitacije. Ova teorija može rezultirati MOND dinamikom te je korak naprijed u realizaciji ovakve ideje. No porijeklo potrebnih članova u gravitacijskom djelovanju koji su nužni za njeno funkcioniranje ostaje nerazjašnjeno. Sličan pristup koji zahtijeva uvođenje novih polja i nekoliko skalarnih funkcija, ali čija izravna motivacija nije pokušaj poopćavanja MOND pristupa, je STVG (od engl. *scalar-vector-tensor gravity*) [20, 21, 22]. STVG je teorija koja je prilično uspješna te može objasniti i puno više pojava od same rotacije galaksija i u skladu je s brojnim testovima gravitacije. Unatoč tome ostaje činjenica da je to jedna jako složena teorija kojoj je također nedostatak manjak jasnih uzroka prisutnosti dodatnih članova, odnosno polja u opisu gravitacijskog međudjelovanja.

Mnogobrojni su i različiti pristupi rješavanju problema tamne energije [23, 24]. Jedno jednostavno rješenje je kozmološka konstanta kao član kojeg treba dodati djelovanju za gravitaciju. Neke od ideja se zasnivaju na postojanju novih skalarnih polja poput kvintesencije [25] ili na postojanju fluida s nestandardnim jednadžbama stanja [26, 27]. Kao kandidat razmatrana je i vakuumska energija poznatih polja što vodi na poznati problem ogromnog neslaganja predviđene i opažene gustoće kozmološke konstante. Također, predložene su i modifikacije gravitacijskog djelovanja koje sadrže članove višeg reda u tenzorima zakrivljenosti ili članove proporcionalne negativnim potencijama Riccijevog skalara [28, 29, 30, 31, 32, 33]. I kod ovih je modifikacija osnovni nedostatak jasan razlog uvođenja novih članova u gravitacijski lagrangian, te je njihov izbor najčešće vođen povoljnim fenomenološkim svojstvima.

Vidljivo je, dakle, kako postoji veliki broj alternativnih scenarija koji nastoje razjasniti prirodu tamnih komponenti. U njima se često pribjegava modifikaciji dinamike ili spekulacijama o postojanju novih čestica ili novih polja. Pri tome učestalo nedostaju jasna teorijska opravdanja ili mehanizmi koji su tomu uzrok. To je navelo dio znanstvenika na promišljanja koja rješenje pokušavaju naći polazeći od dobro utemeljenih teorijskih pristupa poput kvantne teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu [34, 35, 36] ili kvantne gravitacije u formalizmu usrednjenog efektivnog djelovanja [37]. U oba slučaja osnovno je, u njima prisutno obilježje, ovisnost parametara gravitacijskog međudjelovanja o skali koja omogućuje primjenu metoda renormalizacijske grupe [1] (vidjeti dodatak C). Sama ovisnost parametara o skali javlja se kroz potrebu regularizacije tih teorija čime se uvodi ovisnost o proizvoljnoj skali koja je lišena fizikalnog značenja i služi samo kao matematički alat. Zatim je potrebno utvrditi na koji se način to odražava na ovisnost efektivnih konstanti vezanja o nekoj fizikalnoj skali koja je relevantna za razmatrani problem kako bi se mogla iskazati predviđanja tih teorija. U okviru ovih ideja u literaturi su razmatrani učinci ovisnosti gravitacijskih parametara o skali na evoluciju svemira [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48], rast nehomogenosti [49, 50, 51, 52], problem konicidencije [53, 54] te mogu li ovi modeli posjedovati svojstva slična onima koje očekujemo od modela tamne energije [45, 55, 56, 57]. Ključno je još jednom istaknuti da predviđanja koja proizlaze iz ovakvih modela krucijalno ovise o izboru fizikalne skale koja određuje ponašanje efektivnih konstanti vezanja. Literatura obiluje različitim izborima te skale, koji su u velikoj mjeri proizvoljni i oslanjaju se na kvalitativna razmatranja. Proizvoljan izbor, iako može biti dobro motiviran, nije nužno u skladu sa zahtjevom kovarijantnosti ili može voditi na potrebu izmjene energije između obične materije i tamnih komponenti.

U ovoj disertaciji usvojen je pristup koji se zasniva na ovisnosti gravitacijskih konstanti vezanja o skali. Najvažniji je cilj ovdje predstavljenog istraživanja razviti sustavnu metodu koja ograničava slobodu izbora fizikalne skale koja je relevantna za ponašanje efektivnih konstanti vezanja gravitacijskog međudjelovanja. Bolje rečeno, namećući mali broj pretpostavki o skalarnoj prirodi skale te očuvanju kovarijantnosti teorije, pokazati da nije moguće izabrati fizikalnu skalu proizvoljno uz poštivanje tih pretpostavki, nego je kao rezultat ove sustavne procedure jasno definiran izbor takve skale u okviru fizikalnog okruženja kojeg razmatramo.

[1] Kritike ovakvom pristupu iznesene su u radu [38] na koje je iscrpno odgovoreno u radu [39] uz opsežnu argumentaciju. Ovo područje fizike jako je živo i aktualno što pokazuju i nedavna istraživanja. U radu [40] može se naći najnovija razmatranja ovisnosti gravitacijskih parametara o skali iz razmatranja baždarnih teorija. Također, nedavno se javljaju i nova kritička promišljanja ovisnosti parametara o skali u pristupu kvantnoj gravitaciji pomoću usrednjenog efektivnog djelovanja [41].

2. Ovisnost gravitacijskih parametara o skali

Osvrnimo se, za početak, na istraživanja koja su razmatrala posljedice promjenjive kozmološke konstante i prije nego li je ta mogućnost razmatrana kao posljedica regularizacije i renormalizacije neke kvantne teorije polja. Na osnovu lomljenja simetrije i faznih prijelaza u ranom svemiru očekivani je doprinos kozmološkoj konstanti reda veličine neke karakteristične skale prisutne u fizici čestica (Fermijeve skale $\sim 200\ GeV$ ili skale kvantne kromodinamike $\sim 200\ MeV$) na četvrtu potenciju. Nasuprot tome je vrijednost gustoće energije vakuuma $\rho_v < 10^{-47} GeV$. U radu [58] predložen je fenomenološki pristup koji razmatra mogućnost da je tako mala vrijednost kozmološke konstante posljedica njene vremenske ovisnosti. Taj je fenomenološki pristup u kojem je $d\rho_\lambda/dt \neq 0$ usvojen i u istraživanju Reutera i Wettericha [59] koji također ne ulazeći u moguće uzroke vremenski promjenjive kozmološke konstante analiziraju moguće posljedice na evoluciju svemira. Pri tome modeliraju moguće oblike ovisnosti na sljedeći način

$$\dot{\rho}_\lambda = F(H, \rho_\lambda, \rho), \tag{2.1}$$

gdje je H Hubbleov parametar, ρ_Λ kozmološka konstanta, a ρ gustoća materije, te se bave proučavanjem različitih odabira funkcije F koji mogu rezultirati realističnom kozmologijom. Na sličan način ovaj je problem analiziran i u radu [60] gdje autori koriste

$$\Lambda = 3\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3\alpha}{a^2}, \tag{2.2}$$

gdje su α i β bezdimenzionalni parametri, a je faktor skale Friedmann-Robertson-Walker (FRW) linijskog elementa a $\cdot$ označava vremensku derivaciju. Sustavan osvrt na takve i slične scenarije može se naći u radu [61]. Pomno su razrađene kozmologije koje polaze od sljedećih ovisnosti kozmološke konstante

$$\begin{aligned} \rho_\lambda &\propto t^{-l}, \\ \rho_\lambda &\propto a^{-m}, \\ \rho_\lambda &\propto H^n, \\ \rho_\lambda &\propto q^r, \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdje su t kozmičko vrijeme, $a(t)$ faktor skale , H Hubbleov parametar, a q parametar deceleracije, te su klasificirane različite moguće kozmologije koje su posljedica ovih relacija. Tako, naprimjer, izbor $\rho_\lambda \propto t^{-l}$ može rezultirati singularnim ponašanjem, starošću svemira koja je veća od modela u kojima je ρ_λ konstantna te negativnim vrijednostima kozmološke konstante u današnjem svemiru za neparne vrijenosti l (ako želimo realnu vrijednost faktora skale). Za sljedeći izbor, $\rho_\lambda \propto a^{-m}$, dobivena su rješenja koja vode na zatvoreni svemir te ne sadrže početnu singularnost. Modeli koji također ne sadrže početnu singularnost, ali vode na otvoreni svemir rezultat su izbora $\rho_\lambda \propto H^n$. Na kraju posljednji izbor $\rho_\lambda \propto q^r$ vodi na svemire koji imaju oscilatorno ponašanje faktora skale te za pozitivnu kozmološku konstantu vode na negativan parametar deceleracije q, odnosno, ubrzano širenje svemira.

Ovakav scenarij, uz konkretan odabir potencija u gornjoj jednadžbi

$$\begin{aligned} \rho_\lambda &\propto t^{-2}, \\ \rho_\lambda &\propto a^{-2}, \\ \rho_\lambda &\propto H^2, \\ \rho_\lambda &\propto \rho^r, \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje je ρ gustoća materije korišten je u radu [62] kako bi se istražili ovakvi modeli s promjenjivom kozmološkom konstantom u svjetlu tada već postojećih mjerenja koja sugeriraju ubrzano širenje svemira [7, 63]. Zaključeno je da modeli s promjenjivom kozmološkom konstantom mogu jednako dobro opisivati podatke mjerenja te da je, uz tada dostupne podatke, teško razlučiti, odnosno isključiti neki od modela na osnovu dinamika i geometrija svemira koje su rezultat ovakvog pristupa. Kod ovih početnih razmatranja fenomenološki modelirane promjenjive kozmološke konstante važno je još nešto istaknuti. Einsteinove su jednadžbe

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi G\left(T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda(t)}{8\pi G}g_{\mu\nu}\right). \tag{2.5}$$

Uvažavanjem Bianchijevih identitata kao očuvanu veličinu tretira se

$$T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda(t)}{8\pi G}g_{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

pri čemu se G smatra pravom konstantom. Time se dopušta izmjena energije između materije opisane tenzorom energije-impulsa $T_{\mu\nu}$ i same kozmološke konstante $\rho_\Lambda(t)$. Najranija fenomenološka razmatranja promjenjive kozmološke konstante ostavljaju, dakle, mogućnost da takav tretman kozmološke konstante bude uzrok nastajanja materije. Također, moguće je, ovisno o izabranom modelu dobiti različite geometrije svemira (zatvoren, otvoren, ravan) i ponašanje faktora skale FRW metrike (singularno, nesingularno i oscilatorno ponašanje). U sljedećim odjeljcima opisat ćemo način na koji se ovisnost kozmološke (a i Newtonove konstante) o skali može pojaviti kroz razmatranja teorija polja, te time ovoj ideji pružiti čvršće uporište od pukog fenomenološkog modeliranja.

2.1 Kvantna teorija polja u zakrivljenom prostor-vremenu

Ovaj teorijski pristup razmatra ponašanje kvantnih polja materije na klasičnoj, općenitoj zakrivljenoj pozadini prostor-vremena. Osnovna veličina koju promatramo je efektivno djelovanje. Metoda kojom dolazimo do efektivnog djelovanja koristi oblik propagatora kvantnih polja koje se konstruira upotrebom reprezentacije u lokalnom impulsnom prostoru, odnosno korištenjem Riemannovih normalnih koordinata [64] pri određivanju oblika tih propagatora [65, 66, 67].

Razmotrimo sada osnovna obilježja ovog formalizma uzimajući za primjer neminimalno vezano skalarno polje za koje je gustoća lagrangiana [1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g(x)}[g^{\mu\nu}\phi(x)_{,\mu}\,\phi(x)_{,\nu} - (m^2 + \xi R(x))\phi^2(x)]\,, \tag{2.7}$$

gdje je m^2 njegova masa, a ξ parametar koji opisuje jačinu vezanja skalarnog polja na gravitaciju. Djelovanje je, naravno

$$S = \int \mathcal{L}(x) d^4x. \tag{2.8}$$

Jednadžba gibanja koja slijedi varijacijom ovog djelovanja po ϕ je

$$[\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 + \xi R(x)]\phi(x) = 0. \tag{2.9}$$

Definirajmo sada Feynmanov propagator

$$iG_F = \langle 0|T(\phi(x)\phi(x'))|0\rangle. \tag{2.10}$$

Ovaj propagator zadovoljava relaciju

$$[\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2 + \xi R(x)]G_F(x;x') = -[-g(x)]^{-\frac{1}{2}}\delta(x - x'). \tag{2.11}$$

Uvedemo li Riemannove normalne koordinate y (vidjeti dodatak B) čije je ishodište u točki x', možemo napisati razvoj metričkog tenzora i njegove determinante na sljedeći način

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}y^\alpha y^\beta + \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ &+ \frac{1}{20}R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma\delta}y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \frac{2}{45}R_{\alpha\mu\beta\rho}R^\rho_{\gamma\nu\delta}y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} g &= -1 - \frac{1}{3}R_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6}R_{\alpha\beta;\gamma}y^\alpha y^\beta y^\gamma \\ &+ \Big[-\frac{1}{18}R_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} + \frac{1}{18}R^\rho{}_\alpha{}^\sigma{}_\beta R_{\rho\gamma\sigma\delta} \\ &- \frac{1}{20}R_{\alpha\beta;\gamma\delta} - \frac{4}{90}R_\alpha{}^\rho{}_{\beta\lambda}R^\lambda{}_{\gamma\rho\delta}\Big]y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots \end{aligned} \tag{2.13}$$

[1] Konvencije koje se koriste u ovoj disertaciji izložene su u dodatku A.

Na desnoj strani ovih jednadžbi, geometrijske veličine u koeficijentima razvoja po y su izvrijednjene u ishodištu Riemannovih normalnih koordinata. Možemo također napisati i razvoj Riccijevog skalara

$$R(x) = R(x') + R_{;\alpha} y^\alpha + \frac{1}{2} R_{;\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + \ldots \tag{2.14}$$

Koristeći definiciju (u nastavku izostavljamo indeks F za Feynmanove propagatore)

$$G(x;x') = (-g(x))^{-\frac{1}{4}} \bar{G}(x;x')(-g(x'))^{-\frac{1}{4}} = (-g(x))^{-\frac{1}{4}} \bar{G}(x;x'), \tag{2.15}$$

možemo upotrebom gore navedenih razvoja u Riemannovim normalnim koordinatama vidjeti da $\bar{G}(x;x')$ zadovoljava sljedeći izraz

$$\begin{aligned}
\delta(y) \;\; = & \;\; -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)R\right]\bar{G} \\
- & \;\; \frac{1}{3} R_\alpha{}^\nu y^\alpha \partial_\nu \bar{G} + \frac{1}{3} R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta y^\alpha y^\beta \partial_\mu\partial_\nu \bar{G} \\
- & \;\; \left(\xi - \frac{1}{6}\right) R_{;\alpha} y^\alpha \bar{G} + \left(-\frac{1}{3} R_\alpha{}^\nu{}_{;\beta} + \frac{1}{6} R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}\right) y^\alpha y^\beta \partial_\nu \bar{G} \\
+ & \;\; \frac{1}{6} R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_{\beta;\gamma} y^\alpha y^\beta y^\gamma \partial_\mu\partial_\nu \bar{G} - \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right) R_{;\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \bar{G} \\
+ & \;\; \left(\frac{1}{30} R_\alpha{}^\lambda R_{\lambda\beta} - \frac{1}{60} R^\kappa{}_\alpha{}^\lambda{}_\beta R_{\kappa\lambda} - \frac{1}{60} R^{\lambda\mu\kappa}{}_\alpha R_{\lambda\mu\kappa\beta} \right. \\
- & \;\; \left. \frac{1}{120} R_{;\alpha\beta} + \frac{1}{40} \Box R_{\alpha\beta} \right) y^\alpha y^\beta \bar{G} \\
+ & \;\; \left(-\frac{3}{20} R^\nu{}_{\alpha;\beta\gamma} + \frac{1}{10} R_{\alpha\beta}{}^{;\nu}{}_\gamma + \frac{1}{60} R^\kappa{}_\alpha{}^\nu{}_\beta R_{\kappa\gamma} \right. \\
- & \;\; \left. \frac{1}{15} R^\kappa{}_{\alpha\lambda\beta} R_\kappa{}^\nu{}_\gamma{}^\lambda \right) y^\alpha y^\beta y^\gamma \partial_\nu \bar{G} \\
+ & \;\; \left(\frac{1}{20} R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_{\beta;\gamma\delta} - \frac{1}{15} R^\mu{}_{\alpha\lambda\beta} R^\lambda{}_\gamma{}^\nu{}_\delta \right) y^\alpha y^\beta y^\gamma y^\delta \partial_\mu \partial_\nu \bar{G}\,.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Uvedimo impulsni prostor koji pripada točki x' služeći se Fourierovim transformatom

$$\bar{G}(x;x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{iky} \bar{G}(k)\,, \tag{2.17}$$

pri čemu je $ky = k_\alpha y^\alpha = \eta^{\alpha\beta} k_\alpha y_\beta$.
Za $\bar{G}(k)$ možemo odabrati sljedeći prikaz

$$\bar{G}(k) = \bar{G}_0(k) + \bar{G}_1(k) + \bar{G}_2(k) + \ldots \tag{2.18}$$

gdje su

$$\bar{G}_i(x;x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{iky} \bar{G}_i(k) \qquad (i = 0, 1, 2, ...)\,. \tag{2.19}$$

Ovdje članovi $\bar{G}_i(k)$ sadrže geometrijski koeficijent koji u sebi ima i derivacija metričkog tenzora. Iskoristimo li prikaz delta funkcije

$$\delta(y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{iky} \,, \tag{2.20}$$

možemo lako naći rješenje najnižeg reda, to jest rezultat koji odgovara rješenju u prostor-vremenu Minkowskog.

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \bar{G}_0(x;x') + m^2 \bar{G}_0(x;x') = -\delta(y) \,. \tag{2.21}$$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{iky} [\eta^{\mu\nu} ik_\mu ik_\nu + m^2] \bar{G}_0(k) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{iky} \,. \tag{2.22}$$

$$(-\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + m^2)\bar{G}_0(k) = -1 \,. \tag{2.23}$$

Te, naposljetku,

$$\bar{G}_0(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \,. \tag{2.24}$$

Isto tako, lako je vidjeti da je $\bar{G}_1(k) = 0$. Potražimo sada sljedeći član u razvoju, $\bar{G}_2$. Za njega vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Big\{ e^{iky} \Big[(-\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu + m^2) \bar{G}_2(k) + \big(\xi - \frac{1}{6}\big) R \bar{G}_0(k) \Big] \\ + \frac{1}{3} R^\nu_\alpha y^\alpha (\partial_\nu e^{iky}) \bar{G}_0 - \frac{1}{3} R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \ \beta} y^\alpha y^\beta \partial_\mu \partial_\nu e^{iky} \bar{G}_0(k) \Big\} = 0 \,.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Od pomoći će nam biti izraz

$$y^\alpha e^{iky} = -i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} e^{iky} \,. \tag{2.26}$$

Prvi član u drugom redu jednadžbe (2.25) možemo napisati kao

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} R^\nu_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} y^\alpha e^{iky} (ik_\nu \bar{G}_0(k)) &= -\frac{1}{3} R^\nu_\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} (k_\nu \bar{G}_0(k)) e^{iky} = \\ -\frac{1}{3} R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{iky}}{k^2 - m^2} &+ \frac{2}{3} R^{\nu\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\alpha e^{iky}}{(k^2 - m^2)^2} \,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

S druge strane, drugi se član u jednadžbi (2.25) može ovako zapisati

$$-\frac{1}{3} R^{\mu\ \ \nu}_{\ \alpha\ \ \beta} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{\partial}{\partial k_\beta} \Big(k_\mu k_\nu \bar{G}_0(k) \Big) e^{iky} \,. \tag{2.28}$$

Nakon provođenja derivacija većina dobivenih članova iščezava zbog simetrija Riemannovog tenzora, te preostaju jedino članovi

$$\frac{1}{3} R \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{iky}}{k^2 - m^2} - \frac{2}{3} R^{\nu\alpha} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\nu k_\alpha e^{iky}}{(k^2 - m^2)^2} \,. \tag{2.29}$$

Članovi (2.29) točno poništavaju doprinose (2.27). Dakle za $\bar{G}_2(k)$ vrijedi

$$(-\eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu + m^2)\bar{G}_2(k) + \big(\xi - \frac{1}{6}\big)R\bar{G}_0(k) = 0 \, . \tag{2.30}$$

Odavde, za prvi netrivijalni član u razvoju, dobijemo

$$\bar{G}_2(k) = \frac{(\xi - \frac{1}{6})R}{(k^2 - m^2)^2} \, . \tag{2.31}$$

Prisjetimo li se definicije

$$G(x;x') \;=\; (-g(x))^{-\frac{1}{4}}\bar{G}(x;x') \, , \tag{2.32}$$

slijedi

$$\begin{aligned} G(x;x') &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{iky}\left[\frac{1}{k^2-m^2} + \frac{(\xi-\frac{1}{6})R}{(k^2-m^2)^2}\right] \\ &+ \frac{1}{12}R_{\alpha\beta}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{iky}\frac{\partial}{\partial k_\alpha}\frac{\partial}{\partial k_\beta}(k^2-m^2)^{-1} \, . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Konačni je oblik

$$G(x;x') \;=\; (-g(x))^{-\frac{1}{4}}\bar{G}(x;x') = \tag{2.34}$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{iky}\left[\frac{1}{k^2-m^2} \;+\; \frac{(\xi-\frac{1}{3})R}{(k^2-m^2)^2} + \frac{2}{3}\frac{R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta}{(k^2-m^2)^3} + \dots\right] .$$

gdje su sa ... označeni članovi višeg reda koji nisu divergentni. Članovi koji jesu divergentni, zahtijevaju regularizaciju te u konačnici definiraju oblik β funkcija. Time dolazimo do ovisnosti parametara teorije o regulatoru kao i do mogućnosti primjene renormalizacijske grupe. Sličnu proceduru kao za skalarno polje moguće je napraviti i za fermionska te vektorska polja. U sljedećem odjeljku vidjet ćemo jasnije na koji se način služimo poznavanjem propagatora kako bismo odredili efektivno djelovanje te ćemo ilustrirati ovisnost gravitacijskih konstanti vezanja o regulatoru na primjeru jednog supersimetričnog modela.

2.1.1 Supersimetrični model

Iako razmatramo supersimetrični model, rezultati koje dobijemo su također relevantni za određivanje ovisnosti gravitacijskih konstanti vezanja o skali koji su korišteni u sljedećim poglavljima. Ovdje iznosimo rezultate rada [68] gdje je analiziran Wess-Zumino supersimetrični model s N vrsta. Lagrangian modela je dan sljedećim izrazom [69]

$$\mathcal{L}_N = \sum_i \Phi_i^\dagger \Phi_i|_D + W(\Phi)|_F + \text{h.c.} \, . \tag{2.35}$$

Ovdje indeks i opisuje različita lijeva kiralna superpolja Φ_i, dok je veličina $W(\Phi)$ superpotencijal koji je oblika

$$W(\Phi) = \sum_i \left(\frac{m_i}{2}\Phi_i^2 + \frac{\lambda}{3}\Phi_i^3 \right). \tag{2.36}$$

Iako je lagrangian (2.35) suma N kiralnih lagrangiana $\mathcal{L}_i$ za svaku pojedinu vrstu u nastavku ćemo izostavljati indeks i. Radimo u zakrivljenom prostor-vremenu čiji je metrički tenzor $g_{\mu\nu}$. Nakon eliminacije pomoćnih polja korištenjem jednadžbi gibanja, za svaku pojedinu vrstu lagrangian se svodi na

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= g^{\mu\nu}\phi^\dagger_{,\mu}\phi_{,\nu} - V(\phi) + \frac{i}{4}\left(\bar{\Psi}\tilde{\gamma}^\mu\Psi_{;\mu} - \bar{\Psi}_{;\mu}\tilde{\gamma}^\mu\Psi\right) - \frac{1}{2}m\bar{\Psi}\Psi \\ &\quad -\frac{\lambda}{2}\bar{\Psi}(1-\gamma_5)\Psi\phi - \frac{\lambda}{2}\bar{\Psi}(1+\gamma_5)\Psi\phi^\dagger, \end{aligned} \tag{2.37}$$

gdje je

$$V(\phi) = |m\phi + \lambda\phi^2|^2 + \xi R|\phi|^2. \tag{2.38}$$

ϕ predstavlja kompleksno skalarno polje, a Ψ Majorana fermionsko polje. $\tilde{\gamma}^\mu$ su gama matrice zakrivljenog prostor-vremena [70], te zadovoljavaju relaciju

$$\tilde{\gamma}^\mu(x)\tilde{\gamma}^\nu(x) + \tilde{\gamma}^\nu(x)\tilde{\gamma}^\mu(x) = 2g^{\mu\nu}(x) \tag{2.39}$$

Potencijal skalarnog polja (2.38) sadrži i član koji opisuje neminimalno vezanje, $\xi R|\phi|^2$, skalarnog polja sa skalarom zakrivljenosti R. Kako petljene korekcije generiraju ovakav član u efektivnom djelovanju, čak i ako izaberemo $\xi = 0$ u jednadžbi (2.37) renormalizacija teorije zahtijeva njegovo uvođenje [70, 71]. Lagrangian (2.37) u limesu ($m \to 0$) postaje invarijantan na kiralnu U(1) transformaciju

$$\phi \to e^{2i\alpha}\phi, \tag{2.40}$$

$$(1-\gamma_5)\Psi \to e^{-i\alpha}(1-\gamma_5)\Psi, \tag{2.41}$$

$$(1+\gamma_5)\Psi \to e^{i\alpha}(1+\gamma_5)\Psi. \tag{2.42}$$

Djelovanje možemo zapisati na sljedeći način

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(\mathcal{L}_\mathrm{B} + \mathcal{L}_\mathrm{F}), \tag{2.43}$$

gdje smo razdvojili bozonski i fermionski doprinos, $\mathcal{L}_\mathrm{B}$ i $\mathcal{L}_\mathrm{F}$. Nadalje, korištenjem relacije

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma + i\pi), \tag{2.44}$$

lagrangian kompleksnog skalarnog polja ϕ može se zapisati kao kombinacija lagrangiana dvaju realnih skalarnih polja σ i π. U tom slučaju potencijal (2.38) je

$$V(\sigma,\pi) = \frac{m^2+\xi R}{2}(\sigma^2+\pi^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2+\pi^2)^2 + \frac{m\lambda}{\sqrt{2}}\sigma(\sigma^2+\pi^2). \tag{2.45}$$

Efektivno djelovanje

Kako, za općenito zakrivljeno prostor-vrijeme $g_{\mu\nu}$ s pripadajućim tenzorom zakrivljenosti $R_{\mu\nu}$ izgleda efektivno djelovanje ovog modela? Da bismo to odredili koristit ćemo se pristupom koji se zasniva na računu Feynmanovog propagatora na razini jedne petlje [66]. U tu svrhu uvedimo pozadinska polja $\bar{\sigma}$ i $\bar{\pi}$ te načinimo redefinicije

$$\sigma \to \bar{\sigma} + \sigma; \qquad \pi \to \bar{\pi} + \pi. \tag{2.46}$$

Izraz za efektivno djelovanje je tada

$$\Gamma[\bar{\sigma}, \bar{\pi}] = S^{(0)}[\bar{\sigma}, \bar{\pi}] - i \ln \int [d\sigma, d\pi, d\Psi] \exp(iS^{(2)}[\bar{\sigma}, \bar{\pi}, \sigma, \pi, \Psi]). \tag{2.47}$$

$[d\sigma, d\pi, d\Psi]$ je mjera funkcionalnog integrala, a $S^{(0)}$ predstavlja klasično djelovanje koje se dobije iz bozonskog dijela djelovanja (2.43) ako se polja σ i π zamijene poljima $\bar{\sigma}$ i $\bar{\pi}$. $S^{(2)}$ je dio djelovanja koji je kvadratičan u kvantnim poljima

$$S^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_{\mathrm{B}}^{(2)} + \mathcal{L}_{\mathrm{F}}^{(2)}), \tag{2.48}$$

pri čemu su

$$\mathcal{L}_{\mathrm{B}}^{(2)} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \pi_{,\mu} \pi_{,\nu} - \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma^2 - \frac{m_\pi^2}{2} \pi^2 - \frac{\xi}{2} R(\sigma^2 + \pi^2) \tag{2.49}$$

i

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}}^{(2)} = \frac{i}{4} \left(\bar{\Psi} \tilde{\gamma}^\mu \Psi_{;\mu} - \bar{\Psi}_{;\mu} \tilde{\gamma}^\mu \Psi \right) - \frac{1}{2} m_{\mathrm{F}} \bar{\Psi} \Psi + \frac{i\lambda\bar{\pi}}{\sqrt{2}} \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi. \tag{2.50}$$

Efektivne mase bozona m_σ^2 i m_π^2 su koeficijenti dijagonalizirane kvadratne forme za σ i π, a m_{F} je efektivna fermionska masa. One su

$$m_\sigma^2 = a + b; \qquad m_\pi^2 = a - b; \qquad m_{\mathrm{F}} = m + \sqrt{2}\lambda\bar{\sigma}, \tag{2.51}$$

gdje je

$$a = m^2 + 2\lambda^2(\bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2) + 2\sqrt{2} m \lambda \bar{\sigma} \tag{2.52}$$

i

$$b = \lambda \sqrt{(\bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2) \left[(\lambda\bar{\sigma} + \sqrt{2} m)^2 + \lambda^2 \bar{\pi}^2 \right]}. \tag{2.53}$$

Sada možemo naći doprinose skalarnih i fermionskih polja efektivnom djelovanju. Slijedeći račun Parkera i Tomsa [66] doprinos svakog od skalarnih polja možemo naći na sljedeći način. Polazi se od prikaza efektivnog djelovanja za skalarna polja pomoću propagatora

$$\Gamma_s = -\frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \int^{m_s^2} d(m^2) \Delta(x; x), \tag{2.54}$$

pri čemu s označava σ ili π.

Također, koristeći oznaku ϕ za σ ili π možemo napisati renormalizirani Feynmanov propagator

$$\Delta(x;x') = -i\langle\varphi(x)\varphi(x')\rangle \,, \tag{2.55}$$

koji zadovoljava jednadžbu

$$(-\Box - m^2 - \xi R)\Delta(x;x') = (-g(x))^{-1/2}\delta(x-x'), \tag{2.56}$$

gdje je $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$. U koincidentnom limesu, dakle za $x \to x'$,

$$\Delta(x;x) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty}\overline{f}_j(-\frac{\partial}{\partial m^2})^j\right]\left[k^2 - m^2 - (\xi - \frac{1}{6})R(x)\right]^{-1}, \tag{2.57}$$

gdje je $k^2 = \eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$. Ovo je samo nešto drugačiji zapis relacije (2.34) gdje su kovarijantni članovi koje tvore kombinacije Riemannovog tenzora, njegove kontrakcije i kovarijantne derivacije sadržani u koeficijentima $\overline{f}_j$ [66]. Napomenimo ovdje kako je razvoj (2.57), iako dobiven upotrebom Riemannovih normalnih koordinata, valjan u općenitom koordinatnom sustavu. U razvoju Δ su viši redovi u geometrijskim članovima praćeni višim redovima u $(k^2 - m^2)^{-1}$. Feynmannov propagator (2.55) zapisujemo u pogodnijem obliku

$$\Delta(x;x') = (-g(x))^{-1/4}\bar{\Delta}(x;x')\,, \tag{2.58}$$

gdje modificirani propagator $\bar{\Delta}$ zadovoljava relaciju

$$(-\Box - m^2 - \xi R)\bar{\Delta}(x;x') = \delta(x-x'). \tag{2.59}$$

U Riemannovim normalnim koordinatama on ima oblik

$$\bar{\Delta}(x;x') = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}e^{-ik(x-x')}\left[\frac{1}{k^2-m^2} + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)\frac{R}{(k^2-m^2)^2} + \ldots\right]. \tag{2.60}$$

U prethodnom izrazu su izostavljeni doprinosi višeg reda u zakrivljenosti. Ovdje je sa x' označeno ishodište Riemannovih normalnih koordinata te je R izvrijednjen u tom istom ishodištu. U limesu $x' \to x$, integrali (2.60) su u četiri dimenzije divergentni i nužno ih je regularizirati. Jedan od elegantnijih načina regularizacije je dimenzionalna regularizacija (DR) [72]. No, i ona ima nedostataka. Naprimjer, iz te metode nije moguće odrediti strukturu kvadratičnih divergencija koja može biti važna ako promatramo efektivnu teoriju. Kako je DR u svojoj osnovi maseno neovisna metoda regularizacije, nije pogodna za opisivanje razvezivanja stupnjeva slobode i čestičnih pragova koje je potrebno staviti rukom ako inzistiramo na upotrebi DR [73]. Vidjet ćemo kako je taj aspekt važan kada se u formalizmu kvantne teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu želi dobiti ispravan oblik ovisnosti kozmološke konstante o skali koji ispravno uvažava takozvano meko razvezivanje stupnjeva slobode [44]. Ovdje ćemo za regularizaciju integrala koristiti četverodimenzionalnu kovarijantnu gornju granicu integracije, ali koristeći jednu vrstu takve regularizacije koja se ipak oslanja na vezu s dimenzionalnom regularizacijom. Već davno Veltman je primijetio kako ispravan račun kvadratičnih divergencija u $d = 2 - 2(\epsilon - 1)$ dimenzija vodi na regularizaciju upotrebom gornje granice integracije koja se oslanja na dimenzionalnu regularizaciju [72]. U nastavku računa slijedimo pristup kojeg su predložili Cynolter i Lendvai [74]. Uvažavajući sve simetrije teorije te koristeći recept [2]

$$l_{\mathrm{E}\mu} l_{\mathrm{E}\nu} \to \frac{1}{d} g_{\mu\nu} l_{\mathrm{E}}^2, \tag{2.61}$$

koji je određen Lorentz invarijantnošću, pri čemu se parametar d određuje korištenjem gornje granice u Euklidskom prostoru, moguće je povezati rezultate dobivene upotrebom gornje granice integracije s onima dobivenima dimenzionalnom regularizacijom. Usporedbom različitih potencija Λ_{cut} uz sačuvanu baždarnu invarijantnost, u radu [74] relevantnima se pokazuju sljedeće relacije

$$\frac{1}{d}\Lambda_{\mathrm{cut}}^2 \quad \to \quad \frac{1}{2}\Lambda_{\mathrm{cut}}^2, \tag{2.62}$$

$$\frac{1}{d}\ln\left(\frac{\Lambda_{\mathrm{cut}}^2 + m^2}{m^2}\right) \quad \to \quad \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{\Lambda_{\mathrm{cut}}^2 + m^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2}\right). \tag{2.63}$$

Za konačne članove vrijedi

$$\frac{1}{d} \quad \to \quad \frac{1}{4}. \tag{2.64}$$

Uzimajući u obzir gore navedene relacije vrijede sljedeći izrazi

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m^2} = -\frac{i}{(4\pi)^2}\left(\Lambda_{\mathrm{cut}}^2 - m^2 \ln\frac{\Lambda_{\mathrm{cut}}^2}{m^2}\right), \tag{2.65}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} = \frac{i}{(4\pi)^2}\left(\ln\frac{\Lambda_{\mathrm{cut}}^2}{m^2} - 1\right). \tag{2.66}$$

U skladu s ovim zapažanjima integral po m^2 u (2.54) je

$$\begin{aligned}\Gamma_s = \frac{1}{2(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,&\left[\frac{m_s^4}{4} - m_s^2\Lambda_{\mathrm{cut}}^2 + m_s^2\left(\frac{m_s^2}{2} + \left(\xi - \frac{1}{6}\right)R\right)\ln\frac{\Lambda_{\mathrm{cut}}^2}{m_s^2}\right.\\ &\left.+c_1\Lambda_{\mathrm{cut}}^4 + c_2\Lambda_{\mathrm{cut}}^2 R + \dots\right],\end{aligned} \tag{2.67}$$

gdje su izostavljeni članovi višeg reda. Posljednja dva člana u zagradama su konstante integracije koje ne ovise o masi m_s^2, a c_1 i c_2 su zasad proizvoljne bezdimenzionalne konstante.

Na sličan način kao i za skalarna polja moguće je naći i doprinos fermionskih polja. Deriviramo li izraz (2.47) s obzirom na m_{F}, gdje za kvadratični dio djelovanja $S^{(2)}$ uzimamo

$$S_{\mathrm{F}}^{(2)} = \int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{\mathrm{F}}^{(2)}, \tag{2.68}$$

[2] l_E je Euklidski impuls

upotrebom lagrangiana (2.50), dobijemo

$$\frac{\partial \Gamma_{\rm F}}{\partial m_{\rm F}} = \frac{i}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,{\rm tr}\mathcal{S}(x;x). \tag{2.69}$$

Ovdje se trag odnosi na spinorne indekse. Feynmanova Greenova funkcija $\mathcal{S}$ je definirana na sljedeći način

$$\mathcal{S}_{ab}(x;y) \equiv -i\langle T\Psi_a(x)\bar{\Psi}_b(y)\rangle, \tag{2.70}$$

U limesu $y \to x$ to postaje

$$\mathcal{S}(x;x) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}(-\gamma^\mu k_\mu + m_{\rm F} - i\sqrt{2}\lambda\bar{\pi}\gamma_5)\mathcal{G}(k), \tag{2.71}$$

pri čemu je uključivanjem najnižeg adijabatskog reda (reda u derivacijama metričkog tenzora)

$$\mathcal{G}(k) = \left[1 + \frac{R}{12}\frac{\partial}{\partial m_{\rm F}^2}\right](k^2 - m_{\rm F}^2)^{-1}. \tag{2.72}$$

Stoga vrijedi

$$\frac{\partial \Gamma_{\rm F}}{\partial m_{\rm F}} = 2i\int d^4x\sqrt{-g}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left(\frac{m_{\rm F}}{k^2 - m_{\rm F}^2} + \frac{m_{\rm F}R}{12(k^2 - m_{\rm F}^2)^2}\right). \tag{2.73}$$

Upotrebom (2.65) i (2.66) te integriranjem (2.69) po $m_{\rm F}$ slijedi

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rm F} = \frac{1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\Bigg[& m_{\rm F}^2\Lambda_{\rm cut}^2 - \frac{m_{\rm F}^4}{4} - m_{\rm F}^2\left(\frac{m_{\rm F}^2}{2} + \frac{R}{12}\right)\ln\frac{\Lambda_{\rm cut}^2}{m_{\rm F}^2} \\ & + c_3\Lambda_{\rm cut}^4 + c_4\Lambda_{\rm cut}^2 R + \dots\Bigg].\end{aligned} \tag{2.74}$$

I ovdje su posljednja dva člana u uglatim zagradama konstante koje ne ovise o $m_{\rm F}$, a c_3 i c_4 su također zasad proizvoljne bezdimenzionalne konstante.

Sada možemo napisati ukupni doprinos efektivnom djelovanju

$$\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_\pi + \Gamma_{\rm F} \tag{2.75}$$

kao funkciju pozadinskih polja $\bar{\sigma}$ and $\bar{\pi}$. Pozadinska polja određena su zahtjevom da vakuum minimizira potencijal (2.45). Vidljivo je da potencijal (2.45) ima dva minimuma. Prvi minimum je trivijalni $\bar{\pi} = 0$, $\bar{\sigma} = 0$ te su u tom slučaju sve mase jednake $m_\sigma = m_\pi = m_{\rm F} = m$. Drugi je minimum $\bar{\pi} = 0$, $\bar{\sigma} = -\sqrt{2}m/\lambda$, te je u ovom slučaju $m_\sigma = m_\pi = -m_{\rm F} = m$. Ovaj vakuum lomi supersimetriju i daje negativnu fermionsku masu. No, kako je fermionski doprinos proporcionalan $m_{\rm F}^2$, za oba rješenja je doprinos efektivnom djelovanju jednak. U oba slučaja dolazi do poništavanja maseno ovisnih doprinosa koji su istovjetni rezultatima u ravnom prostoru (2.75), to jest maseno ovisni doprinosi koji ne iščezavaju u limesu nulte zakrivljenosti u fermionskom dijelu djelovanja $\Gamma_{\rm F}$ točno poništavaju iste takve doprinose u bozonskom dijelu efektivnog djelovanja Γ_σ i Γ_π. Sada želimo odrediti konstante c_1 i c_2 u (2.67) te c_3 i c_4 u (2.74) uz pomoć zaključaka prezentiranih u radu [75]. Formalnim izvrednjavanjem integrala (2.47) preko bozonskih i fermionskih polja moguće je efektivno djelovanje na razini jedne petlje zapisati na način

$$\Gamma = 2\Gamma_s + \Gamma_{\mathrm{F}} = -2i\ln(\det D_s)^{-1/2} - i\ln\det D_F = i\,\mathrm{tr}\ln D_s - i\,\mathrm{tr}\ln D_{\mathrm{F}}, \tag{2.76}$$

Ovdje su D_s i D_{F} bilinearni operatori Lagrangiana (2.49) i (2.50) za slučaj kada je $m_\pi = m_\sigma = m_{\mathrm{F}} = m$ i $\bar{\pi} = 0$. Definirani su sljedećim relacijama

$$D_s = -\Box - m^2 - \xi R\,, \tag{2.77}$$

i

$$D_{\mathrm{F}} = i\tilde{\gamma}^\mu \nabla_\mu - m. \tag{2.78}$$

Kako konačni rezultat ovisi o masi m samo kvadratično, možemo pojednostavniti trag fermionskog operatora koristeći

$$\mathrm{tr}\ln D_{\mathrm{F}}(m) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln D_{\mathrm{F}}(m)D_{\mathrm{F}}(-m) = \mathrm{tr}(-\Box - \frac{1}{4}R - m^2)\,. \tag{2.79}$$

Faktor 1/2 ispred traga kompenziran je faktorom 2 koji dolazi zbog činjenice da imamo dva stupnja slobode Majorana spinora. Time se trag fermionskog operatora može prikazati preko traga skalarnog operatora pri čemu treba uzeti $\xi = 1/4$. Upotrijebimo sada (2.56) kako bismo invertirali operator D_s i izračunali trag korištenjem sljedećeg izraza

$$\mathrm{tr}\ln D_s = -\mathrm{tr}\ln\bar{\Delta}. \tag{2.80}$$

Ako $\bar{\Delta}$ iz jednadžbe (2.60) zapišemo

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_0 + \bar{\Delta}_1 R + \ldots, \tag{2.81}$$

gdje je Δ_0 inverz od $\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2$ vrijedi

$$\mathrm{tr}\ln D_s = -\mathrm{tr}\ln(\bar{\Delta}_0 + \bar{\Delta}_1 R + \ldots) = -\mathrm{tr}\ln\bar{\Delta}_0 - \mathrm{tr}\,\bar{\Delta}_0^{-1}\bar{\Delta}_1 R + \ldots\,. \tag{2.82}$$

Prvi član na desnoj strani ove jednadžbe je doprinos u ravnom prostoru kojeg poništava odgovarajući fermionski član što slijedi iz (2.76) i (2.79). Stoga je nužno izračunati samo drugi član u (2.82)

$$\mathrm{tr}\,\bar{\Delta}_0^{-1}\bar{\Delta}_1 R = \int d^4x\sqrt{-g}\int d^4x'\bar{\Delta}_0^{-1}(x,x')\bar{\Delta}_1(x',x)R. \tag{2.83}$$

Pogledajmo Fourierov transformat

$$\mathrm{tr}\,\bar{\Delta}_0^{-1}\bar{\Delta}_1 R = \int d^4x\sqrt{-g}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)\frac{R}{k^2 - m^2}. \tag{2.84}$$

Regularizirani integral po impulsu (2.65) nam daje

$$2\Gamma_s = i\mathrm{tr}\ln D_s = -i\mathrm{tr}\ln\bar{\Delta}_0 - \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)\left(\Lambda_{\mathrm{cut}}^2 - m^2\ln\frac{\Lambda_{\mathrm{cut}}^2}{m^2}\right)R. \tag{2.85}$$

Usporedimo li sada ovaj rezultat sa izrazom (2.67) zaključujemo

$$c_2 = \frac{1}{6} - \xi. \tag{2.86}$$

Iz (2.79) za fermionski dio se dobije

$$\Gamma_{\rm F} = -i{\rm tr} \ln D_{\rm F} = -i{\rm tr} \ln D_s|_{\xi=1/4}, \tag{2.87}$$

odnosno

$$c_4 = -c_2|_{\xi=1/4} = \frac{1}{12}. \tag{2.88}$$

Ukupni doprinos djelovanju je stoga

$$\Gamma = -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} N \tilde{\xi} \left(\Lambda_{\rm cut}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{\rm cut}^2}{m^2} \right) R, \tag{2.89}$$

pri čemu je

$$\tilde{\xi} = \xi - \frac{1}{4}. \tag{2.90}$$

Zbog poništavanja prvog člana s odgovarajućim fermionskim doprinosom (2.85) vrijedi $c_1 + c_3 = 0$. Ovime se osigurava da svi članovi u (2.74) koji ne iščezavaju u granici nulte zakrivljenosti budu jednaki točno polovini odgovarajućeg skalarnog dijela (2.67), sa suprotnim predznakom. Na ovaj se način u sumi (2.75) ovi članovi poništavaju jer, kao što je pokazano u radu [76], supersimetrija vodi na poništavanje svih doprinosa koji postoje u ravnom prostoru neovisno o metodi regularizacije koju se u danom računu koristi.

Tenzor energije-impulsa

Jednom kada nam je poznato efektivno djelovanje možemo iz njega izvesti tenzor energije-impulsa.

$$T_{\mu\nu}^{\rm vac} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \Gamma}{\delta g^{\mu\nu}}, \tag{2.91}$$

Primjenom izraza (2.91) na efektivno djelovanje dano izrazom (2.89) dobit ćemo

$$T_{\mu\nu}^{\rm vac} = -\frac{N}{8\pi^2} \tilde{\xi} \left(\Lambda_{\rm cut}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{\rm cut}^2}{m^2} \right) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right). \tag{2.92}$$

Zanimljivo je u ovom trenutku primijetiti kako oblik tenzora energije-impulsa nema sljedeću naivno očekivanu strukturu

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu}. \tag{2.93}$$

Tenzor (2.92) može imati oblik dan jednadžbom (2.93) jedino u slučaju da metrički tenzor zadovoljava

$$R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu} R. \tag{2.94}$$

Taj uvjet je, za homogene prostore, zadovoljen jedino za prostore Minkowskog i de Sittera. Ako smo krenuli od Einstein-Hilbert djelovanja za gravitaciju s kozmološkom konstantom Λ dodavanjem efektivnog djelovanja (2.89) ukupno imamo

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{GN\tilde{\xi}}{\pi} \left(\Lambda_{\text{cut}}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{\text{cut}}^2}{m^2} \right) R - 2\Lambda \right], \tag{2.95}$$

Ovaj rezultat možemo formalno ponovno napisati u obliku polaznog djelovanja

$$S = \frac{1}{16\pi G_{\text{eff}}} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda_{\text{eff}} \right). \tag{2.96}$$

Na taj smo način uveli efektivne Newtonovu i kozmološku konstantu koje sada ovise o skali kojom smo regularizirali teoriju

$$\frac{G_{\text{eff}}}{G} = \frac{\Lambda_{\text{eff}}}{\Lambda} = \lambda, \tag{2.97}$$

gdje je uvedena pokrata

$$\lambda = \left[1 - \frac{GN\tilde{\xi}}{\pi} \left(\Lambda_{\text{cut}}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{\text{cut}}^2}{m^2} \right) \right]^{-1}. \tag{2.98}$$

Vidljivo je, dakle, da je potreba za regularizacijom izraza koji dolaze zbog kvantnih petlji, dovela do toga da djelovanje možemo napisati u standardnom obliku ali su sada gravitacijske konstante vezanja postale ovisne o regularizacijskoj skali. Ovakav pristup gdje se parametri ovisni o skali uvode već na razini djelovanja analiziran je u četvrtom poglavlju.

Promotrimo općenitiji slučaj gdje u razmatranje uključujemo i tenzor energije-impulsa materije ili tamne energije, $T_{\mu\nu}$. Ukupno onda možemo pisati $T_{\mu\nu}$ i $T_{\mu\nu}^{\text{vac}}$ koji smo izračunali u (2.92). Einsteinove su jednadžbe tada

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = \frac{GN\tilde{\xi}}{\pi} \left(\Lambda_{\text{cut}}^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda_{\text{cut}}^2}{m^2} \right) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.99}$$

Sažetije zapisano

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = -8\pi G \lambda T_{\mu\nu}. \tag{2.100}$$

Uočimo da ovu jednadžbu možemo interpretirati činjenicom da je G ovisan o skali (2.97). Upravo ćemo ovaj pogled usvojiti u poglavlju u kojem ćemo opisivati metodu određivanja skale na razini jednadžbi gibanja. Koristit ćemo klasične jednadžbe gibanja ali ćemo dopustiti da gravitacijski parametri ovise o skali.

Što dobijemo izaberemo li gornju granicu integracije reda m_{Pl} ? Ovaj je izbor često korišten u literaturi stoga što Planckova skala na neki način predstavlja skalu na kojoj očekujemo da učinci kvantne gravitacije postanu važni. Kako ovdje radimo u formalizmu kvantne teorije polja, ali u klasičnom pozadinskom prostor-vremenu, ta je granica prikladna. Pri tome ćemo dodatno pretpostaviti oblik tenzora energije-impulsa

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \tag{2.101}$$

To ima za posljedicu da su u sugibajućim koordinatama gustoća energije i tlak

$$\rho = \langle T^0{}_0 \rangle, \tag{2.102}$$

$$p = \frac{1}{3}\langle T^0_0 - T^\mu{}_\mu \rangle. \tag{2.103}$$

Odabirom prostorno ravne FRW metrike dobijemo

$$\rho_{\rm vac} = -\frac{3N\Lambda_{\rm cut}}{32\pi^2}\frac{\dot{a}^2}{a^2}\,, \tag{2.104}$$

$$p_{\rm vac} = \frac{N\Lambda_{\rm cut}}{32\pi^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a}\right). \tag{2.105}$$

Za gornju granicu reda veličine $m_{\rm Pl}/\sqrt{N}$, vrijednost vodećeg doprinosa gustoći energije jest $H^2 m_{\rm Pl}^2$, gdje je $H = \dot{a}/a$ Hubbleov parametar. Identificiramo li H s današnjom vrijednosti, doprinos kozmološkoj konstanti je fenomenološki prihvatljivog reda veličine i ne zahtijeva fino podešavanje. S druge strane doprinos gustoći energije je negativan te je nemoguće ovim modelom objasniti kozmološku konstantu bez dodatnih pozitivnih doprinosa gustoći energije.

2.2 Ovisnost parametara o skali, MS shema renormalizacije

Najvažnija je poruka prethodnog odjeljka činjenica da se kroz regularizaciju integrala pri računu efektivnog djelovanja u teoriju uvodi proizvoljna skala. Vidjeli smo kako je rezultirajuće djelovanje (2.95) i jednadžbe gibanja (2.99) moguće interpretirati pomoću klasičnih izraza uz uvođenje ovisnosti gravitacijskih parametara o navedenom regulatoru. Na tom se zapažanju temelje istraživanja opisana u ovoj disertaciji.

U nastavku izlaganja pogledat ćemo na koji način parametri ovise o skali ako se koristi MS (*minimalna suptrakcija*) shema renormalizacije. U nalaženju odgovora vodimo se procedurom iznesenom u prethodnom odjeljku gdje smo već prikazali kako se za skalarna i fermionska polja dolazi do divergentnih izraza u efektivnom djelovanju koji zahtijevaju regularizaciju. Komentirat ćemo i jednu suptilnost u odnosu na pojavu (ne)razvezivanja masivnih stupnjeva slobode koja utječe na oblik tih ovisnosti. Rezultati ovog odjeljka koriste se u nastavku disertacije kada se pozivamo na primjenu formalizma kvantne teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu.

Prvotna razmatranja vezana za MS shemu renormalizacije efektivnog djelovanja zasnivala su se na sljedećim zapažanjima [42, 43]. U okviru standardnog modela prisutan je dublet kompleksnih skalarnih polja Φ. Neka je očekivana vrijednost polja u osnovnom stanju

$$\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle = \frac{1}{2}\phi^2. \tag{2.106}$$

Ovdje ϕ predstavlja klasično skalarno polje. Odgovarajući klasični potencijal je

$$V_{cl} = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{8}\phi^4. \tag{2.107}$$

Fizikalna masa Higgsovog bozona je $M_H = \sqrt{2}m$ te minimizacijom potencijala slijedi

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}} = v, \\ \lambda &= \frac{M_H^2}{v^2}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Ovime je doprinos kozmološkoj konstanti kojeg se naziva induciranim doprinosom

$$\rho_{\Lambda,ind} = \langle V_{cl} \rangle = -\frac{m^4}{2\lambda}. \tag{2.109}$$

S druge strane ukupni je doprinos

$$\rho_{\Lambda,fiz} = \rho_{\Lambda,ind} + \rho_{\Lambda,vac}\,, \tag{2.110}$$

gdje $\rho_{\Lambda,vac}$ dolazi od vakuumskih doprinosa polja te je određen izgledom efektivnog djelovanja kojeg smo prethodno opisali na primjeru skalara i fermiona. Ponašanje tih doprinosa sa promjenom renormalizacijske skale za, na primjer, Higgsov dublet i fermione, ovdje uz upotrebu MS sheme renormalizacije, ima sljedeći oblik

$$(4\pi)^2 \frac{d\rho_{\Lambda,vac}}{dt} = \beta_{\rho_\Lambda} = 2m^4 - 2\sum_i N_i m_i^4\,, \tag{2.111}$$

gdje je $t = \ln \mu/\mu_0$, a m_i su mase fermiona. Ponašanje induciranog doprinosa nalazi se korištenjem jednadžbi renormalizacijske grupe za masu skalara i konstantu vezanja λ

$$\begin{aligned} (4\pi)^2 \frac{dm^2}{dt} &= m^2\left(6\lambda - \frac{9}{2}g^2 - \frac{3}{2}g'^2 + 2\sum_{i=q,l} N_i h_i^2\right), \quad m^2(0) = m_F^2, \\ (4\pi)^2 \frac{d\lambda}{dt} &= 12\lambda^2 - 9\lambda g^2 - 3\lambda g'^2 \\ &+ \frac{9}{4}g^4 + \frac{3}{2}g^2 g'^2 + \frac{3}{4}g'^4 \\ &+ \frac{3}{4}g'^4 + 4\sum_{i=q,l} N_i h_i^2(\lambda - h_i^2), \qquad \lambda(0) = \lambda_F\,. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Ovdje h_i predstavlja Yukawa vezanja fermiona u standardnom modelu, a g i g' su vezanja baždarnih grupa $SU(2)_L$ i $U(1)_Y$ respektivno. Za inducirani doprinos vrijedi

$$\frac{d\rho_{\Lambda,ind}}{dt} = \frac{m^4}{2\lambda^2}\frac{d\lambda}{dt} - \frac{m^2}{\lambda}\frac{dm^2}{dt} = -\frac{2}{(4\pi)^2}\sum_j m_j^4\,. \tag{2.113}$$

Mase polja prisutnih u modelu određuju β funkcije. Daljnja su se razmišljanja vodila primjenom Appelquist-Carazzone teorema [73] o razvezivanju masivnih stupnjeva slobode prema kojem se očekuje da su na nižim energijama njihovi doprinosi β funkciji potisnuti te ne utječu na njen oblik. Dakle, ako se promatraju učinci masivnih polja na niskoj energiji ($\mu \ll m$), što je od osobitog interesa u kozmološkom kontekstu, naivnom primjenom Appelquist-Carazzone teorema za β funkciju vakuumskog doprinosa slijedi

$$(4\pi)^2 \frac{d\rho_{\Lambda,vac}}{dt} = \beta_\Lambda = -2 \sum_i N_i m_i^4 \,, \tag{2.114}$$

Ukupni je doprinos

$$\frac{d\rho_{\Lambda,vac}}{dt} \quad = \quad \beta_\Lambda = -\frac{4}{(4\pi)^2} \sum_i N_i m_i^4 \,, \tag{2.115}$$

uz pretpostavku

$$\rho_\Lambda(0) \quad = \quad \rho_{\Lambda,fiz}(IR) = 0 \,. \tag{2.116}$$

Prisutni su samo doprinosi polja za koje ne vrijedi uvjet ($\mu \ll m_i$). Stoga su na počecima ovih istraživanja, na niskim, kozmološkim energijskim skalama, kao jedine moguće masivne čestice koje doprinose β funkciji razmatrani neutrini. Kako bi se promijenio pogrešan predznak gornje relacije koji je u suprotnosti s mjerenjima pretpostavljeno je postojanje dodatnog, jako laganog, skalarnog polja čije bi postojanje rezultiralo izrazom

$$(4\pi)^2 \frac{d\rho_{\Lambda,vac}}{dt} = \beta_\Lambda = \frac{1}{2} m_S^4 - 2 \sum_i N_i m_i^4 \,, \tag{2.117}$$

Zaključeno je da na niskim energijama dominantni doprinos vakuumskom dijelu kozmološke konstante dolazi od lakih fermionskih stupnjeva slobode ili od nekog novog, lakog, skalarnog polja [42, 43].

No, u slučaju kozmološke konstante treba biti pažljiv s primjenom Appelquist-Carazzone teorema, a razlog tome je, kao što je primijećeno u radu [44], njena dimenzionalnost. Razmatranjem pojednostavljenog modela sa samo dva skalarna polja masa m i $M \gg m$ dolazimo do sljedeće β funkcije

$$(4\pi)^2 \mu \frac{\partial \rho_\Lambda(\mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{2} M^4 + \frac{1}{2} m^4 \,, \tag{2.118}$$

za slučaj kada je skala $\mu \gg M, m$. Međutim za vrijednosti skale $m \ll \mu \ll M$ očekivali bismo razvezivanje teškog skalara zbog potisnuća koje je određeno faktorom μ^2/M^2 te za kozmološku konstantu slijedi

$$(4\pi)^2 \mu \frac{\partial \rho_\Lambda(\mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{2} a \frac{\mu^2}{M^2} M^4 + \frac{1}{2} m^4 \,. \tag{2.119}$$

gdje se očekuje da je a broj $\mathcal{O}$ (1). Primjećujemo da za kozmološku konstantu ne dolazi do uobičajenog razvezivanja s obzirom na činjenicu da je

$$\mu^2 M^2 \gg m^4 \,. \tag{2.120}$$

Kako bismo, dakle, ispravno tretirali kozmološku konstantu moramo uzeti u obzir da najveći doprinos β funkciji dolazi od težih stupnjeva slobode čak i na niskim energijama. Za standardni model dobije se

$$\begin{aligned}(4\pi)^2\mu\frac{d\rho_\Lambda}{d\mu} &= -2\sum_i N_i m_i^4\frac{\mu^2}{\mu^2+m_i^2}+3m_W^4\frac{\mu^2}{\mu^2+m_W^2}\\ &+ \frac{3}{2}m_Z^4\frac{\mu^2}{\mu^2+m_Z^2}+\frac{1}{2}m_H^4\frac{\mu^2}{\mu^2+m_H^2}.\end{aligned}\tag{2.121}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}(4\pi)^2(\rho_\Lambda(\mu)-\rho_\Lambda(0)) &= \sum_i N_i m_i^4\ln\frac{m_i^2}{\mu^2+m_i^2}-\frac{3}{2}m_W^4\ln\frac{m_W^2}{\mu^2+m_W^2}\\ &- \frac{3}{4}m_Z^4\ln\frac{m_Z^2}{\mu^2+m_Z^2}-\frac{1}{4}m_H^4\ln\frac{m_H^2}{\mu^2+m_H^2}.\end{aligned}\tag{2.122}$$

Na niskim energijama možemo razviti logaritme što daje

$$\begin{aligned}(4\pi)^2(\rho_\Lambda(\mu))-\rho_\Lambda(0)) &= \frac{1}{4}\mu^2\left[m_H^2+3m_Z^2+6m_W^2-4\sum_i N_i m_i^2\right]\\ &+ \mu^4\left[\frac{1}{2}\sum_i N_i-\frac{5}{4}\right]+\mathcal{O}\left(\frac{\mu^6}{M^2}\right),\end{aligned}\tag{2.123}$$

te vidimo da ni za standardni model ne dolazi do naivno očekivanog razvezivanja teških stupnjeva slobode. Možemo za vakuumski doprinos kozmološkoj konstanti općenito napisati

$$(4\pi)^2\frac{d\rho_{\Lambda,vac}}{dt}=\sum_i a_i m_i^4+\sum_j b_j\mu^2 M_j^2,\tag{2.124}$$

gdje m_i predstavlja mase lakih, M_j mase teških stupnjeva slobode, a a_i i b_j su brojevi.

Vratimo se na relaciju za ukupnu kozmološku konstantu

$$\rho_{\Lambda,fiz}(\mu_c)=\rho_{\Lambda,ind}(\mu_c)+\rho_{\Lambda,vac}(\mu_c),\tag{2.125}$$

Ovdje smo naznačili činjenicu da kozmološku konstantu mjerimo na nekoj fizikalnoj skali μ_c koja je relevantna za kozmologiju. Kako bismo definirali vakuumski doprinos možemo razmišljati na sljedeći način [43],

$$\rho_{\Lambda,vac}(\mu_c)=\rho_{\Lambda,fiz}(\mu_c)-\rho_{\Lambda,ind}(\mu_c).\tag{2.126}$$

Dakle, renormalizacijski uvjet određen je mjerenjem fizikalne kozmološke konstante koja je, na zasad neodređenoj kozmološkoj skali, reda veličine ρ_c^0 to jest $10^{-47}GeV^4$. Zatim je nužno odrediti inducirani doprinos na toj istoj skali. Ovdje je važno primijetiti kako je drugi član gornje jednadžbe definiran na dramatično različitoj skali od kozmološke na kojoj opažamo mjerenu vrijednost ukupne kozmološke konstante, naime na Fermijevoj skali.

U nastavku ćemo vidjeti kako korištenje različitih kvalitativnih identifikacija fizikalne skale koja odražava ovisnost o proizvoljnoj skali može upućivati na različite fizikalne posljedice. Diskutirane su dvije mogućnosti.

$$\mu \sim H(t),\tag{2.127}$$

$$\mu \sim \rho_c^{1/4}. \tag{2.128}$$

Dakle, u jednom je slučaju skala identificirana s Hubbleovim parametrom, a u drugom s kritičnom gustoćom svemira

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \,. \tag{2.129}$$

Ovdje jasno možemo uočiti kako se kvalitativno različiti izbori mogu znatno razlikovati, prva je skala u današnjem svemiru $\sim 10^{-42}GeV$ dok je iz druge definicije skala danas $\sim 10^{-12}GeV$. Na fiziku se odražavaju dva izbora: izbor skale te (ne)uvažavanje razvezivanja teških stupnjeva slobode (2.124). U [43] to je zorno predočeno na primjeru nukleosinteze. U tom periodu evolucije svemira očekujemo da gustoća materije $\rho = \rho_M + \rho_R$ koja je u osnovi tada dominirana gustoćom energije zračenja ρ_R bude značajno veća od $\rho_{\Lambda,fiz}$ ($\rho \gg \rho_{\Lambda,fiz}$), kako ne bi bila narušena nukleosinteza. Za vrijeme nukleosinteze gustoća energije je u rasponu vrijednosti

$$10^{-16}GeV^4 \leq \rho_R \leq 10^{-8}GeV^4. \tag{2.130}$$

Zanemarimo na trenutak pitanje razvezivanja teških stupnjeva slobode te za skalu odaberimo (2.128) što je u zračenjem dominiranoj epohi ekvivalentno izboru $\mu \sim T$. Uz ovaj izbor skale vrijednost $\rho_{\Lambda,fiz}$ je zaista puno manja od (2.130) te nema narušenja nukleosinteze. No, uvažimo li sada (2.124) lako može doći do neželjenog rezultata koji bi u probleme doveo nukleosintezu. Za izbor (2.127) ni uvažavanje relacije (2.124) nije u sukobu sa nukleosintezom, te je zaključeno kako je zbog toga izbor (2.127) povoljniji za primjenu u kozmologiji.

Osim ovisnosti kozmološke konstante o skali moguće je promatrati i ovisnost Newtonove konstante o skali. Renormalizacijski uvjet u ovom je slučaju nužno nametnuti na skali na kojoj su dostupna mjerenja Newtonove konstante, to jest na skali Cavendishovih eksperimanata ($\sim 1mm = 5100eV^{-1}$). Inducirana je vrijednost

$$\frac{1}{16\pi G_{ind}} = -\frac{\xi m^2}{f}. \tag{2.131}$$

Postoji i vakuumski doprinos te je ukupna, fizikalna vrijednost, koju možemo mjeriti

$$G_{fiz}^{-1}(\mu_c) = G_{ind}^{-1}(\mu_c) + G_{vac}^{-1}(\mu_c). \tag{2.132}$$

U slučaju Newtonove konstante dodatni problem predstavlja i nepoznavanje parametra ξ te je nejasno na koji način odabrati njegovu vrijednost na bilo kojoj skali jer nikad ne opažamo G_{ind} nego samo G_{fiz}. Za razliku od same vrijednosti parametra ξ jednadžba koja opisuje ovisnost ovog parametra o skali je (za standardni model) poznata i dana izrazom

$$\begin{aligned}(4\pi)^2\frac{d\xi}{dt} &= \left(\xi - \frac{1}{6}\right)\left(6f - \frac{9}{2}g^2 - \frac{3}{2}g'^2 + 2\sum_i N_i h_i^2\right), \\ \xi(0) &= \xi_0. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Promotrimo sada nezavisne doprinose skaliranju induciranog i vakuumskog doprinosa Newtonovoj konstanti

$$\begin{aligned} (4\pi)^2 \frac{d}{dt}\frac{1}{16\pi G_{vac}} &= 4m^2\left(\xi - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3}\sum_i N_i m_i^2, \\ G_{vac}(0) &= G_0. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Vrijednost G_0 određena je renormalizacijskim uvjetom (2.132). Pri tome vrijedi

$$\xi(t) - \frac{1}{6} = \left(\xi_0 - \frac{1}{6}\right)U(t), \tag{2.135}$$

gdje je

$$U(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{dt}{(4\pi)^2}\left[6f(t) - \frac{9}{2}g^2(t) - \frac{3}{2}g'^2(t) + 2\sum_i N_i h_i^2(t)\right]\right\}. \tag{2.136}$$

Rješenje (2.134) je

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi G_{vac}(t)} &= \frac{1}{16\pi G_0} + \frac{4}{(4\pi)^2}m_F^2\left(\xi_0 - \frac{1}{6}\right)\int_0^t U^2(t)dt \\ &- \frac{1}{3(4\pi)^2}\sum_i N_i \int_0^t m_i^2(t)dt\,. \end{aligned} \tag{2.137}$$

Inducirani se doprinos sa skalom mijenja u skladu s relacijom

$$-\frac{1}{16\pi G_{ind}(t)} = \left[\frac{1}{6} + \left(\xi_0 - \frac{1}{6}\right)U(t)\right]m_F^2 U(t) f^{-1}(t)\,. \tag{2.138}$$

Naravno, ono što nas uistinu zanima je skaliranje ukupne Newtonove konstante, te ga sada poznavanjem obaju doprinosa možemo izraziti relacijom

$$\begin{aligned} - & \frac{1}{16\pi G_{fiz}(t)} = -\frac{1}{16\pi G_0} + \left[\frac{1}{6} + \left(\xi_0 - \frac{1}{6}\right)U(t)\right]m_F^2 U(t) f^{-1}(t) \\ - & \frac{4}{(4\pi)^2}m_F^2\left(\xi_0 - \frac{1}{6}\right)\int_0^t U^2(t)dt + \frac{1}{3(4\pi)^2}\sum_i N_i \int_0^t m_i^2(t)dt\,. \end{aligned} \tag{2.139}$$

Ovaj rezultat sugerira zanemarivu promjenu Newtonove konstante sa skalom jer je skaliranje proporcionalno $m_F^2 \sim 10^5\ GeV^2$, dok je vrijednost fizikalne Newtonove konstante $G_{fiz}^{-1} \sim 10^{38}\ GeV^2$. Stoga, ni za jednu od identifikacija fizikalne skale (2.127) i (2.128) ne dolazi do narušavanja nukleosinteze.

Analiza budućnosti svemira zasnovana na izboru skale $\mu = \rho^{1/4}$ uz primjenu (2.122) iznesena je u radu [45]. Ovaj odabir rezultira mogućnošću da svemir, iako danas ima pozitivnu kozmološku konstantu neće u budućnosti biti u de Sitter režimu te da uprkos postojanju maksimalne vrijednosti faktora skale neće nikada nanovo kolabirati.

Uvažavanjem činjenice da za kozmološku konstantu ne vrijedi naivna primjena Applequist-Carazzone teorema te da vrijedi relacija (2.124) u kasnijim radovima [46, 55] razmatrana je i mogućnost utjecaja fizike na visokim energijama (na skali velikog ujedinjenja $\sim 10^{16-17}\ GeV$ ili na Planckovoj skali $\sim 10^{19}\ GeV$) na ponašanje gravitacijskih parametara na niskim energijama. Rad [55] detaljno izučava takav scenarij gdje je pored promjenjive kozmološke konstante i Newtonova konstanta tretirana kao parametar koji ovisi o skali. Najviše su razmatrane posljedice po kozmologiju, ali se u ovom radu pažnja posvećuje i mogućim posljedicama na astrofizikalne sustave. Skala je u ovim analizama, za kozmološke primjene, identificirana sa Hubbleovim parametrom $\mu = H$. Korištenjem FRW linijskog elementa te modeliranjem svemira kao savršenog fluida jednadžbe gibanja rezultiraju Friedmannovom jednadžbom te jednadžbom za faktor skale. Bianchijevi identiteti nalažu (vidjeti dodatak A)

$$\nabla^{\mu}\left(G\tilde{T}_{\mu\nu}\right) = 0\,. \tag{2.140}$$

Ako želimo zasebno očuvanje tenzora energije-impulsa $\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0$, te uz ovisnost kozmološke konstante o vremenu (kroz ovisnost o odabranoj skali) razmatramo i ovisnost Newtonove konstante o vremenu dobit ćemo diferencijalnu jednadžbu

$$(\rho + \rho_{\Lambda})\dot{G} + G\dot{\rho}_{\Lambda} = 0\,. \tag{2.141}$$

Ovisnost $\Lambda(t)$ je predložena u obliku $\Lambda = \Lambda(H)$ te je zatim istraživan mogući oblik ovisnosti Newtonove konstante u obliku $G(H)$. Za β funkcije kozmološke i Newtonove konstante usvojene su generičke relacije

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{d\ln\mu} &= \sum_n A_n \mu^{2n}\,, \\ \frac{d}{d\ln\mu}\left(\frac{1}{G}\right) &= \sum_n B_n \mu^{2n}\,, \end{aligned} \tag{2.142}$$

koje su motivirane prethodno diskutiranim specifičnostima razvezivanja teških stupnjeva slobode u slučaju kozmološke konstante. Ovdje su dakle β funkcije izražene preko masa te omjera skale μ i samih masa. Pogodno je odmah zapisati i općeniti integrirani oblik ovih relacija

$$\begin{aligned} \Lambda(\mu) &= \sum_n C_n \mu^{2n}\,, \\ \frac{1}{G(\mu)} &= \sum_n D_n \mu^{2n}\,. \end{aligned} \tag{2.143}$$

Koeficijenti A_n, B_n, C_n, D_n sadrže sumu doprinosa polja različitih masa M_i. Vodeći član bi u načelu mogao biti M^4. No, kako pročavamo fiziku na skalama μ, u duhu efektivnih teorija ti stupnjevi slobode koji su masivniji od razmatrane energijske skale doprinose samo kroz učinke određene omjerom μ^2/M^2. Isto tako, postojanje takvih doprinosa je jako problematično i sa fenomenološkog stajališta budući da bi ih bilo nemoguće staviti u kontekst mjerenih vrijednosti kozmološke konstante. Korištenjem specifičnog oblika generičke jednadžbe (2.142) za kozmološku konstantu predloženog u radu [46]

$$\beta_\Lambda \approx \frac{1}{(4\pi)^2}\sigma M^2\mu^2 + \dots\,, \tag{2.144}$$

moguće je iz Bianchi identiteta doći do oblika ovisnosti Newtonove konstante. Ovdje je M efektivni maseni parametar koji uključuje mase stupnjeva slobode na visokim energijama,

$$M = \left|\sum_i c_i M_i\right|^{1/2}, \tag{2.145}$$

a $\sigma = \pm 1$ određuje predznak β funkcije ovisno o tome prevladavaju li, u spektru masa, na visokim energijama fermionski ($\sigma = -1$) ili bozonski ($\sigma = 1$) stupnjevi slobode. Integracijom jednadžbe (2.144) slijedi

$$\rho_\Lambda(\mu) = C_0 + C_1\mu^2\,. \tag{2.146}$$

Koeficijenti C_0 i C_1 su

$$\begin{aligned} C_0 &= \rho_{\Lambda_0} - \frac{3\nu}{8\pi}M_P^2\mu_0^2\,,\\ C_1 &= \frac{3\nu}{8\pi}M_P^2\,. \end{aligned} \tag{2.147}$$

Parametar ν predstavlja omjer neke velike masene skale i Planckove skale

$$\nu = \frac{\sigma}{12\pi}\frac{M^2}{M_P^2}\,. \tag{2.148}$$

Za navedeni izbor skale $\mu = H$, primjenom odabranog oblika β funkcije (2.144), slijede, korištenjem Bianchi identiteta te Friedmannove jednadžbe, izrazi

$$\begin{aligned} \rho + \rho_\Lambda &= \frac{3H^2}{8\pi G}\,,\\ \rho_\Lambda &= C_0 + C_1 H^2\,,\\ (\rho &+ \rho_\Lambda)dG + Gd\rho_\Lambda = 0\,. \end{aligned} \tag{2.149}$$

Ovaj nam sustav omogućuje izračunati ovisnost Newtonove konstante o skali $\mu = H$ za koju se ispostavlja da je jednaka

$$G(H;\nu) = \frac{G_0}{1 + \nu\ln(H^2/H_0^2)} \tag{2.150}$$

Izbor $\mu = H$ se čini pogodnim u kozmološkim razmatranjima, no međutim, nije jedini mogući, a osim toga u okviru istog formalizma možda želimo razmatrati i drugačije fizikalne sustave. Stoga želimo na najjednostavniji način poopćiti relaciju (2.150) te možemo pisati

$$G = G(\mu;\nu) = \frac{G_0}{1 + \nu\ln(\mu^2/\mu_0^2)}\,. \tag{2.151}$$

Polazeći od ovog izraza u radu [55] iznesena je ideja o mogućoj primjeni ovisnosti Newtonove konstante o skali na problem rotacijskih krivulja galaksija. Pri tome je za početne kvalitativne analize odabrana skala $\mu = \kappa/r$ gdje je κ bezdimenzionalna konstanta, a r radijalna udaljenost. Galaksija se zbog jednostavnosti tretira kao sferična distribucija mase. Obično se prisutnost tamne materije opisuje uvođenjem raspodjele gustoće, naprimjer

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}\,, \tag{2.152}$$

gdje je r_0 neka karakteristična duljina vidljivog dijela galaksije. Slijedi

$$\mathcal{M} = \int_{r \gg r_0} d^3 r \rho(r) \propto r\,, \tag{2.153}$$

što vodi na izraz za brzinu

$$v = \sqrt{\frac{G\mathcal{M}(r)}{r}} \to konst\,. \tag{2.154}$$

Za analizu problema rotacije galaksija iz ovisnosti Newtonove konstante o skali (2.151) za odabranu skalu $\mu = \kappa/r$, polazi se od djelovanja

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R}{16\pi G(r)}\,. \tag{2.155}$$

Primjenom metoda konformne simetrije može se iz $g_{00} = 1+2\Phi$ komponente metričkog tenzora dobiti

$$\Phi(r) = -G_0 \frac{\mathcal{M}}{r} + \nu \left(1 - 2G_0 \frac{\mathcal{M}}{r}\right) \ln \frac{r}{r_0}\,. \tag{2.156}$$

Odgovarajuća je sila u tom slučaju

$$F(r) = -\frac{d\Phi}{dr} = -(1-2\nu) G_0 \frac{\mathcal{M}}{r^2} - \nu \left(\frac{1}{r} + G_0 \frac{\mathcal{M}}{r} \ln \frac{r^2}{r_0^2}\right)\,. \tag{2.157}$$

Izjednačavanje ove sile s centripetalnom silom $-v^2/r$, uz zanemarivanje članova $\mathcal{O}(1/r^2)$ na velikim udaljenostima vodi na konstantnu brzinu rotacije pri čemu je potrebna vrijednost parametra $\nu \sim 10^{-6}$.

Pogledajmo posljedice ovisnosti parametara o skali za drugačiju identifikaciju skale. Na sljedećih nekoliko stranica prezentirat ćemo istraživanje koje su proveli Rodrigues, Letelier i Shapiro [1]. Oni su korištenjem ideje o ovisnosti konstanti vezanja gravitacije o skali proučavali moguće učinke na problem rotacije galaksija, ali uz realističniji opis galaksije od prethodno navedenog te korištenjem sljedeće identifikacije skale

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{\Phi_{Newt}}{\Phi_0}\right)^{\alpha}. \tag{2.158}$$

Ispostavilo se da ovim pristupom mogu dobiti rezultate koji su jednako dobri ili bolji u objašnjavanju izgleda rotacijskih krivulja galaksija u usporedbi s rezultatima modela koji zahtijevaju postojanje tamne materije (Izotermalni model), modificirane newtonovske dinamike ili pak

STVG teorije gravitacije. Ovaj je rad zbog tih rezultata jako važan za motivaciju istraživanja koji su središnji dio ove disertacije jer su rezultati u njemu dobiveni najvećim dijelom posljedica izbora fizikalne skale o kojoj ovise gravitacijski parametri. Taj je izbor u spomenutom radu načinjen u određenoj mjeri proizvoljno, odnosno korištenjem kvalitativnih argumenata. Kako bi se predviđanja teorije uz neki drugi izbor skale možda i značajno razlikovala od ovih, postaje važno na sustavan način utvrditi opravdanost ovakvog izbora. Nakon što ovdje predstavimo zaključke istraživanja prethodno spomenutog rada, iznijet ćemo u narednim poglavljima sustavnu proceduru kojoj je glavni cilj naći uvjet konzistentnosti izbora skale u raznim fizikalnim kontekstima upotrebom ovisnosti parametara o skali na razini jednadžbi gibanja kao i na razini djelovanja. Što se same identifikacije skale (2.158) tiče ona je motivirana razmišljanjem da bi fizikalna skala trebala direktno odražavati intenzitet gravitacijskog polja što za identifikaciju $\mu \sim 1/r$ nije slučaj. Isto tako, s gledišta kvantne teorije polja očekuje se da skala na neki način odražava energiju gravitacijskog polja što je dovelo do napuštanja identifikacije $\mu \sim 1/r$ kao primjerene identifikacije koja ispunjava taj zahtjev. U izrazu (2.158) Φ_0 i α su parametri, gdje se očekuje da parametar α na neki način odražava masu razmatranog sustava.

Kakve su posljedice po dinamiku čestica u ovakvom scenariju uz blagu varijaciju parametra G? Općenito ako G jako malo odsupa od G_0 i blago ovisi o koordinatama prostora-vremena x^i u najnižem redu po ν možemo uzeti

$$G\frac{\partial G}{\partial x^i} \approx G_0\frac{\partial G}{\partial x^i}\,. \tag{2.159}$$

Za opis gravitacije se koristi Einstein-Hilbert djelovanje. Kako se radi o astrofizikalnom kontekstu, kozmološku konstantu se zanemaruje. Traži se, zatim, jednadžba gibanja testne čestice u teoriji s promjenjivim G i to u nerelativističkoj aproksimaciji. Činjenicu da se radi o malim varijacijama G iskazuje se ovako

$$G = G_0 + \delta G = G_0(1+\kappa), \qquad |\kappa| \ll 1\,. \tag{2.160}$$

Parametar ν je mala veličina te se u izrazima može koristiti samo prvi član razvoja u ν, a isto vrijedi i za parametar $\kappa = \delta G/G_0$. Korekcije gravitacijskom potencijalu nalaze se sljedećim postupkom. Najprije se konformno reskalira metrika

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{G_0}{G}g_{\mu\nu} = (1-\kappa)g_{\mu\nu}\,. \tag{2.161}$$

Metrika $\bar{g}_{\mu\nu}$, uz zanemarivanje viših redova u κ, zadovoljava uobičajenu Einsteinovu jednadžbu s konstantnim G_0. Nerelativistički limesi komponenti metričkih tenzora su

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1+2\Phi\,, \\ \bar{g}_{00} &= 1+2\Phi_{Newt}\,. \end{aligned} \tag{2.162}$$

Φ_{Newt} je uobičajeni newtonovski potencijal dok je Φ potencijal koji odgovara rješenju modificirane teorije gravitacijskog međudjelovanja. Vrijedi

$$g_{00} = 1 + 2\Phi = (1+\kappa)\bar{g}_{00} = (1+\kappa)(1+2\Phi_{Newt}) \approx 1 + 2\Phi_{Newt} + \kappa\,, \tag{2.163}$$

iz čega dalje slijedi

$$\Phi = \Phi_{Newt} + \frac{\kappa}{2} = \Phi_{Newt} + \frac{1}{2}\frac{\delta G}{G_0}\,, \tag{2.164}$$

te je, u nerelativističkoj granici

$$-\Phi^{,i} = -\Phi^{,i}_{Newt} - \frac{1}{2}\frac{G^{,i}}{G_0}\,. \tag{2.165}$$

Odavde slijedi jednadžba kojom je dana akceleracija u modificiranoj teoriji

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\Phi^{,i}_{Newt} - \frac{1}{2}\frac{G^{,i}}{G_0}\,. \tag{2.166}$$

Za aksijalno simetrični sustav iz gornje jednadžbe može se vidjeti da je, za sustav čija je radijalna koordinata R, brzina rotacije dana izrazom

$$V^2 \approx V^2_{Newt} + R\frac{1}{2}\frac{G_{,R}}{G_0}\,. \tag{2.167}$$

Ako na trenutak vratimo jedinice i napišemo

$$V^2 \approx V^2_{Newt} + R\frac{c^2}{2}\frac{G_{,R}}{G_0}\,, \tag{2.168}$$

možemo vidjeti kako je ustvari udio brzine svjetlosti koji se dodaje newtonovskoj brzini izražen bezdimenzionalnim omjerom

$$R\frac{1}{2}\frac{G_{,R}}{G_0}\,. \tag{2.169}$$

Jasno je odavde da su i male varijacije gravitacijske konstante vezanja dovoljne za stvaranje znatnih odstupanja od newtonovskog rezultata. Nadalje za ovisnost o skali izraženu jednadžbom (2.151) prethodni izraz poprima oblik

$$V^2 \approx V^2_{Newt} - \nu c^2 R\frac{1}{2}\frac{\mu_{,R}}{\mu}\,. \tag{2.170}$$

Ova je relacija središnji izraz kojim su se autori služili pri modeliranju rotacijskih krivulja uzorka galaksija. Usporedbom sa ostalim pristupima, ovako dobiveni rezultati su u najmanju ruku jednako dobri.

Ovaj uspjeh zajedno s rezultatima procedure određivanja skale u astrofizikalnom okruženju koju ćemo predstaviti u trećem poglavlju, a koja pruža čvršće temelje za gornji izbor skale, čime je ovaj pristup dodatno osnažen, potaknuo je i neka daljnja istraživanja koja u okviru ovog formalizma proučavaju eliptične galaksije [77, 78]. U navedenim je radovima, na primjeru dvije eliptične galaksije, pokazano da ovakav pristup može uspješno objasniti opaženu raspodjelu brzina zvijezda u tim galaksijama. I u ovom slučaju pokazano je da su ovako dobiveni rezultati jednako dobri, a u nekim detaljima i bolji od rezultata MOND formalizma.

2.3 Usrednjeno efektivno djelovanje

U ovom odjeljku opisat ćemo drugi teorijski okvir u kojem se javlja ovisnost parametara o skali. Radi se o pristupu kvantnoj gravitaciji koji je formuliran pomoću integrala po putu što vodi na usrednjeno efektivno djelovanje kao središnji objekt od interesa. I u ovom se slučaju ovisnost parametara o skali može upotrijebiti kako bi se pokušalo objasniti prirodu nepoznatih tamnih komponenti bez uvođenja novih stupnjeva slobode.

Izložimo, prije razmatranja samog usrednjenog efektivnog djelovanja, najprije ideju koju je već davno iznio Weinberg [79]. Dobro je poznat problem nemogućnosti renormalizacije gravitacije korištenjem računa smetnje. Weinbergova se ideja sastoji u tome da, iako nije renormalizabilna u računu smetnje, gravitacija ipak može biti konačna teorija i davati konačna predviđanja ako u ultraljubičastoj granici parametri gravitacijskog djelovanja posjeduju fiksnu točku. Što to znači? Za početak označimo sva renormalizirana vezanja u teoriji sa $g_i(\mu)$ gdje je μ energijska skala na kojoj su ona definirana. Ako je masena dimenzija nekog vezanja d_i zamjenjujemo ga bezdimenzionalnim vezanjem

$$\bar{g}_i(\mu) = \mu^{-d_i} g_i(\mu) \,. \tag{2.171}$$

Pojedinu fizikalnu veličinu R tada možemo prikazati na sljedeći način

$$R = \mu^D f\left(\frac{E}{\mu}, X, \bar{g}(\mu)\right) . \tag{2.172}$$

Ovdje je D dimenzija fizikalne veličine (naprimjer $D = -2$ za udarni presjek) , E je energijska skala karakteristična za dani proces, a X su ostale fizikalne veličine koje uključuju sve omjere energija. Kako je središnja ideja primjene renormalizacijske grupe činjenica da fizikalne veličine ne ovise o izboru proizvoljne renormalizacijske točke μ, možemo izabrati $\mu = E$ te prethodna jednadžba postaje

$$R = E^D f(1, X, \bar{g}(E)) \,. \tag{2.173}$$

Možemo vidjeti kako uz skaliranje E^D ponašanje fizikalnih veličina na nekoj visokoj energiji ovisi o ponašanju bezdimenzionalnih vezanja $\bar{g}(\mu)$ kad $\mu \to \infty$. Promjena tih vezanja s promjenom renormalizacijske točke opisana je β funkcijama

$$\mu \frac{d}{d\mu} \bar{g}_i(\mu) = \beta_i(\bar{g}(\mu)) \,. \tag{2.174}$$

Svaka je teorija opisana putanjom u prostoru vezanja koja je generirana rješenjima ovih jednadžbi uz odgovarajuće početne uvjete. Da bi teorija bila slobodna od nefizikalnih singularnosti nužno je da vezanja $\bar{g}_i(\mu)$ idu u fiksnu točku g^* kad $\mu \to \infty$. Nužan uvjet da se to dogodi je

$$\beta_i(g^*) = 0 \tag{2.175}$$

te da vezanja leže na putanji koja ide u fiksnu točku. Za takve teorije kažemo da su asimptotski sigurne.

U pokušaju razmatranja Weinbergove ideje primijenjen je formalizam usrednjenog efektivnog djelovanja kod kojeg je usvojen Wilsonov pristup renormalizaciji. U svezi s tim razvijene su tehnike računa koje se ne oslanjaju na račun smetnje. Cjelokupno područje istraživanja dobilo je naziv asimptotska sigurnost gravitacije [80, 81, 82]. Kvantna teorija gravitacije koja se ovim formalizmom razmatra počiva na formulaciji gravitacije preko funkcionalnog integrala. Očekivalo se da bi ovaj pristup mogao ponuditi odgovore koji nadilaze razinu efektivne teorije te opisati gravitacijsko međudjelovanje na svim energijskim skalama kao i da teorija neće nailaziti na beskonačnosti. Pri tome je najvažnije istražiti da li je postojanje netrivijalne fiksne točke gravitacijskih konstanti vezanja moguće. Kao što je već rečeno, najvažniji objekt u ovom formalizmu jest efektivno djelovanje Γ_k koje se obično interpretira kao rezultat integriranja svih kvantnih fluktuacija koje imaju impulse veće od k. Ovdje je važno naglasiti da se pri formulaciji teorije ne razmatra fizikalno značenje veličine k [81]. Ona se tek naknadno dovodi u vezu s fizikalnim veličinama. Određivanje te veze je korak kojeg istraživanja opisana u ovoj disertaciji žele načiniti sustavnim putem uz poštivanje kovarijantnosti teorije, za razliku od korištenja kvalitativnih argumenata. Kako se dolazi do ovog efektivnog djelovanja? Može se radi jednostavnosti za početak promatrati teoriju gdje multiplet polja ϕ_A predstavlja stupnjeve slobode koji opisuju fiziku na nekoj energijskoj skali k_0. Neka je ta teorija opisana djelovanjem $S[\phi_A]$. Zatim se tom djelovanju dodaje jedan član čija je uloga potiskivanje propagacije modova polja ϕ_A impulsa manjih od k, dok na ostale modove ne utječe. Taj član je funkcija koja, također, u nekoj mjeri ima ulogu regulatora. Taj član se može ovako prikazati

$$\Delta S_k[\phi] = \int d^d q \phi_A R_k^{AB}(q^2)\phi_B \,. \tag{2.176}$$

$R_k^{AB}(q^2)$ je jezgra koja osigurava potiskivanje pojedinih modova. Zatim se formalno definira funkcional izvodnik povezanih Greenovih funkcija [3]

$$W_k[J^A] = -\log \int (\mathcal{D}\phi_A) \exp\bigg(- S[\phi_A] - \Delta S_k[\phi_A] - \int J^A \phi_A \bigg) \,. \tag{2.177}$$

Pripadajući Legendreov transformat je

$$\Gamma_k[\phi_A] = W_k[J^A] - \Delta S_k[\phi_A] - \int J^A \phi_A \,. \tag{2.178}$$

Ova veličina sada služi kako bi interpolirala kontinuirano između djelovanja S, za koje je $k = k_0$ te uobičajenog efektivnog djelovanja $\Gamma[\phi_A]$ koje je funkcional izvodnik jednočestično ireducibilnih Greenovih funkcija kada je $k = 0$. U tome se očituje sličnost s efektivnim djelo-

[3]Na sljedećih nekoliko stranica odstupamo od konvencija koje se koriste u većem dijelu ove disertacije (vidjeti dodatak A).

vanjem u Wilsonovom pristupu. Efektivno djelovanje je već na nivou drvastih dijagrama prikladno za opisivanje fizike za impulse reda k. Najopćenitiji zapis ovog djelovanja jest

$$\Gamma_k(\phi_A, g_i) = \Sigma_i g_i(k)\mathcal{O}_i(\phi_A). \tag{2.179}$$

Ovdje su g_i konstante vezanja ovisne o skali, a $\mathcal{O}_i$ su svi mogući operatori koji su sačinjeni od polja ϕ_A i njihovih derivacija, a koji su u skladu sa simetrijama teorije. Označimo li sa $t = \log(k/k_0)$, tada je ovisnost Γ_k o skali k moguće zapisati na način

$$\partial_t\Gamma_k(\phi_A, g_i) = \Sigma_i\beta_i(k)\mathcal{O}_i(\phi_A)\,. \tag{2.180}$$

Ovdje su sa β_i označene β funkcije konstanti vezanja.

$$\beta_i(g_j, k) = \partial_t g_i\,. \tag{2.181}$$

Ako su d_A i d_i kanonske dimenzije polja i konstanti vezanja, tada iz dimenzionalne analize slijedi

$$\Gamma_k(\phi_A, g_i) = \Gamma_{bk}(b^{d_A}\phi_A, b^{d_i}g_i)\,. \tag{2.182}$$

Ovdje je b realan broj. Ovo se radi kako bi se teoriju zapisalo pomoću bezdimenzionalnih polja $\tilde{\phi}_A = \phi_A k^{-d_A}$. Isto tako želimo imati i zapis preko bezdimenzionalnih konstanti vezanja $\tilde{g}_i = g_i k^{-d_i}$. Odabere li se sada b da bude jednak k^{-1} moguće je definirati sljedeći funkcional

$$\tilde{\Gamma}(\tilde{\phi}_A, \tilde{g}_i) := \Gamma_1(\tilde{\phi}_A, \tilde{g}_i) = \Gamma_k(\phi_A, g_i)\,. \tag{2.183}$$

Na sličan način mogu se skalirati i β funkcije

$$\beta_i(g_j, k) = k^{d_i}a_i(\tilde{g}_j)\,, \tag{2.184}$$

gdje $a_i(\tilde{g}_j)$ ima značenje

$$a_i(\tilde{g}_j) = \beta_i(\tilde{g}_j, 1)\,. \tag{2.185}$$

Tako se β funkcije bezdimenzionalnih konstanti vezanja mogu zapisati na sljedeći način

$$\tilde{\beta}_i(\tilde{g}_j) = \partial_t\tilde{g}_i = a_i(\tilde{g}_j) - d_i\tilde{g}_i\,, \tag{2.186}$$

iz čega je vidljivo kako one ovise o k samo implicitno preko $\tilde{g}_j(t)$. Efektivna se djelovanja za dva različita izbora k u osnovi razlikuju za integral modova polja u rasponu između tih dvaju izabranih impulsa k. Kako takve integracije ne vode na beskonačnosti β funkcije su konačne.

Odrede li se β funkcije na nekoj skali k, one su automatski određene i na bilo kojoj drugoj skali iz dimenzionalnih razmatranja. Samim time skala k_0 odnosno djelovanje koje je njome definirano (S) služe kao skup početnih uvjeta. Poznavanje β funkcija tada omogućava kretanje po putanji renormalizacijske grupe polazeći iz bilo koje početne točke u prostoru konstanti vezanja. Efektivno djelovanje Γ_k je stoga moguće dobiti integracijom duž putanje renormalizacijske grupe. Ultraljubičasto ponašanje se tada proučava uzimanjem limesa $k \to \infty$. Ako možemo provesti integraciju u tom limesu, teorija je fundamentalna. Ako pak postoji skala Λ preko koje nije moguće provesti integraciju, govorimo o efektivnoj teoriji ili teoriji sa gornjom granicom.

Konstante vezanja efektivnog djelovanja mogu se dovesti u vezu sa mjerljivim, fizikalnim veličinama. Te fizikalne veličine ovise o bezdimenzionalnim parametrima poput kuteva raspršenja i omjera energija te o bezdimenzionalnim konstantama vezanja $\tilde{g}_i$. Udarni se presjek, naprimjer može prikazati na sljedeći način

$$\sigma = k^{-2}\tilde{\sigma}(X, \tilde{g}_i)\,. \tag{2.187}$$

Ponovimo, ako ne želimo da ovakve fizikalne, mjerljive veličine divergiraju, nužno je da nijedno vezanje ne divergira u granici $t \to \infty$, jer bi to značilo da i $\tilde{\sigma}$ također divergira. Kako bi se izbjeglo ovaj problem dovoljno je da tok renormalizacijske grupe ide u fiksnu točku, to jest u točku $\tilde{g}_*$ za koju vrijedi

$$\tilde{\beta}_i(\tilde{g}_*) = 0\,, \tag{2.188}$$

i to za svaki i. Postojanje takve fiksne točke je neophodan uvjet kako bi bila ostvarena asimptotska sigurnost teorije. Za asimptotsku sigurnost važno je i još jedno svojstvo. Neka u prostoru konstanti vezanja teorije postoji skup točaka za koje tok renormalizacijske grupe utječe u fiksnu točku. Nazovimo taj skup točaka kritična površina. Ako krenemo iz točke na kritičnoj površini, tok renormalizacijske grupe će uvijek biti na toj površini te će naposljetku u ultraljubičastoj granici završiti u fiksnoj točki. Isto tako, ako u prostoru vezanja teorije krenemo iz točke koja se ne nalazi na kritičnoj površini, tok će općenito ići u beskonačnost (ili eventualno u neku drugu fiksnu točku). Tako svakako moramo zahtijevati da teorija leži na kritičnoj površini. A ono što je nezaobilazan uvjet mogućnosti predviđanja posljedica teorije je dimenzionalnost takve kritične površine koja mora biti konačna. Naime, tada je nužno eksperimentalno odrediti samo konačan broj parametara. Dakle, asimptotski sigurna teorija, kako bi mogla davati predviđanja i imati dobro ponašanje u ultraljubičastoj granici, mora biti teorija koja posjeduje fiksnu točku i konačnodimenzionalnu kritičnu površinu. Poseban slučaj asimptotski sigurne teorije je kvantna kromodinamika koja je renormalizabilna u računu smetnje, te je asimptotski slobodna. Odnosno, fiksna je točka gausijanska u kojoj konstante vezanja iščezavaju.

Pogledajmo sada na koji se način u kontekstu asimptotske sigurnosti i upotrebom usrednjenog efektivnog djelovanja može analizirati gravitacija. Krene se od razvoja

$$\Gamma_k(g_{\mu\nu}; g_i^{(n)}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_i g_i^{(n)}(k)\mathcal{O}_i^{(n)}(g_{\mu\nu})\,. \tag{2.189}$$

Ovdje je

$$\mathcal{O}_i^{(n)} = \int d^dx\sqrt{g}\mathcal{M}_i^{(n)}\,, \tag{2.190}$$

a $\mathcal{M}_i^{(n)}$ su polinomi u tenzorima zakrivljenosti i njihovim derivacijama koji sadrže $2n$ derivacija metričkog tenzora, a i označava različite operatore istog broja derivacija metričkog tenzora. Pripadajuća dimenzija $g_i^{(n)}$ jest $d_n = d - 2n$. Prva dva člana u razvoju daju Einstein-Hilbert član te kozmološku konstantu. Naime $\mathcal{M}^{(0)} = 1$, a $\mathcal{M}^{(1)} = R$. Tome odgovaraju konstante vezanja $g^{(1)} = -Z_g = -\frac{1}{16\pi G}$, i $g^{(0)} = 2Z_g\Lambda$ gdje je Λ kozmološka konstanta. Newtonova je konstanta dio Z_g koji je renormalizacija valne funkcije gravitona u lineariziranoj Einsteinovoj teoriji. Članovi koji sadrže četiri derivacije metričkog tenzora su $\mathcal{M}_1^{(2)} = C^2$ koji je kvadrat Weylovog tenzora i $\mathcal{M}_2^{(1)} = R^2$. Za njih su konstante vezanja dane inverzima koeficijenata. Nazove li ih se $2\lambda = (g_1^{(2)})^{-1}$ i $\zeta = (g_2^{(2)})^{-1}$ može se zapisati

$$\Gamma_k^{(n\leq 2)} = \int d^dx\sqrt{g}\left[2Z_g\Lambda - Z_gR + \frac{1}{2\lambda}C^2 + \frac{1}{\zeta}R^2\right]. \tag{2.191}$$

Za gravitaciju je specifično da se za razliku od drugih teorija ovdje ne može eliminirati renormalizaciju valne funkcije. Odnosno, pogodnom redefinicijom polja može se to i ovdje napraviti ali je relacija koja se dobije istovjetna relaciji koja proizlazi iz dimenzionalne analize te ne možemo istovremeno eliminirati ovisnost o k i Z_g. Odabere li se k kao jedinica mase, moguće je ovako definirati efektivno djelovanje

$$\tilde{\Gamma}(\tilde{g}_{\mu\nu};\tilde{Z}_g,\tilde{\Lambda},\ldots) = \Gamma_1(\tilde{g}_{\mu\nu};\tilde{Z}_g,\tilde{\Lambda},\ldots) = \Gamma_k(g_{\mu\nu};Z_g,\Lambda,\ldots)\,. \tag{2.192}$$

U ovim izrazima upotrijebljene su oznake

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\mu\nu} &= k^2 g_{\mu\nu}\,,\\ \tilde{Z}_g &= \frac{Z_g}{k^2} = \frac{1}{16\pi\tilde{G}}\,,\\ \tilde{\Lambda} &= \frac{\Lambda}{k^2}\,.\end{aligned} \tag{2.193}$$

Fizikalno će mjerljive veličine eksplicitno ovisiti o $\tilde{Z}_g$ te će, kako bi bili zadovoljeni uvjeti nužni za asimptotsku sigurnost teorije, morati u fiksnoj točki biti zadovoljena relacija

$$\partial_t\tilde{Z}_g = 0\,, \tag{2.194}$$

to jest mora vrijediti

$$\partial_t\tilde{G} = 0\,. \tag{2.195}$$

Kako bi se sada provjerila mogućnost da je gravitacija asimprotski sigurna teorija nužno je pokazati da postoji fiksna točka. Račun se provodi primjenom egzaktne jednadžbe renormalizacijske grupe na gravitaciju. Naime Wetterich je pokazao [83] da efektivno djelovanje definirano u (2.179) zadovoljava relaciju

$$\partial_t\Gamma_k = \frac{1}{2}STr\left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\phi_A\delta\phi_B} + R_k^{AB}\right)^{-1}\partial_t R_k^{AB}\,. \tag{2.196}$$

Ovdje STr predstavlja trag preko impulsa, čestičnih vrsta, svih internih indeksa kao i prostor-vremenskih indeksa. Ovaj izraz može se usporediti sa derivacijom jednadžbe (2.189) po t kako bi se odredile β funkcije. Efektivno djelovanje na nivou jedne petlje je

$$Tr \log \frac{\delta^2(S + \Delta S_k)}{\delta\phi\delta\phi} \,. \tag{2.197}$$

Formalno je izraz koji zadovoljava ovo efektivno djelovanje istovjetan jednadžbi (2.196) ako se zamijene konstante vezanja ovisne o skali $g_i(k)$ sa onima koje se pojavljuju u djelovanju S, odnosno sa $g_i(k_0)$. β funkcije na nivou jedne petlje su one koje se dobiju iz (2.196) gdje se zanemaruju eventualni doprinosi koji sadrže derivacije konstanti vezanja g_i. Naravno, nemoguće je naći β funkcije svih mogućih vezanja. Stoga je uobičajna procedura razmatranje *samo podskupa svih mogućih članova* u efektivnom djelovanju. Pri tome se ne može poslužiti malim parametrom nekakvog razvoja koji bi sugerirao koji članovi bi mogli biti potisnuti nego se treba voditi fizikalnim pretpostavkama.

Indikacije postojanja fiksne točke za gravitaciju koja bi je činila asimptotski sigurnom moguće je dobiti korištenjem nekoliko različitih metoda. Nijedna od njih sama za sebe ne pruža snažne i neoborive dokaze da je tome tako. No činjenica da sve one ukazuju na to ipak daje određenu nezanemarivu težinu toj tvrdnji. Jedna od metoda je takozvani $2 + \epsilon$ razvoj koji se zasniva na ideji kako je za danu teoriju netrivijalna fiksna točka posljedica postojanja asimptotski slobodne teorije (trivijalne fiksne točke) u istoj toj teoriji, ali u manjem broju dimenzija. To se i događa u nekim primjerima teorija koje ne opisuju gravitaciju, a također nisu renormalizabilne u računu smetnje. Ovakvo je razmišljanje i dio prvotnih Weinbergovih razmatranja. Teorija se analizira u dvije dimenzije. No gravitacija u dvije dimenzije nije dinamička teorija što predstavlja problem. Stoga se gravitacija razmatra u $2 + \epsilon$ dimenzija te se zatim proučava ponašanje za $\epsilon \to 0^+$. Ovi računi sugeriraju da je gravitacija asimptotski sigurna u $2 + \epsilon$ dimenzija što otvara mogućnost da postoji i netrivijalna fiksna točka u četiri dimenzije. Naznake postojanja fiksne točke dolaze i od takozvanih razvoja za veliki N [84]. Teorije čija djelovanja, osim Einstein-Hilbert člana, sadrže i članove s četvrtim derivacijama metričkog tenzora su renormalizabilne u računu smetnje i ukazuju na postojanje netrivijalne fiksne točke za Newtonovu konstantu. Ako se takvim djelovanjima doda i djelovanje za materiju s velikim brojem slobodnih polja te se načini razvoj za veliki N (gdje je N broj polja) tada su sva gravitacijska vezanja asimptotski sigurna. Simetrijska razmatranja korištenjem prikaza prostora-vremena preko dvodimenzionalnih hiperploha umjesto uobičajene podjele na trodimenzionalne hiperplohe također ukazuje na postojanje fiksne točke za gravitacijeske parametre. Također razmatranjem samo konačnog broja članova u djelovanjima koja, uz Einstein-Hilbert član te kozmološku konstantu, sadrže i potencije Riccijevog skalara dolazi se do naznaka postojanja fiksne točke te se taj zaključak ne mijenja uključivanjem slobodnih polja materije ali i nekih drugih članova viših redova u derivacijama metričkog tenzora [85].

Posljedice gornjih razmatranja na fiziku određene su kao i u slučaju kvantne teorije polja u klasičnom zakrivljenom prostor-vremenu identifikacijom parametra k s fizikalnim energijskim skalama. Neke rezultate koji proizlaze iz određenih proizvoljnih identifikacija opisat ćemo u nastavku ovog odjeljka.

Postojanje ultraljubičaste fiksne točke glavna je vodilja rada [86] koji se bavi popravkama Einsteinovim jednadžbama gibanja koje se javljaju zbog ovisnosti Newtonove i kozmološke konstante o skali u pristupu preko usrednjenog efektivnog djelovanja. Točan oblik tih ovisnosti određen je β funkcijama. Definiraju se bezdimenzionalne Newtonova i kozmološka konstanta

$$\begin{aligned} g(k) &= k^{d-2}G(k), \\ \lambda(k) &= \Lambda(k)/k^2. \end{aligned} \tag{2.198}$$

Pokazuje se da za male vrijednosti regulatora usrednjenog efektivnog djelovanja dimenzionalne konstante zadovoljavaju sljedeće izraze

$$\begin{aligned} G(k) &= G_0[1 - \omega G_0 k^2 + \mathcal{O}(G_0^2 k^4)], \\ \Lambda(k) &= \Lambda_0 + \nu G_0 k^4[1 + \mathcal{O}(G_0 k^2)]\,, \end{aligned} \tag{2.199}$$

gdje su ω i ν konstante. Ovdje su sa $G_0 = G(k = 0)$ i $\Lambda_0 = \Lambda(k = 0)$ označene vrijednosti parametara u infracrvenom području. Za $G(k)$ je ovim pristupom utvrđeno da nema promjene Newtonove konstante sa skalom između kozmološke skale $k \approx 0$ i skale na kojoj se Newtonova konstanta određuje (skale Sunčevog sustava i laboratorijske skale), te se G_0 identificira s eksperimentalno utvrđenom vrijednosti Newtonove konstante. G_0 se koristi kako bi se definiralo Planckovu masu, duljinu i vrijeme

$$\begin{aligned} M_{Pl} &= G_0^{-1/2}\,, \\ l_{Pl} = t_{Pl} &= G_0^{1/2}\,. \end{aligned} \tag{2.200}$$

Gornja su rješenja (2.199) razvoji u $(k/M_{Pl})^2$. Prema tim rješenjima učinci renormalizacije postaju značajni tek na skalama reda M_{Pl}. Uočimo da se vrijednost $G(k)$ smanjuje s povećavanjem k što je naznaka asimptotske slobode kvantne gravitacije. Ovakav oblik ponašanja naziva se perturbativni režim te se prvi članovi u razvoju prikazani u (2.199) smatraju dovoljnima za opis promjene parametara sa skalom. S druge pak strane za velike vrijednosti regulatora $k \gg M_{Pl}$ bezdimenzionalni parametri g i λ idu u fiksnu točku te slijedi

$$G(k) = \frac{g_*^{UV}}{k^2}\,, \tag{2.201}$$

$$\Lambda(k) = \lambda_*^{UV} k^2\,. \tag{2.202}$$

Ovaj režim ponašanja parametara naziva se režim fiksne točke. Nadalje, mogu se gledati popravke Einsteinovim jednadžbama koje su posljedica ovih ovisnosti parametara o skali. U tom je trenutku važno odabrati vezu regulatora sa nekom relevantnom skalom. S obzirom da se želi proučavati kozmološke primjene na osnovu simetrija slijedi $k = k(t)$ što znači

$$\begin{aligned} G(t) &= G(k = k(t))\,, \\ \Lambda(t) &= \Lambda(k = k(t))\,. \end{aligned} \tag{2.203}$$

Skala u načelu može biti

$$k = k(t, a(t), \dot{a}(t), \ddot{a}(t), ...)\,, \tag{2.204}$$

ali su na osnovu kvalitativnih razmatranja autori spomenutog rada analizirali dvije mogućnosti

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\xi}{t}\,, \\ k(t) &= \frac{\xi}{a(t)}\,. \end{aligned} \tag{2.205}$$

Naravno, i u ovom se formalizmu predviđanja zasnovana na ovim izborima mogu razlikovati. Mogu voditi i na krive odnosno neopravdane zaključke čime je još jednom pružena motivacija istraživanjima sustavne metode određivanja skale koja je tema ove disertacije. Polazeći od prvog izbora u jednadžbi (2.205) u dva razmatrana režima dobije se

$$\begin{aligned} G(t) &= G_0\left[1 - \tilde{\omega}\left(\frac{t_P l}{t}\right)^2 + \mathcal{O}(\left(\frac{t_P l}{t}\right)^4)\right], \\ \Lambda(t) &= \Lambda_0 + \tilde{\nu} M_{Pl}\left(\frac{t_P l}{t}\right)^4\left[1 + \mathcal{O}(\left(\frac{t_P l}{t}\right)^2)\right], \end{aligned} \tag{2.206}$$

za perturbativni režim gdje su

$$\tilde{\omega} = \omega\xi^2, \qquad \tilde{\nu} = \nu\xi^4\,, \tag{2.207}$$

konstante. S druge strane u režimu fiksne točke vrijedi

$$\begin{aligned} G(t) &= \tilde{g}_* t^2\,, \\ \Lambda(t) &= \tilde{\lambda} t^{-2}\,, \end{aligned} \tag{2.208}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \tilde{g}_* &= g_*\xi^{-2}\,, \\ \tilde{\lambda}_* &= \lambda_*\xi^2\,. \end{aligned} \tag{2.209}$$

U homogenom i izotropnom prostoru-vremenu tenzor energije-impulsa je oblika [4]

$$T_\mu^\nu = diag(\rho, -p, -p, -p)\,. \tag{2.210}$$

Kao i u standardnoj kozmologiji pretpostavlja se da je ovaj tenzor kovarijantno očuvan. Za FRW metriku slijedi

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0\,. \tag{2.211}$$

[4]U nastavku opet upotrebljavamo konvencije kojima se koristimo u većem dijelu ove disertacije.

Jednadžba stanja je

$$p(t) = w\rho(t)\,. \tag{2.212}$$

Einsteinov tenzor je kovarijantno očuvan pa za desnu stranu modificiranih Einsteinovih jednadžbi vrijedi

$$\nabla_\nu[-\Lambda g_\mu^\nu - 8\pi G T_\mu^\nu] = 0\,. \tag{2.213}$$

Naravno, zbog uvedenih ovisnosti Λ i G o vremenu ova jednadžba nije automatski zadovoljena iščezavanjem kovarijantne derivacije tenzora energije-impulsa. Slijedi uvjet konzistentnosti

$$\dot{\Lambda} + 8\pi\rho\dot{G} = 0\,, \tag{2.214}$$

kojeg se može zapisati i ovako

$$\frac{d}{dt}(\Lambda + 8\pi G\rho) = 8\pi G\dot{\rho}\,. \tag{2.215}$$

00 komponenta Einsteinovih jednadžbi daje

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi}{3}G\rho\,, \tag{2.216}$$

dok iz ii komponente slijedi

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \Lambda - 8\pi G\rho\,. \tag{2.217}$$

Množenjem prve od ovih relacija s a^2 te deriviranjem po vremenu upotrebom uvjeta konzistentnosti (2.215) zajedno s drugom jednadžbom pokazuje se da vrijedi zakon očuvanja (2.211). Zakon očuvanja tenzora energije-impulsa i uvjet konzistentnosti imaju istu ulogu u ovom pristupu. Kao nezavisne jednadžbe odabrane su (2.211) i (2.216). Zajedno sa uvjetom konzistentnosti te (2.203) čine sustav od pet jednadžbi za četiri funkcije $a(t)$, $\rho(t)$, $G(t)$ i $\Lambda(t)$. Sustav je, dakle, prezadan te za dani izbor jednadžbe stanja i geometrije treba provjeravati njegovu konzistentnost. Istražena su rješenja za rani svemir te se pokazuje da postoji mogućnost rješavanja problema čestičnog horizonta i problema ravnosti svemira. Ako se inzistira na nekom izboru skale postoje geometrije i jednadžbe stanja za koje nije moguće naći rješenja koja zadovoljavaju uvjet konzistentnosti.

U radu [56] postulirano je postojanje fiksne točke za gravitacijske parametre u infracrvenom području kako bi se izučavali mogući učinci takve ideje na ponašanje današnjeg svemira, odnosno na problem koincidencije. Problem koincidencije je zanimljiva činjenica da su upravo u današnjem svemiru gustoća energije materije i gustoća tamne energije istog reda veličine. Pri tome se ne razmatraju mogući fizikalni mehanizmi koji bi mogli biti uzrok postojanja takve fiksne točke već se analiza zasniva na fenomenološkom pristupu. Napomenimo kako je u prethodnoj analizi na visokim energijama zaključeno kako značajni učinci renormalizacije postaju vidljivi tek na skalama reda veličine M_{Pl}. Postuliranje infracrvene fiksne točke motivirano je rezultatima iz literature koji ukazuju kako zbog infracrvenih divergencija kvantne gravitacije može doći i do značajnih učinaka renormalizacije i na niskim energijama [87]. Dinamika je ponovno određena Einsteinovom jednadžbom, u kojoj figurira očuvani tenzor energije impulsa $T_\mu^\nu = (\rho, -p, -p, -p)$, za kojeg se pretpostavlja jednadžba stanja $p(t) = w\rho(t)$ gdje je razmatran slučaj $w > -1$. I ovdje je korišten isti pristup kao i za analize posvećene ultraljubičastoj fiksnoj točki, dakle odabrana je skala $k = \xi/t$ te se zatim provjerava konzistentnost sustava gore izloženih pet jednadžbi za četiri funkcije od interesa. Istraživanje, dakle počiva na hipotezi

$$\begin{aligned} \lim_{k\longrightarrow 0} g(k) &= g_*^{IR}\,, \\ \lim_{k\longrightarrow 0} \lambda(k) &= \lambda_*^{IR}\,. \end{aligned} \tag{2.218}$$

U blizini fiksne točke vrijedi

$$G(k) = \frac{g_*^{IR}}{k^2}\,, \tag{2.219}$$

$$\Lambda(k) = \lambda_*^{IR} k^2\,, \tag{2.220}$$

što za izbor skale $k = \xi/t$ vodi na

$$\begin{aligned} G(t) &= g_* \xi^{-2} t^2\,, \\ \Lambda(t) &= \frac{\lambda_* \xi^2}{t^2}\,, \end{aligned} \tag{2.221}$$

s time da je sada od interesa granica $t \to \infty$. Daljnja je pretpostavka da za skale puno veće od današnje kozmološke skale nema ovisnosti parametara o skali ili je ona jako blaga te se gravitacijski parametri u tom slučaju tretiraju kao konstante. Ovim pristupom dobiveni su sljedeći rezultati za prostorno ravan svemir

$$\xi^2 = \frac{8}{3(1+w)^2}\lambda_*\,, \tag{2.222}$$

što vodi na sljedeće rezultate za tražene funkcije

$$\begin{aligned} a(t) &= \left[\left(\frac{3}{8}\right)^2 (1+w)^4 g_* \lambda_* \mathcal{M}\right]^{\frac{1}{(3+3w)}} t^{\frac{4}{(3+3w)}}\,, \\ \rho(t) &= \frac{8}{9\pi(1+w)^4 g_* \lambda_*}\frac{1}{t^4}\,, \\ G(t) &= \frac{3}{8}(1+w)^2 g_* \lambda_* t^2\,, \\ \Lambda(t) &= \frac{8}{3(1+w)^2}\frac{1}{t^2}\,. \end{aligned} \tag{2.223}$$

Vrlo zanimljivo svojstvo ovog rješenja jest činjenica da je za sve vrijednosti w, g_*, λ_*

$$\rho_\Lambda = \rho = \frac{1}{2}\rho_c\,, \tag{2.224}$$

gdje je

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G(t)}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2. \tag{2.225}$$

Postojanje fiksne točke u infracrvenom području može u okviru ovog pristupa voditi na rješavanje problema koincidencije. Zaključeno je i kako bi u skoroj budućnosti mogao biti testiran rezultat koji predviđa vremensku promjenu Newtonove konstante sljedećeg oblika

$$\frac{\dot{G}}{G} = \frac{2}{t} = \frac{1}{2}(3+3w)H(t)\,. \tag{2.226}$$

Nadalje, u ovom su formalizmu proučavani učinci popravki na razini djelovanja za gravitaciju [88]. Motivacija za to je višestruka. Ponajprije s teorijskog je gledišta poželjno imati formulaciju preko djelovanja. Osim toga postoji teorija gravitacije koja implementira promjenjivu Newtonovu konstantu, a to je Brans-Dicke teorija koja polazi od djelovanja

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}(\phi R - \omega\phi^{-1}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) + S_m\,, \tag{2.227}$$

gdje je $\phi(x) = 1/G(x)$, a ω je broj. Isto tako može se dogoditi da ne možemo imati koristi od modifikacija uzrokovanih promjenjivim parametrima na razini jednadžbe gibanja. Primjer je slučaj crnih rupa u odsutnosti materije ($T_{\mu\nu} = 0$) koje se proučava na skalama na kojima je moguće zanemariti kozmološku konstantu. Tada se jednadžbe gibanja svode na $G_{\mu\nu} = 0$ te nema nikakvog novog doprinosa koji bi mogao doći od promjenjivih gravitacijskih parametara. Istraživanja u radu [88] polaze od djelovanja

$$S[g, G, \Lambda] = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{R}{G(x)} - 2\frac{\Lambda(x)}{G(x)}\right\}, \tag{2.228}$$

gdje je prostorno-vremenska ovisnost parametara rezultat njihove ovisnosti o skali $(G(k), \Lambda(k))$ koja je funkcija prostorno-vremenskih koordinata $(k = k(x))$. Naravno, jednadžbe gibanja se ne razlikuju od klasičnih jednadžbi gibanja, koje se modificiraju, samo uvođenjem parametara ovisnih o skali. Naime, jednadžbe su

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G(x)T_{\mu\nu} - \Lambda(x)g_{\mu\nu} - \Delta t_{\mu\nu}\,, \tag{2.229}$$

gdje se pojavljuje novi član

$$\Delta t_{\mu\nu} = G(x)(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\frac{1}{G(x)}\,, \tag{2.230}$$

koji je posljedica prostorno-vremenskih ovisnosti parametara. Također djelovanju je dodan i član $S_\theta[g, G, \Lambda]$ pripadajućeg tenzora energije-impulsa

$$\theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\theta}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\,. \tag{2.231}$$

Sveukupno, jednadžba gibanja je tada

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G(x)T_{\mu\nu} - \Lambda(x)g_{\mu\nu} - \Delta t_{\mu\nu} - \vartheta_{\mu\nu}\,, \tag{2.232}$$

gdje je $\vartheta_{\mu\nu} = 8\pi G\theta_{\mu\nu}$. I ovdje se polazi od činjenice da je $\nabla G^{\mu\nu} = 0$ te onda i kovarijantna derivacija desne strane mora iščezavati iz čega ponovno slijedi uvjet konzistencije. Skala o kojoj parametri ovise ponovno je odabrana proizvoljno na način $k = \xi/t$. Razmatrani su različiti slučajevi izbora tenzora $\theta^{\mu\nu}$, prostorne zakrivljenosti K te jednadžbe stanja u kontekstu kozmologije. Zaključeno je da se unatoč uvođenju ovisnosti o skali već na razini djelovanja rezultati barem kvalitativno slažu s prethodno dobivenima gdje su parametri ovisni o skali uvedeni u jednadžbama gibanja.

U ovom formalizmu istražene su i mogućnosti primjene u astrofizici, kako bi se pokušalo objasniti rotacijske krivulje galaksija [89, 90, 91]. Analizirane su ovisnosti Newtonove konstante o skali

$$G(k) = \bar{G} + \frac{g_*^{IR}}{k^2}\,, \tag{2.233}$$

te

$$G(k) \propto k^{-q}, \qquad 0 < q \ll 1\,. \tag{2.234}$$

Kako se ne očekuje doprinos kozmološke konstante na skali galaksija pretpostavljeno je $\Lambda(k) = 0$. U računu se ovisnost Newtonove konstante o skali uvodi na razini djelovanja. Ovisnost skale o koordinatama prostora-vremena dana je izrazom

$$k(r) \propto \frac{1}{d(r)}\,, \tag{2.235}$$

gdje je $d(r)$ duljina radijalne krivulje definirane s $dt = d\phi = d\vartheta = 0$ za sferno simetričnu metriku

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\vartheta d\phi^2\,. \tag{2.236}$$

Za prvu ovisnost Newtonove konstante o skali (2.233) izraz za silu se modificira te osim newtonovskog doprinosa $\propto \frac{1}{r^2}$ sadrži i član $\propto r$ koji je jako mali te ne može objasniti opažanja. Za drugu ovisnost (2.234) newtonovski doprinos potencijalu $\propto 1/r$ se modificira članom $q\ln r$ koji, barem kvalitativno, može objasniti rotacijske krivulje galaksija za vrijednosti parametra $q \approx 10^{-6}$.

Sadržaj drugog poglavlja zorno ukazuje na nekoliko činjenica. Ponajprije, razmatranja dobro definiranih teorijskih pristupa vode na ovisnost parametara gravitacijskog međudjelovanja o proizvoljnoj skali pri renormalizaciji (regularizaciji). Za iskazivanje predviđanja koja iz toga proizlaze nužno je identificirati skalu renormalizacijske grupe pomoću fizikalnih veličina u razmatranom sustavu. Ovisnost efektivnih parametara o tim fizikalnim veličinama odražava ovisnost parametara gravitacijskog međudjelovanja o proizvoljnoj skali regularizacije. Vidjeli smo da primjena ovog pristupa može dati odgovore na neke probleme u astrofizici i kozmologiji u kontekstu opažanja koja se uobičajeno pripisuju tamnim komponentama. S druge strane, ta je identifikacija, u literaturi najčešće proizvoljna i vođena kvalitativnim razmatranjima. Različiti izbori mogu voditi na fizikalno znatno različite odgovore. U narednim poglavljima izloženi su rezultati istraživanja koja čine okosnicu ove disertacije. Osnovni je cilj tih istraživanja sagledati u kojoj je mjeri moguće razviti sustavnu metodu određivanja skale te koje sve posljedice iz takve procedure proizlaze. Pri tome se vodimo idejom da identifikacija skale renormalizacijske grupe ne narušava kovarijantnost teorije. Razmatraju se rezultati primjene takve procedure na razini jednadžbi gibanja i na razini djelovanja te se analiziraju modifikacije gravitacijskog međudjelovanja koje time slijede.

3. Metoda određivanja skale na razini jednadžbi gibanja

Najprije ćemo opisati postupak sustavnog određivanja skale pri čemu ćemo ovisnost parametara o skali uvesti na razini jednadžbi gibanja blisko slijedeći izlaganja u radu [92]. Jednadžbe gibanja za gravitacijsko polje koje ćemo razmatrati su jednadžbe koje dobijemo variranjem djelovanja po metričkom tenzoru pri čemu gravitaciju opisujemo Einstein-Hilbert djelovanjem s kozmološkom konstantom

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda)\,, \tag{3.1}$$

gdje je $\Lambda \equiv 8\pi G \rho_\Lambda$.
Dodamo li tome djelovanje za materiju S_{mat} jednadžbe do kojih dolazimo su

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -8\pi G(T_{\alpha\beta} + \rho_\Lambda g_{\alpha\beta})\,, \tag{3.2}$$

gdje je $T_{\mu\nu}$ tenzor energije i impulsa za materiju:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{3.3}$$

Sada želimo uvesti parametre G i Λ koji ovise o skali. Time jednadžba postaje

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -8\pi G(\mu)(T_{\alpha\beta} + \rho_\Lambda(\mu) g_{\alpha\beta})\,. \tag{3.4}$$

Popravke koje dolaze od renormalizacijske grupe su, dakle, sadržane u parametrima $G(\mu)$ i $\Lambda(\mu)$. μ ovdje predstavlja fizikalnu skalu koju određujemo ovom procedurom. Pretpostavljamo pri tome da je μ skalar na opće koordinatne transformacije. Materiju opisujemo kao idealni fluid čija je četverobrzina u_μ te je time tenzor energije-impulsa dan sljedećim izrazom

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta}\,. \tag{3.5}$$

Pretpostavit ćemo da je ovaj tenzor kovarijantno očuvan to jest da za njega vrijedi

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{3.6}$$

Ako to ne bismo pretpostavili tada bi bilo moguće načiniti proizvoljan izbor skale koji bi za dane ovisnosti parametara mogao zadovoljiti zahtjev kovarijantnosti na račun izmjene energije između materije i ostalih komponenti. Kako je Einsteinov tenzor kovarijantno očuvan

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0\,, \tag{3.7}$$

iz jednadžbe (3.4) slijedi relacija

$$\nabla_\alpha (G(\mu)(T^{\alpha\beta} + \rho_\Lambda(\mu) g^{\alpha\beta})) = 0\,. \tag{3.8}$$

Imajući u vidu skalarnu prirodu veličine μ možemo, za općeniti tenzor energije-impulsa materije, dobiti uvjet na izbor skale

$$(\partial_\alpha \mu) \left[G'(\mu)(T^{\alpha\beta} + \rho_\Lambda(\mu) g^{\alpha\beta}) + G(\mu)\rho'_\Lambda(\mu) g^{\alpha\beta} \right] = 0\,, \tag{3.9}$$

gdje $'$ označava derivacije s obzirom na μ. Uvjet (3.9) za tenzor energije-impulsa idealnog fluida (3.5) ima oblik

$$(\partial_\alpha \mu) \left[G'(\mu)((\rho + p) u^\alpha u^\beta + (\rho_\Lambda(\mu) - p) g^{\alpha\beta}) + G(\mu)\rho'_\Lambda(\mu) g^{\alpha\beta} \right] = 0\,. \tag{3.10}$$

Možemo to zapisati i na još jedan način. Naime, množeći gornji izraz sa u_β te kontrahirajući β indekse slijedi

$$(u^\alpha \partial_\alpha \mu) \left[G'(\mu)(\rho + \rho_\Lambda(\mu)) + G(\mu)\rho'_\Lambda(\mu) \right] = 0\,. \tag{3.11}$$

Ovo je jednadžba koju ćemo koristiti pri određivanju skale u različitim situacijama. Dogodi li se da je za dani slučaj umnožak $u^\alpha \partial_\alpha \mu = 0$, tada moramo detaljnije analizirati jednadžbu (3.10). Kako bismo odredili skalu nužno je u ovom trenutku izabrati teorijski okvir iz čije domene uzimamo ovisnosti parametara. Jedan oblik ovisnosti koji ćemo ovdje koristiti dolazi iz teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu. Odabiremo relacije nastale poopćavanjem ovisnosti razmatranih u kozmološkim primjenama, dakle

$$\rho_\Lambda(\mu) = c_0 + c_2 \mu^2\,, \tag{3.12}$$

$$G(\mu) = \frac{G_0}{1 + d_2 \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}\,. \tag{3.13}$$

Kao sljedeći model ovisnosti odabiremo poopćeni oblik funkcija koje su predložene od strane Bonnana i Reutera u radovima [56, 93]. Ovi autori razmatraju pretpostavku postojanja infracrvene netrivijalne fiksne točke za gravitaciju. Njihova analiza takvog scenarija vodi na sljedeće ovisnosti parametara o skali

$$\Lambda(k) \equiv 8\pi G(k) \rho_\Lambda(k) = A k^2 \tag{3.14}$$

$$G(k) = \frac{B}{k^2}\,. \tag{3.15}$$

Poopćenje ovih izraza kojim se služimo u računu dopušta proizvoljne potencije α i β u izrazima (3.14) i (3.15) te ćemo usvojiti relacije

$$\Lambda(k) \equiv 8\pi G(k) \rho_\Lambda(k) = A k^\alpha \tag{3.16}$$

$$G(k) = \frac{B}{k^\beta}\,. \tag{3.17}$$

U sljedećim pododjeljcima iznesena je primjena metode za neke izbore prostor-vremena motivirane fizikalnim situacijama.

3.0.1 Vakuumski prostor

Prije analiza u kojima ćemo koristiti tenzor energije-impulsa idealnog fluida za opis materije razmotrimo prostor-vrijeme bez materije, to jest slučaj kada je $T^{\alpha\beta} = 0$ (vakuumski prostor).

$$g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \mu)\frac{d}{d\,\mu}(G(\mu)\rho_\Lambda(\mu)) = 0\,. \tag{3.18}$$

Kako je za općeniti slučaj

$$\frac{d}{d\mu}(G(\mu)\rho_\Lambda(\mu)) \neq 0\,, \tag{3.19}$$

vrijedi

$$g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \mu) = 0\,. \tag{3.20}$$

Iz gornje jednadžbe lako je iščitati kako za sve točke prostor-vremena u kojima determinanta matrice $g^{\alpha\beta}$ ne iščezava vrijedi $\partial_\alpha \mu = 0$ i to za svaki α. To znači da μ ne ovisi o koordinatama prostor-vremena. Parametri G i ρ_Λ su stoga konstante.

3.0.2 Izotropni i homogeni 3D prostor

Želimo li napraviti analizu za izotropan i homogen 3D prostor, motivirani kozmologijom, koristit ćemo Friedmann-Robertson-Walker linijski element

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2\right)\,. \tag{3.21}$$

U sugibajućim koordinatama komponente četverovektora brzine idealnog fluida su $u^0 = 1$, $u^i = 0$. Ovo je prostor-vrijeme izotropno i homogeno. U skladu s tom činjenicom ovisnost skale μ o koordinatama opisana je na sljedeći način $\mu = \mu(x^0) = \mu(t)$. Možemo vidjeti kako iz toga slijedi $u^\alpha \partial_\alpha \mu \neq 0$. Primijenimo li to na jednadžbu (3.11) dobit će se

$$G'(\mu)(\rho + \rho_\Lambda(\mu)) + G(\mu)\rho'_\Lambda(\mu) = 0\,. \tag{3.22}$$

Ovo je jedini uvjet koji se dobije za ovo prostor-vrijeme. To se može zaključiti analizom jednadžbe (3.10). Ovaj rezultat je već postojao u literaturi te su na sljedećih par stranica izloženi zaključci do kojih se dolazi njegovom primjenom, a prvi su put izloženi u radu [94]. Uvjet (3.22) se s obzirom na to da je $\mu = \mu(t)$ može napisati kao

$$\dot{G}(\mu)(\rho + \rho_\Lambda(\mu)) + G(\mu)\dot{\rho}_\Lambda(\mu) = 0\,. \tag{3.23}$$

gdje $\dot{}$ označava vremensku derivaciju. Ako tijekom evolucije svemira $\dot{\mu}$ ne iščezava vrijedi

$$\rho = -\rho(\mu) - G(\mu)\left(\frac{d\rho_\Lambda}{d\mu}\right)\left(\frac{dG(\mu)}{d\mu}\right)^{-1}\,. \tag{3.24}$$

Ovime smo dobili vezu

$$\rho = f(\mu)\,, \tag{3.25}$$

koja nam omogućava izražavanje skale preko gustoće materije

$$\mu = f^{-1}(\rho)\,. \tag{3.26}$$

Dakle, procedura određivanja skale nam u ovom slučaju omogućuje izraziti veličine ρ_Λ i G preko ρ. Promjena gustoće sa faktorom skale je

$$\rho = \rho_{m,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}\,. \tag{3.27}$$

Za opis evolucije svemira potrebna je još jedna jednadžba, te se koristi Friedmannova jednadžba

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G(\rho+\rho_\Lambda)\,. \tag{3.28}$$

Primjenom procedure određivanja skale u kozmologiji na (3.14) i (3.15) za skalu se dobije

$$k = \left(\frac{8\pi B}{A}\rho\right)^{1/4}\,. \tag{3.29}$$

Nadalje slijedi

$$\Lambda = 8\pi G\rho = (8\pi AB\rho)^{1/2}\,. \tag{3.30}$$

Korištenjem ove relacije, zajedno sa (3.27) i (3.28) može se dobiti ovisnost faktora skale o vremenu. Uvode se sljedeći parametri

$$\begin{aligned}
\rho_c &= \frac{3H^2}{8\pi G}\,,\\
\Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{8\pi G}\,,\\
\Omega_m &= \frac{\rho_m}{\rho_c}\,,\\
\Omega_K &= -\frac{K}{H^2a^2}\,.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Sada jednadžbu (3.30) možemo napisati kao

$$\Omega_\Lambda = \Omega_m\,. \tag{3.32}$$

Vrijedi

$$\Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_K = 1\,. \tag{3.33}$$

Možemo sada naći implicitni izraz za faktor skale

$$H_0(t-t') = \int_{a'/a_0}^{a/a_0}\left[\Omega_K^0 + (1-\Omega_K^0)u^{(1-3w)/2}\right]^{-1/2} du\,, \tag{3.34}$$

te je širenje svemira određeno dvama parametrima: w i Ω_K^0. U radu [94] nadalje se analiziraju neki posebni slučajevi u granici $t' \to 0$ $(a' \to 0)$ te se dobiveni rezultati uspoređuju sa onima u radu [56] gdje je skala odabrana proizvoljno, odnosno je motivirana kvalitativnim razmatranjima.

A) $\Omega_K^0 = 0$, w proizvoljan

Za ovaj izbor, to jest, prostorno ravan svemir vrijedi

$$\frac{a}{a_0} = \left(\frac{3}{4}(1+w)H_0 t\right)^{\frac{4}{3(1+w)}}, \tag{3.35}$$

iz čega slijedi

$$k = \frac{4}{3(1+w)H_0}\left(\frac{8\pi B}{A}\rho_{m,0}\right)^{1/4} = \frac{1}{1+w}\left(\frac{8}{3A}\right)^{1/2}\frac{1}{t}. \tag{3.36}$$

Ovim rezultatom sustavnog određivanja skale u kozmologiji potvrđuje se kvalitativan izbor u radu [56].

B) Ω_K^0 proizvoljan , w $= 1/3$

U ovom je slučaju ponašanje faktora skale dano jednostavnim izrazom

$$\frac{a}{a_0} = H_0 t\,, \tag{3.37}$$

pa je sama skala

$$k = \frac{1}{H_0}\left(\frac{8\pi B}{A}\rho_{m,0}\right)^{1/4}\frac{1}{t}\,, \tag{3.38}$$

te je i za ovaj izbor parametara kvalitativan izbor u radu [56] opravdan.

C) $\Omega_K^0 \geq 0$, w $= 0$

Za svemir proizvoljne prostorne zakrivljenosti koji sadrži samo nerelativističku materiju ponašanje faktora skale dano je izrazom

$$\begin{aligned} H_0 t = \frac{4}{3(1-\Omega_K^0)^2}\Bigg[&\left(\Omega_K^0 + (1-\Omega_K^0)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/2}\right)^{1/2} \\ &\left((1-\Omega_K^0)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{1/2} - 2\Omega_K^0\right) + 2(\Omega_K^0)^{3/2}\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Za razliku od prethodnih slučajeva gdje je pokazano da je proizvoljan izbor autora rada [56] opravdan, na ovom se primjeru vidi kako nije uvijek tome tako jer se ovdje skala ne može izraziti Ansatzom $k = \xi/t$. Kako o tom izboru ovise i predviđanja modela ustrajanje na tom izboru može dovesti do krivih zaključaka. Korištenjem ovog Ansatza zaključeno je kako se konzistentna rješenja za svemire za koje je $K = 1$ i $K = -1$ mogu dobiti samo za one kojima dominira materija u obliku zračenja ($w = 1/3$). Nadalje je zaključeno i kako naš svemir može slijediti atraktor induciran infracrvenom fiksnom točkom samo ako je prostorno ravan ($K = 0$). No iz sustavne procedure određivanja skale jasno je da se mogu dobiti konzistentna rješenja kako za svemire proizvoljne prostorne zakrivljenosti tako i za svemir s proizvoljnim w.

3.0.3 Sferno simetrični statični 3D prostor

Nakon razmatranja posljedica određivanja skale na razini jednadžbi gibanja za izotropni i homogeni $3D$ prostor, pri čemu smo iznijeli rezultate rada [94] nastavljamo temeljna izlaganja ovog poglavlja analizom prostor-vremena čiji je odabir motiviran astrofizikalnim situacijama. Razmotrimo sferno simetrično statično prostor-vrijeme koje nam na neki način opisuje objekte poput zvijezda. Metrika sferno simetričnog statičnog prostora jest [95]

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \,. \tag{3.40}$$

Komponente vektora četverobrzine u^i iščezavaju, dok je $u^0 \neq 0$. Uvažavanjem sferne simetrije slijedi ovisnost tražene skale o koordinatama prostor-vremena: $\mu = \mu(x^1) = \mu(r)$. Razmatranje jednadžbe (3.10) za sve vrijednosti indeksa β vodi na uvjet određivanja skale

$$G'(\mu)(\rho_\Lambda(\mu) - p) + G(\mu)\rho'_\Lambda(\mu) = 0 \,. \tag{3.41}$$

Relacijom (3.11) se ovdje ne možemo poslužiti s obzirom da $u^\alpha \partial_\alpha \mu$ iščezava.

3.0.4 Aksijalno simetrični stacionarni 3D prostor

Želimo li razmatrati objekte poput galaksija poslužit ćemo se linijskim elementom aksijalno simetričnog stacionarnog 3D prostora. Aksijalno simetrični stacionarni prostor opisan je metrikom [96]

$$ds^2 = e^{2\chi}dt^2 - e^{2\psi}r^2(d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\beta}(dr^2 + dz^2) \,. \tag{3.42}$$

Ovdje su $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, i $x^3 = z$ prostorne koordinate, a vremenska je koordinata $x^0 = t$. Nadalje, χ, ψ, i β su funkcije od r i z. Komponente četverovektora brzine u^1 i u^3 iščezavaju, dok su u^0 i u^2 različite od nule. S obzirom na simetrije sustava možemo, za ovisnost skale o koordinatama prostor-vremena pisati $\mu = \mu(x^1, x^3) = \mu(r, z)$. Uvjet određivanja skale koji slijedi iz jednadžbe (3.10) je

$$G'(\mu)(\rho_\Lambda(\mu) - p) + G(\mu)\rho'_\Lambda(\mu) = 0 \,. \tag{3.43}$$

Kao i u prethodnom slučaju jednadžba (3.11) nije od pomoći jer je i ovdje $u^\alpha \partial_\alpha \mu = 0$.

3.1 Određivanje skale u astrofizikalnim sustavima

Dakle, za kozmologiju je relevantna veličina o kojoj ovisi skala μ gustoća materije ρ. U astrofizikalnim situacijama, skala μ ovisi o tlaku p. Štoviše, u objema razmatranim metrikama motiviranima astrofizikalnim sustavima dobije se isti uvjet, te se (3.41), kao i (3.43) može formalno zapisati na sljedeći način

$$f(\mu) \equiv \rho_\Lambda(\mu) + \rho'_\Lambda(\mu)\frac{G(\mu)}{G'(\mu)} = p \,. \tag{3.44}$$

Funkcionalnu ovisnost skale o fizikalnoj veličini, koja je u ovom slučaju tlak p, dobit ćemo invertiranjem prethodnog izraza:

$$\mu = f^{-1}(p)\,. \tag{3.45}$$

Uvjet određivanja skale

$$c_2\mu^2\left(1 - d_2 + d_2\ln\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) = (c_0 - p)d_2\,, \tag{3.46}$$

slijedi primjenom opisane metode na prvi model ovisnosti parametara o skali (3.12) i (3.13). Očekujemo blagu promjenu parametra G sa skalom te stoga pretpostavljamo $d_2 \ll 1$. Ako je, k tome, gustoća energije kozmološke konstante zanemariva u odnosu na tlak, $c_0 \ll p$ imat ćemo

$$\mu^2 = -\frac{d_2}{c_2}p\,. \tag{3.47}$$

Slično i za drugi model ovisnosti parametara o skali (3.16) i (3.17) slijedi

$$k = \left(-\frac{8\pi B\beta}{\alpha A}p\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\,. \tag{3.48}$$

3.1.1 Određivanje skale u sferno simetričnim sustavima

U ovom ćemo odjeljku detaljnije analizirati sferno simetrične objekte pri čemu se služimo metrikom (3.40). S obzirom na simetriju sve razmatrane veličine imaju samo radijalnu ovisnost. Polazimo od relacije koja slijedi nametanjem uvjeta hidrostatske ravnoteže (Tolman-Oppenheimer-Volkov relacija [95]):

$$r^2p' = -G_0\mathcal{M}(r)(\rho+p)\left(1 + \frac{4\pi G(\mu)r^3(p-\rho_\Lambda)}{G_0\mathcal{M}(r)}\right)\left(1 - \frac{2G_0\mathcal{M}(r)}{r}\right)^{-1}\,, \tag{3.49}$$

gdje je

$$\mathcal{M}(r) = \int_0^r 4\pi\frac{G(\mu)}{G_0}(\rho + \rho_\Lambda(\mu))r'^2dr'\,, \tag{3.50}$$

uz početni uvjet $\mathcal{M}(0) = 0$. Značajna pojednostavljenja jednadžbe (3.49) proizlaze iz sljedećih razmatranja [95]. U većini je astrofizikalnih sustava utjecaj $\rho_\Lambda(\mu)$ zanemariv te vrijedi $\rho_\Lambda(\mu) \ll \rho$. Isto tako najčešće je zadovoljena relacija $\frac{2G_0\mathcal{M}(r)}{r} \ll 1$. Nadalje, uvjet $p \ll \rho$ slijedi iz činjenice da je u takvim sustavima materija nerelativistička. Naposljetku, s obzirom na pretpostavljenu blagu ovisnost G o skali, u ovim ćemo razmatranjima G smatrati približno konstantnim, $G(\mu) \simeq G_0$. Za one sferno simetrične sustave za koje vrijede ove pretpostavke (gdje su mogući izuzeci središta galaksija i najgušće zvijezde) jednadžba (3.49) se svodi na

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G_0\rho(r)r^2\,, \tag{3.51}$$

uz početni uvjet $p'(0) = 0$. Pretpostavlja se da fluid zadovoljava *politropnu* jednadžbu stanja

$$p = K\rho^\gamma\,, \tag{3.52}$$

gdje su K i γ konstante. Newtonov potencijal ϕ (za sferno simetrični sustav) zadovoljava relaciju

$$\frac{d\phi}{dr} = G_0 \frac{\mathcal{M}(r)}{r^2} \,. \tag{3.53}$$

Vezu između p, ρ i ϕ dobijemo korištenjem jednadžbi (3.51) i (3.53)

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{d\phi}{dr} \,. \tag{3.54}$$

Za politropnu jednadžbu stanja (3.52) veza tlaka p i Newtonovog potencijala ϕ je

$$p = \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{-\phi + C}{K^{1/\gamma}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \,. \tag{3.55}$$

Kada je $|\phi| \gg C$ vrijedi

$$p \sim (-\phi)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \,. \tag{3.56}$$

Ako upotrijebimo prvi model ovisnosti parametara o skali (3.12) i (3.13) slijedi

$$\mu \sim (-\phi)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}} \,. \tag{3.57}$$

Za drugi model ovisnosti parametara o skali (3.16) i (3.17) dobijemo

$$k \sim (-\phi)^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)(\alpha+\beta)}} \,. \tag{3.58}$$

Ovime je korištenjem sustavne procedure određivanja (fizikalne) skale renormalizacijske grupe reproduciran Ansatz (2.158) te je za sferno simetrične sustave poput zvijezda ta skala dovedena u vezu s newtonovskim potencijalom. Točan oblik te veze slijedi iz oblika funkcija $G(\mu)$ i $\rho_\Lambda(\mu)$ koji proizlazi iz odabranog teorijskog okvira.

Načinimo ovdje sljedeće redefinicije [95],

$$r = \left(\frac{K\gamma}{4\pi G_0 (\gamma - 1)} \right)^{1/2} \rho(0)^{(\gamma-2)/\gamma} \xi \,, \quad \rho = \rho(0) \theta^{1/(\gamma-1)} \,, \tag{3.59}$$

Možemo sada jednadžbu (3.51) prikazati kao Lane-Emden jednadžbu

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0 \tag{3.60}$$

pri čemu su odgovarajući početni uvjeti $\theta(0) = 1$ i $\theta'(0) = 0$. Ako se slijedi analiza u [95] dobije se izraz koji povezuje masu M, radijus zvijezde R i parametar γ

$$M = 4\pi R^{(3\gamma-4)/(\gamma-2)} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G_0 (\gamma - 1)} \right)^{-1/(\gamma-2)} \xi_1^{-(3\gamma-4)/(\gamma-2)} (-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)) \,. \tag{3.61}$$

Ovdje je $\theta(\xi_1) = 0$, a ξ_1 odgovara radijusu R sfernog sustava (zvijezde). Ovom jednadžbom prikazana je veza mase sustava M, veličine sustava R te parametra jednadžbe stanja γ (time i α). O povezanosti eksponenta α i mase sustava M je već spekulirano u radu [1]. No, ta razmatranja nisu uključivala veličinu sustava R, a iz jednadžbe (3.61) je vidljivo da ju je potrebno uzeti u obzir. Napomenimo i to da iako je ova relacija dobivena za sferno simetrične objekte sličnu relaciju između mase, veličine i jednadžbe stanja analiziranog sustava možemo očekivati i za druge astrofizikalne objekte poput galaksija, naprimjer.

4. Određivanje skale na razini djelovanja

U prethodnom poglavlju predstavljena je metoda određivanja skale na razini jednadžbi gibanja. Međutim, činjenicu da su parametri gravitacijskog djelovanja ovisni o skali možemo upotrijebiti već i u samom djelovanju [97, 98]. U ovom poglavlju detaljnije je analiziran takav pristup pri čemu izlaganja u nastavku blisko slijede referencu [98]. Cilj nam je dakle detaljnije razmotriti učinke kvantnih polja polazeći od djelovanja. Klasično je djelovanje za gravitaciju dano Einstein-Hilbert članom i kozmološkom konstantom

$$S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{16\pi G}(R - 2\Lambda)\,, \tag{4.1}$$

gdje je $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$. Kao i uvijek ovom djelovanju možemo dodati i djelovanje materije S_{mat} to jest ukupno djelovanje je $S = S_{EH} + S_{mat}$.
Modifikacije uzrokovane kvantnim poljima očituju se dvojako. U svrhu uklanjanja divergencija u postupku renormalizacije potrebno je dodati članove višeg reda u zakrivljenosti, a sami parametri tog proširenog djelovanja postaju ovisni o skali. Način, odnosno postupak određivanja skale na razini djelovanja, prvi put uveden i razmatran u radu [97] može pružiti dodatni uvid u učinke kvantnih polja na teorije gravitacije.

4.1 Einstein-Hilbert djelovanje

U pristupu kvantnoj gravitaciji u kojem se razmatra usrednjeno efektivno djelovanje, teorija gravitacije na danoj energiji je efektivna teorija koja u principu uključuje sve moguće operatore. Međutim, u praksi se najčešće razmatra djelovanje koje sadrži samo podskup operatora, pri čemu se u najvećem broju slučajeva koristi samo Einstein-Hilbert djelovanje s kozmološkom konstantom. Ako se u tom djelovanju uvaži ovisnost parametara o skali možemo pisati

$$S_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{16\pi G_k}(R - 2\Lambda_k)\,. \tag{4.2}$$

I ovdje od skale očekujemo da ne narušava simetriju teorije, to jest da bude u skladu sa zahtjevom opće kovarijantnosti. To se postiže zahtjevom da je sama skala s obzirom na opće koordinatne transformacije skalar, $k \to k(x)$, što je i osnovni sadržaj postupka predloženog u radu [97]. Varijacijom djelovanja (4.2) obzirom na skalu $k(x)$ dobit ćemo relaciju

$$R\left(\frac{1}{G_k}\right)' - 2\left(\frac{\Lambda_k}{G_k}\right)' = 0\,, \tag{4.3}$$

pri čemu se $'$ odnosi na derivaciju po k. Jednadžba gibanja koja se dobije varijacijom djelovanja (4.2) s obzirom na gravitacijsko polje $g^{\mu\nu}$ je

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_k T_{\mu\nu} - \Lambda_k g_{\mu\nu} - \Delta t_{\mu\nu} \,, \tag{4.4}$$

gdje je $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor te je

$$\Delta t_{\mu\nu} = G_k (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box) \frac{1}{G_k} \,. \tag{4.5}$$

Ako pretpostavimo kovarijantno očuvanje tenzora energije-impulsa $T_{\mu\nu}$ djelovanjem kovarijantne derivacije na izraz (4.4) slijedi

$$G_{\mu\nu} \nabla^\nu \left(\frac{1}{G_k} \right) = -g_{\mu\nu} \nabla^\nu \left(\frac{\Lambda_k}{G_k} \right) - \nabla^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box) \frac{1}{G_k} \,. \tag{4.6}$$

Gornji se izraz (korištenjem definicije Riemannovog tenzora) može i ovako zapisati:

$$\nabla^\nu (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box) \frac{1}{G_k} = (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) \nabla^\nu \frac{1}{G_k} = -R_{\mu\nu} \nabla^\nu \frac{1}{G_k} \,. \tag{4.7}$$

Korištenjem prethodnog izraza moguće je relaciju (4.6) zapisati na sljedeći način

$$R \nabla_\mu \left(\frac{1}{G_k} \right) - 2 \nabla_\mu \left(\frac{\Lambda_k}{G_k} \right) = 0 \,, \tag{4.8}$$

što je ekvivalentno (4.3) s obzirom da je pretpostavljeno da je k skalar. k možemo prikazati kao funkciju Riccijevog skalara. Ta je činjenica u radu [97] iskorištena da bi se dobile granice na vrijednosti parametara u fiksnoj točki. No, ovaj pristup može pružiti i neke druge jako zanimljive uvide. Uvrštavanje izraza za skalu (kao funkcije od R) u jednadžbe gibanja ili djelovanje rezultirat će izrazima koji su karakteristični za $f(R)$ teorije modificirane gravitacije. Ove teorije se u posljednje vrijeme intenzivno proučavaju jer imaju neka pogodna fenomenološka svojstva osobito u svjetlu istraživanja vezanih za mehanizam inflacije i današnje ubrzano širenje svemira. Najveći izazov postavljen pred takve teorije je argumentiranje fizikalnog podrijetla dodatnih članova u gravitacijskom djelovanju. Kako vidimo, ovdje korištena metoda određivanja skale može pružiti motivaciju odnosno, bolje rečeno, biti izvor njihovog postojanja.

4.2 Djelovanje s članovima višeg reda

U prethodnom odjeljku smo napomenuli kako je u pristupu kvantnoj gravitaciji pomoću usrednjenog efektivnog djelovanja najčešće razmatrano Einstein-Hilbert djelovanje s kozmološkom konstantom, međutim, razmatrati se mogu i djelovanja s članovima višeg reda. Osim toga, Einstein-Hilbert djelovanje općenito mora biti prošireno članovima višeg reda kako bi se dobilo vakuumsko djelovanje kvantne teorije polja u zakrivljenom prostoru-vremenu [34], koje je u skladu sa zahtjevima renormalizabilnosti. Što znači da je ne samo moguće, nego i nužno promatrati i djelovanja koja sadrže članove višeg reda. Dodatni razlog za to je i rasvjetljavanje ovisnosti skale o fizikalnim veličinama. Pristupi u kojima se samo na osnovi kvalitativnih razmatranja pretpostavlja ovisnost skale o fizikalnim veličinama najčešće argumentiraju vezu skale i Ricci skalara. No, poštivanjem ovdje usvojene procedure vidljivo je da skala ne može, proizvoljno, biti lišena veze sa ostalim invarijantama u teoriji. To možemo ilustrirati ako promotrimo sljedeće djelovanje

$$S_{HD} = \int d^4x\sqrt{-g}(a_1 C^2 + a_2\mathcal{G} + a_3\Box R + a_4 R^2)\,, \tag{4.9}$$

koje sadrži kvadrat Weylovog člana $C^2 = R^{\mu\nu\lambda\tau}R_{\mu\nu\lambda\tau} - 2R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + (1/3)R^2$, zatim Gauss-Bonnet član čiji je integrand $\mathcal{G} = R^{\mu\nu\lambda\tau}R_{\mu\nu\lambda\tau} - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^2$, te članove $\Box R$ i R^2. U skladu sa pristupom koji koristimo u ovom poglavlju želimo promatrati učinke kvantnih korekcija već na razini djelovanja što činimo tako da koeficijentima u ovom djelovanju pridjelimo ovisnost o skali. Dakle, $a_i \to a_{i,k}$ za $i = 1, 2, 3, 4$. Imat ćemo stoga djelovanje

$$\begin{aligned} S &= S_{EH} + S_{HD} \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G_k}(R - 2\Lambda_k) + a_{1,k}C^2 + a_{2,k}\mathcal{G} + a_{3,k}\Box R + a_{4,k}R^2\right]\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Kao i prije, tretiramo li skalu kao skalarno polje, te variramo li djelovanje (4.10) obzirom na nju imat ćemo

$$\frac{1}{16\pi}\left(\left(\frac{1}{G_k}\right)' R - 2\left(\frac{\Lambda_k}{G_k}\right)'\right) + a'_{1,k}C^2 + a'_{2,k}\mathcal{G} + a'_{3,k}\Box R + a'_{4,k}R^2 = 0\,, \tag{4.11}$$

Ovdje, kao i u (4.3), $'$ označava derivaciju obzirom na k. Ova jednadžba daje vezu skale s invarijantama R, R^2, $\Box R$, C^2 i $\mathcal{G}$, a ne samo R kako se najčešće u literaturi proizvoljno odabire. Jednom kad nađemo relaciju koja povezuje k s gore navedenim invarijantama možemo taj izraz uvrstiti u jednadžbe gibanja dobivene varijacijom (4.10) s obzirom na metriku $g_{\mu\nu}$. Tako ćemo dobiti jednadžbe gibanja koje oblikom odgovaraju jednadžbama gibanja modificiranih teorija gravitacije. Zanimljiva je posljedica ovakvog pristupa da se varijacija člana $\mathcal{G}$ u djelovanju ovdje ne svodi na potpunu derivaciju, s obzirom da je koeficijent $a_{2,k}$ (kroz ovisnost o k) ovisan o prostor-vremenskim koordinatama.

4.2.1 Određivanje skale i mehanizam relaksacije

U radu [99] izložen je jedan dinamički mehanizam relaksacije vrijednosti efektivne kozmološke konstante koji ima jako zanimljiva svojstva vezana za rješenje problema male vrijednosti kozmološke konstante te problema koincidencije. Ovaj rad je nastavak istraživanja započetih u radu [100] gdje je zaključeno kako je za jednadžbu stanja kozmičkog fluida oblika

$$p_D = \omega\rho_D - \beta H^{-\alpha}\,, \tag{4.12}$$

gdje je H Hubbleov parametar moguće postići potisnuće početne velike gustoće ρ_Λ^i te imati de Sitter eru evolucije kasnog svemira s malom kozmološkom konstantom. Model je daljnjim istraživanjem nadograđen do jednog učinkovitog fenomenološkog modela koji ne samo da daje de Sitter ponašanje s malom kozmološkom konstantom nego opisuje i svemir koji može imati i materijom te zračenjem dominiranu fazu razvoja. Model se temelji na jednadžbama gibanja sljedećeg oblika

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{M_P l^2} (T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^X + g_{\mu\nu}\rho_{\Lambda,eff}) \,. \tag{4.13}$$

Ovdje je $T_{\mu\nu}^m$ tenzor energije-impulsa obične materije u obliku zračenja ρ_r te bariona ρ_b. $T_{\mu\nu}^X$ opisuje X komponentu (ρ_X) koja međudjeluje sa efektivnim članom kozmološke konstante $g_{\mu\nu}\rho_{\Lambda,eff}$ na takav način da je ukupna gustoća tamnog sektora $\rho_D = \rho_{\Lambda,eff} + \rho_X$ kovarijantno sačuvana. Sama efektivna gustoća kozmološke konstante dana je relacijom

$$\rho_{\Lambda,eff} = \rho_\Lambda^i + \rho_{inv} \,, \tag{4.14}$$

gdje je ρ_Λ^i proizvoljno velika početna gustoća energije, a $\rho_{inv} = \rho_{inv}(R, S, T)$ neka funkcija sljedećih invarijanti

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 6H^2(1-q) \,, \\ S &= R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 12H^4 \left[\left(\frac{1}{2} - q \right)^2 + \frac{3}{4} \right] , \\ T &= R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12H^4(1+q^2) \,, \end{aligned} \tag{4.15}$$

gdje je q parametar deceleracije $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2 = -\dot{H}/H^2 - 1$ a izrazi su izvrednjeni u FRW metrici. Općenito se struktura ρ_{inv} može napisati u obliku

$$\rho_{inv} = \frac{\beta}{f} \,. \tag{4.16}$$

β je parametar dimenzije 6, a $f = f(R, S, T)$ je funkcija gore navedenih invarijanti dimenzije 2. Funkcija f na visokim energijama raste te je u ranom svemiru kada $\rho_{inv} \to 0$ gustoća energije vakuuma $\rho_{\Lambda,eff} \to \rho_\Lambda^i$ proizvoljno velika, ali konačna.

Osnovna ideja ovog mehanizma može se ilustrirati sljedećim jednostavnim primjerom u kojem je f jednostavno Riccijev skalar R. Slijedi

$$\rho_{\Lambda,eff} = \rho_\Lambda^i + \frac{\beta}{6H^2(1-q)} \,. \tag{4.17}$$

Uzmemo li za primjer $\rho_\Lambda^i < 0$ kao u standardnom modelu te $\beta > 0$ u prostorno ravnom svemiru imat ćemo, za kasna vremena de Sitterov režim. Parametar deceleracije $q \to -1$, a Hubbleov parametar postaje mali (reda veličine današnje vrijednosti H_0) i konstantan, $H \to H_*$. Gustoća energije vakuuma poprima malu efektivnu vrijednost $\rho_{\Lambda,eff} \to \rho_\Lambda \simeq \rho_\Lambda^0$ koja je s H_* povezana Fiedmannovom jednadžbom iz koje slijedi

$$3M_{Pl}^2 H_*^2 = 8\pi\rho_\Lambda^* \,. \tag{4.18}$$

Za jako veliku početnu vrijednost $|\rho_\Lambda^i|$ konačno slijedi

$$H_*^2 \approx -\frac{\beta}{12\rho_\Lambda^i} \tag{4.19}$$

Ovaj rezultat je jako interesantan jer je ovdje velika vrijednost kozmološke konstante koja se javlja u okviru teorije polja ono što pomaže smanjiti efektivnu vrijednost kozmološke konstante za kasna vremena (naravno, za prikladan izbor parametra β), ali u osnovi nema potrebe za uobičajeno velikim finim podešavanjem. U ranijim vremenima $H \gg H_*$ relaksacija vrijednosti kozmološke konstante dolazi od člana $(1-q)$. Negativni ρ_Λ^i dinamički čini q bliskim 1 što odgovara zračenjem dominiranoj eri. Dakle, ovim pristupom već i u ovom jednostavnom modelu dobije se lijep rezultat. Imamo širenje slično eri dominiranoj zračenjem ($q \simeq 1$, veliki H) u prošlosti te de Sitter rješenje ($q = -1$, mali $H = H_* \lesssim H_0$) u budućnosti. Kako bi se dobio realističniji opis svemira koji uključuje i eru koja je dominirana materijom nužno je ovu jednostavnu ideju proširiti. Da bi se to postiglo nužno je strukturu $\rho_{\Lambda,eff}$ proširiti članom proporcionalnim $(1-q)^{-1/2}$. Njegovo djelovanje je slično djelovanju člana R^{-1} ali je u tom slučaju $q = 1/2$ sljedeća stabilizacijska točka u intervalu u kojem je H velik. To se može postići članom oblika

$$R^2 - S = 24H^4(2-q)(1/2-q)\,. \tag{4.20}$$

Ovaj član sam po sebi osigurava relaksaciju kozmološke konstante u eri dominacije materije. Kako bi se osigurala prisutnost svih potrebnih era koje su realistične ere širenja svemira (zračenjem dominirana era koju slijedi materijom dominirana era, te naposljetku de Sitter širenje) odabran je sljedeći izraz

$$\begin{aligned} f &= \frac{R^2 - S}{R} + yRT \\ &= 4H^2\frac{(1/2-q)(2-q)}{(1-q)} + y \cdot 72H^6(1-q)(1+q^2)\,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ovaj je f tako konstruiran da prvi član sadrži dvije potencije H, čime se osigurava prilično realistično ponašanje tijekom ere dominacije materije te de Sitter širenja dok drugi dio koji sadrži T pruža skaliranje H^6 koje osigurava dominaciju $(1-q)$ člana nad $(1/2-q)$ za velike vrijednosti H, to jest tijekom zračenjem dominirane ere. Na ovaj način izbjegava se neprirodno fino podešavanje koje je prisutno u standardnim pristupima problemu kozmološke konstante dinamičkim putem. Osigurava ga fizika gravitacijskog polja te se u nijednom trenutku ne zahtijeva uvođenje jednog ili više skalarnih polja. Današnja je, efektivna vrijednost kozmološke konstante te njoj pripadajuća vrijednost Hubbleovog parametra H_* dobivena iz parametra β, koji je šesta potencija masene skale M. Kako je $|\rho^i_\Lambda| \gg \rho^0_\Lambda$ slijedi

$$|\beta| = M^6 = |\rho^i_\Lambda| \cdot f \sim |\rho^i_\Lambda| H_*^2 \,, \tag{4.22}$$

gdje je $H_* \simeq H_0 \sim 10^{-42} GeV$. Ispostavlja se da maseni parametar M može biti reda tipičnih skala čestične fizike. Ako je početna vakuumska energija $\sim M^4_{Pl}$ onda je $M \lesssim 100 MeV$, dakle reda veličine tipičnih skala kvantne kromodinamike Λ_{QCD}. Ovakav model osim što daje malu vrijednost efektivne kozmološke konstante ima i povoljne rezultate u pogledu problema koincidencije, a može oponašati i tamnu materiju kroz X komponentu te nije u sukobu s nukleosintezom. Ovaj pristup pripada jednoj općenitoj klasi $\Lambda XCDM$ modela koji dodavanjem X komponente na razini jednadžbi gibanja razmatraju evoluciju svemira. U takvim modelima tamna energija se sastoji od konstantnog ili promjenjivog člana kozmološke konstante ρ_Λ te doprinosa ρ_X koji dolazi od nove komponente X koju se naziva i kozmonom. Efektivna je gustoća tamne energije u tom slučaju

$$\rho_{\Lambda,eff} = \rho_\Lambda + \rho_X \,, \tag{4.23}$$

a u najjednostavnijem slučaju takvih $\Lambda XCDM$ modela vrijedi zakon očuvanja

$$\dot{\rho}_{\Lambda,eff} + 3H(\rho_{\Lambda,eff} + p_{\Lambda,eff}) = 0 \,. \tag{4.24}$$

Ovu se jednadžbu da izraziti i pomoću ω_{eff}, to jest efektivne jednadžbe stanja

$$\dot{\rho}_{\Lambda,eff} + 3H(1 + \omega_e f f)\rho_{\Lambda,eff} = 0 \,, \tag{4.25}$$

$$\omega_{eff} = \frac{p_{\Lambda,eff}}{\rho_{\Lambda,eff}} = \frac{p_\Lambda + p_X}{\rho_\Lambda + \rho_X} \,. \tag{4.26}$$

Ovdje kozmon nije skalarno polje nego je objekt koji slijedi iz same strukture efektivnog djelovanja. Definiranjem zakona evolucije kozmološke konstante $\rho_\Lambda = \rho_\Lambda(t)$ zakon očuvanja (4.24) tada u bilo kojem slučaju određuje ponašanje $\rho_X = \rho_X(t)$. Definira li se jednadžba stanja kozmona $\omega_X = p_X/\rho_X$ vrijedi

$$\omega_{eff} = \frac{-\rho_\Lambda + \omega_X \rho_X}{\rho_\Lambda + \rho_X} = -1 + (1 + \omega_X)\frac{\rho_X}{\rho_{\Lambda,eff}} \,. \tag{4.27}$$

Bogatstvo modela i mogućnosti kvalitetnog rješavanja nekoliko iznimno izazovnih problema današnje fizike naveli su autore da u daljnjim istraživanjima daju opravdanje ovakvoj fenomenologiji kroz formulaciju preko modificiranog djelovanja za gravitaciju [101]. Naime pozitivna fenomenološka svojstva netom prezentirana moguće je dobiti iz djelovanja općenitog oblika $\mathcal{F}(R, \mathcal{G})$ gdje je R Riccijev skalar, a $\mathcal{G}$ Gauss-Bonnet član

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \,. \tag{4.28}$$

Samo djelovanje koje se u spomenutom radu razmatra je oblika

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R - \rho_\Lambda^i - \mathcal{F}(R,\mathcal{G}) + \mathcal{L}_\phi\right], \tag{4.29}$$

gdje je funkcija $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(R,\mathcal{G}) = \beta F(R,\mathcal{G}) + A(R)\,. \tag{4.30}$$

F je funkcija, a $A(R) = a_2R^2 + a_3R^3 + \ldots$ je polinom od R. Naposljetku je oblik funkcionala izabran na način

$$\mathcal{F}(R,\mathcal{G}) = \frac{\beta}{B(R,\mathcal{G})} + A(R)\,, \tag{4.31}$$

gdje je $B(R,\mathcal{G})$ polinom u R i $\mathcal{G}$. Za model povoljnih fenomenoloških svojstava koja su prethodno razmatrana na razini jednadžbi gibanja pogodnim se pokazuje

$$B(R,\mathcal{G}) = \frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^n = 24H^4(q-\frac{1}{2})(q-2) + \left[6yH^2(1-q)\right]^n. \tag{4.32}$$

a mogući poopćeni modeli sličnih karakteristika su

$$F_m^s = \frac{R^s}{B^m} = \frac{R^s}{[\frac{2}{3}R^2 + \frac{1}{2}\mathcal{G} + (yR)^n]^m}\,, \qquad (s \geq 0, m > 0, n > 2)\,. \tag{4.33}$$

Dakle, ovaj je uspješan fenomenološki model moguće formulirati na razini djelovanja. Interesantno je vidjeti je li moguće djelovanja na kojima se takva formulacija zasniva motivirati primjenom procedure određivanja skale. To ćemo pokazati na sljedećem primjeru, gdje ćemo ovisnost parametara o skali uvesti na razini djelovanja. Neka je djelovanje

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}\left(R - 2\Lambda_k\right) + a_{2,k}\mathcal{G} + a_{4,k}R^2\right]. \tag{4.34}$$

Varijacijom ovog djelovanja po k dobit ćemo uvjet konzistentnosti izbora skale

$$\frac{1}{16\pi}\left[\left(\frac{1}{G_k}\right)'R - 2\left(\frac{\Lambda_k}{G_k}\right)'\right] + a'_{2,k}\mathcal{G} + a'_{4,k}R^2 = 0\,. \tag{4.35}$$

gdje $'$ označava derivacije po k. Modelirajmo ovisnosti parametara o skali sljedećim izrazima

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_k} &= b_1 + b_2k^{\alpha_1}\,,\\
\frac{\Lambda_k}{G_k} &= c_1 + c_2k^{\alpha_2}\,,\\
a_{2,k} &= d_1 + d_2k^{\alpha_3}\,,\\
a_{4,k} &= e_1 + e_2k^{\alpha_4}\,,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{G_k}\right)' &= \alpha_1 b_2 k^{\alpha_1-1} \,, \\
\left(\frac{\Lambda_k}{G_k}\right)' &= \alpha_2 c_2 k^{\alpha_2-1} \,, \\
a_{2,k} &= \alpha_3 d_2 k^{\alpha_3-1} \,, \\
a_{4,k} &= \alpha_4 e_2 k^{\alpha_4-1} \,.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Pomoću ovih relacija uvjet konzistentnosti izbora skale postaje

$$\alpha_1 b_2 k^{\alpha_1-1} R - 2\alpha_2 c_2 k^{\alpha_2-1} + 16\pi\alpha_3 d_2 k^{\alpha_3-1}\mathcal{G} + 16\pi\alpha_4 e_2 k^{\alpha_4-1} R^2 = 0 \,. \tag{4.38}$$

Izaberemo li $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4$ možemo nadalje pisati

$$\alpha_1 b_2 k^{\alpha_1} R - 2\alpha_2 c_2 k^{\alpha_2} + 16\pi\alpha_1 d_2 k^{\alpha_1}\mathcal{G} + 16\pi\alpha_1 e_2 k^{\alpha_1} R^2 = 0 \,. \tag{4.39}$$

Time za samu skalu vrijedi

$$k^{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{b_2 R + 16\pi d_2\mathcal{G} + 16\pi e_2 R^2}{2c_2} \,, \tag{4.40}$$

te je skala konačno

$$k = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{b_2 R + 16\pi d_2\mathcal{G} + 16\pi e_2 R^2}{2c_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}} \,. \tag{4.41}$$

Vratimo li sada izraz za skalu natrag u djelovanje za slučaj kada je $\alpha_2 < \alpha_1$ dobije se

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x\sqrt{-g}\Bigg[\frac{1}{16\pi}\left(b_1 + b_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{b_2 R + 16\pi d_2\mathcal{G} + 16\pi e_2 R^2}{2c_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}}\right) \\
&- \frac{2}{16\pi}\left(c_1 + c_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{b_2 R + 16\pi d_2\mathcal{G} + 16\pi e_2 R^2}{2c_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}}\right) \\
&+ \left(d_1 + d_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{b_2 R + 16\pi d_2\mathcal{G} + 16\pi e_2 R^2}{2c_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}}\right)\mathcal{G} \\
&+ \left(e_1 + e_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{b_2 R + 16\pi d_2\mathcal{G} + 16\pi e_2 R^2}{2c_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}}\right)R^2\Bigg] \,.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Ovaj je rezultat po prvi puta predstavljen upravo u ovoj disertaciji. Jako je zanimljivo kako je procedurom određivanja skale moguće osim $f(R)$ djelovanja dobiti i ovaj oblik sličan djelovanjima kojima se modelira mehanizam relaksacije kozmološke konstante. S obzirom na brojna povoljna svojstva tog mehanizma ovaj rezultat je putokaz za buduća istraživanja. Od interesa je vidjeti može li se pažljivijom analizom potaknutom gornjim primjerom zaista dati kvalitetna teorijska motivacija uvođenju razmatranih članova te time potkrijepiti taj dinamički pristup rješavanju problema kozmološke konstante.

4.3 Djelovanje s poljima materije

Još ćemo jedan rezultat po prvi put prikazati u ovoj disertaciji. Radi se o analizi u kojoj djelovanje proširujemo djelovanjem za polja materije. Jer, želimo li biti potpuno dosljedni, trebali bismo razmotriti i činjenicu da i parametri djelovanja S_{mat} također ovise o skali . Tada će varijacija ukupnog djelovanja $S = S_{EH} + S_{HD} + S_{mat}$, s obzirom na k u principu voditi među ostalim i na ovisnost k o invarijantama vezanima za polja materije. Sljedeći jednostavni primjer lijepo ilustrira moguće posljedice uključivanja materije u proceduru određivanja skale. Neka je ukupno djelovanje

$$S = S_{grav} + S_{skal}\,, \tag{4.43}$$

gdje je

$$S_{grav} = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{R}{16\pi G_k}\,, \tag{4.44}$$

djelovanje za gravitacijsko polje, a

$$S_{skal} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - V_k\right), \tag{4.45}$$

djelovanje za skalarno polje. Varijacijom djelovanja po metričkom tenzoru slijedi

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - (g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\mu\nabla_\nu)F(R) = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\,. \tag{4.46}$$

Ovdje je

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{skal}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{4.47}$$

tenzor energije-impulsa skalarnog polja te su jednadžbe gibanja

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= -8\pi G_k(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + g_{\mu\nu}V_k - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi) \\ &+ G_k(g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\mu\nabla_\nu)\frac{1}{G_k}\,. \end{aligned} \tag{4.48}$$

S druge strane varijacijom djelovanja po skalarnom polju ϕ dobije se

$$\Box\phi + \frac{\partial V_k(\phi)}{\partial\phi} = 0\,. \tag{4.49}$$

Za FRW linijski element gornja se jednadžba svodi na

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V_k(\phi)}{\partial\phi} = 0\,. \tag{4.50}$$

Varijacija djelovanja s obzirom na polje k daje

$$\frac{R}{16\pi}\left(\frac{1}{G_k}\right)' - V'(k) = 0\,, \tag{4.51}$$

gdje u ovom slučaju $'$ označava derivaciju s obzirom na k. Napišimo (4.48) u nešto drugačijem obliku

$$\begin{aligned} \frac{G_{\mu\nu}}{G(k)} &= -8\pi(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + g_{\mu\nu}V_k - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi) \\ &+ (g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\mu\nabla_\nu)\frac{1}{G_k}\,. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Djelovanjem kovarijantne derivacije ∇^ν dobije se

$$\begin{aligned} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\nabla^\nu G(k)^{-1} &= -8\pi\nabla^\nu(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + g_{\mu\nu}V_k - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi) \\ &+ R_{\mu\nu}\nabla^\nu G(k)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Nadalje

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\nabla^\nu G(k)^{-1} &= -8\pi\nabla^\nu(\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + g_{\mu\nu}V_k - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi) \\ &= -8\pi\Big[(\nabla^\nu\nabla_\mu\phi)\nabla_\nu\phi + (\nabla_\mu\phi)(\Box\phi) \\ &+ \nabla_\mu V(k) - (\nabla_\mu\nabla^\beta\phi)(\nabla_\beta\phi)\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Kako vrijedi

$$\frac{\partial V(k)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial V(k)}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial x^\mu} + \frac{\partial V(k)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\,, \tag{4.55}$$

upotrebom jednadžbe gibanja za skalarno polje ϕ slijedi

$$-\frac{1}{2}R\nabla_\mu\left(\frac{1}{G(k)}\right) + 8\pi\frac{\partial V(k)}{\partial k}\nabla_\mu k = 0\,, \tag{4.56}$$

što je s obzirom na skalarnu prirodu k ekvivalentno uvjetu (4.51). Za konkretan potencijal prethodna jednadžba daje vezu k i ostalih fizikalnih veličina. Osim odabira potencijala nužno je poznavati i ovisnost parametara o k . U fiksnoj točki (ako ona postoji) skaliranje parametara određeno je njihovom dimenzijom

$$\begin{aligned} m(k) &= m_* k \\ \Lambda(k) &= \lambda_* k^2 \\ G(k) &= g_* k^{-2} \end{aligned} \tag{4.57}$$

Za sljedeći, jednostavni potencijal

$$V_k = \rho_k^\Lambda + \frac{1}{2}m^2\phi^2\,, \tag{4.58}$$

dakle, za masivno skalarno polje s minimalnim vezanjem na gravitaciju, iz gore navedenih skaliranja, upotrebom jednadžbe (4.51) slijedi

$$R\frac{2k}{g_*} - 2\frac{4k^3\lambda_*}{g_*} - 16\pi m_*^2 k\phi^2 = 0\,. \tag{4.59}$$

To rezultira izrazom za skalu

$$k^2 = \frac{1}{\lambda_*}\left(\frac{R}{4} - 2\pi g_* m_*^2 \phi^2\right). \tag{4.60}$$

Vratimo li ovaj izraz natrag u polazno djelovanje, dobije se

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[AR^2 + \left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \xi R\phi^2 + \alpha\phi^4\right)\right]. \tag{4.61}$$

Uveli smo pokrate

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{128\pi g_* \lambda_*}, \\ \xi &= \frac{m_*^2}{8\lambda_*}, \\ \alpha &= \frac{1}{2}\frac{\pi g_* m_*^4}{\lambda_*}. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Krenuli smo od Einstein-Hilbert djelovanja za gravitaciju s kozmološkom konstantom i minimalno vezanim skalarnim poljem. Primjena procedure određivanja skale u režimu fiksne točke rezultira efektivnim djelovanjem za gravitaciju R^2 oblika te neminimalno vezanim skalarnim poljem, a pojavio se i član samointerakcije ϕ^4. Sličan je zaključak i rezultat istraživanja u sklopu proučavanja asimptotski sigurne gravitacije primjenom metode egzaktne jednadžbe renormalizacijske grupe [102]. Ovo samo dodatno pokazuje koliko je previše pojednostavljeno gledati proizvoljan izbor ovisnosti skale o samo jednoj invarijanti, to jest Ricci skalaru. U sljedećim odlomcima razmotrit ćemo još neke od posljedica određivanja skale na razini djelovanja.

4.4 Mala efektivna kozmološka konstanta

Već je spominjano kako je jedan od najzahtjevnijih problema u teorijskoj fizici mali iznos mjerene kozmološke konstante u odnosu na očekivanja koja proizlaze iz razmatranja teorije polja. Ovisnost parametara o skali, zajedno s metodom njenog određivanja može voditi na eksponencijalno potisnutu vrijednost efektivne kozmološke konstante. U formalizmu kvantne teorije polja u zakrivljenom prostor-vremenu imali smo sljedeću ovisnost ρ_Λ [55],

$$\rho_{\Lambda,k} = c_0 + c_2 k^2, \tag{4.63}$$

gdje su c_0 i c_2 realne konstante. Newtonova konstanta ima logaritamski oblik ovisnosti o k

$$G_k = \frac{G_0}{1 + d_2 \ln\frac{k^2}{k_0^2}}. \tag{4.64}$$

Ovdje su, također d_2 i G_0 realne konstante. Iskoristimo li sada ovisnosti (4.63) i (4.64) u jednadžbi (4.3), dobijemo jednostavnu vezu skale k i Riccijevog skalara.

$$k^2 = \frac{d_2}{16\pi c_2 G_0} R. \tag{4.65}$$

Vratimo li sada ovaj izraz za skalu u relacije za kozmološku konstantu i Newtonovu konstantu imat ćemo

$$\rho_{\Lambda,k} = c_0 + c_2 \chi R \,, \tag{4.66}$$

te

$$G_k = \frac{G_0}{1 + d_2 \ln \frac{R}{R_0}} \,, \tag{4.67}$$

pri čemu je $\chi = d_2/(16\pi c_2 G_0)$. Za FRW prostor-vrijeme, 00 komponenta jednadžbe (4.4) poprima sljedeći oblik

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_k}{3}\left(\rho_{r,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \rho_{m,0}\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}\right) + \frac{\Lambda_k}{3} - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\dot{G}_k}{G_k}\frac{\dot{a}}{a} \,. \tag{4.68}$$

Asimptotski kad $a \to \infty$ slijedi, u prostorno ravnom FRW prostor-vremenu,

$$H^2 = \frac{\Lambda_k}{3} + H\frac{\dot{G}_k}{G_k} \,. \tag{4.69}$$

U deSitter režimu je $H^2 = \mathrm{const}$, te je $R = 12H^2 = \mathrm{const}$ i u tom slučaju (4.69) postaje

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G_k \rho_{\Lambda,k} \,. \tag{4.70}$$

Uvrštavanjem izraza (4.66) i (4.67) za $\rho_{\Lambda,k}$ i G_k dobije se

$$H^2 = \frac{\frac{8\pi G_0}{3} c_0 + 2 d_2 H^2}{1 + d_2 \ln \frac{12H^2}{R_0}} \,. \tag{4.71}$$

U slučaju da c_0 možemo zanemariti, dalje nam slijedi iz (4.71)

$$H^2 \left(1 - \frac{2d_2}{1 + d_2 \ln \frac{12H^2}{R_0}}\right) = 0 \,. \tag{4.72}$$

te u slučaju kada je $H^2 \neq 0$, iz (4.72) slijedi

$$H^2 = \frac{R_0}{12} e^{\frac{2d_2 - 1}{d_2}} \,. \tag{4.73}$$

Možemo primijetiti da će za $d_2 \ll 1$, de Sitter skala H biti eksponencijalno potisnuta u odnosu na R_0. Sličan zaključak dosegnut je i u radu [103] gdje je međutim za ovisnost parametra o skali *pretpostavljen* oblik β funkcije

$$\beta(\alpha) = -\alpha^2 \tag{4.74}$$

po uzoru na kvantnu kromodinamiku. Ovdje je $\alpha = 8\pi G m_{pl}^2$. K tome je u radu [103] i skala renormalizacijske grupe *proizvoljno* identificirana s Riccijevim skalarom.

4.5 Efektivni tenzor energije-impulsa

Istražimo ovdje i činjenicu da ovisnost parametara o skali nije jedini način na koji kvantne korekcije utječu na ponašanje teorije. Jednadžbe gibanja se ne razlikuju od klasičnih jednadžbi opće teorije relativnosti (4.4) samo po tome. Pojavljuje se i novi član u tim jednadžbama $\Delta t_{\mu\nu}$.

$$\Delta t_{\mu\nu} = G_k(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\frac{1}{G_k} = G_k \left(-g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \left(\nabla_\beta \frac{1}{G_k} \right) + \nabla_\mu \left(\nabla_\nu \frac{1}{G_k} \right) \right) \quad (4.75)$$

Korištenjem relacije (4.8) možemo pisati

$$\nabla_\mu \frac{1}{G_k} = \frac{2}{R} \nabla_\mu \left(\frac{\Lambda_k}{G_k} \right) , \quad (4.76)$$

te slijedi

$$\Delta t_{\mu\nu} = G_k \left(-g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \left(\frac{2}{R} \nabla_\beta \left(\frac{\Lambda_k}{G_k} \right) \right) + \nabla_\mu \left(\frac{2}{R} \nabla_\nu \left(\frac{\Lambda_k}{G_k} \right) \right) \right) . \quad (4.77)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta t_{\mu\nu} &= -16\pi G_k \left(g_{\mu\nu} \frac{1}{R} \Box \rho_\Lambda - g_{\mu\nu} \frac{1}{R^2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta \rho_\Lambda \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R^2} \nabla_\mu R \nabla_\nu \rho_\Lambda - \frac{1}{R} \nabla_\mu \nabla_\nu \rho_\Lambda \right) . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Time efektivni tenzor energije-impulsa postaje

$$T^{eff}_{\mu\nu} = 2 \left(-g_{\mu\nu} \frac{1}{R} \Box \rho_\Lambda + g_{\mu\nu} \frac{1}{R^2} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha R \nabla_\beta \rho_\Lambda - \frac{1}{R^2} \nabla_\mu R \nabla_\nu \rho_\Lambda + \frac{1}{R} \nabla_\mu \nabla_\nu \rho_\Lambda \right) , \quad (4.79)$$

Ukupni je tenzor energije-impulsa tada $T^{tot}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \rho_\Lambda g_{\mu\nu} + T^{eff}_{\mu\nu}$, a zanimljivo je da efektivni tenzor energije-impulsa ovisi samo o ponašanju ρ_Λ s obzirom na skalu. U nastavku ćemo vidjeti primjer korištenja gornjeg efektivnog tenzora za fenomenološko modeliranje polazeći od Ansatza za ρ_Λ kao funkcije od R.

4.5.1 Popravke preko potencija od R

Zapišimo najprije relaciju (4.3) na sljedeći način

$$R \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{G_k} \right) = 16\pi \frac{d\rho_{\Lambda,k}}{dR} . \quad (4.80)$$

Želimo li fenomenološki model možemo jednu od funkcija $\rho_{\Lambda,k}$ ili G_k zadati preko R. Drugu zatim možemo naći korištenjem (4.80). Uzmimo za primjer Ansatz u kojem popravku kozmološkoj konstanti $\rho_{\Lambda,k}$ modeliramo nekom potencijom od R,

$$\rho_{\Lambda,k} = \rho^*_\Lambda + \frac{C}{R^\alpha} . \quad (4.81)$$

Ovdje su ρ_Λ^*, C te α realne konstante. Korištenjem relacije (4.80), za G_k slijedi

$$\frac{1}{G_k} = \frac{1}{G_*} + 16\pi C \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{R^{\alpha+1}} , \tag{4.82}$$

gdje je G_* realna konstanta. Relacije (4.81) i (4.82) nam omogućavaju izraziti djelovanje (4.2) na sljedeći način:

$$\frac{R - 2\Lambda_k}{16\pi G_k} = \frac{R}{16\pi G_*} - \frac{1}{\alpha+1} \frac{C}{R^\alpha} - \rho_\Lambda^* . \tag{4.83}$$

U nastojanju objašnjavanja ubrzanog širenja svemira često se razmatraju $f(R)$ modificirana gravitacijska djelovanja koja imaju povoljna fenomenološka svojstva. Jedno od prvih djelovanja predloženih u tu svrhu u radovima [32, 33] upravo je oblika (4.83). Međutim, relacija (4.83) je rezultat pretpostavke iskazane jednadžbom (4.81) gdje je već na početku uvedena ovisnost o R, pa rezultat i ne iznenađuje. Ono što nas uistinu zanima je, postoje li ovisnosti $\rho_{\Lambda,k}$ ili G_k koje bi identifikacijom skale k preko Riccijevog skalara vodile na relacije (4.81), (4.82) te (4.83)? Pretpostavimo

$$\rho_{\Lambda,k} = A_1 + B_1 k^\gamma \tag{4.84}$$

i

$$\frac{1}{G_k} = A_2 + B_2 k^\delta . \tag{4.85}$$

Relacija za izbor skale (4.3) rezultira izrazom

$$k = \left(\frac{1}{16\pi} \frac{\delta}{\gamma} \frac{B_2}{B_1} R \right)^{\frac{1}{\gamma-\delta}} . \tag{4.86}$$

Uvrštavanjem ovog rezultata za k u (4.84) i (4.85) dobije se

$$\rho_{\Lambda,k} = A_1 + B_1 \left(\frac{1}{16\pi} \frac{\delta}{\gamma} \frac{B_2}{B_1} \right)^{\frac{1}{1-\delta/\gamma}} R^{\frac{1}{1-\delta/\gamma}} \tag{4.87}$$

i

$$\frac{1}{G_k} = A_2 + B_2 \left(\frac{1}{16\pi} \frac{\delta}{\gamma} \frac{B_2}{B_1} \right)^{\frac{\delta/\gamma}{1-\delta/\gamma}} R^{\frac{\delta/\gamma}{1-\delta/\gamma}} . \tag{4.88}$$

Vidljivo je iz relacija (4.87) i (4.88) da je ovakvim izborom reproducirana struktura (4.81) i (4.82) za

$$\frac{1}{1-\delta/\gamma} = -\alpha . \tag{4.89}$$

Dakle, željene ovisnosti postoje i nisu komplicirane. Ako je $\alpha > 0$ (4.89) je zadovoljena ako vrijedi $\delta/\gamma > 1$. Dva su načina da ovaj zahtjev bude zadovoljen. Jedan je $\delta > \gamma > 0$, a drugi $\delta < \gamma < 0$. Važno je da se negativne potencije od R u efektivnom djelovanju za gravitaciju javljaju čak i ako nisu nametnute odmah u relacijama (4.84) i (4.85). Dapače, efektivno djelovanje ih može sadržavati čak i za pozitivne vrijednosti γ i δ. Zapisana na drugi način (4.89) daje

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha+1}{\alpha} . \tag{4.90}$$

Time možemo (4.87) i (4.88) zapisati na sljedeći način

$$\rho_{\Lambda,k} = A_1 + B_1 \left(\frac{1}{16\pi} \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{B_2}{B_1} \right)^{-\alpha} \frac{1}{R^\alpha} \tag{4.91}$$

i

$$\frac{1}{G_k} = A_2 + 16\pi \frac{\alpha}{\alpha + 1} B_1 \left(\frac{1}{16\pi} \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{B_2}{B_1} \right)^{-\alpha} \frac{1}{R^{\alpha+1}} \, . \tag{4.92}$$

Identifikacija $A_1 = \rho_\Lambda^*$, $C = B_1 \left(\frac{1}{16\pi} \frac{\alpha+1}{\alpha} \frac{B_2}{B_1} \right)^{-\alpha}$ i $A_2 = 1/G_*$ u potpunosti vodi na relacije (4.81) i (4.82).

4.6 Određivanje skale u fiksnim točkama

Vidjeli smo u drugom poglavlju kako je postojanje netrivijalnih fiksnih točaka jedan od bitnih elemenata asimptotske sigurnosti neke teorije. Dimenzionalnost parametara u djelovanju, poput G_k i Λ_k, određuje njihovo skaliranje u fiksnoj točki. Primjena procedure određivanja skale u tom slučaju vodi na univerzalno modificirano djelovanje.

4.6.1 NG fiksna točka za Einstein-Hilbert djelovanje

Ako se zadržimo na djelovanju koje uključuje samo Einstein-Hilbert član (4.2) imat ćemo

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R - 2\Lambda_k}{16\pi G_k} \, . \tag{4.93}$$

Skaliranja kozmološke i Newtonove konstante u NG fiksnoj točki su

$$G_k = \frac{g^*}{k^2} \, , \qquad \Lambda_k = \lambda^* k^2 \, . \tag{4.94}$$

Korištenjem (4.3) dolazimo do relacije

$$\frac{2k}{g^*} (\partial_\mu k)(R - 4\lambda^* k^2) = 0 \, . \tag{4.95}$$

Za $\partial_\mu k \neq 0$ slijedi

$$k^2 = \frac{R}{4\lambda^*} \, . \tag{4.96}$$

Posljedica toga su relacije $\Lambda_k = \frac{R}{4}$ i $G_k = \frac{4g^*\lambda^*}{R}$. Ako ove rezultate sada iskoristimo u jednadžbi (4.93) dobit ćemo modificirano djelovanje za gravitaciju oblika

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{R^2}{128\pi g^* \lambda^*} \, . \tag{4.97}$$

U odsutnosti materije ili ako je doprinos materije moguće zanemariti, jasno se očituje univerzalnost ovog djelovanja. Naime, tada točne vrijednosti konstanti g^* i λ^* ne igraju nikakvu ulogu s obzirom da su samo dio konstante koja množi cijelo djelovanje. Samim time ne ulaze u jednadžbe gibanja. Ponašanje sustava u blizini netrivijalne fiksne točke g^* i λ^* je, dakle, opisano $f(R)$ modificiranim djelovanjem, točnije $f(R) = R^2$ djelovanjem. Korištenjem kvalitativno odabranog Ansatza $k^2 \sim R$ u radovima [104, 105] detaljno je argumentirana važnost ovog člana u efektivnom djelovanju. Ovdje je ovisnost $k^2 \sim R$ zajedno sa koeficijentom proporcionalnosti određena sustavnom procedurom.

4.6.2 NG fiksna točka za djelovanja s dodatnim potencijama od R

Razmotrimo djelovanje za gravitaciju s dodatnim potencijama od R oblika

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\sum_{m=0}^{n} c_{k,m}R^m \,, \tag{4.98}$$

U fiksnoj točki skaliranje koeficijenata određeno je njihovom dimenzionalnošću $c_{k,m}$

$$c_{k,m} = a_m k^{4-2m} \,, \tag{4.99}$$

gdje su a_m bezdimenzionalni koeficijenti. Iz uvjeta za izbor skale (4.3) imat ćemo

$$\sum_{m=0}^{n}(4-2m)a_m\left(\frac{R}{k^2}\right)^m = 0\,. \tag{4.100}$$

Definirajmo polinom $P(x) = \sum_{m=0}^{n}(4-2m)a_m x^m$ i nazovimo nul-točke x_l, $P(x_l) = 0\,,(l = 1, 2, ..., n)$. Primjenom procedure za određivanje skale dobit ćemo

$$k^2 = \frac{R}{x_l}\,. \tag{4.101}$$

Uvrštavanjem ovog rezultata u djelovanje (4.98) dobije se

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}R^2\sum_{m=0}^{n} a_m x_l^{m-2}\,. \tag{4.102}$$

Dakle, ponovo se dobije djelovanje oblika R^2. I ovdje je jasno da, u slučaju kada je doprinos materije moguće zanemariti, djelovanje pokazuje univerzalna svojstva u NG fiksnoj točki. Opet su točne vrijednosti konstanti a_m nevažne jer sve ulaze u konstantu ($\sum_{m=0}^{n} a_m x_l^{m-2}$) koja množi cijelo djelovanje bez posljedica po dinamiku. Isto tako je jasno da ovaj rezultat vrijedi za bilo koji n, pa čak i za jako veliki n, to jest kad polinom efektivno postaje razvoj u red potencija od R.

4.6.3 Djelovanje za ovisnost parametara o općenitoj potenciji skale

Za ovisnost parametara o općenitoj potenciji skale u Einstein-Hilbert djelovanju

$$G_k = \frac{A_1}{k^\beta}\,, \quad \Lambda_k = A_2 k^\alpha\,, \tag{4.103}$$

iz određivanja skale (4.3) imat ćemo

$$k = \left(\frac{\beta}{2(\alpha+\beta)} \frac{R}{A_2} \right)^{1/\alpha} . \tag{4.104}$$

Polazno djelovanje, korištenjem ovog rezultata, postaje

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi A_1} \left(\frac{\beta}{2(\alpha+\beta) A_2} \right)^{\beta/\alpha} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} R^{(\alpha+\beta)/\alpha} . \tag{4.105}$$

Efektivno djelovanje (4.105) je oblika R^n. Rješenja odgovarajućih jednadžbi gibanja dana su u radu [106] te također u radu [107] primjenom drugačijeg pristupa koji će biti predstavljen u sljedećem poglavlju.

5. Dinamika u fiksnoj točki

U prethodnom poglavlju vidjeli smo kako primjena metode određivanja skale o kojoj ovise efektivne konstante vezanja upotrijebljena polazeći od samog djelovanja može voditi na pojavu $f(R)$ članova koji su sastavni dio teorija modificirane gravitacije. Od interesa je stoga pogledati kakvom dinamikom rezultiraju takvi članovi. Metodu nalaženja dinamike predstavit ćemo slijedeći izlaganja u radu [107].
Djelovanje je za $f(R)$ teorije sljedeće

$$S_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}f(R)\,. \tag{5.1}$$

Variramo li ukupno djelovanje $S = S_{\rm grav} + S_{\rm mat}$, gdje je $S_{\rm mat}$ djelovanje materije, s obzirom na metriku $g^{\mu\nu}$, dobijemo ove jednadžbe gibanja (vidjeti dodatak D):

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f'(R) = -8\pi G T_{\mu\nu}\,. \tag{5.2}$$

Za FRW metriku (i ravan $3D$ prostor) 00 komponenta jednadžbe (5.2) je

$$3f'(R)H^2 - \frac{1}{2}(Rf'(R) - f(R)) + 3H\dot{R}f''(R) = 8\pi G\rho\,. \tag{5.3}$$

Za prostorno ravna, te prostorno zakrivljenja FRW prostor-vremena rješenja ovih jednadžbi za djelovanja oblika $R^{1+\delta}$ uspio je naći Clifton [28]. On se koristio prilično složenom metodom gdje najprije reformulira $f(R)$ teorije pomoću skalarnog polja te zatim, brojnim kompliciranim zamjenama varijabli uspijeva doći do rješenja. Općeniti pristup nalaženju analitičkih rješenja $f(R)$ teorija koji ovdje predstavljamo prilazi problemu s posve drugog gledišta. Oslanjajući se na strukturu Riccijevog skalara u FRW prostor-vremenu poći će nam za rukom problem rješavanja jednadžbe trećeg reda za faktor skale FRW metrike $a(t)$ svesti na problem rješavanja triju jednadžbi prvog reda i to najprije za nalaženje ovisnosti $R(H)$, zatim $H(t)$ i na kraju $a(t)$. Važno je da pri tome jednadžbe ne treba rješavati kao sustav vezanih jednadžbi prvog reda.

5.1 Opis metode

Razmotramo vakuumska rješenja za $3D$ ravne prostore ($k = 0$). U tom je slučaju potrebno riješiti jednadžbu

$$3F(R)H^2 = \frac{1}{2}(F(R)R - f(R)) - 3H\dot{F}(R)\,, \tag{5.4}$$

pri čemu je $F(R) = f'(R)$, a $'$ označava derivaciju s obzirom na R. Točkom su označene derivacije s obzirom na kozmičko vrijeme. Za FRW metriku Riccijev je skalar

$$R = 6\dot{H} + 12H^2\,. \tag{5.5}$$

Možemo prijeći sa varijable t na H ako promatramo intervale kozmičkog vremena za koje je $H(t)$ monotona funkcija od t

$$\frac{d}{dt} = \dot{H}\frac{d}{dH} = \left(\frac{R}{6} - 2H^2\right)\frac{d}{dH}\,. \tag{5.6}$$

Uvrstimo li (5.6) u (5.4) dobit ćemo

$$3H\left(\frac{R}{6} - 2H^2\right)f''(R)\frac{dR}{dH} = \frac{1}{2}(f'(R)R - f(R)) - 3H^2 f'(R)\,. \tag{5.7}$$

Ovo je jednadžba koja nam omogućuje nalaženje funkcije $R(H)$. Jednom kad to napravimo, iskorištavamo jednadžbu (5.5) iz koje želimo doći do funkcije $H(t)$. Funkciju $a(t)$ nalazi se iz definicije Hubbleovog parametra. Sam oblik $f(R)$ funkcije odredit će koji će od prethodno navedenih koraka biti moguće načiniti analitički.

5.2 Primjene

Ilustraciju metode prikazat ćemo razmatrajući R^α teorije. Ove su teorije intenzivno izučavane u sklopu istraživanja modificirane gravitacije gdje modeli koji sadrže negativne potencije α mogu voditi na ubrzano širenje kasnog svemira. Veliki je broj takvih modela isključen na osnovu opažanja. No, u svjetlu rezultata prethodnog poglavlja gdje smo za univerzalno djelovanje u fiksnoj točki dobili upravo R^α oblik, točnije $\alpha = 2$ djelovanje, interesantno ih je razmotriti. Podsjetimo, ograničit ćemo se na prostorno ravne metrike ($k = 0$) bez materije, to jest vakuumska rješenja u 3D ravnim prostorima.

5.2.1 $f(R) = AR^\alpha$

Za ovako odabranu $f(R)$ iz jednadžbe (5.7) slijedi

$$\alpha(\alpha-1)(R - 12H^2)H\frac{dR}{dH} = (\alpha-1)R^2 - 6\alpha H^2 R\,. \tag{5.8}$$

Uvođenjem zamjene $R = \xi H^2$, možemo gornju jednadžbu zapisati u separiranom obliku

$$\frac{dH}{H} = \frac{\alpha}{1-2\alpha}\frac{\xi - 12}{\xi(\xi+\beta)}d\xi\,, \tag{5.9}$$

pri čemu je

$$\beta = \frac{6\alpha(4\alpha-5)}{(\alpha-1)(1-2\alpha)}\,. \tag{5.10}$$

Nadalje

$$\frac{\xi - 12}{\xi(\xi+\beta)} = \frac{C_1}{\xi} + \frac{C_2}{\xi+\beta} = \frac{(C_1+C_2)\xi + C_1\beta}{\xi(\xi+\beta)}\,, \tag{5.11}$$

i slijedi

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1\,, \\ C_1 &= -\frac{12}{\beta}\,, \\ C_2 &= 1 + \frac{12}{\beta}\,. \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Jednadžbu (5.9) možemo odmah integrirati i dobiti rješenje u zatvorenom obliku

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^{(1-2\alpha)/\alpha} = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{-12/\beta} \left(\frac{\xi+\beta}{\xi_0+\beta}\right)^{1+12/\beta} . \qquad (5.13)$$

Ovime smo dobili parametarski oblik ovisnosti $R(H)$. $H(\xi)$ je dana rješenjem (5.13), a onda možemo iskoristiti našu definiciju $R(\xi) = \xi H^2(\xi)$ kako bismo odredili $R(\xi)$. Za neke vrijednosti α moguće je invertirati jednadžbu (5.13) te naći eksplicitno oblik funkcije $R = R(H)$. Ako definiramo

$$K = \frac{\xi_0^{C_1}(\xi_0+\beta)^{C_2}}{H_0^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}}\,, \qquad (5.14)$$

(5.13) se može napisati kao

$$\xi^{C_1}(\xi+\beta)^{C_2} = KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\,. \qquad (5.15)$$

Pogledajmo neke posebne slučajeve:

1. Za $C_1 = -2C_2$ slijedi $C_2 = -1$ i $C_1 = 2$ te je jednadžba (5.15) u tom slučaju

   $$\xi^2(\xi+\beta)^{-1} = KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\,, \qquad (5.16)$$

   Rješenja su

   $$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\left(1 \pm \sqrt{1 - 24K^{-1}H^{-\frac{1-2\alpha}{\alpha}}}\right)\,. \qquad (5.17)$$

   Iz ovoga slijedi rješenje za R

   $$R_{1,2} = \frac{K}{2}H^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 \pm \sqrt{1 - 24K^{-1}H^{-\frac{1-2\alpha}{\alpha}}}\right)\,, \qquad (5.18)$$

   gdje su

   $$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}\,. \qquad (5.19)$$

2. Za $C_2 = -2C_1$ slijedi $C_1 = -1$ i $C_2 = 2$ pa je tada (5.15)

   $$\xi^{-1}(\xi+\beta)^2 = KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\,, \qquad (5.20)$$

   To vodi na rješenja

   $$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-24 + KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \pm \sqrt{\left(KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} - 48\right)KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}}\right)\,, \qquad (5.21)$$

te je

$$R_{1,2} = \frac{1}{2}H^2 \left(-24 + KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \pm \sqrt{\left(KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} - 48\right) KH^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}} \right), \tag{5.22}$$

gdje su

$$\alpha_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{57}}{16}. \tag{5.23}$$

3. Za $C_1 = C_2 = \frac{1}{2} = -\frac{12}{\beta}$ slijedi $\beta = -24$, a α poprima sljedeće kompleksne vrijednosti:

$$\alpha_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{-15}}{8}. \tag{5.24}$$

Za neke vrijednosti parametra α moguće je naći rješenje jednadžbe (5.8) direktnim uvrštavanjem tih vrijednosti. Radi se o vrijednostima $\alpha = 1/2, 5/4$. Rezultati su: za $\alpha = 1/2$

$$H = H_0 e^{\frac{1}{36}(\xi - \xi_0)} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{-\frac{1}{3}}, \tag{5.25}$$

te za $\alpha = 5/4$

$$H = H_0 e^{10\frac{(\xi - \xi_0)}{\xi\xi_0}} \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{-\frac{5}{6}}, \tag{5.26}$$

gdje je $R = \xi H^2$. Za različite vrijednosti α moguće je naći karakteristične intervale i vrijednosti, a oni su konkretno: $(\infty, 0)$, $[0, 1/2)$, $1/2$, $(1/2, 1)$, $[1, 5/4)$, $5/4$, $(5/4, 2)$ i $[2, \infty)$. Možemo ih odrediti analizom jednadžbe (5.13) te služeći se definicijom parametra β.

5.2.2 Djelovanje kvadratično u R

Najviše nas zanima djelovanje kvadratično u Riccijevom skalaru kao univerzalno djelovanje u fiksnoj točki. No, postoje i drugi razlozi zbog kojih je interesantno promatrati takvo djelovanje. Jedan od razloga je i činjenica da je R^2 član dio djelovanja jednog od najpoznatijih modela inflacije, modela Starobinskog [108]. R^2 član je i dio nedavnih razmatranja zračenjem dominirane epohe u razvoju svemira u radu [109]. Među ostalima taj je član sadržan u djelovanju za vakuum u kvantnoj teoriji polja u zakrivljenom prostor-vremenu.
Ako se u jednadžbu (5.7) uvrsti $f(R) = AR^2$ (pri čemu je A realna konstanta) dobije se

$$H(R - 12H^2)\frac{dR}{dH} = \frac{1}{2}R(R - 12H^2). \tag{5.27}$$

Vrijedi, stoga

$$(R - 12H^2)\left(H\frac{dR}{dH} - \frac{1}{2}R\right) = 0. \tag{5.28}$$

Dokle god je $R - 12H^2 \neq 0$ (H se mijenja u vremenu) jednadžba koju treba riješiti je

$$H\frac{dR}{dH} = \frac{1}{2}R. \tag{5.29}$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$R(H) = R_0 \left(\frac{H}{H_0}\right)^{1/2}, \tag{5.30}$$

uz $R(H_0) = R_0$ kao početni uvjet. Jednadžba (5.5) postaje

$$\frac{dH}{dt} = \frac{R_0}{6}\left(\frac{H}{H_0}\right)^{1/2} - 2H^2, \tag{5.31}$$

i ima rješenje:

$$\begin{aligned} H_0(t-t_0) &= -\frac{1}{6\chi^{2/3}} \ln \frac{(\chi^{1/3} - (H/H_0)^{1/2})^2}{\chi^{2/3} + \chi^{1/3}(H/H_0)^{1/2} + (H/H_0)} \\ &+ \frac{1}{\chi^{2/3}\sqrt{3}} \arctan \frac{2(H/H_0)^{1/2} + \chi^{1/3}}{\chi^{1/3}\sqrt{3}} \\ &+ \frac{1}{6\chi^{2/3}} \ln \frac{(\chi^{1/3}-1)^2}{\chi^{2/3} + \chi^{1/3} + 1} - \frac{1}{\chi^{2/3}\sqrt{3}} \arctan \frac{2+\chi^{1/3}}{\chi^{1/3}\sqrt{3}}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

gdje je $\chi = R_0/(12H_0^2)$. Ovime smo dobili implicitnu vezu između H i t. Ovisnost $a(H)$ moguće je dobiti iz definicije Hubbleovog parametra, te korištenjem (5.31) slijedi

$$\frac{da}{a} = \frac{H\,dH}{\dot{H}} = \frac{H\,dH}{\frac{R_0}{6}\left(\frac{H}{H_0}\right)^{1/2} - 2H^2}. \tag{5.33}$$

Integracijom ove jednadžbe dobijemo

$$a = a_0 \left[\frac{\chi - (H/H_0)^{3/2}}{\chi - 1}\right]^{-1/3}. \tag{5.34}$$

Kad se ovaj izraz invertira dobije se

$$H = H_0 \left[\chi - (\chi - 1)\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}\right]^{2/3}. \tag{5.35}$$

Ovaj rezultat se slaže s rezultatom dobivenim upotrebom drugačijeg pristupa u radu [110]. Uvrštavanjem ovog izraza u jednadžbu (5.32) dobit ćemo vezu t i a. Analizom asimptorskog ponašanja ($t \to \infty$), slijedi da je faktor skale neograničen, $a \to \infty$, a Hubbleov parametar poprima konstantnu vrijednost, $H \to \chi^{2/3}H_0$ što se može vidjeti iz jednadžbi (5.32) i (5.35).

Faktorizacija člana $R - 12H^2$ na desnoj strani jednadžbe (5.7) ima presudnu ulogu u nalaženju rješenja za djelovanje kvadratično u R. To se vidi iz jednadžbe (5.28). Pokušajmo vidjeti postoji li još neki oblik funkcije $f(R)$ koji dopušta faktorizaciju ovog člana, odnosno

$$\frac{1}{2}(f'(R)R - f(R)) - 3H^2 f'(R) = \tau(H)\lambda(R)(R - 12H^2), \tag{5.36}$$

gdje su $\tau(H)$ i $\lambda(H)$ proizvoljne funkcije od H i R. Faktoriziranjem člana $R - 12H^2$ možemo jednadžbu separirati. Usporedbom članova s lijeve i desne strane (5.36) slijedi $\tau(H) = konst.$ Kako taj član možemo uključiti u $\lambda(R)$ možemo uzeti $\tau(H) = 1$. Time slijedi

$$\lambda(R) = \frac{1}{4}f'(R), \tag{5.37}$$

te također

$$\frac{1}{2}(f'(R)R - f(R)) = \lambda(R)R\,. \tag{5.38}$$

Relacije (5.37) i (5.38) zajedno vode na rezultat $f(R) = AR^2$. Dakle, faktorizacija faktora (5.36) je moguća samo za kvadratični oblik funkcije $f(R)$.

5.3 Funkcijski oblik $f(R)$ iz poznavanja faktora skale

Pronalaženje rješenja $f(R)$ teorija nije jedini način na koji se opisanu metodu može primjenjivati. Naime može ju se iskoristiti i za nalaženje $f(R)$ teorija koje mogu rezultirati određenim ponašanjem faktora skale $a(t)$. Dakle, postupak je obrnut onome što smo prethodno činili. Polazeći od poznatog oblika funkcije $a(t)$ možemo izračunati $\dot{a}(t)$ što nas onda vodi na funkciju $H(t)$. Ako znamo tu funkciju možemo također naći i $\dot{H}(t)$. To nam omogućuje nalaženje funkcije $R(t)$ primjenom izraza (5.5). Ako je moguće eliminirati vrijeme iz izraza za $\dot{H}(t)$ i $R(t)$ tada je moguće izraziti Hubbleov parametar preko Riccijevog skalara $H^2 = g(R)$. Neki od oblika funkcije $a(t)$ za koje je moguće pronaći funkcije $f(R)$ koje vode na takvo ponašanje su eksponencijalno širenje, $a(t) \sim e^{bt}$, širenje s potencijom od t, $a(t) \sim t^{\beta}$ te singularno ponašanje faktora skale u budućnosti $a(t) \sim 1/(T-t)^m$. Za upoznavanje s drugim pristupima koji razmatraju rekonstrukciju $f(R)$ teorija vidjeti radove [111, 112, 113, 114, 115].

5.3.1 Eksponencijalno širenje

U slučaju eksponencijalnog širenja

$$a(t) = Be^{bt}\,, \tag{5.39}$$

gdje su b i B konstante, vrijedi $H(t) = b$ i $\dot{H}(t) = 0$. Iz toga slijedi $R(t) = 12b^2 = 12H^2$. Jednadžba (5.7) se tada svodi na

$$\frac{1}{2}Rf'(R) = f(R)\,. \tag{5.40}$$

Rješenje je ove jednadžbe $f(R) = CR^2$, to jest kvadratična ovisnost o Riccijevom skalaru koju smo prethodno već razmatrali u pododjeljku 5.2.2. Iz ovog kratkog razmatranja vidljivo je kako $f(R) = R^2$ teorija kao posljedicu ima vječno eksponencijalno širenje kao vakuumsko rješenje u FRW prostor-vremenu.

5.3.2 Širenje s potencijom od t

Za faktor skale opisan potencijom od t

$$a(t) = Dt^{\beta}\,, \tag{5.41}$$

gdje su D i β konstante, slijedi $H(t) = \beta/t$ i $\dot{H}(t) = -\beta/t^2$. Riccijev je skalar stoga $R(t) = 6\beta(2\beta-1)/t^2$. To možemo napisati na sljedeći način $R = \frac{6(2\beta-1)}{\beta}H^2 \equiv \frac{1}{\gamma}H^2$. Tada je jednadžba (5.7) oblika

$$(1-12\gamma)R^2 f''(R) - \frac{1}{2}(1-6\gamma)Rf'(R) + \frac{1}{2}f(R) = 0\,. \tag{5.42}$$

Rješenja ove jednadžbe su $f(R) \sim R^\lambda$ pri čemu za λ vrijedi

$$2\lambda^2 + (\beta-3)\lambda + 1 - 2\beta = 0\,. \tag{5.43}$$

Ovo je rješenje u skladu s rješenjima u radovima [116, 117]. Pogledamo li pažljivije ovu jednadžbu ustanovit ćemo da $\lambda = 2$ nije njeno rješenje za proizvoljni β. Iz prethodnog izraza slijedi

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(3 - \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 10\beta + 1})\,. \tag{5.44}$$

Vrijenostima parametara $\beta > 0$ te $\lambda_1 \neq \lambda_2$ opisan je svemir koji se širi. Faktor skale ovisan o potenciji od t je posljedica funkcije $f(R)$ koja je linearna kombinacija R^{λ_1} i R^{λ_2}. U radu [118] je pokazano da se sličan rezultat dobije i kad se u razmatranja uključi i materija.

5.3.3 Buduće singularnosti

Faktor skale koji posjeduje buduću singularnost u konačnom vremenu $T > t_0$ opisan je relacijom

$$a = \frac{A}{(T-t)^m}\,, \tag{5.45}$$

gdje su A i m pozitivne konstante.

Ovakvo se ponašanje faktora skale može javiti u okviru teorija modificirane gravitacije te u scenarijima koji ubrzano širenje svemira pokušavaju objasniti fantomskom energijom s konstantnom jednadžbom stanja [119]. Relacija (5.45) vodi na izraze za Hubbleov parametar i njegovu derivaciju

$$H = \frac{m}{T-t}\,, \qquad \dot{H} = \frac{m}{(T-t)^2}\,. \tag{5.46}$$

Riccijev skalar je kao funkcija Hubbleovog parametra H dan izrazom:

$$R = \frac{6(2m+1)}{m}H^2\,. \tag{5.47}$$

Jednadžba (5.7) je u tom slučaju

$$2R^2 f''(R) - (m+1)Rf'(R) + (2m+1)f(R) = 0\,, \tag{5.48}$$

te su njena rješenja oblika R^λ pri čemu za λ vrijedi

$$\lambda_{1,2} = \frac{m + 3 \pm \sqrt{m^2 - 10m + 1}}{4}\,. \tag{5.49}$$

Oba rješenja za λ su realna ako je $m < m_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ i $m > m_2 = 5 + 2\sqrt{6}$, te je tada $f(R)$ oblika

$$f(R) = K_1 R^{\lambda_1} + K_2 R^{\lambda_2}\,, \tag{5.50}$$

gdje su $K_{1,2}$ realne konstante. $f(R)$ je oblika $R^{(m_{1,2}+3)/4}$ i $R^{(m_{1,2}+3)/4}\ln R$ za $m = m_{1,2}$. Kompleksno konjugirana rješenja za λ oblika $\lambda_{1,2} = \lambda_R \pm i\lambda_I$ gdje je $\lambda_R = \frac{m+3}{4}$, a $\lambda_I = \frac{1}{4}\sqrt{|m^2 - 10m + 1|}$ dobiju se za $m_1 < m < m_2$. te je u tom slučaju $f(R)$ oblika

$$f(R) = K_3 R^{\lambda_R}\cos(\lambda_I \ln R) + K_4 R^{\lambda_R}\sin(\lambda_I \ln R)\,, \tag{5.51}$$

gdje su $K_{3,4}$ realne konstante. Ovi rezultati slažu se s rezultatima dobivenima u radu [119].

Iz ovih se primjera još jednom očituje prednost ove analitičke metode. Poznavanjem ovisnosti faktora skale o vremenu $a(t)$ za slučajeve za koje je moguće riješiti diferencijalnu jednadžbu za $f(R)$ analitički, moguće je njenom upotrebom dobiti funkcijske zavisnosti $f(R)$ koje u odsutnosti materije i u 3D ravnom FRW prostoru-vremenu vode na takvu dinamiku faktora skale. Na taj je način moguće proučavati modificirane teorije gravitacije koje rezultiraju ponašanjem koje opisuje poznate epohe širenja svemira kao što su razdoblje inflacije, te materijom ili zračenjem dominirane epohe u njegovoj evoluciji.

5.4 Numerička rješenja

U ovom odjeljku ćemo provjeriti valjanost metode usporedbom sa rezultatima koje dobijemo numeričkim metodama. Jednadžba koju je potrebno riješiti (ako zanemarimo doprinos materije) je

$$3F(R)\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(F(R)R - f(R)\right) - 18\frac{\dot a}{a}\frac{dF}{dR}\left(\frac{\dddot a}{a} - \frac{\dot a \ddot a}{a^2} - 2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^3\right)\,. \tag{5.52}$$

Cilj je dobiti izraze za ponašanje faktora skale, Hubbleovog parametra, Riccijevog skalara itd. Uvedimo oznake

$$\dot a = b\,, \tag{5.53}$$

$$\dot b = \ddot a = c\,, \tag{5.54}$$

$$\dot c = \dddot a = \frac{a^2}{18 b \frac{dF}{dR}}\left(\frac{1}{2}(FR - f) - 3F\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{b}{a}\left(c - \frac{2b^2}{a}\right)\,. \tag{5.55}$$

Za klasu $f(R)$ funkcija danu sljedećim izrazom

$$f(R) = \beta R + \alpha (R - R_0)^n\,, \tag{5.56}$$

moguće je izborom parametara α, β, R_0 i n reproducirati neke od teorija s poznatim rješenjima. Kako bi se izbjegle divergencije u (5.55) moramo ovdje izuzeti slučaj opće teorije relativnosti s kozmološkom konstantom koji vodi na $n = 0$ ili $n = 1$ ili $\alpha = 0$. Iz istog se razloga uvodi parametar R_0 za slučaj $n < 0$. Jednadžba (5.55), za ovako odabrani oblik $f(R)$, postaje

$$\begin{aligned} \dot{c} = \ddot{a} &= \frac{a^2}{18b}\frac{1}{an(n-1)}\frac{1}{(R-R_0)^{n-2}}\left(\frac{n-1}{2}\alpha(R-R_0)^n - \right. \\ &- \left. 3\left(\beta + \alpha n(R-R_0)^{n-1}\right)\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{b}{a}\left(c - \frac{2b^2}{a}\right) . \end{aligned} \tag{5.57}$$

Kada kao rezultat numeričkog računa dobijemo veličine $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ možemo naći bilo koju drugu veličinu od interesa, poput $R(t)$, $H(t)$, ili $q(t)$. Time će biti moguće analizirati ostale funkcijske zavisnosti među različitim veličinama koje bi mogle biti zanimljive, na primjer $R(H)$. Radit ćemo s bezdimenzionalnim veličinama. U tu svrhu napišimo $\tau = H_0(t - t_0)$ te je $d\tau = H_0 dt$. Označimo s a_0 vrijednost faktora skale danas i neka je $a = a_0 x$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a_0\dot{x} = a_0 H_0 \tfrac{dx}{d\tau} , \\ \ddot{a} &= a_0 H_0^2 \tfrac{d^2x}{d\tau^2} . \end{aligned} \tag{5.58}$$

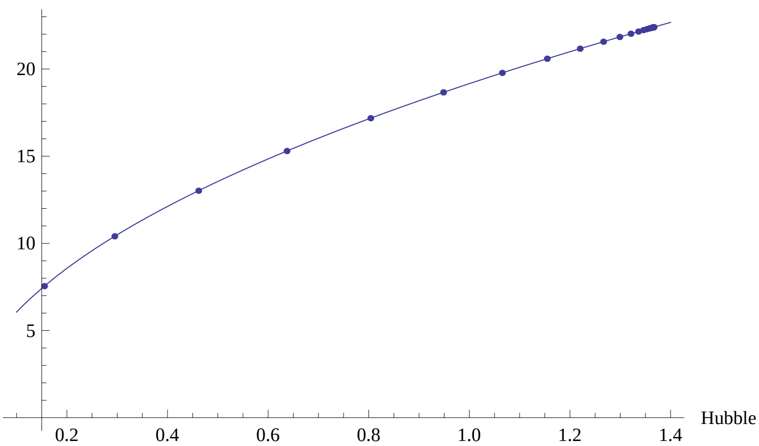
Na sličan se način skaliraju i ostale veličine

$$\begin{aligned} H &= H_0 \tfrac{1}{x}\tfrac{dx}{d\tau} , \\ R &= 6H_0^2\left[\left(\tfrac{1}{x}\tfrac{dx}{d\tau}\right)^2 + \tfrac{1}{x}\tfrac{d^2x}{d\tau^2}\right] . \end{aligned} \tag{5.59}$$

Definirajmo k tome i veličine h i r,

$$h = \frac{H}{H_0} , \qquad r = \frac{R}{H_0^2} . \tag{5.60}$$

U nastavku su uspoređena rješenja R^α teorija dobivena analitičkim putem i upotrebom gore opisanog algoritma. Grafovi 5.1-5.6 prikazuju rezultate usporedbe dviju metoda za neke karakteristične vrijednosti parametra α.



Slika 5.1: Prikaz funkcije $r(h)$ za $f(R) = R^2$

Parametarska ovisnost $R(\xi)$-$H(\xi)$ dobivena korištenjem (5.13) uz $R = \xi H^2$ prikazana je punom linijom dok su rezultati numeričke analize prikazani točkama. Na nekima od grafova 5.1-5.6 možemo uočiti postojanje ekstrema funkcija $H(\xi)$ i/ili $R(\xi)$. Napišimo

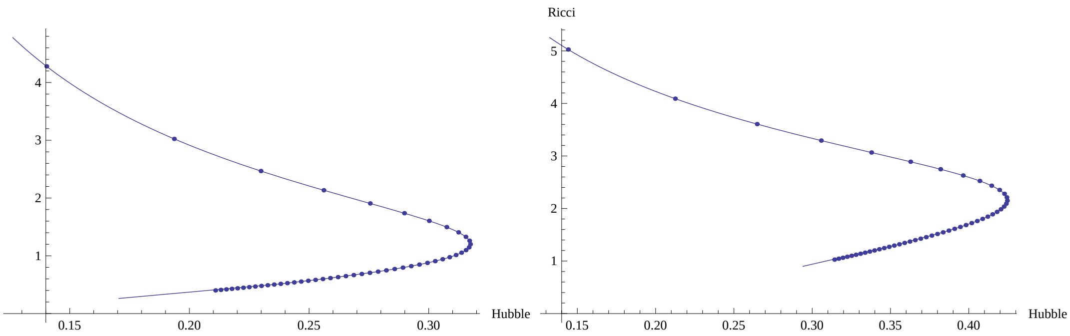
$$H = A\xi^{\gamma_1}(\xi+\beta)^{\gamma_2} \tag{5.61}$$

i

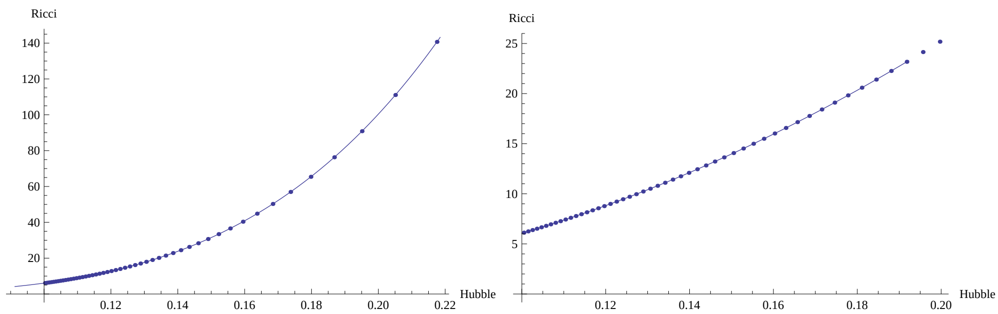
$$R = H^2\xi = B\xi^{2\gamma_1+1}(\xi+\beta)^{2\gamma_2}\,. \tag{5.62}$$

Ovdje su $\gamma_1 = -2\frac{\alpha-1}{4\alpha-5}$ i $\gamma_2 = \frac{\alpha-2}{(4\alpha-5)(1-2\alpha)}$. Odavde slijedi

$$\frac{dR}{dH} = \frac{\frac{dR}{d\xi}}{\frac{dH}{d\xi}} = \frac{B}{A}\xi^{\gamma_1+1}(\xi+\beta)^{\gamma_2}\frac{(2\gamma_1+1)(\xi+\beta)+2\xi\gamma_2}{\gamma_1(\xi+\beta)+\xi\gamma_2}\,. \tag{5.63}$$

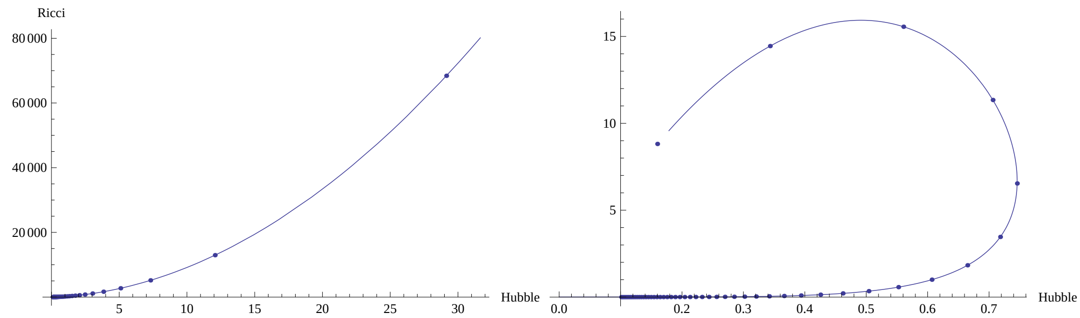


Slika 5.2: Prikaz funkcije $r(h)$ za $f(R) = R^{-1}$ i $f(R) = R^{-2}$

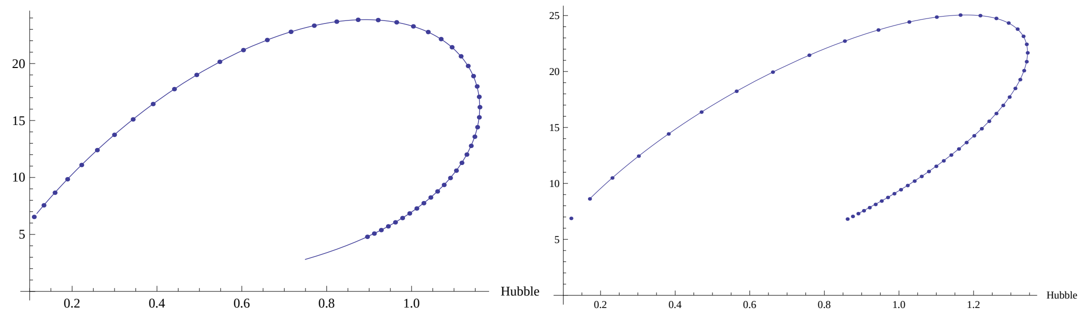


Slika 5.3: Prikaz funkcije $r(h)$ za $f(R) = R^{0.25}$ i $f(R) = R^{0.5}$

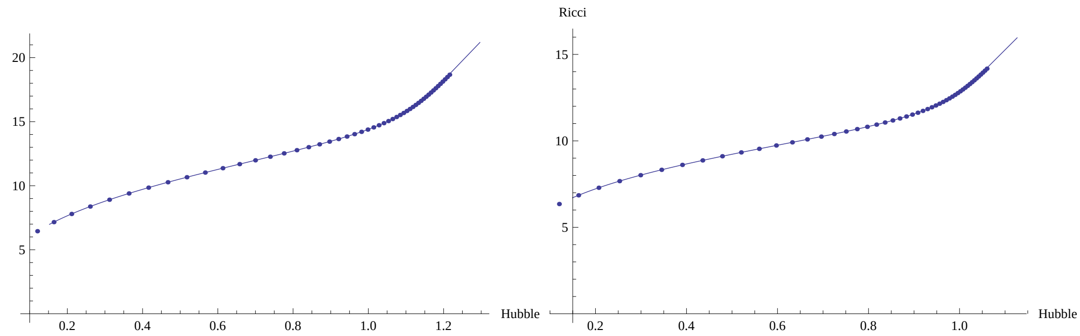
Koji su uvjeti za postojanje ekstrema za R? $\xi = 0$ je ekstrem ako je $\gamma_1 + 1 > 0$ a to je moguće u situaciji kada je $\alpha \in (-\infty, 5/4)\bigcup(3/2, \infty)$. Ako je $\xi = -\beta$ pri čemu je $\gamma_2 > 0$ što odgovara $\alpha \in (-\infty, 1/2)\bigcup(5/4, 2)$ R također ima ekstrem. Postoji i još jedan uvjet za postojanje ekstrema za R, a taj je $\xi = \frac{6\alpha}{\alpha-1}$. Za Hubbleov parametar sličnom analizom dolazimo do zaključka da postoji ekstrem ako je $\gamma_1 + 1 < 0$ što je zadovoljeno za vrijednosti α koje pripadaju intervalu $\alpha \in (5/4, 3/2)$. H ima ekstrem i u situaciji kada je $\xi = -\beta$, a $\gamma_2 < 0$ čemu odgovaraju vrijednosti $\alpha \in (1/2, 5/4)\bigcup(2, \infty)$. Ekstrem u slučaju Hubbleovog parametra postoji još i za $\xi = 12$.



Slika 5.4: Prikaz funkcije $r(h)$ za $f(R) = R^{0.75}$ i $f(R) = R^{1.1}$



Slika 5.5: Prikaz funkcije $r(h)$ za $f(R) = R^{5/4}$ i $f(R) = R^{1.5}$



Slika 5.6: Prikaz funkcije $r(h)$ za $f(R) = R^3$ i $f(R) = R^4$

5.5 $f(R)$ teorije sa zračenjem

U ovom smo poglavlju predstavili novu metodu rješavanja $f(R)$ teorija ograničavajući se na slučaj bez materije. Naznačimo ovdje samo na koji je način moguće razmišljati u slučaju kada je prisutan doprinos materije. Za početak nađimo trag jednadžbe (5.2):

$$Rf'(R) - 2f(R) - 3\Box f'(R) = -8\pi G T\,, \tag{5.64}$$

gdje $T \equiv T^\mu_\mu$ predstavlja trag tenzora energije-impulsa materije.
Za FRW prostor-vrijeme d'Alambertian je

$$\Box = \frac{d^2}{dt^2} + 3H\frac{d}{dt}\,. \tag{5.65}$$

Korištenjem već poznate relacije $\frac{d}{dt} = (\frac{R}{6} - 2H^2)\frac{d}{dH}$, možemo d'Alambertian prikazati pomoću derivacija po Hubbleovom parametru H. Iskoristimo li još i činjenicu da za materiju dominiranu zračenjem trag tenzora energije-impulsa $T = \rho_r - 3p_r$ iščezava, slijedi nam relacija

$$Rf'(R) - 2f(R) - 3\left(\frac{R}{6} - 2H^2\right)\frac{d}{dH}\left[\left(\frac{R}{6} - 2H^2\right)\frac{df'(R)}{dH}\right] - 9H\left(\frac{R}{6} - 2H^2\right)\frac{df'(R)}{dH} = 0\,. \tag{5.66}$$

Ova jednadžba, iako izvedena za $f(R)$ teorije uz zračenjem dominiran doprinos materije vrijedi i za vakuumsko prostor-vrijeme. Tada je, naime, uvjet $T = 0$ trivijalno ispunjen. S obzirom na tu činjenicu ova jednadžba može se pokazati pogodnom za analizu $f(R)$ modela u kojima je prisutan prijelaz iz vakuumom dominirane epohe u zračenjem dominiranu epohu. Naprimjer, pri završetku inflatornog režima nakon kojeg slijedi zračenjem dominirana faza razvoja svemira. Što se pristupa rješavanju jednadžbe tiče i ovdje je moguće problem svesti na tri nezavisne diferencijalne jednadžbe koje je moguće rješavati jednu za drugom s tom razlikom što je ovdje diferencijalna jednadžba za $R(H)$ drugog reda.

6. Zaključak

Naš je svemir protkan tamnim komponentama koje imaju veliki udio u ukupnoj gustoći energije koja je u njemu prisutna. Zasad nema dovoljno uvjerljivog rješenja tih zagonetki lišenog poteškoća. Problem koji je time postavljen pred teorijsku fiziku jako je složen i izazovan. Predloženi su brojni mehanizmi koji pokušavaju rasvijetliti prirodu ovih komponenti. Jedan od pristupa temelji se na učincima kvantnih polja na parametre gravitacijskog međudjelovanja kroz dva teorijska okvira. Jedan je kvantna teorija polja na zakrivljenom (klasičnom) prostor-vremenu, a drugi je kvantna gravitacija formulirana pomoću integrala po putu za metrički tenzor kao jedino polje koje opisuje gravitaciju. U oba slučaja osnovno je polazište odgovarajuće efektivno djelovanje. Postupkom renormalizacije uvodi se ovisnost parametara djelovanja o skali regularizacije. Predviđanja koja slijede daljnjim razmatranjima značajno ovise o izboru fizikalne skale pomoću koje se mogu izraziti efektivne vrijednosti tih parametara. Samim time rezultati se mogu značajno razlikovati, a u literaturi su prisutni različiti, u nekoj mjeri proizvoljni izbori fizikalne skale motivirani kvalitativnim razmatranjima. Pokazuje se kako ovakav pristup, pomoću parametara ovisnih o skali, može upućivati na rješenja nekih problema vezanih uz tamne komponente poput problema male vrijednosti kozmološke konstante, problema koincidencije, ili rotacijskih krivulja galaksija.

Pouzdanost tih rezultata značajno ovisi o izboru skale. Kako bi se uklonila proizvoljnost izbora iste razvijena je sustavna procedura njenog određivanja koja se u prvom redu vodi zahtjevom očuvanja kovarijantnosti razmatrane teorije. Ta je procedura zajedno sa svojim posljedicama središnja tema istraživanja predstavljenih u ovoj disertaciji. Metodu se može primijeniti na razini jednadžbi gibanja ili na razini samog djelovanja. Tako su se, kako u kozmološkim, tako i u astrofizikalnim primjerima neki proizvoljni izbori skale pokazali opravdanima a neki ne. Možemo reći kako ova procedura nekim predviđanjima (s obzirom na odabir skale) daje određenu težinu dok neka druga dovodi pod znak pitanja. Također, pokazano je da djelovanje za gravitaciju ima univerzalno ponašanje u režimu fiksne točke, za teorijski pristup kvantne gravitacije koji se zasniva na pretpostavci njene asimptotske sigurnosti, koje ne ovisi o tome koje su sve potencije Riccijevog skalara prisutne u početnom djelovanju koje je polinom u R. Osim toga, metoda primijenjena na razini djelovanja može pružiti uvid u postojanje nekih modifikacija gravitacije koje imaju povoljna fenomenološka svojstva, ali ne pružaju jasan razlog svome postojanju poput $f(R)$ ili $F(R, \mathcal{G})$ članova u gravitacijskom djelovanju.

Stoga, rezultati ove procedure dodatno osnažuju cjelokupni pristup pomoću parametara ovisnih o skali, te otvaraju nove mogućnosti ideji da se problemi tamnih komponenti mogu riješiti bez potrebe za uvođenjem novih polja, egzotičnih čestica ili oblika materije. To je jako lijepo svojstvo ovakvog pristupa koji svoje polazište nalazi u dobro utemeljenim teorijama.

Ovisnosti parametara o skali renormalizacijske grupe posljedica su razmatranja ponašanja poznatih i tim teorijama opisanih stupnjeva slobode. Svi rezultati koji potom slijede, a mnogi pružaju motivaciju nekim *ad hoc* predloženim modifikacijama gravitacije povoljnih fenomenoloških svojstava, počivaju na identifikaciji skale renormalizacijske grupe koja određuje ponašanje efektivnih konstanti vezanja. Kada činjenici da se ovaj formalizam zasniva na poznatim poljima dodamo i mogućnost sustavnog određivanja skale renormalizacijske grupe predstavljenog u ovoj disertaciji, otvara se široka lepeza mogućnosti razmatranja gorućih problema teorijske fizike koja počiva na dobro utemeljenim postavkama.

Budućnost ovih istraživanja zahtijeva detaljniju analizu samih ovisnosti parametara teorije o skali (jer, kao što je pokazano, identifikacija skale mora uvažiti sve relevantne operatore koji su u skladu sa simetrijama teorije). Može li uvođenje novih operatora pokvariti poželjno svojstvo asimptotske sigurnosti kvantne gravitacije? Ili će identifikacija skale uvažavanjem i tih operatora voditi na još povoljnija fenomenološka svojstva modificiranih djelovanja za gravitaciju ($f(R)$ teorije, mehanizam relaksacije . . .)? Mogu li time dobivene efektivne teorije imati manje problema (naprimjer s postojanjem duhova [120]) s obzirom da polaze od regularnih teorija te nastaju eliminacijom skale k (koja je određena sustavnim putem, uz poštivanje kovarijantnosti) iz izraza za djelovanje? Nedavna istraživanja razmatraju mogućnost opisivanja inflacije bez uvođenja novih skalarnih stupnjeva slobode. Kao polje koje bi u svjetlu primjene metoda renormalizacijske grupe u zakrivljenom prostor-vremenu moglo preuzeti tu ulogu razmatran je Higgsov bozon [121]. Ta je ideja, iako opterećena nekim problemima i suptilnostima [122], jako interesantna. Na koji ju je način moguće realizirati korištenjem metode određivanja skale renormalizacijske grupe? Može li se određivanjem skale kvalitetnije razmotriti slijed epoha u razvoju svemira (kraj inflacije, početak zračenjem dominirane faze, budućnost svemira)? Na to nas razmišljanje potiče, u disertaciji izneseno, zapažanje da uključivanje polja materije u proceduru određivanja skale, osim što mijenja gravitacijsko djelovanje, mijenja i potencijal skalarnog polja pojavom neminimalnog vezanja i samointerakcijskog člana u potencijalu.

Mogućnost barem malog napretka u istraživanjima prirode tamnih komponenti, uz oslanjanje na dobro definirane teorije polja i upotrebu sustavne metode određivanja skale, i više je nego vrijedna nagrada, a ujedno i poticajan motiv za daljnja istraživanja. U ovoj disertaciji izneseni su rezultati razmatranja koja čine korak u tom smjeru te otkrivaju moguće smjerove budućeg istraživačkog rada.

A. Konvencije

U većem dijelu ove disertacije koristi se prirodni sustav jedinica ($\hbar = c = 1$) te sljedeće konvencije. Einstein-Hilbert djelovanje je oblika

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda\right) . \tag{A.1}$$

Varijacijom djelovanja po metričkom tenzoru slijede Einsteinove jednadžbe gibanja

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -8\pi G (T_{\alpha\beta} + \rho_\Lambda g_{\alpha\beta}) , \tag{A.2}$$

gdje je

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} . \tag{A.3}$$

Tenzor energije-impulsa materije definiran je relacijom

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} . \tag{A.4}$$

Signatura metrike je

$$\eta_{\mu\nu} = (+, -, -, -) . \tag{A.5}$$

Definicija Riemannovog tenzora je

$$R^\alpha_{\ \eta\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\eta\beta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\eta\gamma,\beta} + \Gamma^\alpha_{\tau\gamma} \Gamma^\tau_{\eta\beta} - \Gamma^\alpha_{\tau\beta} \Gamma^\tau_{\eta\gamma} , \tag{A.6}$$

pri čemu je koneksija dana izrazom

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) . \tag{A.7}$$

S ∂_α ili $,\alpha$ označavamo parcijalne derivacije s obzirom na koordinatu x^α, a s ∇_α ili $;$ kovarijantne derivacije. Riccijev skalar definiran je na sljedeći način

$$R_{\eta\gamma} = R^\alpha_{\ \eta\alpha\gamma} . \tag{A.8}$$

Bianchijevi su identiteti

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0 . \tag{A.9}$$

Kontrahiranjem indeksa α i μ slijedi

$$R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^\mu_{\ \ \beta\nu\lambda;\mu} = 0 . \tag{A.10}$$

Daljnjom kontrakcijom indeksa β i ν dobije se

$$(R^\mu_{\ \ \lambda} - \frac{1}{2} g^\mu_{\ \ \lambda} R)_{;\mu} = 0 , \tag{A.11}$$

odnosno oblik Bianchijevih identiteta koji je pogodan za upotrebu na razini Einsteinovih jednadžbi te se u ovoj disertaciji često rabi

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0\,, \tag{A.12}$$

gdje je $G^{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor.
FRW metrika relevantna za kozmologiju u ovim je konvencijama

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right)\,. \tag{A.13}$$

Iz Einsteinovih jednadžbi (A.2) slijedi za 00 komponentu Friedmannova jednadžba

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G \left(\frac{\rho + \rho_\Lambda}{3}\right) - \frac{k}{a^2}\,, \tag{A.14}$$

a iz ii komponente jednadžba za faktor skale

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}\,. \tag{A.15}$$

Jedino odstupanje od ovih konvencija prisutno je u odjeljku (2.3) u dijelu u kojem se govori o usrednjenom efektivnom djelovanju gdje je i inače u literaturi, pa tako i ovdje, uobičajenije koristiti metriku euklidske signature

$$\eta^E_{\mu\nu} = (+,+,+,+)\,, \tag{A.16}$$

te definiciju Riemannovog tenzora sa suprotnim predznakom u odnosu na relaciju (A.6).

B. Riemannove normalne koordinate

Općenito je tenzor zakrivljenosti različit od nule. Stoga koneksiju nije moguće svesti na nulu u svim točkama prostora. No uvijek je moguće naći sustav koordinata, takav da je u nekoj točki koneksija nula.

$$\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)_P = 0\,. \tag{B.1}$$

Za takav sustav koordinata kažemo da je geodetski u točki P. Neka su u nekom koordinatnom sustavu x^α koordinate točke P jednake $\mathring{x}^\alpha$. Konstruirajmo nove koordinate na sljedeći način

$$x^{\alpha'} = C^{\alpha'}_{\beta}(x^\beta - \mathring{x}^\beta) + \frac{1}{2}C^{\alpha'}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}(\mathring{x})(x^\beta - \mathring{x}^\beta)(x^\gamma - \mathring{x}^\gamma)\,, \tag{B.2}$$

gdje su $C^{\alpha'}_{\beta}$ konstante različite od nule, inače proizvoljne. Deriviranjem i izvrednjavanjem u točki P slijedi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right)_P &= C^{\alpha'}_{\beta}\,,\\ \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\right)_P &= C^{\alpha'}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}(\mathring{x}^\alpha)\,.\end{aligned} \tag{B.3}$$

Kako bi bilo zadovoljeno

$$\left(\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\right)_P = 0\,, \tag{B.4}$$

nužan i dovoljan uvjet jest

$$(A^{\alpha'}_{\omega}A^{\tau}_{\beta'}A^{\rho}_{\gamma'}\Gamma^{\omega}_{\tau\rho} + A^{\alpha'}_{\omega}\partial_{\beta'}A^{\omega}_{\gamma'})_P = 0\,. \tag{B.5}$$

Koristimo pokratu

$$A^{\alpha'}_{\beta} = \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right)_P\,. \tag{B.6}$$

Kontrahiramo li ovaj izraz sa

$$A^{\beta'}_{\lambda}A^{\gamma'}_{\nu}\,, \tag{B.7}$$

a s obzirom da vrijedi

$$\begin{aligned}A^{\sigma'}_{\beta}A^{\lambda}_{\sigma'} &= \delta^{\lambda}_{\beta}\,,\\ \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\gamma'}}\right)\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\omega} &= -\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\omega}\right)\frac{\partial x^\omega}{\partial x^{\gamma'}}\,,\end{aligned} \tag{B.8}$$

možemo dobiti i ekvivalentan uvjet koji glasi

$$A^{\alpha'}_{\omega}\Gamma^{\omega}_{\lambda\nu} = \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}\right)_P\,, \tag{B.9}$$

te je trivijalno zadovoljen prema definiciji novih koordinata.

Mogli smo ovu koordinatnu transformaciju definirati i članovima višeg reda te kao posljedicu geodetske koordinate možemo definirati na beskonačno načina, jer su koeficijenti proizvoljni. Jedne od geodetskih koordinata koje ovim putem možemo definirati su i Riemannove koordinate. Obilježje je tog koordinatnog sustava da su jednadžbe geodetskih linija kroz ishodište istog oblika kao i jednadžbe ravnih linija koje prolaze kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava u Euklidskoj geometriji.

Pretpostavimo da je točka P u ishodištu nekog koordinatnog sustava. Kroz točku P prolaze geodetske linije u svim mogućim smjerovima. Jednadžba svake geodetske linije dana je s obzirom na neki parametar τ. Parametar biramo na način da je vrijednost parametra $\tau = 0$ u točki P za svaku geodetsku liniju. Geodetske linije u točki P određene su svojim tangentnim vektororm,

$$\xi^\alpha = \left\{ \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right\}_P , \tag{B.10}$$

dok je neka druga točka A na geodetskoj liniji određena vrijednošću parametra τ. Nazovemo li polazne koordinate x^α, Riemannove koordinate y^α definiramo relacijama

$$\begin{aligned} y^\alpha &= \xi^\alpha \tau , \\ x^\alpha &= x^\alpha(y^1, y^2, \ldots, y^n) . \end{aligned} \tag{B.11}$$

U polaznom koordinatnom sustavu funkcije x^α duž geodetskih linija ovise o početnim uvjetima i parametru τ

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau, \mathring{x}^\alpha, \xi^\alpha) . \tag{B.12}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = \xi^\alpha = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial y^\beta}{d\tau} \right)_P &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \right)_P \xi^\beta , \\ \left\{ \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \right\}_P &= \delta^\alpha_\beta . \end{aligned} \tag{B.13}$$

Za Jacobian vrijedi

$$\left| \frac{\partial(x)}{\partial(y)} \right| \neq 0 . \tag{B.14}$$

Geometrijski, ovo znači da u području u kojem postoji jedan u jedan preslikavanje između x^α i y^α postoji samo jedna geodetska linija između P i A. Nužan i dovoljan uvjet za Riemann koordinate može se iskazati na dva ekvivalentna načina.

- jednadžbe geodetskih linija su oblika (B.11) ako pretpostavimo da je $\xi^\alpha = konst.$
- koneksija zadovoljava relaciju $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma = 0$

Prvi uvjet je nužan jer je za

$$\frac{dy^\alpha}{d\tau} = \xi^\alpha = konst. \tag{B.15}$$

duž geodetske linije, te je stoga u točki P

$$\left.\frac{dy^\alpha}{d\tau}\right|_0 = \xi^\alpha\,, \tag{B.16}$$

i ξ^α je tangentni vektor u ishodištu te su koordinate Riemannove. Ako vrijedi drugi uvjet

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\xi^\beta\xi^\gamma = 0\,, \tag{B.17}$$

tada krivulje $y^\alpha = \xi^\alpha t$ uz konstantan ξ^α zadovoljavaju geodetsku jednadžbu, te predstavljaju geodetske linije s kanonskim parametrom t kroz ishodište. Kako je time zadovoljen prvi uvjet, slijedi ponovno da su koordinate Riemannove. One su geodetske s obzirom na ishodište, a izaberemo li ih nadalje, na takav način da su komponente metričkog tenzora u ishodištu dane u Minkowski obliku, onda govorimo o o Riemannovim normalnim koordinatama.

Korištenjem Riemannovih normalnih koordinata možemo tenzorska polja razvijati u potencijama od y^α pri čemu je koeficijente moguće izraziti preko tenzora zakrivljenosti i njegovih kovarijantnih derivacija.

Krenimo od razvoja tenzorskog polja

$$W_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \mathring{W}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} + \left(\frac{\partial W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial y^\nu}\right)_0 y^\nu + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 W_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\right)_0 y^\mu y^\nu + \ldots \tag{B.18}$$

Koristimo $\mathring{A}$ ili A_0 kako bismo označili da je veličina A izvrednjena u ishodištu Riemannovih normalnih koordinata. Koristit ćemo svojstvo transformacije koneksije te derivacije

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}A^\nu_{\alpha'} &= A^\sigma_{\lambda'}A^\tau_\mu\Gamma^\nu_{\sigma\tau} + \partial_{\lambda'}A^\nu_{\mu'}\,,\\
\partial_{\omega'}\Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}A^\nu_{\alpha'} + \Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}A^\nu_{\alpha'}\partial_{\omega'}A^\nu_{\alpha'} &= \partial_{\omega'}A^\sigma_{\lambda'}A^\tau_\mu\Gamma^\nu_{\sigma\tau} + A^\sigma_{\lambda'}\partial_{\omega'}A^\tau_\mu\Gamma^\nu_{\sigma\tau}\\
&+ A^\sigma_{\lambda'}A^\tau_\mu A^\gamma_{\omega'}\partial_\gamma\Gamma^\nu_{\sigma\tau} + \partial_{\lambda'\omega'}A^\nu_{\mu'}\,,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

i tako dalje.
Odaberimo i sljedeću koordinatnu transformaciju

$$x^\nu = \mathring{x}^\nu + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k x^\nu}{\partial y^{\lambda_1}\ldots\partial y^{\lambda_k}}\right)_0 y^{\lambda_1}\ldots y^{\lambda_k}\,, \tag{B.20}$$

pri čemu su koeficijenti

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial x^\nu}{\partial y^{\lambda_1}}\right)_0 &= \delta^\nu_{\lambda_1}\,,\\
\left(\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial y^{\lambda_1}\partial y^{\lambda_2}}\right)_0 &= -\mathring{\Gamma}^\nu_{\lambda_1\lambda_2}\,,\\
\left(\frac{\partial^3 x^\nu}{\partial y^{\lambda_1}\partial y^{\lambda_2}y^{\lambda_3}}\right)_0 &= 2\mathring{\Gamma}^\nu_{\alpha(\lambda_2}\mathring{\Gamma}^\alpha_{\lambda_1\lambda_2} - \partial_{(\lambda_3}\mathring{\Gamma}^\nu_{\lambda_1\lambda_2)}\,.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Iskoristimo li sada relacije (B.19) možemo pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} \mathring{\Gamma}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2} &= 0\,, \\ \partial_{(\lambda'_3}\mathring{\Gamma}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2)} &= 0\,, \\ &\dots \\ \partial_{(\lambda'_3\dots\lambda'_r}\mathring{\Gamma}^{\nu'}_{\lambda'_1\lambda'_2)} &= 0\,. \end{aligned} \tag{B.22}$$

Deriviranjem izraza za Riemannov tenzor

$$\frac{1}{2}R^{\sigma}{}_{\alpha\beta\gamma} = -\partial_{[\beta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma]\alpha} - \Gamma^{\tau}_{\alpha[\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta]\tau}\,, \tag{B.23}$$

te primjenom relacija (B.22) dolazimo do sljedećih izraza

$$\begin{aligned} \left\{\partial_{(\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\right\}_0 &= -\frac{1}{3}\mathring{R}^{\nu}{}_{(\alpha\beta)\mu}\,, \\ \left\{\partial_{(\gamma\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\right\}_0 &= \frac{1}{2}\mathring{R}_{\mu(\beta}{}^{\nu}{}_{\alpha,\gamma)}\,, \\ \left\{\partial_{(\delta\gamma\beta}\Gamma^{\nu}_{\alpha)\mu}\right\}_0 &= -\frac{3}{5}\left(\frac{2}{9}\mathring{R}_{(\beta}{}^{\omega}{}_{\delta}{}^{\nu}\mathring{R}_{\gamma\omega\alpha)\beta} - \mathring{R}_{\mu(\beta}{}^{\nu}{}_{\alpha,\gamma\delta)}\right). \end{aligned} \tag{B.24}$$

Ovim putem uveden koordinatni sustav je geodetski s obzirom na ishodište. Prethodno izvedene rezultate možemo iskoristiti prilikom deriviranja tenzorskog polja na način da svaki put izrazimo parcijalne derivacije u ishodištu pomoću odgovarajućih kovarijantnih derivacija. Svaki put kada imamo koneksiju u ishodištu iskoristimo činjenicu da je ona jednaka nuli. Svaki put kada se pojave članovi oblika $\partial_{(\gamma\dots\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta)\delta}$ zamijenimo ih poštivajući izraze (B.24). Na taj će način biti moguće izraziti razvoj tenzorskih veličina sljedećom jednadžbom

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1\dots\alpha_p} &= \mathring{W}_{\alpha_1\dots\alpha_p} + \mathring{W}_{\alpha_1\dots\alpha_p,\mu}y^{\mu} \\ &+ \frac{1}{2!}\left\{\mathring{W}_{\alpha_1\dots\alpha_p,\mu\omega} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p}\mathring{R}^{\nu}{}_{\mu\alpha_k\omega}\mathring{W}_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1}\dots\alpha_p}\right\}y^{\mu}y^{\omega} \\ &+ \frac{1}{3!}\left\{\mathring{W}_{\alpha_1\dots\alpha_p,\mu\omega\sigma} + \sum_{k=1}^{p}\mathring{R}^{\nu}{}_{\mu\alpha_k\omega}\mathring{W}_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1}\dots\alpha_p,\sigma}\right. \\ &+ \left.\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2}\mathring{R}^{\nu}{}_{\mu\alpha_k\omega,\sigma}\mathring{W}_{\alpha_1\dots\alpha_{k-1}\nu\alpha_{k+1}\dots\alpha_p}\right\}y^{\mu}y^{\omega}y^{\sigma} + \dots \end{aligned} \tag{B.25}$$

Ovo vrijedi za općeniti tenzor, pa time i za metrički tenzor koji se sada može izraziti jednadžbom

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \mathring{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}R_{\mu\alpha\nu\beta}y^{\mu}y^{\nu} + \frac{1}{6}R_{\mu\alpha\nu\beta;\rho}y^{\mu}y^{\nu}y^{\rho} \\ &+ \frac{1}{20}R_{\mu\alpha\nu\beta;\rho\sigma}y^{\mu}y^{\nu}y^{\rho}y^{\sigma} + \frac{2}{45}R_{\alpha\mu\beta\rho}R^{\rho}{}_{\gamma\nu\delta}y^{\mu}y^{\nu}y^{\gamma}y^{\delta} + \dots \end{aligned} \tag{B.26}$$

Ostaje još vidjeti da ove koordinate osim što su geodetske zadovoljavaju i nužne i dovoljne uvjete koji ih čine i Riemannovim normalnim koordinatama. To možemo vidjeti kontrahirajući gornju jednadžbu s y^β te slijedi

$$g_{\alpha\beta}y^\beta = \mathring{g}_{\alpha\beta}y^\beta \,, \tag{B.27}$$

gdje ostali članovi iščezavaju na račun antisimetrije indeksa β s barem jednim od indeksa sumacije $\lambda, \mu, \gamma, \ldots$ Deriviranjem dobijemo

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta}y^\beta + g_{\gamma\alpha} = \mathring{g}_{\gamma\alpha} \,. \tag{B.28}$$

Kontahiranjem sa y^α i y^γ uz (B.27) dobije se da vrijedi

$$\partial_\gamma g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = \partial'_\gamma g_{\alpha\beta}y^\gamma y^\beta = 0 \,. \tag{B.29}$$

Upotrebom

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}y^\beta y^\gamma = \frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\alpha\beta} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma})y^\beta y^\gamma \,, \tag{B.30}$$

moguće je pokazati

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}y^\beta y^\gamma = 0 \,. \tag{B.31}$$

što je jedan od uvjeta koji je nužan i dovoljan za Riemannove normalne koordinate.

C. Renormalizacijska grupa

Promotrimo renormalizacijsku grupu u slučaju maseno neovisnih renormalizacijskih shema, od kojih je jedna i shema minimalne suptrakcije [123, 124]. Ovdje radimo u ravnom prostor-vremenu. Renormalizirane jednočestično ireducibilne Greenove funkcije su povezane sa "golim" veličinama preko renormalizacijske konstante polja

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu, \epsilon) = Z_\phi^{n/2} \Gamma_B^{(n)}(p_i, \lambda_B, m_B, \epsilon)\,. \tag{C.1}$$

"Gole" Greenove funkcije ne ovise o proizvoljnoj renormalizacijskoj skali μ te ćemo do jednadžbe renormalizacijske grupe doći njenim deriviranjem po μ uz uvjet da je λ_B fiksiran. Uz odabir maseno neovisne sheme renormalizacije vrijede izrazi

$$\begin{aligned} Z_i &= Z_i(\lambda_R, \epsilon)\,, \\ \lambda_B \mu^{-\epsilon} &= Z_\phi^{-2} Z_\lambda \lambda_R\,, \\ m_B^2 &= Z_\phi^{-1} Z_m m_R^2\,. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Dakle, uvažavajući neovisnost "golih" Greenovih funkcija o μ slijedi

$$\begin{aligned} &\mu\left(\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{d\lambda_R}{d\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda_R} + \frac{dm_R}{d\mu}\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu, \epsilon) \\ &= \left(\frac{1}{2} n Z_\phi^{n/2-1} \mu \frac{d}{d\mu} Z_\phi\right)\Gamma_B^{(n)}(p_i, \lambda_B, m_B, \epsilon) \\ &= \left(\frac{1}{2} n \frac{1}{Z_\phi} \mu \frac{d}{d\mu} Z_\phi\right)\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu, \epsilon)\,. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Definirajmo sljedeće funkcije

$$\begin{aligned} \beta(\lambda_R, \epsilon) &= \mu\frac{d}{d\mu}\lambda_R = \lambda_R\left(\frac{d}{d\mu} Z_\phi^3 Z_\lambda^{-1}\right) - \epsilon\lambda_R \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \beta(\lambda_R)\,, \\ \gamma(\lambda_R, \epsilon) &= \frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}\ln Z_\phi \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \gamma(\lambda_R)\,, \\ \gamma_m(\lambda_R, \epsilon) &= \frac{\mu}{m_R}\frac{dm_R}{d\mu} = \frac{1}{2}\mu\frac{d}{d\mu}\ln(Z_\phi Z_m^{-1}) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \gamma_m(\lambda_R)\,. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Ovdje smo izrazili činjenicu da "goli" parametri ne ovise o μ. Za renormalizabilnu teoriju postoji konačan limes $\epsilon \to 0$ te vrijedi

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\lambda_R\frac{\partial}{\partial\lambda_R} + \gamma_m(\lambda_R) m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - n\gamma(\lambda_R)\right]\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu) = 0\,. \tag{C.5}$$

Ovo je *jednadžba renormalizacijske grupe* koja govori na koji se način moraju ponašati parametri i multiplikativni faktori renormaliziranih Greenovih funkcija kako bi kompenzirali promjenu renormalizacijske skale μ.

Kako bismo razmotrili rješenja, uzmimo da je $\gamma(\lambda_R) \equiv 0$. Na razini jedne petlje često nije nužno renormalizirati valnu funkciju pa je za jednopetljene račune ovaj izbor također pogodan. U tom slučaju ostaje nam homogena jednadžba

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu) = 0\,. \tag{C.6}$$

U nastavku ćemo izostaviti upotrebu R za označavanje renormaliziranih parametara. Gornju homogenu jednadžbu možemo napisati

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m(\lambda) m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu_0 \exp(-t)) = 0\,. \tag{C.7}$$

Ovdje smo upotrijebili $\mu = \exp(-t)\mu_0$ gdje μ_0 predstavlja neku fiksnu skalu. Skala μ je skala na kojoj smo renormalizirali veličine λ i m.
Definirajmo sada funkcije $\bar{\lambda}(t, \lambda)$ i $\bar{m}(t, \lambda, m)$ koje će nam omogućiti opis ovisnosti $\Gamma_R^{(n)}$ o t a samim time i o μ relacijama

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t,\lambda)} \frac{dx}{\beta(x)} &= t\,, \\ \bar{m}(t, \lambda, m) = m \exp\left[\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t,\lambda)} dx \frac{\gamma_m(x)}{\beta(x)} \right] &= m \exp\left[\int_0^1 \gamma_m(\bar{\lambda}(t'))dt' \right], \end{aligned} \tag{C.8}$$

odnosno u diferencijalnom obliku

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\lambda}(t, \lambda)}{\partial t} &= \beta(\bar{\lambda})\,, \\ \frac{\partial \bar{m}(t, \lambda, m)}{\partial t} &= \gamma_m(\bar{\lambda}) \bar{m}\,, \end{aligned} \tag{C.9}$$

s početnim uvjetima

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(0, \lambda) &= \lambda\,, \\ \bar{m}(0, \lambda, m) &= m\,. \end{aligned} \tag{C.10}$$

Definicije (C.9) mogu se zapisati i u obliku jednadžbe renormalizacijske grupe , te je tako deriviranjem prve od jednadžbi po λ moguće doći do zapisa

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \bar{\lambda}(t, \lambda) = 0\,. \tag{C.11}$$

Iz ove relacije slijedi da za svaku funkciju $f(\lambda, t, \mu_0) = f(\bar{\lambda}(\lambda, t), \mu_0)$ vrijedi

$$\mu \frac{d}{d\mu} f = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f(\bar{\lambda}(t, \lambda), \mu_0) = 0\,. \tag{C.12}$$

Za rješenje jednadžbe (C.7) tada vrijedi

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu_0 \exp(-t)) = \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \mu_0)\,. \tag{C.13}$$

Rješenje je nehomogene jednadžbe (C.5) tada

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu_0 \exp(-t)) = \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \mu_0) \exp\left[-n\int_0^1 \gamma(\bar{\lambda}(t'))dt'\right]. \quad \text{(C.14)}$$

Ova nam jednadžba povezuje Greenovu funkciju $\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu)$ izraženu pomoću parametaraλ i m gdje je renormalizacijska skala jednaka μ sa Greenovim funkcijama $\Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \mu\exp(t))$ na nekoj drugoj renormalizacijskoj skali $\mu\exp(t)$ ali uz odgovarajuće parametre $\bar{\lambda}(t)$ i $\bar{m}(t)$.

Najčešća primjena jednadžbe renormalizacijske grupe se odnosi na razmatranje ponašanja Greenovih funkcija s obzirom na reskaliranje impulsa,

$$p_i \longrightarrow \rho p_i\,, \quad \text{(C.15)}$$

pri čemu se μ drži fiksnim.
Dimenzionalna analiza Greenove funkcije masene dimenzije D

$$\Gamma_R^{(n)} \sim [M]^D\,, \quad \text{(C.16)}$$

nalaže sljedeći zaključak

$$\Gamma_R^{(n)}(\rho p_i, \lambda, m, \mu) = \mu^D f(\rho^2 p_i p_j/\mu^2, \lambda, m/\mu)\,. \quad \text{(C.17)}$$

Kako je ovo homogena funkcija reda D u veličinama m, ρ i μ vrijedi

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + m\frac{\partial}{\partial m} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} - D\right)\Gamma_R^{(n)}(\rho p_i, \lambda, m, \mu) = 0\,. \quad \text{(C.18)}$$

Kombiniranjem ovog izraza s jednadžbom renormalizacijske grupe (C.5) uz izbor $t = ln\rho$ slijedi važan rezultat

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_m(\lambda)m\frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(\lambda) + D\right]\Gamma_R^{(n)}(\rho p_i, \lambda, m, \mu) = 0\,. \quad \text{(C.19)}$$

Za bezmasene, neinteragirajuće teorije vrijedi $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ te se u tom slučaju Greenova funkcija skalira sa promjenom impulsa u skladu sa svojom kanonskom dimenzijom

$$\Gamma_R^{(n)}(\rho p_i, \lambda, m, \mu) = \rho^D \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu)\,. \quad \text{(C.20)}$$

Sličnim razmatranjima kojima se koristimo pri rješavanju polazne jednadžbe renormalizacijske grupe možemo rješenje jednadžbe naći u obliku

$$\Gamma_R^{(n)}(\exp(t)p_i, \lambda, m, \mu) = \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{\bar{m}}(t), \mu) \exp\left[Dt - n\int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t'))dt'\right]. \quad \text{(C.21)}$$

$\bar{\lambda}(t)$ i $\bar{m}(t)$ su veličine definirane jednadžbom (C.8) a ovdje se služimo i pokratom

$$\bar{\bar{m}} = \bar{m}(t)/\rho\,. \quad \text{(C.22)}$$

Rješenje možemo naći i slijedom nekoliko koraka koje smo prethodno analizirali. Naime,

$$\Gamma_R^{(n)}(\exp(t)p_i, \lambda, m, \mu) = \Gamma_R^{(n)}(\exp(t)p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \exp(t)\mu) \exp\left[n \int \gamma(t')dt'\right], \tag{C.23}$$

gdje je predstavljena promjena renormalizacijske skale. Prilagođavanjem zapisa

$$\begin{aligned} &\Gamma_R^{(n)}(\exp(t)p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \exp(t)\mu) \exp\left[-n \int \gamma(t')dt'\right] \\ = \ &\Gamma_R^{(n)}(\exp(t)p_i, \bar{\lambda}(t), \exp(t)\exp(-t)\bar{m}(t), \exp(t)\mu) \exp\left[-n \int \gamma(t')dt'\right]. \end{aligned} \tag{C.24}$$

U ovom obliku izraz je sada pogodan za primjenu rezultata koji se tiče reskaliranja impulsa te slijedi

$$\begin{aligned} &\Gamma_R^{(n)}(\exp(t)p_i, \bar{\lambda}(t), \exp(t)\exp(-t)\bar{m}(t), \exp(t)\mu) \exp\left[n \int \gamma(t')dt'\right] \\ = \ &\rho^D \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{\bar{m}}(t), \mu) \exp\left[-n \int \gamma(t')dt'\right]. \end{aligned} \tag{C.25}$$

Naglasimo još jednom, ovaj rezultat povezuje Greenove funkcije uz isti izbor renormalizacijske skale μ, te nam za reskalirane impulse $\exp(t)p_i$ izražava rješenje pomoću efektivnih parametara $\bar{\lambda}(t)$ i $\bar{m}(t)$. Renormalizacijska se grupa najčešće koristi kako bi se razmatralo ponašanje teorije na jako velikim ili malim energijama (impulsima) proučavanjem efektivnih konstanti vezanja $\bar{\lambda}(t)$ korištenjem jednadžbe

$$\int\limits_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)} \frac{dx}{\beta(x)} = t\,. \tag{C.26}$$

Ako je ova jednadžba valjana u cijelom području $-\infty < t < \infty$, $\bar{\lambda}(t,\lambda)$ može za $t \to \infty$ i $t \to -\infty$ ići u nul-točku funkcije $\beta(x)$ ili u beskonačnost. Nul-točke funkcije $\beta(x)$ nazivaju se fiksne točke. Ako vrijedi

$$\lim_{t\to\infty}(\lambda) = \lambda_*\,, \tag{C.27}$$

onda λ_* nazivamo ultraljubičastom fiksnom točkom. S druge pak strane ako je

$$\lim_{t\to-\infty}(\lambda) = \lambda_*\,, \tag{C.28}$$

onda λ_* nazivamo infracrvenom fiksnom točkom. Slično, za ultraljubičastu fiksnu točku vrijedi

$$\beta'(\lambda)|_{\lambda_*} < 0\,, \tag{C.29}$$

a za infracrvenu

$$\beta'(\lambda)|_{\lambda_*} > 0 \,. \tag{C.30}$$

Kada je vrijednost fiksne točke $\lambda_* = 0$ nazivamo je gausijanskom ili trivijalnom fiksnom točkom. Za teorije poput $\lambda\phi^4$ ili kvantne elektrodinamike $\beta(\lambda)$ je za male vrijednosti λ pozitivna te su one teorije koje su stabilne u infracrvenom području. Za kvantnu kromodinamiku je za male vrijednosti λ funkcija $\beta(\lambda)$ negativna što je čini *asimptotski slobodnom teorijom.*

U zakrivljenom prostoru-vremenu renormalizacijska grupa je formulirana na ponešto drugačiji način razmatran u radovima [125, 126]. Označi li se sa Φ skup svih polja u teoriji a sa P skup svih parametara, za slučaj multiplikativno renormalizabilne teorije može se napisati

$$S_0[\Phi_0, P_0] = S[\Phi, P]. \tag{C.31}$$

Funkcional izvodnik golih Greenovih funkcija je

$$\exp iW_0[J_0] = \int d\Phi_0 \exp i(S_0[\Phi_0, P_0] + \Phi_0 J_0) \,, \tag{C.32}$$

a renormaliziranih Greenovih funkcija

$$\exp iW_0[J] = \int d\Phi \exp i(S[\Phi, P] + \Phi J) \,. \tag{C.33}$$

Za polja možemo pisati

$$\Phi_0 = \mu^{\frac{n-4}{2}} Z_1^{1/2} \Phi \,. \tag{C.34}$$

Slično za izvore vrijedi

$$J_0 = \mu^{\frac{4-n}{2}} Z_1^{-1/2} J \,. \tag{C.35}$$

Slijedi

$$W_0[J_0] = W[J] \,. \tag{C.36}$$

Srednja vrijednost polja je

$$\bar{\Phi}_0 = \frac{\delta W[J_0]}{\delta J_0} = \frac{\delta W[J]}{\delta J}\frac{\delta J}{\delta J_0} = \mu^{\frac{n-4}{2}} Z_1^{1/2} \bar{\Phi} \,. \tag{C.37}$$

Naposljetku za efektivno djelovanje napišimo

$$\Gamma_0[\Phi_0, P_0] = W_0[J_0] - \bar{\Phi}_0 J_0 = W[J] - \bar{\Phi} J = \Gamma[\Phi, P] \,. \tag{C.38}$$

Dakle jednadžbama smo iskazali jednakost funkcionala golog i renormaliziranog djelovanja koji ovise o poljima Φ_0 i Φ respektivno. U oba slučaja je polje $g_{\mu\nu}$ tretirano kao vanjski parametar. S_0 i Γ_0 su četverodimenzionalni dok su S i Γ n-dimenzionalni integrali. Možemo eksplicitno napisati

$$\Gamma_0[g_{\alpha\beta}, \Phi_0, P_0, 4] = \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] \,. \tag{C.39}$$

Time dolazimo do diferencijalne jednadžbe

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] = 0\,. \tag{C.40}$$

Ako to dalje raspišemo uzimajući u obzir moguću ovisnost P i Φ o skali μ dobijemo

$$\left\{\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dP}{d\mu}\frac{\partial}{\partial P} + \int d^n x \mu \frac{d\Phi(x)}{d\mu}\frac{\delta}{\delta \Phi(x)}\right\}\Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] = 0\,. \tag{C.41}$$

Poslužimo se sljedećim definicijama

$$\begin{aligned} \beta_P(n) &= \mu \frac{dP}{d\mu}, \qquad \beta_P(4) = \beta_P \\ \gamma_\Phi(n) &= \mu \frac{d\Phi}{d\mu}, \qquad \gamma_\Phi(4) = \gamma_\Phi\,. \end{aligned} \tag{C.42}$$

Možemo sada prethodnu relaciju napisati u sljedećem obliku

$$\left\{\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_P(n)\frac{\partial}{\partial P} + \int d^n x \gamma_\Phi(n) \frac{\delta}{\delta \Phi(x)}\right\}\Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] = 0\,. \tag{C.43}$$

S obzirom da se u zakrivljenom prostoru-vremenu ne možemo služiti reskaliranjem impulsa kao u ravnom prostoru možemo pogledati koje su posljedice globalnog reskaliranja svih dimenzionalnih veličina (uključujući i koordinate x^μ te duljinu l). Slijedi

$$\begin{aligned} \Phi &\longrightarrow \Phi k^{-d_\Phi}\,, \\ P &\longrightarrow P k^{-d_P}\,, \\ \mu &\longrightarrow k\mu\,, \\ l &\longrightarrow k^{-1} l\,. \end{aligned} \tag{C.44}$$

Kako je samo efektivno djelovanje bezdimenzionalno ono se pri ovom globalnom reskaliranju ne mijenja. Korištenjem činjenice da Γ ne ovisi o x^μ eksplicitno možemo razmotriti zamjenu relacije $l \to k^{-1} l$ odgovarajućom transformacijom metrike

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow k^2 g_{\mu\nu}. \tag{C.45}$$

Pri tome se koordinate x_μ ne transformiraju. Sada uz (C.41) možemo napisati i sljedeći izraz

$$\Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] = \Gamma[k^2 g_{\alpha\beta}, k^{-d_\Phi}\Phi, k^{-d_P} P, n, k^{-1}\mu]\,. \tag{C.46}$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned} \int d^n x \sqrt{-g} &\longrightarrow \int d^n x \sqrt{-g} k^n\,, \\ R^2_{\mu\nu\alpha\beta} &\longrightarrow R^2_{\mu\nu\alpha\beta} k^{-4}\,, \\ R^2_{\alpha\beta} &\longrightarrow R^2_{\alpha\beta} k^{-4}\,, \\ R &\longrightarrow R k^{-2}\,. \end{aligned} \tag{C.47}$$

Neka je sada $k = e^{-t}$. Deriviranjem (C.46) po t, te izvrednjavanjem u $t = 0$ dobit ćemo

$$\left\{ \int d^n x \left(2g_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}} - d_\Phi \Phi(x) \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \right) - d_P P \frac{\partial}{\partial P} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] = 0 \,. \tag{C.48}$$

Oduzimanjem ove jednadžbe od (C.41 slijedi

$$\begin{aligned} \Bigg\{ \int d^n x \bigg(2g_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}} + \big[\gamma_\Phi(n) - d_\Phi \Phi(x)\big] \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \bigg) \\ + \big[\beta_p(n) - d_P P\big] \frac{\partial}{\partial P} \Bigg\} \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] = 0 \,. \end{aligned} \tag{C.49}$$

Primijetimo kako je

$$-2 \int d^n x g_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}} \Gamma[g_{\alpha\beta} e^{-2t}, \Phi, P, n, \mu] = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma[g_{\alpha\beta} e^{-2t}, \Phi, P, n, \mu] \,. \tag{C.50}$$

Umetanje dodatnog faktora e^{-2t} nema utjecaja na ostale članove u (C.49) te naposljetku vrijedi

$$\begin{aligned} \Bigg\{ \frac{\partial}{\partial t} \quad - \quad \big[\beta_p(n) - d_P P\big] \frac{\partial}{\partial P} \\ - \big[\gamma_\Phi(n) \quad - \quad d_\Phi\big] \int d^n x \Phi(x) \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \bigg) \Bigg\} \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi, P, n, \mu] = 0 \,. \end{aligned} \tag{C.51}$$

Ovime smo dobili poseban oblik jednadžbe renormalizacijske grupe koji omogućuje razmatranje ponašanja efektivnog djelovanja na malim udaljenostima. U MS shemi renormalizacije rješenje ove jednadžbe je

$$\Gamma[g_{\alpha\beta} e^{-2t}, \Phi, P, n, \mu] = \Gamma[g_{\alpha\beta}, \Phi(t), P(t), n, \mu] \,. \tag{C.52}$$

Ovdje $\Phi(t)$ i $P(t)$ zadovoljavaju vlastite jednadžbe renormalizacijske grupe

$$\frac{d\Phi}{dt} = (\gamma_\Phi - d_\Phi)\Phi \,, \tag{C.53}$$

te

$$\frac{dP}{dt} = \beta_P - P d_P \,. \tag{C.54}$$

Promatranje granice $t \to \infty$ odgovara promatranju teorije na malim udaljenostima, odnosno, u svjetlu jednadžbi (C.47) proučavanju ponašanja teorije pri velikim zakrivljenostima.

D. Jednadžbe gibanja za $f(R)$ teorije

Polazimo od djelovanja

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}f(R)\,. \tag{D.1}$$

Variranjem ovog djelovanja slijedi

$$\delta S = \int d^4x\left\{(\delta\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}\frac{\partial f(R)}{\partial R}\delta R\right\}, \tag{D.2}$$

$$\delta S = \int d^4x\left\{(\delta\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}\frac{\partial f(R)}{\partial R}\delta(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu})\right\}. \tag{D.3}$$

Koristimo pokratu

$$F(R) = \frac{\partial f(R)}{\partial R}\,. \tag{D.4}$$

Slijedi nadalje

$$\delta S = \int d^4x\left\{(\delta\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}F(R)(\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\right\}. \tag{D.5}$$

Kako je

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta g_{\alpha\beta}\,, \tag{D.6}$$

te

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\,, \tag{D.7}$$

možemo dalje pisati

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\left\{\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}f(R) + \right.\\ &+ \left.\sqrt{-g}F(R)\left[g^{\mu\nu}(\nabla_\nu\delta\Gamma^\rho_{\rho\mu} - \nabla_\rho\delta\Gamma^\rho_{\nu\mu}) - R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right]\right\},\end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\left\{\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}f(R) - \sqrt{-g}F(R)R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right.\\ &+ \sqrt{-g}F(R)\left[g^{\mu\nu}\left[\nabla_\nu\frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\nabla_\rho\delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\alpha\rho} - \nabla_\alpha\delta g_{\rho\mu})\right]\right.\\ &- \left.\left.g^{\mu\nu}\left[\nabla_\rho\frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\nabla_\nu\delta g_{\alpha\mu} + \nabla_\mu\delta g_{\alpha\nu} - \nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu})\right]\right]\right\},\end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\left\{\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}f(R) - \sqrt{-g}F(R)R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right.\\ &+ \sqrt{-g}F(R)\left[\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\mu\delta g_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}\Box\delta g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\nabla^\mu\nabla^\rho\delta g_{\rho\mu}\right.\\ &- \left.\left.\frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\mu\delta g_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\nabla^\alpha\nabla^\nu\delta g_{\alpha\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Box\delta g_{\mu\nu}\right]\right\},\end{aligned} \tag{D.10}$$

Sređivanjem ovog izraza možemo pisati

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \Bigg\{ \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} f(R) - \sqrt{-g} F(R) R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &+ \sqrt{-g} F(R) \Bigg[g^{\mu\nu} \Box \delta g_{\mu\nu} - \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} \Bigg] \Bigg\} . \end{aligned} \tag{D.11}$$

Parcijalnom integracijom uz iščezavanje površinskih članova slijedi

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \Bigg\{ \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} f(R) \delta g_{\mu\nu} - \sqrt{-g} F(R) R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &+ \sqrt{-g} \Bigg[(g^{\mu\nu} \Box - \nabla^\mu \nabla^\nu) F(R) \Bigg] \delta g_{\mu\nu} \Bigg\} . \end{aligned} \tag{D.12}$$

Dodamo li ovome djelovanje za materiju S_{mat} čija je varijacija

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g_{\mu\nu}} , \tag{D.13}$$

jednadžba gibanja za f(R) teorije je dana izrazom

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu} \Box - \nabla_\mu \nabla_\nu) F(R) = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu} . \tag{D.14}$$

Možemo provjeriti da se za izbor

$$\begin{aligned} f(R) &= \frac{R}{16\pi G} , \\ F(R) &= \frac{1}{16\pi G} , \end{aligned} \tag{D.15}$$

jednadžbe svode na standardne Einsteinove jednadžbe

$$\frac{R_{\mu\nu}}{16\pi G} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{R}{16\pi G} = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu} , \tag{D.16}$$

to jest

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} . \tag{D.17}$$

Literatura

[1] D. C. Rodrigues, P. S. Letelier, and I. L. Shapiro. *Galaxy rotation curves from General Relativity with Renormalization Group corrections*. JCAP **1004**:020, 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/04/020.

[2] A. Einstein. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Ann. Phys. **354**: 769–822, 1916. doi: 10.1002/andp.19163540702.

[3] J. H. Oort. *The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems*. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands* **6**:249, 1932.

[4] F. Zwicky. *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*. Astrophys.J. **86**: 217–246, 1937.

[5] V.C. Rubin, N. Thonnard, and W. K. Ford Jr. *Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/*. Astrophys.J. **238**:471, 1980. doi: 10.1086/158003.

[6] A Refregier. *Weak gravitational lensing by large scale structure*. Ann.Rev.Astron.Astrophys. **41**:645–668, 2003. doi: 10.1146/annurev.astro.41.111302.102207.

[7] S. Perlmutter et al. *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*. Astrophys.J. **517**:565–586, 1999. doi: 10.1086/307221.

[8] A. G. Riess et al. *Type Ia supernova discoveries at z and gt; 1 from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*. Astrophys.J. **607**:665–687, 2004. doi: 10.1086/383612.

[9] R. A. Knop et al. *New constraints on Omega(M), Omega(Λ), and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with HST*. Astrophys.J. **598**:102, 2003. doi: 10.1086/378560.

[10] D.N. Spergel et al. *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology*. Astrophys.J.Suppl. **170**:377, 2007. doi: 10.1086/513700.

[11] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. [arXiv:1303.5076 [astro-ph.CO]]. 2013.

[12] K. Garrett and G. Duda. *Dark Matter: A Primer*. Adv.Astron. **2011**:968283, 2011. doi: 10.1155/2011/968283.

[13] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk. *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*. Phys.Rept. **405**:279–390, 2005. doi: 10.1016/j.physrep.2004.08.031.

[14] K. Freese, B. Fields, and D. Graff. *Limits on stellar objects as the dark matter of our halo: nonbaryonic dark matter seems to be required*. [arXiv:9904401 [astro-ph]]. 1999.

[15] C. Alcock et al. *The MACHO project: Microlensing results from 5.7 years of LMC observations*. Astrophys.J. **542**:281–307, 2000. doi: 10.1086/309512.

[16] P. Tisserand et al. *Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds*. Astron.Astrophys. **469**:387–404, 2007. doi: 10.1051/0004-6361:20066017.

[17] M. Milgrom. *A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis*. Astrophys.J. **270**:365–370, 1983. doi: 10.1086/161130.

[18] J. D. Bekenstein. *Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm*. Phys.Rev. D **70**:083509, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.083509, 10.1103/PhysRevD.71.069901.

[19] R.H. Sanders. *Modified gravity without dark matter*. Lect. Notes Phys. **720**:375–402, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-71013-4-13.

[20] J.R. Brownstein and J.W. Moffat. *Galaxy rotation curves without non-baryonic dark matter*. Astrophys.J. **636**:721–741, 2006. doi: 10.1086/498208.

[21] J.W. Moffat. *Scalar-tensor-vector gravity theory*. JCAP **0603**:004, 2006. doi: 10.1088/1475-7516/2006/03/004.

[22] J.W. Moffat. *Gravitational theory, galaxy rotation curves and cosmology without dark matter*. JCAP **0505**:003, 2005. doi: 10.1088/1475-7516/2005/05/003.

[23] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa. *Dynamics of dark energy*. Int.J.Mod.Phys. D **15**:1753–1936, 2006. doi: 10.1142/S021827180600942X.

[24] J. Frieman, M. Turner and D. Huterer. *Dark Energy and the Accelerating Universe*. Ann.Rev.Astron.Astrophys. **46**:385–432, 2008. doi: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243.

[25] I. Zlatev, L. Wang and P. J. Steinhardt. *Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant*. Phys. Rev. Lett. **82**:896–899, 1999. doi: 10.1103/PhysRevLett.82.896.

[26] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N N. Weinberg. *Phantom energy and cosmic doomsday*. Phys.Rev.Lett. **91**:071301, 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.071301.

[27] R. de Putter and E. V. Linder. *Kinetic k-essence and Quintessence*. Astropart.Phys. **28**:263–272, 2007. doi: 10.1016/j.astropartphys.2007.05.011.

[28] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla and C. Skordis. *Modified Gravity and Cosmology*. Phys.Rept. **513**:1–189, 2012. doi: 10.1016/j.physrep.2012.01.001.

[29] T. P. Sotiriou and V. Faraoni. *f(R) Theories Of Gravity*. Rev.Mod.Phys. **82**:451–497, 2010. doi: 10.1103/RevModPhys.82.451.

[30] A. De Felice and S. Tsujikawa. *f(R) theories*. Living Rev.Rel. **13**:3, 2010.

[31] S. Nojiri and S. D. Odintsov. *Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy*. Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. **4**:115-146, 2007. doi: 10.1142/S0219887807001928.

[32] S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden, et al. *The Cosmology of generalized modified gravity models*. Phys.Rev. D **71**:063513, 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.063513.

[33] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner. *Is cosmic speed - up due to new gravitational physics?* Phys.Rev. D **70**:043528, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.043528.

[34] I. L. Shapiro. *Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach*. Class.Quant.Grav. **25**:103001, 2008. doi: 10.1088/0264-9381/25/10/103001.

[35] E.V. Gorbar and I.L. Shapiro. *Renormalization group and decoupling in curved space*. JHEP **0302**:021, 2003.

[36] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov, and I.L. Shapiro. *Effective Action in Quantum Gravity*. Inst. of Physics Publ. 1992. ISBN 9780750301220.

[37] M. Reuter. *Nonperturbative evolution equation for quantum gravity*. Phys.Rev. D **57**:971–985, 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.57.971.

[38] R. Foot, A. Kobakhidze, K. L. McDonald, and R. R. Volkas. *Renormalization-scale independence of the physical cosmological constant*. Phys.Lett. B **664**:199–200, 2008. doi: 10.1016/j.physletb.2008.05.029.

[39] Ilya L. Shapiro and Joan Sola. On the possible running of the cosmological 'constant'. *Phys.Lett.*, B682:105–113, 2009. doi: 10.1016/j.physletb.2009.10.073.

[40] T.S. Assimos, A.D. Pereira, T.R.S. Santos, R.F. Sobreiro, A.A. Tomaz, et al. *Dark gravity from a renormalizable gauge theory*. [arXiv:1305.1468 [hep-th]]. 2013.

[41] H. W. Hamber and R. Toriumi. *Inconsistencies from a Running Cosmological Constant*. [arXiv:1301.6259 [hep-th]]. 2013.

[42] I. L. Shapiro and J. Sola. *On the scaling behavior of the cosmological constant and the possible existence of new forces and new light degrees of freedom*. Phys.Lett. B **475**:236–246, 2000. doi: 10.1016/S0370-2693(00)00090-3.

[43] I. L. Shapiro and J. Sola. *Scaling behavior of the cosmological constant: Interface between quantum field theory and cosmology*. JHEP **0202**:006, 2002.

[44] A. Babić, B. Guberina, R. Horvat, and H. Štefančić. *Renormalization group running of the cosmological constant and its implication for the Higgs boson mass in the standard model*. Phys.Rev. D **65**:085002, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.085002.

[45] B. Guberina, R. Horvat and H. Štefančić. *Renormalization group running of the cosmological constant and the fate of the universe*. Phys.Rev. D **67**:083001, 2003. doi: 10.1103/PhysRevD.67.083001.

[46] I. L. Shapiro, J. Sola, C. Espana-Bonet and P. Ruiz-Lapuente. *Variable cosmological constant as a Planck scale effect*. Phys.Lett. B **574**:149–155, 2003. doi: 10.1016/j.physletb.2003.09.016.

[47] C. Espana-Bonet, P. Ruiz-Lapuente, I. L. Shapiro and J. Sola. *Testing the running of the cosmological constant with type Ia supernovae at high z*. JCAP **0402**:006, 2004. doi: 10.1088/1475-7516/2004/02/006.

[48] F. Bauer. *The Running of the cosmological and the Newton constant controlled by the cosmological event horizon*. Class.Quant.Grav. **22**:3533–3548, 2005. doi: 10.1088/0264-9381/22/17/012.

[49] J. C. Fabris, I. L. Shapiro and J. Sola. *Density Perturbations for Running Cosmological Constant*. JCAP **0702**:016, 2007. doi: 10.1088/1475-7516/2007/02/016.

[50] J. Grande, R. Opher, A. Pelinson and J. Sola. *Effective growth of matter density fluctuations in the running Lambda CDM and Lambda XCDM models*. JCAP **0712**: 007, 2007. doi: 10.1088/1475-7516/2007/12/007.

[51] J. Grande, A. Pelinson and J. Sola. *Dark energy perturbations and cosmic coincidence*. Phys.Rev. D **79**:043006, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.79.043006.

[52] J. Grande, J. Sola, J. C. Fabris and I. L. Shapiro. *Cosmic perturbations with running G and Lambda*. Class.Quant.Grav. **27**:105004, 2010. doi: 10.1088/0264-9381/27/10/105004.

[53] J. Grande, J. Sola and H. Štefančić. *LXCDM: A Cosmon model solution to the cosmological coincidence problem?* JCAP **0608**:011, 2006. doi: 10.1088/1475-7516/2006/08/011.

[54] J. Grande, J. Sola and H. Štefančić. *Composite dark energy: Cosmon models with running cosmological term and gravitational coupling*. Phys.Lett. B **645**:236–244, 2007. doi: 10.1016/j.physletb.2006.12.040.

[55] I. L. Shapiro, J. Sola and H. Štefančić. *Running G and Lambda at low energies from physics at M(X): Possible cosmological and astrophysical implications*. JCAP **0501**:012, 2005. doi: 10.1088/1475-7516/2005/01/012.

[56] A. Bonanno and M. Reuter. *Cosmology with selfadjusting vacuum energy density from a renormalization group fixed point*. Phys.Lett. B **527**:9–17, 2002. doi: 10.1016/S0370-2693(01)01522-2.

[57] J. Sola and H. Štefančić. *Effective equation of state for dark energy: Mimicking quintessence and phantom energy through a variable lambda*. Phys.Lett. B **624**: 147–157, 2005. doi: 10.1016/j.physletb.2005.08.051.

[58] K. Freese, F. C. Adams, J. A. Frieman and E. Mottola. *Cosmology with Decaying Vacuum Energy*. Nucl.Phys. B **287**:797, 1987. doi: 10.1016/0550-3213(87)90129-5.

[59] M. Reuter and C. Wetterich. *Time evolution of the cosmological 'constant'*. Phys.Lett. B **188**:38–43, 1987. doi: 10.1016/0370-2693(87)90702-7.

[60] J. C. Carvalho, J. A. S. Lima and I. Waga. *Cosmological consequences of a time-dependent Λ term.* Phys. Rev. D **46**:2404–2407, Sep 1992. doi: 10.1103/PhysRevD.46.2404.

[61] J. M. Overduin and F. I. Cooperstock. *Evolution of the scale factor with a variable cosmological term.* Phys. Rev. D **58**:043506, Jul 1998. doi: 10.1103/PhysRevD.58.043506.

[62] R. G. Vishwakarma. *Consequences on variable Λ-models from distant type ia supernovae and compact radio sources.* Class. Quant. Grav. **18**(7):1159, 2001.

[63] A. G. Riess et al. *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. Astron.J. **116**:1009–1038, 1998. doi: 10.1086/300499.

[64] A.Z. Petrov. *Einstein Spaces* , By A.Z. Petrov. Translated by R.F. Kelleher. Translation Edited by J. Woodrow. Pergamon Press. 1969.

[65] L. Parker and D. J. Toms. *New form for the coincidence limit of the feynman propagator, or heat kernel, in curved spacetime.* Phys. Rev. D **31**:953–956, Feb 1985. doi: 10.1103/PhysRevD.31.953.

[66] T. S. Bunch and L. Parker. *Feynman propagator in curved spacetime: A momentum-space representation.* Phys. Rev. D **20**:2499–2510, Nov 1979. doi: 10.1103/PhysRevD.20.2499.

[67] L. Parker and D. J. Toms. *Explicit curvature dependence of coupling constants.* Phys. Rev. D **31**:2424–2438, 1985. doi: 10.1103/PhysRevD.31.2424.

[68] N. Bilić, S. Domazet and B. Guberina. *Vacuum fluctuations of the supersymmetric field in curved background*. Phys.Lett. B **707**:221–227, 2012. doi: 10.1016/j.physletb.2011.12.025.

[69] D. Bailin and A. Love. *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*. Graduate Student Series in Physics Series. Taylor & Francis, 2010. ISBN 9780750302678.

[70] N. D. Birrell and P. C.W. Davies. *Quantum fields in curved space*. Cambridge Univ. Press, Cambridge - London - New Yoirk., 1982.

[71] L. Parker and D. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521877879.

[72] M.J.G. Veltman. *The infrared-ultraviolet connection.* Acta phys. Polon. B **12**: 437–457, 1981.

[73] T. Appelquist and J. Carazzone. *Infrared singularities and massive fields.* Phys. Rev. D **11**:2856–2861, May 1975. doi: 10.1103/PhysRevD.11.2856.

[74] G. Cynolter and E. Lendvai. *Symmetry Preserving Regularization with A Cutoff*. Central Eur.J.Phys. **9**:1237–1247, 2011. doi: 10.2478/s11534-011-0039-y.

[75] F. Sobreira, B. J. Ribeiro and I. L. Shapiro. *Effective Potential in Curved Space and Cut-Off Regularizations*. Phys.Lett. B **705**:273–278, 2011. doi: 10.1016/j.physletb.2011.10.016.

[76] N. Bilić. *Supersymmetric dark energy*. Rom.J.Phys. **57**:793–802, 2012.

[89] M. Reuter and H. Weyer. *Running Newton constant, improved gravitational actions, and galaxy rotation curves*. Phys.Rev. D **70**:124028, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.124028.

[77] D. C. Rodrigues. *Elliptical galaxies kinematics within general relativity with renormalization group effects*. JCAP **1209**:031, 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/09/031.

[78] D. C. Rodrigues, P. L.C. de Oliveira, J. C. Fabris and I. L. Shapiro. *Disk and elliptical galaxies within renormalization group improved gravity*. AIP Conf.Proc. **1471**:98–102, 2012. doi: 10.1063/1.4756820.

[79] S.W. (ed.) Hawking and W. (ed.) Israel. *General relativity. An Einstein centenary survey.* Cambridge etc.: Cambridge University Press. XVIII, 919 p. 37.50 , 1979.

[80] M. Niedermaier. *The Asymptotic safety scenario in quantum gravity: An Introduction*. Class. Quant. Grav. **24**:R171–230, 2007. doi: 10.1088/0264-9381/24/18/R01.

[81] R. Percacci. *A Short introduction to asymptotic safety*. [arXiv:1110.6389 [hep-th]]. 2011.

[82] O. J. Rosten. *Fundamentals of the Exact Renormalization Group*. Phys.Rept. **511**: 177–272, 2012. doi: 10.1016/j.physrep.2011.12.003.

[83] C. Wetterich. *Exact evolution equation for the effective potential.* Phys. Lett. B **301**(1):90 – 94, 1993. ISSN 0370-2693. doi: 10.1016/0370-2693(93)90726-X.

[84] R. Percacci. *Further evidence for a gravitational fixed point*. Phys.Rev. D **73**: 041501, 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.73.041501.

[85] A. Codello, R. Percacci, and C. Rahmede. *Ultraviolet properties of f(R)-gravity*. Int.J.Mod.Phys. A **23**:143–150, 2008. doi: 10.1142/S0217751X08038135.

[86] A. Bonanno and M. Reuter. *Cosmology of the Planck era from a renormalization group for quantum gravity*. Phys.Rev. D **65**:043508, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.043508.

[87] N.C. Tsamis and R.P. Woodard. *Relaxing the cosmological constant.* Phys. Lett. B **301**(4):351 – 357, 1993. ISSN 0370-2693. doi: 10.1016/0370-2693(93)91162-G.

[88] M. Reuter and H. Weyer. *Renormalization group improved gravitational actions: A Brans-Dicke approach*. Phys.Rev. D **69**:104022, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.69.104022.

[90] M. Reuter and H. Weyer. *Quantum gravity at astrophysical distances?* JCAP **0412**:001, 2004. doi: 10.1088/1475-7516/2004/12/001.

[91] M. Reuter and H. Weyer. *On the Possibility of Quantum Gravity Effects at Astrophysical Scales*. Int.J.Mod.Phys. D **15**:2011–2028, 2006. doi: 10.1142/S0218271806009443.

[92] S. Domazet and H. Štefančić. *Renormalization group scale-setting in astrophysical systems*. Phys.Lett. B **703**:1–6, 2011. doi: 10.1016/j.physletb.2011.07.038.

[93] E. Bentivegna, A. Bonanno and M. Reuter. *Confronting the IR fixed point cosmology with high redshift supernova data*. JCAP **0401**:001, 2004. doi: 10.1088/1475-7516/2004/01/001.

[94] A. Babic, B. Guberina, R. Horvat and H. Stefancic. *Renormalization-group running cosmologies. A Scale-setting procedure*. Phys.Rev. D **71**:124041, 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.124041.

[95] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.

[96] C. M. Will. *On the Stability of Axisymmetric Systems to Axisymmetric Perturbations in General Relativity. V. Differentially Rotating Configurations*. Astrophys.J. **190**:403–410, 1974. doi: 10.1086/152891.

[97] B. Koch and I. Ramirez. *Exact renormalization group with optimal scale and its application to cosmology*. Class. Quant. Grav. **28**:055008, 2011. doi: 10.1088/0264-9381/28/5/055008.

[98] S. Domazet and H. Štefančić. *Renormalization group scale-setting from the action—a road to* modified gravity theories. Class. Quant. Grav. **29**(23):235005, 2012.

[99] F. Bauer, J. Sola and H. Štefančić. *Relaxing a large cosmological constant*. Phys.Lett. B **678**:427–433, 2009. doi: 10.1016/j.physletb.2009.06.065.

[100] H. Štefančić. *The Solution of the cosmological constant problem from the inhomogeneous equation of state: A Hint from modified gravity?* Phys.Lett. B **670**: 246–253, 2009. doi: 10.1016/j.physletb.2008.10.065.

[101] F. Bauer, J. Sola and H. Štefančić. *Dynamically avoiding fine-tuning the cosmological constant: The 'Relaxed Universe'*. JCAP **1012**:029, 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/12/029.

[102] A. Eichhorn. *Quantum-gravity-induced matter self-interactions in the asymptotic-safety scenario*. Phys.Rev. D **86**:105021, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.105021.

[103] A. V. Frolov and Jun-Qi Guo. *Small Cosmological Constant from Running Gravitational Coupling*. [arXiv:1101.4995 [astro-ph.CO]]. 2011.

[104] A. Bonanno. *An effective action for asymptotically safe gravity*. Phys.Rev. D **85**: 081503, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.85.081503.

[105] M. Hindmarsh and I. D. Saltas. *f(R) Gravity from the renormalisation group*. Phys.Rev. D **86**: 064029. 2012.

[106] T. Clifton. *Exact Friedmann Solutions in Higher-Order Gravity Theories*. Class.Quant.Grav. **24**:5073–5091, 2007. doi: 10.1088/0264-9381/24/20/010.

[107] S. Domazet, V. Radovanović, M. Simonović and H. Štefančić. *On analytical solutions of $f(r)$ modified gravity theories in flrw cosmologies.* Int.J.Mod.Phys. D **22** (02):1350006, 2013. doi: 10.1142/S0218271813500065.

[108] A. A. Starobinsky. *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity*. Phys.Lett. B **91**:99–102, 1980. doi: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.

[109] E.V. Arbuzova, A.D. Dolgov, and L. Reverberi. *Cosmological evolution in R^2 gravity*. JCAP **1202**:049, 2012. doi: 10.1088/1475-7516/2012/02/049.

[110] J. D. Barrow and J. D. Middleton. *Stable isotropic cosmological singularities in quadratic gravity*. Phys.Rev. D **75**:123515, 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.75.123515.

[111] S. Nojiri, S. D. Odintsov and D. Saez-Gomez. *Cosmological reconstruction of realistic modified gravities.* Phys. Lett. B **681**(1):74 – 80, 2009. ISSN 0370-2693. doi: 10.1016/j.physletb.2009.09.045.

[112] P. K. S. Dunsby, E. Elizalde, R. Goswami, S. Odintsov and D. Saez-Gomez. $\Lambda\mathrm{CDM}$ *universe in* $f(R)$ *gravity.* Phys. Rev. D **82**:023519, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.82.023519.

[113] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Modified $f(R)$ *gravity consistent with realistic cosmology: From a matter dominated epoch to a dark energy universe.* Phys. Rev. D **74**:086005, Oct 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.74.086005.

[114] E. Elizalde and D. Sáez-Gómez. $f(R)$ *cosmology in the presence of a phantom fluid and its scalar-tensor counterpart: Towards a unified precision model of the evolution of the universe.* Phys. Rev. D **80**:044030, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.044030.

[115] M. Jamil, S. Ali, D. Momeni, and R. Myrzakulov. *Bianchi type I cosmology in generalized Saez-Ballester theory via Noether gauge symmetry*. Eur. Phys. J. C **72**:1998, 2012. doi: 10.1140/epjc/s10052-012-1998-x.

[116] S. Carloni, P. K.S. Dunsby, S. Capozziello and Antonio Troisi. *Cosmological dynamics of* R^n *gravity*. Class.Quant.Grav. **22**:4839–4868, 2005. doi: 10.1088/0264-9381/22/22/011.

[117] S. Capozziello, S. Carloni and A. Troisi. *Quintessence without scalar fields*. Recent Res.Dev.Astron.Astrophys. **1**:625, 2003.

[118] N. Goheer, J. Larena and P. K. S. Dunsby. *Power-law cosmic expansion in* $f(R)$ *gravity models.* Phys. Rev. D **80**:061301, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.061301.

[119] S. Nojiri and S. D. Odintsov. *Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models*. Phys.Rept. **505**:59–144, 2011. doi: 10.1016/j.physrep.2011.04.001.

[120] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto, and A. Mazumdar. *Towards singularity and ghost free theories of gravity*. Phys.Rev.Lett. **108**:031101, 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.031101.

[121] F.L. Bezrukov and M. Shaposhnikov. *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*. Phys.Lett. B **659**:703–706, 2008. doi: 10.1016/j.physletb.2007.11.072.

[122] Christian F. Steinwachs and Alexander Yu. Kamenshchik. *Non-minimal Higgs Inflation and Frame Dependence in Cosmology*. AIP Conf.Proc. **1514**:161–164, 2012. doi: 10.1063/1.4791748.

[123] P. Pascual and R. Tarrach. *QCD: Renormalization for the Practitioner*. Springer-Verlag, 1984.

[124] H. Kleinart and V. Schulte-frohlinde. *Critical Properties of ϕ^4-theories*. World Scientific Publishing Company Incorporated, 2001.

[125] B. L. Nelson and P. Panangaden. *Scaling behavior of interacting quantum fields in curved spacetime.* Phys. Rev. D **25**:1019–1027, 1982. doi: 10.1103/PhysRevD.25.1019.

[126] D. J. Toms. *The effective action and the renormalization group equation in curved space-time.* Phys. Lett. B **126**:37 – 40, 1983. ISSN 0370-2693. doi: 10.1016/0370-2693(83)90011-4.

Životopis

Ime | **Prezime** : Silvije Domazet

Adresa

Institut Ruđer Bošković

Bijenička cesta 54

10000 Zagreb

Hrvatska

e-mail: sdomazet@irb.hr | telefon: +385 1 457 1320

Rođen 21. travnja 1980, Split, Hrvatska

Obrazovanje

1986-1994	Osnovna škola (*Plokite*, Split)
1994-1998	Srednja škola (*III. Gimnazija*, Split)
1998-2006	Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu
26. listopada 2006.	Diplomski rad: *Randall-Sundrum modeli sa dodatnim dimenzijama*
	Voditelj: dr. sc. Predrag Prester
2007-2013	Poslijediplomski doktorski studij, Sveučilište u Zagrebu

Istraživački interesi

Kozmologija, kvantna teorija polja u zakrivljenom prostor-vremenu, korekcije općoj teoriji relativnosti kao posljedica ovisnosti gravitacijskih parametara o skali.

Radno iskustvo

Od 2007. zaposlen kao znanstveni novak, asistent, na Institutu Ruđer Bošković u Zagrebu u Zavodu za teorijsku fiziku.

Popis objavljenih radova

1. S. Domazet and H. Štefančić. *Renormalization Group scale-setting in astrophysical systems.* Phys. Lett. B **703** 1: 1-6, 2011.

2. N. Bilić, S. Domazet and B. Guberina. *Vacuum fluctuations of the supersymmetric field in curved background.* Phys. Lett. B **707** 1: 221-227, 2012.

3. S. Domazet and H. Štefančić. *Renormalization group scale-setting from the action—a road to modified gravity theories.* Class. Quant. Grav. **29**, 23; 35005-1-35005-8, 2012.

4. S. Domazet, V. Radovanović, M. Simonović and H. Štefančić. *On analytical solutions of f(R) modified gravity theories in FLRW cosmologies* Int. J. Mod. Phys. D **22**:1350006-1-1350006-18, 2013.