Poopćeni modeli Calogerovog tipa

Samsarov, Anđelo

Poopćeni modeli Calogerovog tipa

Anđelo Samsarov

Zagreb, 2009.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Obični Calogerov model opisuje N identičnih čestica na pravcu koje međudjeluju preko dvočestične interakcije koja opada sa kvadratom međusobne udaljenosti čestica i istovremeno su podvrgnute zajedničkoj vezujućoj harmoničkoj sili. Model je potpuno integrabilan kako u klasičnom, tako i u kvantnom slučaju, tj. spektar je poznat i valne funkcije su dane implicitno. Model i njegove različite izvedenice, poznate također kao Calogero-Sutherland-Moser sistemi, povezani su sa mnogobrojnim fizikalnim problemima, koji se protežu od fizike čvrstog stanja pa sve do gravitacije i fizike crnih rupa. Algebarska struktura Calogerovog modela, ranije proučavana korištenjem grupno-teorijskih metoda, od nedavno je ponovno počela biti razmatrana unutar okvira permutacione algebre. Spomenuti operatorski pristup je podosta jednostavniji nego li originalni pristup, on daje eksplicitne izraze za valne funkcije i naglašava interpretaciju u terminima poopćenih statistika, posebno Haldaneove statistike isključenja. U Haldaneovoj formulaciji dopušteno je imati čestice različite vrste, sa međusobnim statističkim parametrom vezanja koji ovisi o paru čestica koje međudjeluju.

Organizacija izlaganja je slijedeća. Započinje se sa kratkim opisom običnog racionalnog Calogerovog modela i predočuju se njegova rješenja unutar algebarskog pristupa. Algebarski pristup omogućava elegantno nalaženje spektra, kao i mogućnost da se valne funkcije zapišu u kompaktnom obliku. U trećem poglavlju razmatraju se višefamilijarna poopćenja osnovnog modela, najprije u jednoj, a potom i u proizvoljnom broju dimenzija. Četvrto poglavlje posvećeno je proučavanju općih svojstava svih sistema sa realiziranom konformnom simetrijom. Tu se iznosi i opća metoda (Bargmann-Fockova metoda) za integraciju svih takvih modela, a potom se taj pristup primjenjuje na neke konkretne fizikalne modela. Iako ta metoda, u principu daje sva rješenja danog konformnog modela, u praksi je vrlo teško provediva. Ipak, ovdje ćemo predočiti nekoliko modela koje je moguće potpuno riješiti primjenom Bargmann-Fockove metode. Zadnji dio četvrtog poglavlja posvećen je modelima sa prisutnim svojstvom invarijantnosti oblika (tzv. SIP). Modeli s tim svojstvom analiziraju se pomoću metoda supersimetrične kvantne mehanike. U petom poglavlju razmatramo uvjete pod kojima je Hamiltonijan promatranog sistema hermitski operator. Odgovor na to pitanje daje von Neumann-ov teorem. Taj teorem također daje uvjete pod kojima je moguće proširiti domenu promatranog operatora kako bi on na toj proširenoj domeni bio hermitski ukoliko već nije hermitski na polaznoj domeni. To je pitanje posebno važno stoga što Hamiltonijan promatranog sistema mora biti hermitičan kako bi imao realan spektar. Korištenjem von Neumann-ove metode moguće je dobiti nova rješenja poznatih modela te egzaktna rješenja, kao i spektre za neke do sada još neriješene fizikalne modele. U slučajevima kada se radi o novim rješenjima poznatih modela, ona u sebi sadrže poznata rješenja kao specijalni slučaj. Općenito je hermitsko proširenje Hamiltonijana sistema moguće provesti samo u jednom ograničenom sektoru parametarskog prostora. Šesto poglavlje bavi se korespondencijom između Calogerovog modela u većem broju prostornih dimenzija i klasične gravitacije u pozadini koju definira deformirana AdS metrika. Tu će se pokazati da je unutar sistema sa vezujućim harmonijskim potencijalom moguće neposredno realizirati konformnu simetriju deformacijom AdS metrike.

Posljednja tri poglavlja odnose se na supersimetrična poopćenja racionalnog Calogerovog modela. Slično kao što je bio slučaj u prethodnim poglavljima, i u kontekstu supersimetričnih modela će se ideja o ekvivalentnosti sa skupom slobodnih oscilatora pokazati vrlo plodonosnom. U sedmom poglavlju koristi se spomenuta ekvivalentnost kako bi se konstruiralo supersimetrično poopćenje Calogerovog modela temeljeno na $SU(1,1|1)$ supersimetriji. Ta konstrukcija vodi na dva supersimetrična modela, od kojih je jedan identičan Freedman-Mende-ovom modelu. U posljednja dva poglavlja pokazat ćemo da je široka klasa supersimetričnih modela u kojima je realizirana $OSp(2|2)$ supersimetrija ekvivalentna skupu nemeđudjelujućih superoscilatora. Spomenuta supersimetrija poslužit će nam za algebarsku konstrukciju svojstvenih stanja promatranog modela. Kao primjeri različitih supersimetričnih poopćenja Calogerovog modela, posebno će se istražiti svojstva supersimetričnog poopćenja Calogerovog modela A_{N+1} i BC_{N+1} tipa, te superkonformno poopćenje Calogero-Marchioro modela, kao primjera modela u većem broju dimenzija.

Ovom prilikom bih se iznimno zahvalio voditelju Dr.sc. Stjepanu Meljancu na nizu savjeta, mnoštvu zanimljivih ideja, kao i neizmjernom strpljenju i ohrabrenju, bez kojih bi izrada ovog rada bila nemoguća. Zahvaljujem se i Dr.sc. Marijanu Milekoviću na nizu korisnih savjeta i kritičkih primjedbi te na suradnji koja je urodila nizom znanstvenih radova čiji rezultati su uključeni u ovaj rad. Također se zahvaljujem Dr.sc. Bireswaru Basu-Mallicku te posebno Dr.sc. Kumaru Shankaru Gupti na vrlo vrijednim diskusijama i iznimno inspirativnim idejama, kao i suradnji koja je urodila znanstvenim rezultatima koji su također predmetom ovoga rada.

Poglavlje 2

Algebarsko rješenje Calogerovog modela

2.1 Definicija problema

Hamiltonijan racionalnog Calogerovog modela određen je izrazom

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i \neq j} \left[\frac{a^2 - \frac{1}{4}}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\Omega^2}{16}(x_i - x_j)^2 \right], \tag{2.1}$$

gdje su a i Ω konstante, x_i je koordinata i-te čestice i uz to se pretpostavlja da koristimo sustav jedinica takav da vrijedi $2m\hbar^{-2} = 1$ (m je masa čestice). Interesira nas nalaženje normalizabilnih svojstvenih rješenja Hamiltonijana (2.1),

$$H\psi = E\psi. \tag{2.2}$$

Ovaj problem razmatran je po prvi puta u [1] i poznato je da je potpuno integrabilan. Svojstvene vrijednosti je našao Calogero [1, 2, 3], a on je također našao i valne funkcije za $N = 3$ i $N = 4$. Neke od tih rezultata dobio je također i Sutherland [4], a kasnije, Gambardella[5] je našao valne funkcije za $N = 5$[1]. U [1] analiza je provedena u sektoru konfiguracijskog prostora koji odgovara točno određenom poretku čestica, i to takvom da vrijedi, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_N$. U istom članku je pokazano da se translaciono invarijantne svojstvene funkcije Hamiltonijana (2.1) mogu faktorizirati na način,

$$\psi = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^{a+\frac{1}{2}} \; \phi(r) \; P_k(x), \tag{2.3}$$

[1]Kompletan pregled se nalazi u [6, 7].

pri čemu je $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_N)$,

$$r^2 = \frac{1}{N} \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2, \tag{2.4}$$

dok je $P_k(x)$ translaciono invarijantni i homogeni polinom stupnja k, $k \geq 0$. Polinomi $P_k(x)$ zadovoljavaju jednadžbu

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i<j} \frac{2(a+\frac{1}{2})}{(x_i - x_j)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] P_k(x) = 0. \tag{2.5}$$

Postojanje potpunog skupa rješenja od (2.5) diskutirao je Calogero [1, 2, 3]. Uvrštavanjem (2.3) u (2.2) te korištenjem relacija (2.4) i (2.5), dobiva se

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - (1+2\mu)\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \omega^2 r^2 \right] \phi = E\phi, \tag{2.6}$$

uz $\omega^2 = \frac{1}{8}\Omega^2 N$ i

$$\mu = k + \frac{1}{2}(N-3) + \frac{1}{2}N(N-1)(a+\frac{1}{2}). \tag{2.7}$$

Slijedeći korake u [8, 9, 10], lagano se može pokazati da su "radijalne" funkcije $\phi(r)$ kvadratno integrabilne na pozitivnom dijelu realne osi, $\phi(r) \in L^2[R^+, d\mu]$, pri čemu je mjera dana sa $d\mu = r^{1+2\mu} dr$.

Rješenja i spektar problema (2.2) razmatrat ćemo u narednoj točki i to unutar čisto algebarskog pristupa. Prije nego razmotrimo algebarski pristup, korisno je na ovom mjestu pripomenuti da je spektar za N-čestični racionalni Calogerov model, prezentiran u radovima [1, 2, 3], analiziran od tog vremena još nizom različitih metoda [11, 12, 13]. U radovima [1, 2, 3] Calogero je koristio rubni uvjet da valne funkcije iščezavaju kad god dvije ili više čestica zauzimaju isto mjesto, tj. imaju iste koordinate. S tim rubnim uvjetom Hamiltonijan (2.1) je hermitski, što osigurava realnost spektra i potpunost stanja sistema. Međutim, valja naglasiti da spektar koji je dobiven u radovima od Calogera nije jedinstven, tj. model opisan Hamiltonijanom (2.1) dopušta i tzv. neekvivalentne kvantizacije koje vode i na neke druge spektre osim onog dobivenog u [1, 2, 3]. To pitanje će dijelom biti i predmetom ovoga rada. Jedan način da se zahvati taj problem jest da se pokuša potražiti općenitije rubne uvjete od onog korištenog u [1, 2, 3], za koje će Hamiltonijan (2.1) i dalje biti hermitski. Međutim, tu vrstu analize ćemo ostaviti za kasnija poglavlja kada ćemo razmatrati okolnosti za neka poopćenja Calogerovog modela u kojima se mogu promijeniti rubni uvjeti, ali na takav način da promatrani Hamiltonijani i dalje ostanu hermitski. Za sada se vratimo na algebarsko rješenje za Calogerov model sa originalnim rubnim uvjetom da valna funkcija iščezava kad god se dvije čestice preklapaju.

2.2 Algebarsko rješenje

Ne umanjujući općenitost, umjesto Hamiltonijana (2.1), proučavat ćemo slijedeći oblik Hamiltonijana za Calogerov model,

$$H_{Cal} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2\right] + \sum_{j<i}^{N}\frac{g}{(x_i - x_j)^2}. \tag{2.8}$$

U osnovnim crtama proći ćemo kroz operatorsku konstrukciju koja za cilj ima dobiti spektar i potpuni skup svojstvenih stanja za Hamiltonijan (2.8).

Da bi smo riješili jednadžbu $H_{Cal}\psi = E\psi$, stavimo

$$\psi^{\pm} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)^{\nu}\Phi^{\pm} \equiv \Delta\Phi^{\pm}, \tag{2.9}$$

gdje se podrazumijeva da je $x_i > x_j$ za $i > j$, dok se znakovi $+$ i $-$ odnose na totalno simetrične, odnosno totalno antisimetrične valne funkcije Φ^+ i Φ^-. Definiramo kovarijantnu derivaciju sa

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j\neq i}\frac{\nu}{x_i - x_j}(1 - K_{ij}), \tag{2.10}$$

gdje su K_{ij} generatori simetrične grupe S_N. To su permutacijski operatori koji vrše međuizmjenu čestica sa oznakama i i j. Oni imaju slijedeća svojstva,

$$K_{ij}K_{ik} = K_{jk}K_{ij}, \tag{2.11}$$

$$K_{ij}x_j = x_iK_{ij}, \qquad K_{ij}\partial_j = \partial_iK_{ij}. \tag{2.12}$$

Operatore K_{ij}, u kontekstu Calogerovog modela, uveo je Polychronakos [11]. Izravni račun pokazuje da vrijedi,

$$H_{Cal}\psi^{\pm} = \Delta\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(-D_i^2 + x_i^2)\Phi^{\pm}\right), \tag{2.13}$$

gdje je $g = \nu(\nu \mp 1)$, a znakovi $+$ i $-$ odnose se na simetrične, odnosno antisimetrične valne funkcije. Izravni račun također pokazuje da su ispunjene komutacijske relacije,

$$[D_i, x_j] = \delta_{ij}(1 + \nu\sum_{k=1}^{N}K_{ik}) - \nu K_{ij}, \tag{2.14}$$

$$[D_i, D_j] = 0. \tag{2.15}$$

U izvodu rezultata (2.13) i (2.14) korištena su svojstva operatora izmjene K_{ij}. Relacije (2.14) i (2.15) ukazuju na to da je prikladno uvesti operatore stvaranja i poništavanja,

$$a_i^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_i \pm D_i), \tag{2.16}$$

koji se pokoravaju komutacijskim relacijama,

$$[a_i^{\pm}, a_j^{\pm}] = 0, \tag{2.17}$$

$$[a_i^-, a_j^+] = \delta_{ij}(1 + \nu \sum_{k=1}^{N} K_{ik}) - \nu K_{ij}. \tag{2.18}$$

Novi, transformirani Hamiltonijan $\tilde{H}_{cal}$,

$$\tilde{H}_{cal} = \Delta^{-1} H_{cal} \Delta \tag{2.19}$$

može se sada izraziti na način

$$\tilde{H}_{cal} = \frac{1}{2}\sum_i(-D_i^2 + x_i^2) = \frac{1}{2}\sum_i \{a_i^+, a_i^-\}, \tag{2.20}$$

i pokazuje se da zadovoljava standardne komutacijske relacije sa operatorima stvaranja i poništavanja,

$$[\tilde{H}_{cal}, a_i^{\pm}] = \pm a_i^{\pm}. \tag{2.21}$$

Ova zadnja relacija također slijedi nakon niza koraka u kojima se koriste svojstva operatora izmjene K_{ij}.

Svojstvene funkcije se sada mogu dobiti putem standardne konstrukcije,

$$\Phi^{\pm}(n_i) = \mathcal{S}_{\pm}\{\prod_{i=1}^{N}(a_i^+)^{n_i}\}\Phi_0^{\pm}, \tag{2.22}$$

gdje $\mathcal{S}_{\pm}$ označava operator potpune (anti)simetrizacije. Osnovno stanje $\Phi_0^{\pm}$ zadovoljava uvjete

$$\begin{aligned} a_i^- \Phi_0^{\pm} &= 0, \\ K_{ij}\Phi_0^{\pm} &= \pm\Phi_0^{\pm}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Korištenjem ovih uvjeta, kao i komutacijskih relacija (2.21), nalazimo energiju osnovnog stanja za H_{Cal}

$$E_0^{\pm} = \frac{N}{2} \pm \frac{\nu}{2}N(N-1), \tag{2.24}$$

tako da je spektar identičan onomu od N harmoničkih oscilatora, pomaknutom za konstantu E_0. Rješavanje uvjeta (2.23) daje valnu funkciju osnovnog stanja,

$$\Phi_0^+ = e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2}, \qquad \psi_0^+ = \prod_{i>j} (x_i - x_j)^\nu e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2}. \tag{2.25}$$

Valne funkcije pobuđenih stanja generiraju se djelovanjem operatora a_i^+ na vakuum $\Phi_0^\pm$. Jasno je da te funkcije vrlo brzo postaju izuzetno komplicirane zbog prisutne sumacije u definiciji kovarijantne derivacije D_i.

S obzirom da promatramo sustav identičnih čestica, bilo bozona ili fermiona, valne funkcije moraju biti potpuno simetrizirane, odnosno antisimetrizirane. To je u relaciji (2.22) postignuto operatorom $\mathcal{S}_\pm$. Drugi način na koji možemo (anti)simetrizirati valne funkcije jest uvođenjem[2] totalno simetričnih operatora stvaranja i poništavanja,

$$A_k^\pm = \sum_{i=1}^{N} (a_i^\pm)^k. \tag{2.26}$$

Ti operatori sa Hamiltonijanom $\tilde{H}_{cal}$ zatvaraju slijedeću algebru,

$$[\tilde{H}_{cal}, A_k^\pm] = \pm k A_k^\pm. \tag{2.27}$$

Zbog zadnje relacije, smjesta se može zaključiti da opće pobuđeno stanje od (2.8) ima oblik

$$\psi^+_{n_1,\ldots,n_N} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)^\nu \prod_{k=1}^{N} (A_k^+)^{n_k} \Phi_0^+, \tag{2.28}$$

dok je pripadni spektar dan sa

$$E^+_{n_1,\ldots,n_N} = E_0^+ + \sum_{i=1}^{N} k n_k. \tag{2.29}$$

Operatorski pristup izložen u ovom poglavlju primjeren je stoga što čini neposrednijom vezu Calogerovog modela sa frakcionim statistikama [14, 15, 16].

[2] Ograničavamo se u daljnjim razmatranjima samo na totalno simetrične valne funkcije.

Poglavlje 3

Višefamilijarni Calogerov model

3.1 Model u jednoj dimenziji

Jednofamilijarni model (2.8) može se poopćiti na višefamilijarnu varijantu [17],[18] te čak i na proizvoljan broj dimenzija [19], o čemu će biti riječi u narednoj točki. Višefamilijarni Calogerov model, kao generalizacija modela (2.8) na sustav međusobno različitih čestica, interesantan je iz najmanje dva razloga. Kao prvo, pri njegovu proučavanju ispoljavaju se neke nove pojavnosti koje nisu bile prisutne kod modela sa identičnim česticama te stoga višefamilijarni model predstavlja arenu za testiranje matematičkih alata razvijenih ranije za tretiranje modela sa identičnim česticama. Drugi razlog zašto je višefamilijarni model interesantan jest mogućnost njegova dovođenja u vezu sa pojmom Haldane-ove statistike isključenja. Ishodište te veze leži u modelu (2.8). Naime, model (2.8) osigurava mikroskopsku realizaciju poopćene Haldane-ove statistike isključenja, gdje ulogu Haldane-ovog statističkog parametra igra konstanta vezanja g. Haldane-ova formulacija statistike dopušta postojanje čestica različite vrste, pri čemu statistčki parametar ovisi o paru čestica koje se vežu . Stoga je poopćenje Hamiltonijana (2.8) na višefamilijarni slučaj prirodan korak [20],[21],[22]. Najjednostavniji višefamilijarni model, sa samo dvije vrste čestica [18], razmatran je u [23], unutar supersimetričnog pristupa i tamo je zaključeno da bi odgovarajući Hamiltonijan mogao opisivati gibanje elektrona u jednodimenzionalnom poluvodiču.

Mogućnost razlikovanja čestica može se ostvariti tako da se dopusti da čestice imaju različite mase ($m \to m_i$) i različita vezanja ($\nu \to \nu_{ij}$). Zajednička osobitost tih poopćenja, uključujući i višedimenzionalne slučajeve, jest pojava novog, dugodosežnog, tročestičnog međudjelovanja koje se pojavljuje u Hamiltonijanu. U jednodimenzionalnoj varijanti (2.8) tročestična interakcija se može ukloniti prikladnim odabirom odnosa između konstanti vezanja ν_{ij} i masa m_i, ali kada je dimenzija veća od 1, ta se interakcija ne može ukloniti. U suprotnosti sa jednočestičnim, jednodimenzionalnim modelom (2.8), u svim ostalim spomenutim slučajevima poznat je samo ograničen skup egzaktnih svojstvenih stanja i samo dio potpunog spektra. Kompletno rješenje višefamilijarnog problema još uvijek nedostaje, čak i u jednodimenzionalnom slučaju. Međutim, zahvaljujući podležećoj $SU(1,1)$ simetriji, moguće je višefamilijarni Hamiltonijan preslikati na skup razvezanih oscilatora. Na taj način, problem nalaženja spektra i svojstvenih stanja višefamilijarnog modela prebacujemo u Bargmann-ovu reprezentaciju u kojoj, u stvari, rješavamo problem svojstvenih vrijednosti za ekvivalentni skup razvezanih oscilatora. Prisutna $SU(1,1)$ simetrija omogućava nam konstrukciju novih operatora stvaranja i poništavanja pomoću kojih možemo generirati kako čitavi spektar, tako i potpuni skup stanja. Opisana procedura je potpuno iscrpna u smislu da omogućava nalaženje svih stanja, iako njena provedba u praksi nije nimalo trivijalna. Ona će biti predmetom slijedećeg poglavlja.

Razmotrimo sada najopćenitije osnovno stanje Calogerovog tipa za N-čestični kvantnomehanički problem na pravcu,

$$\Psi_0(x_1, x_2, \cdots x_N) = \Delta e^{-\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2}, \tag{3.1}$$

gdje je prefaktor Δ dan sa

$$\Delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^{\nu_{ij}}, \qquad \nu_{ij} = \nu_{ji}, \qquad i,j = 1, 2 \cdots N, \tag{3.2}$$

a ν_{ij} su statistički parametri između čestica (i,j) i simetrični su, $\nu_{ij} = \nu_{ji}$. Frekvencija ω je ista za sve čestice. Mase čestica (m_i) općenito nisu jednake.

Hamiltonijan kojem je valna funkcija (3.1) osnovno stanje, ima oblik ($p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$),

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2 + \frac{1}{4}\sum_{i\neq j} \frac{\nu_{ij}(\nu_{ij}-1)}{(x_i - x_j)^2}(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j\neq k} \frac{\nu_{ij}\nu_{jk}}{m_j(x_j - x_i)(x_j - x_k)}, \tag{3.3}$$

$$H\Psi_0(x_1, x_2, \cdots x_N) = E_0 \Psi_0(x_1, x_2, \cdots x_N),$$

$$E_0 = \omega(\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\nu_{ij}). \tag{3.4}$$

Oznaka $(i \neq j \neq k)$ u zadnjem članu označava sumaciju preko svih trojki međusobno različitih indeksa.

Hamiltonijan (3.3) invarijantan je na grupu permutacija S_N skupa od N elemenata. Generatori K_{ij} simetrične grupe S_N izmjenjuju indekse i i j u svim veličinama, i to prema pravilima:

$$K_{ij}x_j = x_iK_{ij},\ K_{ij}m_j = m_iK_{ij},\ K_{ij}\nu_{jl} = \nu_{il}K_{ij},$$

$$K_{ij} = K_{ji},\ (K_{ij})^2 = 1,$$

$$K_{ij}K_{jl} = K_{jl}K_{il} = K_{il}K_{ij},\ \text{za}\ \ i \neq j,\ i \neq l,\ j \neq l.$$

Također vrijedi $K_{ij}HK_{ij} = H$, tj. $[H, K_{ij}] = 0$, za sve indekse i, j.

Treba napomenuti nekoliko činjenica u vezi Hamiltonijana (3.3):

1. On opisuje međusobno različite čestice na pravcu, koje se gibaju u zajedničkom harmoničkom potencijalu i međudjeluju putem dvočestičnih i tročestičnih potencijala. Sličan, ali manje općenit Hamiltonijan, kada su sve mase m_i jednake, razmatran je u [20],[24].

2. Za očekivati je da se njegova svojstvena stanja asimptotski ponašaju kao $\Psi \propto (x_i - x_j)^{\nu_{ij}}$ kada $(x_i - x_j) \to 0$.

3. On je poopćenje Hamiltonijana (2.8), gdje sada konstanta vezanja g ovisi o paru čestica (i, j) i izražena je preko statističkih parametara ν_{ij}. Uvjet stabilnosti zahtijeva da konstanta dvočestičnog vezanja $\nu_{ij}(\nu_{ij} - 1)$ bude veća od $-\frac{1}{4}$, za sve i, j.

4. Pojava Jastrow faktora $\Delta = \prod_{i<j} |x_i - x_j|^{\nu_{ij}}$ u izrazu za valnu funkciju ima isto ishodište kao i u običnom Calogerovom modelu. Naime, zbog singularne prirode Hamiltonijana (3.3) za $x_i = x_j$, valna funkcija mora imati prefaktor koji iščezava kada se dvije čestice nađu u istoj točki.

5. Stavljajući $\nu_{ij} = \nu$, za svaki i, j te $m_i = m$, za svaki i, Hamiltonijan (3.3) se reducira na obični N-čestični Calogerov model [1]. U tom slučaju, zbog identiteta $\sum_{cikl.} \frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)} = 0$, koji vrijedi u jednoj dimenziji, tročestični član u (3.3) iščezava. Za ν_{ij} međusobno različite, ali $m_i = m$, za sve i, Hamiltonijan (3.3) se svodi na modele razmatrane u [20],[24]. Konačno, kada je $\nu_{ij} = \alpha m_i m_j$, gdje je α konstanta, dobivamo model spomenut u [21],[25].

Sada načinimo neunitarnu transformaciju,

$$\tilde{\Psi}_0(x_1, x_2, \cdots x_N) = \Delta^{-1}\Psi_0(x_1, x_2, \cdots x_N) = e^{-\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2}. \tag{3.5}$$

Ona generira transformaciju sličnosti koja vodi na drugi S_N invarijantni, ali nehermitski Hamiltonijan $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = \Delta^{-1} H \Delta,$$

$$\tilde{H}\tilde{\Psi}_0(x_1, x_2, \cdots x_N) = E_0 \tilde{\Psi}_0(x_1, x_2, \cdots x_N),$$

gdje je E_0 dan u (3.4). Pokazuje se da $\tilde{H}$ ima oblik

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\nu_{ij}}{(x_i - x_j)}\left(\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{3.6}$$

U transformiranom Hamiltonijanu dvočestične i točestične interakcije više nisu izravno prisutne, ali su skrivene u zadnjem članu u (3.6).

Prikladno je problem razdvojiti na dio koji opisuje centar mase i dio koji opisuje relativno gibanje. To se može izvesti uvođenjem varijabli (X, ξ_i),

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \quad , \qquad \xi_i = x_i - X, \quad i = 1, 2, \cdots N, \tag{3.7}$$

i pripadnih derivacija $(\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \frac{\partial}{\partial X})$, koje su dane izrazima

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{m_i}{M}\frac{\partial}{\partial X} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial X} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots N. \tag{3.8}$$

Varijable ξ_i (kao i derivacije $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$) nisu međusobno linearno nezavisne

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \xi_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \xi_i} = 0.$$

U terminima upravo uvedenih varijabli, Hamiltonijan $\tilde{H}$ razdvaja se na dio koji opisuje gibanje centra mase (CM) te dio koji opisuje relativno gibanje (R), $\tilde{H} = \tilde{H}_{CM} + \tilde{H}_R$, pri čemu je

$$\tilde{H}_{CM} = -\frac{1}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 X^2,$$

$$\tilde{H}_R = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i^2} + \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i\xi_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\nu_{ij}}{(\xi_i-\xi_j)}(\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i} - \frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}). \tag{3.9}$$

Hamiltonijan H se također može rastaviti na isti način, $H = H_{CM} + H_R$. Valna funkcija (3.5) separira se na način,

$$\tilde{\Psi}_0(x_1, x_2, \cdots x_N) = \tilde{\Psi}_0(X)\tilde{\Psi}_0(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_N) = e^{-\frac{M\omega}{2}X^2} e^{-\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\xi_i^2}.$$

Energija osnovnog stanja E_0 također se razdvaja na odgovarajući način, na energiju centra mase, $E_{0CM} = \frac{1}{2}\omega$, i energiju relativnog gibanja, $E_{0R} = \frac{N-1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega\sum_{i\neq j}\nu_{ij}$.

Definiramo skup operatora $\{T_+, T_-, T_0\}$ na način,

$$T_+ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2,$$

$$T_- = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\nu_{ij}}{(x_i-x_j)}(\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial x_j}),$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{N} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{E_0}{\omega}). \tag{3.10}$$

Uz pomoć relacija (3.7),(3.8) moguće je pokazati da ovi operatori također dopuštaju sličan rastav, $T_{\pm,0} = T_{\pm,0_{(CM)}} + T_{\pm,0_{(R)}}$.

Operatori $\{T_+, T_-, T_0\}$ zadovoljavaju $SU(1,1)$ algebru,

$$[T_-, T_+] = 2T_0 \quad , \qquad [T_0, T_\pm] = \pm T_\pm. \tag{3.11}$$

Hamiltonijan (3.6) se može izraziti pomoću generatora $SU(1,1)$ algebre, $\tilde{H} = \omega^2 T_+ - T_-$.

3.1.1 Reprezentacija u Fockovom prostoru

Sada uvodimo operatore stvaranja i poništavanja $\{A_1^+, A_1^-\}$ i $\{A_2^+, A_2^-\}$ koji opisuju kolektivna pobuđenja Hamiltonijana (3.6),

$$A_1^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{M\omega}X \mp \frac{1}{\sqrt{M\omega}}\frac{\partial}{\partial X}),$$

$$A_2^\pm = \frac{1}{2}(\omega T_+ + \frac{1}{\omega}T_-) \mp T_0. \tag{3.12}$$

Oni zadovoljavaju slijedeće komutacijske relacije:

$$[A_1^-, A_1^+] = 1, \qquad [A_2^-, A_2^+] = \frac{1}{\omega}\tilde{H},$$
$$[A_1^-, A_2^-] = [A_1^+, A_2^+] = 0, \qquad [A_1^-, A_2^+] = A_1^+, \qquad [A_1^+, A_2^-] = -A_1^-,$$
$$[\tilde{H}, A_1^\pm] = \pm\omega A_1^\pm, \tag{3.13}$$
$$[\tilde{H}, A_2^\pm] = \pm 2\omega A_2^\pm,$$

i djeluju na Fockov vakuum $|\tilde{0}\rangle \propto \tilde{\Psi}_0(x_1, x_2, \cdots x_N)$ na način,

$$A_1^-|\tilde{0}\rangle = A_2^-|\tilde{0}\rangle = 0, \qquad \langle\tilde{0}|\tilde{0}\rangle = 1.$$

Na osnovu komutacijskih relacija (3.13), pobuđena stanja od (3.6) mogu se izgraditi višestrukim djelovanjem operatora stvaranja na vakuum,

$$|n_1, n_2\rangle \propto A_1^{+n_1} A_2^{+n_2}|\tilde{0}\rangle, \qquad \forall n_1, n_2 = 0, 1, \cdots \tag{3.14}$$

Višestruko djelovanje operatora A_1^+ i A_2^+ na vakuum $|\tilde{0}\rangle$, generira u koordinatnoj reprezentaciji Hermitove polinome, odnosno pridružene Laguerrove polinome. Stanja $|n_1, n_2\rangle$ su svojstvena stanja od $\tilde{H}$, sa svojstvenim vrijednostima

$$E_{n_1,n_2} = \omega(n_1 + 2n_2) + E_0. \tag{3.15}$$

Spektar je linearan u kvantnim brojevima n_1, n_2. Taj rezultat je općenit u smislu da on vrijedi za sve parametre m_i i ν_{ij}. Osnovno stanje i prvo pobuđeno stanje je nedegenerirano, dok su viša pobuđena stanja degenerirana. Struktura te degeneracije prikazana je u slijedećoj tabeli,

n_1	n_2	$n = n_1 + 2n_2$	Degenerirana stanja
0	0	0	$\vert\tilde{0}\rangle$
1	0	1	$A_1^+\vert\tilde{0}\rangle$
2	0	2	$A_1^{+2}\vert\tilde{0}\rangle$
0	1	2	$A_2^+\vert\tilde{0}\rangle$
1	1	3	$A_1^+A_2^+\vert\tilde{0}\rangle$
3	0	3	$A_1^{+3}\vert\tilde{0}\rangle$
0	2	4	$A_2^{+2}\vert\tilde{0}\rangle$
2	1	4	$A_1^{+2}A_2^+\vert\tilde{0}\rangle$
4	0	4	$A_1^{+4}\vert\tilde{0}\rangle$
5	0	5	$A_1^{+5}\vert\tilde{0}\rangle$
3	1	5	$A_1^{+3}A_2^+\vert\tilde{0}\rangle$
1	2	5	$A_1^+A_2^{+2}\vert\tilde{0}\rangle$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Evidentno je da kada je n paran, degeneracija je $(\frac{n}{2}+1)$, dok kada je n neparan, degeneracija je $(\frac{n+1}{2})$.

Algebra koja opisuje dinamičku simetriju modela je maksimalna algebra koja komutira sa Hamiltonijanom $\tilde{H}$. Dinamička simetrija običnog Calogerovog modela opisana je u [26, 27, 28] složenom polinomijalnom algebrom, označenom sa $C_N(\nu)$.

U našem slučaju, zahvaljujući činjenici da se $\tilde{H}$ može zapisati u terminima dva nezavisna, razvezana oscilatora (vidi relacije (3.16) i (3.17)), spomenuta polinomijalna algebra se može linearizirati i reducirati na $SU(2)$ algebru. To je minimalna simetrija koja preostaje za opće parametre ν_{ij} i m_i. U stvari, to je ista dinamička simetrija koja se pojavljuje u dvočestičnom Calogerovom modelu [26, 27, 28, 29, 30]. Ona je odgovorna za gore opisanu degeneraciju.

S ciljem da se kolektivni modovi A_1, A_2 potpuno razvežu i postanu nezavisni, definiramo operatore stvaranja i poništavanja $\{B_2^+, B_2^-\}$,

$$B_2^{\pm} = A_2{}^{\pm} - \frac{1}{2}A_1^{\pm 2}. \tag{3.16}$$

U terminima operatora $A_1^{\pm}$ i $B_2^{\pm}$, gore spomenuta $SU(2)$ algebra ($[J_+, J_-] = 2J_0$, $[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$), koja opisuje dinamičku simetriju za Hamiltonijan (3.3), generirana je sa

$$J_+ = A_1^{+2} B_2^- \frac{1}{\sqrt{2(\hat{N}_2 - 1 + \frac{E_{0R}}{\omega})(\hat{N}_1 + 1)}},$$

$$J_- = B_2^+ A_1^{-2} \frac{1}{\sqrt{2(\hat{N}_2 + \frac{E_{0R}}{\omega})(\hat{N}_1 - 1)}},$$

$$J_0 = \frac{1}{4}(\hat{N}_1 - 2\hat{N}_2).$$

Operatori $\hat{N}_1$ i $\hat{N}_2$ su operatori broja čestica koji broje A_1, odnosno B_2 modove.

Prednost konstrukcije (3.16) je ta da se operatori $A_1^{\pm}$, koji odgovaraju gibanju centra mase, potpuno razvezuju od $B_2^{\mp}$ modova,

$$[A_1^{\pm}, B_2^{\mp}] = 0. \tag{3.17}$$

Zbog toga imamo

$$\tilde{H}_{CM} = \frac{1}{2}\omega\{A_1^-, A_1^+\}_+ \equiv \omega(\hat{N}_1 + \frac{E_{0CM}}{\omega}),$$

$$\tilde{H}_R = \omega[B_2^-, B_2^+] \equiv \omega(2\hat{N}_2 + \frac{E_{0R}}{\omega}),$$

$$[\tilde{H}_R, B_2^{\pm}] = \pm 2\omega B_2^{\pm}. \tag{3.18}$$

Fockov prostor se sada razdvaja na Fockov prostor za centar mase, razapet sa $A_1^{+n_1}|\tilde{0}\rangle_{CM}$, te na Fockov prostor za relativno gibanje, razapet sa $B_2^{+n_2}|\tilde{0}\rangle_R$, gdje je $|\tilde{0}\rangle_{CM} \propto \tilde{\Psi}_0(X)$ i $|\tilde{0}\rangle_R \propto \tilde{\Psi}_0(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_N)$.

Reduciranje problema (3.3) na (3.6) i kasnije na (3.18), tj. $H \to \tilde{H} \to \tilde{H}_R$, ima zanimljivu posljedicu, a to je postojanje univerzalne kritične točke, definirane pomoću vektora norme nula,

$$\frac{{}_R\langle\tilde{0}|B_2^- B_2^+|\tilde{0}\rangle_R}{{}_R\langle\tilde{0}|\tilde{0}\rangle_R} = \frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\nu_{ij} = 0. \tag{3.19}$$

Gornja relacija direktna je posljedica relacija (3.18) i zahtjeva ${}_R\langle\tilde{0}|\tilde{H}_R|\tilde{0}\rangle_R = E_{0R} = 0$. Iz algebre (3.18) direktno slijede i slijedeće relacije [31]

$$B_2^+ B_2^- = \hat{N}_2(\hat{N}_2 - 1 + \frac{E_{0R}}{\omega}) \equiv \phi(\hat{N}_2),$$

$$B_2^- B_2^+ = (\hat{N}_2 + 1)(\hat{N}_2 + \frac{E_{0R}}{\omega}) \equiv \phi(\hat{N}_2 + 1),$$

$$\frac{{}_R\langle\tilde{0}|B_2^{-m} B_2^{+m}|\tilde{0}\rangle_R}{{}_R\langle\tilde{0}|\tilde{0}\rangle_R} = \prod_{k=1}^{m}\phi(k). \tag{3.20}$$

Budući da jednadžbe (3.19) i (3.20) povlače da vrijedi $\phi(1) = \frac{E_{0R}}{\omega} = 0$, očito je da je kritična točka, definirana sa (3.19), jedinstvena. To znači da nema sličnih kritičnih točaka kada se uzmu u obzir norme stanja izgrađenih pomoću višestrukog djelovanja operatora B_2.

Sistem opisan Hamiltonijanom $\tilde{H}_R$ potpuno kolabira u kritičnoj točki. To znači da relativne koordinate i relativni impulsi iščezavaju u toj točki. Preživljava jedino oscilatorni mod koji opisuje gibanje centra mase. Takvo singularno ponašanje prvi put je opaženo u [32], za slučaj $\nu_{ij} = \nu$ i $m_i = m$. Naravno, za Hamiltonijan H, koji nije unitarno, tj. fizikalno ekvivalentan sa $\tilde{H}$, gore opisano ponašanje odgovara situaciji kada je neki $\nu_{ij} < 0$ i tada norma valne funkcije (3.1) prestaje biti konačna u kritičnoj točki. U situaciji kada je ν_{ij} negativan, ali veći od kritične vrijednosti (3.19), valna funkcija je singularna u kritičnoj točki, ali još uvijek kvadratno integrabilna.

3.1.2 Tročestična interakcija

Razmotrimo malo detaljnije zadnji član u (3.3),

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k\neq}(\frac{\nu_{ij}\nu_{jk}}{m_j})\frac{1}{(x_j-x_i)(x_j-x_k)}. \tag{3.21}$$

Ako u (3.21) stavimo $m_j = m$, za svaki j, simetriziramo na cikličku izmjenu indeksa, $(i \to j \to k \to i)$ i reduciramo sumu na zajednički nazivnik korištenjem identiteta

$$\sum_{cycl.}\frac{1}{(x_i-x_j)(x_i-x_k)} = 0,$$

tada dobivamo da je nužan uvjet za iščezavanje tročestične interakcije $\nu_{ij} = \nu$, za sve i, j. Na taj način, problem (3.3) je sveden na obični N-čestični Calogerov model sa samo dvočestičnom interakcijom.

Za opće parametre ν_{ij} i m_i, gore opisana procedura vodi na slijedeće uvjete za odsustvo tročestične interakcije (3.21),

$$\frac{\nu_{ij}\nu_{jk}}{m_j} = \frac{\nu_{jk}\nu_{ki}}{m_k} = \frac{\nu_{ki}\nu_{ij}}{m_i}, \qquad \text{za sve trojke } (i,j,k). \tag{3.22}$$

Jedinstveno rješenje ovih uvjeta je $\nu_{ij} = \alpha\, m_i\, m_j$, gdje je α neka univerzalna konstanta. Ova ista veza između masa i konstanti vezanja korištena je u [21],[25]. U [21], uvjet (3.22) se pojavio iz zahtjeva da asimptotski Betheov ansatz bude primjenjiv na osnovno stanje višefamilijarnog mnogočestičnog kvantnog sistema koji se pokorava određenoj statistici, dok u [25] njegovo ishodište nije očigledno. U pristupu izloženom u ovom poglavlju, relacije (3.22) imaju najjednostavniju moguću interpretaciju.

3.2 Deformirani matrični oscilator i modeli Calogerovog tipa

Ranije je pokazano da se Hamiltonijan $\tilde{H}_{cal}$ za jednofamilijarni Calogerov model može prikazati u dijagonalnoj kvadratnoj formi, relacija (2.20), koja podsjeća na poopćeni harmonički oscilator. Da je tako nešto moguće, treba zahvaliti činjenici što jednofamilijarni Calogerov model u jednoj dimenziji dopušta konstrukciju Dunkl-ovih operatora (kovarijantnih derivacija (2.10)) i pripadnih operatora stvaranja i poništavanja (2.16). Za razliku od toga, u slučaju višefamilijarnog Calogerovog modela nije jasno kako bi takva konstrukcija trebala izgledati, niti da li je uopće moguća. Kako bismo ipak uspjeli i poopćeni Calogerov model, koji opisuje međusobno različite čestice, svesti na dijagonalnu kvadratnu formu, promatramo najopćenitiju formu Hamiltonijana za harmonički oscilator. Tu najopćenitiju formu nalazimo u deformiranom matričnom oscilatoru. Cilj nam je, dakle, putem podešavanja parametara "baždarne transformacije" reproducirati Hamiltonijan višefamilijarnog Calogerovog modela polazeći od deformiranog kvantnog matričnog oscilatora. Ovdje ćemo opisati takvu konstrukciju [33].

Dakle, razmatramo matričnu generalizaciju Hamiltonijana harmoničkog oscilatora,

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{P} M^{-1} \boldsymbol{P} + \omega^2 \boldsymbol{X} M \boldsymbol{X}\big), \tag{3.23}$$

gdje je $M_{ij} = m_i \delta_{ij}$ nesingularna masena matrica ($m_i > 0$), a $\boldsymbol{P} = -i\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{X}$ su matrice poopćenog impulsa i koordinate, s time da su njihovi matrični elementi općenito operatori,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1N} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_N \end{pmatrix}.$$

Pretpostavljamo da vrijede slijedeće deformirane matrične komutacijske relacije:

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}] = i\boldsymbol{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{D}] = -\boldsymbol{\Lambda}, \tag{3.24}$$

gdje je $\boldsymbol{\Lambda}$ hermitska matrica sa konstantnim, realnim i simetričnim matričnim elementima,

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \nu_{12} & \cdots & \nu_{1N} \\ \nu_{12} & 0 & \cdots & \nu_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{1N} & \nu_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

U terminima matričnih elemenata, komutacijske relacije (3.24) imaju oblik

$$D_{ij} x_j - x_i D_{ij} = \nu_{ij}, \qquad D_{ii} x_i - x_i D_{ii} = 1. \tag{3.25}$$

Postoji mnogo rješenja ovih uvjeta. Ukoliko veličini $\boldsymbol{D}$ dodamo bilo koji izraz koji ovisi o $\boldsymbol{X}$, to neće utjecati na komutacijske relacije (3.25). Kako bismo tu činjenicu učinili eksplicitnijom, možemo promatrati "baždarnu transformaciju" $\boldsymbol{D} \to F(\boldsymbol{X})^{-1}\, \boldsymbol{D}\, F(\boldsymbol{X})$, pomoću proizvoljne funkcije $F(\boldsymbol{X})$ koja ovisi o koordinatama. Na nivou Hamiltonijana to generira neunitarnu transformaciju $\boldsymbol{H} \to F(\boldsymbol{X})^{-1}\, \boldsymbol{H}\, F(\boldsymbol{X})$.

Ograničit ćemo se na baždarne transformacije definirane sa

$$F(\boldsymbol{X}) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)^{\theta_{ij}}, \qquad \theta_{ij} = \theta_{ji}.$$

Odgovarajuća klasa rješenja jednadžbi (3.25) je dana sa

$$D_{ij} = \delta_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k \neq i} \frac{\theta_{ik}}{(x_i - x_k)} \right) - \nu_{ij} \frac{(1 - \delta_{ij})}{(x_i - x_j)}.$$

Ono što sada imamo jest klasa matričnih Hamiltonijana koji ovise o tri vrste parametara. To su mase m_i, deformacijski parametri $\nu_{ij} = \nu_{ji}$ te "baždarni" parametri $\theta_{ij} = \theta_{ji}$. Da bismo iz matričnog Hamiltonijana (3.23) dobili jednodimenzionalne modele Calogerovog tipa, razmatrane na prethodnim stranicama, potrebno je provesti redukciju tipa [33]:

$$H = \mathrm{Tr}\, (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{J}), \tag{3.26}$$

gdje je konstantna matrica $\boldsymbol{J}$ oblika

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Na ovom mjestu treba napomenuti da se redukcijska procedura naznačena u (3.26) razlikuje od one provedene u [34]. Hamiltonijan H u (3.26) nije trag matričnog Hamiltonijana $\boldsymbol{H}$, kao u [34], već je dan tragom veličine $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{J}$.

Sada se može pokazati da redukcija (3.26) i odabir skupa parametara $\{m_i = m; \nu_{ij} = \nu; \theta_{ij} = 0\}$ vodi na Calogerov Hamiltonijan (2.8) (uz $m = 1,\ \omega = 1,\ g = \nu(\nu - 1)$). Slično, odabirom $\{m_i = m; \nu_{ij} = \nu; \theta_{ij} = \nu_{ij} = \nu\}$ moguće je reproducirati Hamiltonijan (2.20) (uz $m = 1,\ \omega = 1,\ g = \nu(\nu - 1)$).

Još interesantniji izbor, $\{m_i; \nu_{ij} = \nu_{ji}; \theta_{ij} = 0\}$, rezultira Hamiltonijanom (3.3) za jednodimenzionalni, višefamilijarni Calogerov model, sa tročestičnim međudjelovanjem [17]:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i x_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \frac{\nu_{ij}(\nu_{ij} - 1)}{(x_i - x_j)^2} \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right)$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i\neq j\neq k}(\frac{\nu_{ij}\nu_{jk}}{m_j})\frac{1}{(x_j-x_i)(x_j-x_k)}}_{3-\text{cesticna interakcija}}. \tag{3.27}$$

Baždarno transformirani Hamiltonijan, $\tilde{\boldsymbol{H}} = F(\boldsymbol{X})^{-1}\,\boldsymbol{H}\,F(\boldsymbol{X})$, može se reproducirati odabirom skupa parametara, $\{m_i;\nu_{ij}=\nu_{ji};\theta_{ij}=\nu_{ij}\}$, i ima oblik (3.6),

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}\sum_i\frac{1}{m_i}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i x_i^2-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\nu_{ij}}{(x_i-x_j)}\left(\frac{1}{m_i}\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{3.28}$$

Matrični oscilator (3.23) može se dovesti u vezu sa regulariziranim Chern-Simons matričnim modelom kojeg je uveo Polychronakos [35]. Pripadna akcija za taj model je

$$S_M = \frac{eB}{2}\int dt Tr[\varepsilon_{ab}X_a(\dot{X}_b - i[A_0,X_b]) + 2\theta A_0]$$

$$-\frac{\omega eBN}{2\bar{\psi}\psi}\int dt\bar{\psi}X_aX_a\psi - \int dt\bar{\psi}(i\partial_t + A_0)\psi, \tag{3.29}$$

gdje su X_a; $a=1,2$ dvije $N\times N$ hermitske matrice pomoću kojih je moguće koordinate elektrona globalno parametrizirati na "razmazan" način. A_0 je matrica koja ima ulogu baždarnog polja i u gornju akciju ulazi samo linearno, a ψ $(\bar{\psi}=\psi^{*T})$ je vektorsko polje koje opisuje efekte rubnih ploha. Ova akcija opisuje dvodimenzionalni sistem od N nabijenih čestica naboja e, mase m, u magnetskom polju B. Akcija S_M je invarijantna na transformacije $X_a \to UX_aU^{-1}$, $\psi \to U\psi$, $\bar{\psi}\to\bar{\psi}U^{-1}$, $A_0 \to UA_0U^{-1} + iU\partial_t U^{-1}$, gdje je U unitarna matrica, $U \in U(N)$. Član sa ω služi kao potencijalna jama koja drži čestice blizu ishodišta i također osigurava Hamiltonijan za teoriju koja ima jedinstveni vakuum. Zadnji član opisuje doprinose rubnih ploha. Uvedimo parametar k definiran na način $k=eB\theta$. Sada varijacija akcije S_M u varijabli polja A_0 daje jednadžbu gibanja za vremensku komponentu A_0 baždarnog polja. Ta jednadžba ima oblik

$$ieB[X_1,X_2] + k\mathbf{1} - \psi\bar{\psi} = 0. \tag{3.30}$$

Ova relacija se može interpretirati kao kvantizacijski uvjet postavljen na matrice X_1 i X_2, nakon čega njihovi matrični elementi postaju operatori.

Ako uvedemo matricu $\boldsymbol{X}\equiv X_1$ i drugu matricu $\boldsymbol{P}$, definiranu na način,

$$\boldsymbol{P} = -eBX_2 = -m\omega X_2, \tag{3.31}$$

gdje je $\omega = \frac{eB}{m}$, jednadžba gibanja (3.30) postaje identična kvantizacijskom uvjetu (3.24), u kojem sada matrica $\mathbf{\Lambda}$ ima još jednostavniji oblik,

$$\mathbf{\Lambda} = (1-\nu)\mathbf{1} + \nu \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 & \nu & \cdots & \nu \\ \nu & 1 & \cdots & \nu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu & \nu & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\nu > -\frac{1}{N}$ realan parametar koji je jednak $\nu = k+1$. U tom slučaju trag $Tr[X_1, X_2]$ je jednak $\frac{N}{ieB}$. Iz (3.30) tada slijedi $Tr[X_1, X_2] = \frac{Tr\psi\bar{\psi}-Nk}{ieB} = \frac{N}{ieB}$. To znači da je $Tr\psi\bar{\psi} = N(k+1)$. U [36] je ova veza između matričnog oscilatora i regulariziranog Chern-Simons matričnog modela iskorištena kako bi se pokazalo da kvantni matrični oscilator opisuje kvantnu mehaniku elektrona u najnižem Landauovom nivou sa valnom funkcijom osnovnog stanja Laughlin-ovog tipa [37].

3.3 Model u većem broju dimenzija

Daljnja poopćenja mogu se postići formuliranjem modela u dimenzijama većim od $D = 1$. U slučaju modela formuliranih u većem broju dimenzija i sa identičnim česticama, pokazano je da se mogu dobiti neka svojstvena stanja, uključujući i osnovno stanje, ali samo pod uvjetom da se Hamiltonijanu modela pridoda dugodosežni tročestični potencijal [38],[39],[40],[41],[42]. Neizbježna pojava tročestičnog međudjelovanja u slučaju $D > 1$ čini bilo kakvu analizu takvih modela vrlo zahtjevnom. Stanoviti napredak u tom smjeru učinjen je za klasu dvodimenzionalnih modela sa identičnim česticama [43],[13].

U ovoj točki prikazat će se jedan novi, djelomično rješivi, višefamilijarni model Calogerovog tipa u $D > 1$ dimenzija. Pored harmoničkog potencijala, on sadrži dvočestične i tročestične interakcije, sa konstantama vezanja koje ovise o vrstama čestica. Pretpostavlja se također da čestice imaju različite mase.

3.3.1 Hamiltonijan modela, $SU(1,1)$ simetrija i veza sa harmoničkim oscilatorima

Egzaktne valne funkcije Calogerovog modela su visoko korelirane. Te korelacije su ugrađene u valne funkcije u obliku Jastrow prefaktora $\prod_{i<j}(x_i - x_j)^\nu$. Eksponent ν u korelatoru povezan je sa jačinom dvočestičnog vezanja.

Zbog toga je prihvatljivo najopćenitiju valnu funkciju osnovnog stanja sustava N različitih čestica Calogerovog tipa, u D dimenzija, pretpostaviti u obliku (kao i do sada, uzimamo $\hbar = 1$),

$$\Psi_0(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) = \Delta e^{-\frac{\omega}{2}\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^2}, \tag{3.32}$$

gdje je oblik Jastrow prefaktora poopćen na

$$\Delta = \prod_{i<j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{\nu_{ij}}, \quad \nu_{ij} = \nu_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \cdots N. \tag{3.33}$$

Ovdje su m_i mase čestica, ω je frekvencija harmoničkog potencijala i ν_{ij} su statistički parametri između čestica i i j. U osnovi, za valnu funkciju osnovnog stanja mogli smo odabrati bilo koju funkciju koja ima nultočke samo u točkama podudaranja bilo koje dvije čestice i koja na kontinuiran način prelazi u Gaussovu funkciju u granici $\nu_{ij} \to 0$.

Međutim, s obzirom da za $\nu_{ij} = \nu$, $m_i = m$ i $D \neq 1$, valna funkcija (3.32) na kontinuirani način prelazi u egzaktnu valnu funkciju osnovnog stanja Calogero-Marchioro modela [44], valna funkcija (3.32) se čini prirodnim izborom. Ukoliko se pitamo kakav oblik ima Hamiltonijan kojem valna funkcija (3.32) opisuje egzaktno osnovno stanje, onda, za dovoljno male deformacije ν_{ij}, dolazimo [19] do Hamiltonijana

$$\begin{aligned} H = &-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i}\vec{\nabla}_i^2 + \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^2 \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i<j} \frac{\nu_{ij}(\nu_{ij} + D - 2)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j, i\neq k} \frac{\nu_{ij}\nu_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)(\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{m_i|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^2}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

takvog da vrijedi

$$H\Psi_0 = E_0\Psi_0, \tag{3.35}$$

$$E_0 = \omega(\frac{ND}{2} + \sum_{i<j} \nu_{ij}) \equiv \omega\epsilon_0. \tag{3.36}$$

Osnovno stanje (3.32) i Hamiltonijan (3.34) invarijantni su na S_N, grupu permutacija N elemenata, koju generiraju operatori izmjene K_{ij} [11, 12]. Operatori K_{ij} izmjenjuju indekse $i \leftrightarrow j$ u svim veličinama, $m_i \leftrightarrow m_j$, $\nu_{ik} \leftrightarrow \nu_{jk}$, $\vec{r}_i \leftrightarrow \vec{r}_j$, $\vec{p}_i \leftrightarrow \vec{p}_j$.

Kao što smo prije vidjeli, za $D = 1$, tročestični potencijal u (3.34) identički iščezava za $\nu_{ij} = \nu$, $m_i = m$ ili ukoliko je ispunjen uvjet $\nu_{ij} =$

$\alpha m_i m_j$, gdje je α neka univerzalna konstanta [17]. Za razliku od jedne dimenzije, tročestični potencijal ne iščezava u višim dimenzijama i igra ključnu ulogu u analizi koja slijedi.

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, načinimo neunitarnu transformaciju na Ψ_0, na način $\tilde{\Psi}_0 = \Delta^{-1}\Psi_0$. Ona generira transformaciju sličnosti koja vodi na drugi S_N invarijantni Hamiltonijan, $\tilde{H} = \Delta^{-1} H \Delta$. Nalazimo da je $\tilde{H}$ dan sa

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\vec{\nabla}_i^2 + \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^2 - \sum_{i<j}\nu_{ij}\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}\left(\frac{1}{m_i}\vec{\nabla}_i - \frac{1}{m_j}\vec{\nabla}_j\right)\\ &= \omega^2 T_+ - T_-, \end{aligned} \tag{3.37}$$

gdje smo uveli

$$T_- = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\vec{\nabla}_i^2 + \sum_{i<j}\nu_{ij}\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}\left(\frac{1}{m_i}\vec{\nabla}_i - \frac{1}{m_j}\vec{\nabla}_j\right), \tag{3.38}$$

$$T_+ = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^2, \qquad T_0 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\vec{\nabla}_i + \varepsilon_0\right).$$

Operatori $T_\pm$, T_0 zadovoljavaju $SU(1,1)$ algebru

$$[T_-, T_+] = 2T_0, \qquad [T_0, T_\pm] = \pm T_\pm. \tag{3.39}$$

Hamiltonijan (3.34) ekvivalentan je skupu razvezanih harmoničkih oscilatora, što znači da postoji transformacija sličnosti kojom se Hamiltonijan (3.34) može preslikati na Hamiltonijan sistema razvezanih oscilatora. Ta transformacija sličnosti dobro je definirana za $\omega \neq 0$ i ima slijedeći oblik,

$$\tilde{H} = \omega^2 T_+ - T_- = 2\omega S\, T_0\, S^{-1}, \tag{3.40}$$

$$S = e^{-\omega T_+}\, e^{-\frac{1}{2\omega}T_-}.$$

Zahvaljujući tom identitetu, moguće je analizu prenijeti u Bargmann-ovu reprezentaciju i iterativno konstruirati Bargmann-Fockov prostor svojstvenih stanja. To je procedura kojom ćemo se baviti u slijedećem poglavlju.

Iako spomenuta Bargmann-Fockova procedura, koju ćemo detaljno opisati u slijedećem poglavlju, daje sustavnu metodu kojom se mogu, barem u principu, dobiti sva svojstvena stanja Hamiltonijana (3.34), zbog praktične nemogućnosti provedbe nekih njenih koraka, za sada nismo u stanju potpuno riješiti Hamiltonijan (3.34), tj. naći sva njegova svojstvena stanja. Ipak, u mogućnosti smo naći globalna kolektivna stanja Hamiltonijana (3.34). Ta stanja, općenito, reprezentiraju sva stanja polinomijalnog karaktera u Bargmann-Fockovom prostoru svojstvenih stanja[1]. U slijedećem poglavlju pokazat će se također da su ta polinomijalna kolektivna stanja zajednička,tj. univerzalna karakteristika svih sistema sa podležećom konformnom $SU(1,1)$ simetrijom.

U slijedećoj točki konstruirati ćemo i razmatrati ta polinomijalna kolektivna stanja Hamiltonijana H, tj. $\tilde{H}$.

3.3.2 Globalna kolektivna stanja i reprezentacija u Fockovom prostoru

Prikladno je uvesti koordinatu centra mase $\vec{R}$ i relativne koordinate $\vec{\rho}_i$,

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i, \qquad \vec{\nabla}_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i$$

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{R}, \qquad \vec{\nabla}_{\rho_i} = \vec{\nabla}_i - \frac{m_i}{M}\vec{\nabla}_R. \tag{3.41}$$

Oni zadovoljavaju relacije $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_{\rho_i} = 0$. Hamiltonijan $\tilde{H}$ i valna funkcija $\tilde{\Psi}_0$ mogu se izraziti pomoću tih varijabli i pri tome se oboje razdvajaju na dijelove koji opisuju gibanje centra mase (CM) i relativno gibanje (R), $\tilde{H} = \tilde{H}_{CM} + \tilde{H}_R$ i $\tilde{\Psi}_0(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) = \tilde{\Psi}_0(\vec{R})\tilde{\Psi}_0(\vec{\rho}_1, ..., \vec{\rho}_N)$. Korištenjem izraza (3.38) i (3.41), mogu se definirati operatori stvaranja i poništavanja,

$$\vec{A_1}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{M\omega}\vec{R} \mp \frac{1}{\sqrt{M\omega}}\vec{\nabla}_R),$$

$$A_2{}^{\pm} = \frac{1}{2}(\frac{T_-}{\omega} + \omega T_+) \mp T_0, \tag{3.42}$$

koji zadovoljavaju slijedeće komutacijske relacije ($\alpha, \beta = 1, 2, \cdots D$),

$$[A^-_{1,\alpha}, A^+_{1,\beta}] = \delta_{\alpha\beta}, \qquad [A^-_{1,\alpha}, A^-_{1,\beta}] = [A^+_{1,\alpha}, A^+_{1,\beta}] = 0,$$

$$[\vec{A_1}^-, A_2{}^+] = \vec{A_1}^+, \qquad [A_2^-, \vec{A_1}^+] = \vec{A_1}^-,$$

$$[A_2^-, A_2{}^+] = \frac{\tilde{H}}{\omega}, \qquad [\tilde{H}, \vec{A_1}^{\pm}] = \pm\omega\vec{A_1}^{\pm},$$

$$[\tilde{H}, A_2{}^{\pm}] = \pm 2\omega A_2{}^{\pm}. \tag{3.43}$$

[1] Ili kratko, u Bargmann-ovoj reprezentaciji.

Može se pokazati da vrijedi ${A_2}^{\pm} = S\,T_{\pm}\,S^{-1}$, $\vec{A_1}^{+} = S\,\vec{R}\,S^{-1}$ i $\vec{A_1}^{-} = S\,\vec{\nabla}_R\,S^{-1}$, pri čemu je S definiran u (3.40). Operatori $\vec{A_1}^{-}$, A_2^- poništavaju Fockov vakuum $|\tilde{0}\rangle \propto \tilde{\Psi}_0(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)$,

$$\vec{A_1}^{-}|\tilde{0}\rangle = A_2^-|\tilde{0}\rangle = 0, \qquad \langle\tilde{0}|\tilde{0}\rangle = 1. \tag{3.44}$$

Globalna kolektivna stanja opisana su pobuđenim stanjima u Fockovom prostoru, i imaju oblik

$$A_{1,1}^{+}{}^{n_{1,1}} \cdots A_{1,D}^{+}{}^{n_{1,D}} A_2^{+}{}^{n_2}|\tilde{0}\rangle \equiv \prod_{\alpha=1}^{D}(A_{1,\alpha}^{+})^{n_{1,\alpha}} A_2^{+}{}^{n_2}|\tilde{0}\rangle, \tag{3.45}$$

gdje je $n_{1,\alpha} = 0, 1, 2...$ za sve α i $n_2 = 0, 1, 2...$ Opetovanim djelovanjem operatora $A_{1,\alpha}^{+}$ na vakuum $|\tilde{0}\rangle$ reproduciraju se, u koordinatnoj reprezentaciji, Hermiteovi polinomi $H_{n_{1,\alpha}}(R_\alpha\sqrt{M\omega})$. Slično, opetovanim djelovanjem operatora A_2^+ na vacuum $|\tilde{0}\rangle$ reproduciraju se pridruženi Laguerrovi polinomi $L_{n_2+\varepsilon_0-1}^{\varepsilon_0-1}(2\omega T_+)$. Stanja (3.45) su svojstvena stanja od $\tilde{H}$. Zadnje dvije relacije u (3.43) impliciraju da tim stanjima pripadaju energije

$$E_{n_{1,\alpha};n_2} = \omega(\sum_{\alpha=1}^{D} n_{1,\alpha} + 2n_2 + \varepsilon_0). \tag{3.46}$$

Ova relacija daje dio potpunog spektra, koji odgovara stanjima centra mase i globalnim dilatacionim stanjima.

Sada se može pokazati da su stanja (3.45), za Hamiltonijane $\tilde{H}$ i H, normalizabilna, tj. da su kvadratno integrabilna i fizikalno prihvatljiva, pod uvjetom da vrijedi $\epsilon_0 > \frac{D}{2}$.

Najprije uvedimo novi par operatora stvaranja i poništavanja, $\{B_2^+, B_2^-\}$, pomoću kojeg možemo razvezati modove centra mase (CM) od modova koji opisuju relativno (R) gibanje,

$$B_2^{\pm} = {A_2}^{\pm} - \frac{1}{2}(\vec{A_1}^{\pm})^2. \tag{3.47}$$

Ti operatori komutiraju sa modovima centra mase,

$$[{A_{1,\alpha}}^{\pm}, {B_2}^{\mp}] = 0. \tag{3.48}$$

Stoga imamo

$$\tilde{H}_R = \omega[B_2^-, B_2^+], \qquad [\tilde{H}_R, B_2^{\pm}] = \pm 2\omega B_2^{\pm},$$

$$\tilde{H}_{CM} = \frac{1}{2}\omega \sum_{\alpha=1}^{D} \{A_{1,\alpha}^{-}, A_{1,\alpha}{}^{+}\}_{+}. \tag{3.49}$$

Fockov prostor se sada razdvaja na Fockov prostor za centar mase (CM), razapet sa $\prod_{\alpha=1}^{D}(A_{1,\alpha}^{+})^{n_{1,\alpha}}|\tilde{0}\rangle_{CM}$ te na Fockov prostor za relativno gibanje (R), razapet sa $B_2^{+n_2}|\tilde{0}\rangle_R$, gdje je $|\tilde{0}\rangle_{CM} \propto e^{-\frac{\omega}{2}M\vec{R}^2}$ i $|\tilde{0}\rangle_R \propto e^{-\frac{\omega}{2}\sum_i m_i \vec{\rho}_i^{\,2}}$. Kao što ćemo vidjeti u slijedećem poglavlju, R-modovi su univerzalni za sve sisteme sa podležećom $SU(1,1)$ simetrijom, tj. za Hamiltonijane oblika $H = -T_- + \omega^2 T_+ + \gamma T_0$, gdje $T_\pm, T_0$ zadovoljavaju $SU(1,1)$ algebru (3.39).

Pažljiviji uvid u R-Fockov prostor Hamiltonijana $\tilde{H}_R$, jednadžba (3.49), otkriva postojanje univerzalne kritične točke definirane uvjetom

$$E_{0R} = \frac{(N-1)D}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\nu_{ij} = 0. \tag{3.50}$$

Hamiltonijan $\tilde{H}_R$ potpuno kolabira u kritičnoj točki. To znači da relativne koordinate, relativni impulsi i relativne energije su 0 u toj točki. Preživi samo jedan oscilator, onaj koji opisuje dinamiku centra mase. Takvo ponašanje nalikuje nekim osobinama Bose-Einsteinovog kondenzata i po prvi put je primijećeno u [43, 13] za slučaj $D = 1$, $\nu_{ij} = \nu$ i $m_i = m$. U tom slučaju kritična točka (3.50) je jednostavno određena sa $\nu = -\frac{1}{N}$. Kritična točka se također pojavljuje u slučaju da vrijedi $\nu = 1 + \frac{1}{N}$. Za početni Hamiltonijan H,(3.34), koji nije unitarno, tj. fizikalno ekvivalentan sa $\tilde{H}$, uvjet kritične točke odgovara situaciji kada je neki parametar ν_{ij} manji od 0, zbog čega norma valne funkcije (3.32) postaje beskonačna u kritičnoj točki. Za negativne ν_{ij}, ali veće od kritične vrijednosti definirane u (3.50), valna funkcija je singularna u točkama podudaranja dviju čestica, ali još uvijek kvaratno integrabilna. Izvan kritične točke postoji 1-1 korespondencija između višefamilijarnog sistema (3.37) i sistema N D-dimenzionalnih harmoničkih oscilatora, barem za dilataciona stanja $B_2^{+n_2}|\tilde{0}\rangle_R$.

Poglavlje 4

Sistemi sa konformnom simetrijom

4.1 Univerzalna svojstva konformnih sistema i njihova ekvivalentnost sa harmoničkim oscilatorima

U ovom poglavlju razmatramo sisteme sa konformnom simetrijom. Najprije ćemo promotriti najopćenitiji takav sistem [45] sa N čestica u proizvoljnom broju dimenzija D te prezentirati univerzalne rezultate koji vrijede za sve takve sisteme. Simetrije koje su ovdje relevantne uključuju invarijantnost na vremensku translaciju, invarijantnost na skaliranje te invarijantnost na specijalne konformne transformacije. Sve te simetrije su dio veće konformne simetrije sa $SO(2,1)$ grupno-teorijskom strukturom [46]. Nakon razmatranja općih svojstava, težište će se prebaciti na neke specijalne slučajeve kao što su dvočestična i Calogerovog modela koja, pored konformne invarijantnosti, posjeduju i tzv. invarijantnost oblika[1]

Promatramo N različitih čestica u D dimenzija, opisanih hermitskim ili PT-invarijantnim Hamiltonijanom [47, 48] oblika

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}{\nabla_i}^2 + V(\vec{r}_i, ..., \vec{r}_N) + \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2} + \frac{c}{2}(\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\nabla_i + \frac{ND}{2}). \quad (4.1)$$

Potencijal V je realna homogena funkcija ili PT-invarijantni operator reda

[1] Odgovarajući engl. termin je shape invariance.

-2. To znači da zadovoljava relaciju

$$[\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \nabla_i, V] = -2V. \tag{4.2}$$

U dodatku, pretpostavlja se da je V invarijantan na translacije, $[\sum_{i=1}^{N} \nabla_i, V] = 0$, te da, općenito, može biti neizotropan. Tada se Hamiltonijan (4.1) može zapisati na način $H = -T_- + \omega^2 T_+ + cT_0$, gdje generatori $\{T_\pm, T_0\}$, definirani sa

$$\begin{aligned} T_+ &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^2, \\ T_- &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i} \nabla_i{}^2 - V(\vec{r}_i, ..., \vec{r}_N), \\ T_0 &= \tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i \nabla_i + \nabla_i \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \nabla_i + \frac{ND}{4}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

zadovoljavaju $SU(1,1)$ konformnu algebru,

$$[T_-, T_+] = 2T_0, \quad [T_0, T_\pm] = \pm T_\pm. \tag{4.4}$$

Generatori $T_\pm$, kada se promatraju kao operatori koji djeluju na Hilbertovom prostoru fizikalnih stanja, jesu hermitski operatori, dok je T_0 antihermitski operator. Ako V nije hermitski, ali je PT-invarijantan, onda je takav i generator T_-.

Na gore opisani sistem može se gledati kao na deformaciju sustava N harmoničkih oscilatora u D dimenzija, sa zajedničkom frekvencijom ω. Hamiltonijan (4.1) može se preslikati na $2\omega' T_0$, uz pomoć transformacije

$$H = 2\omega' S T_0 S^{-1}, \tag{4.5}$$

gdje je

$$S = e^{-bT_+} e^{-aT_-} \tag{4.6}$$

i

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2\omega} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2}{4\omega^2}}}, \\ b &= \omega(\sqrt{1 + \tfrac{c^2}{4\omega^2}} - \tfrac{c}{2\omega}), \\ \omega' &= \omega \sqrt{1 + \tfrac{c^2}{4\omega^2}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ako je c realan broj, onda je "nova" frekvencija ω' veća od početne frekvencije ω i Hamiltonijan (4.1) je PT-invarijantan. Ako je $c = 0$, onda je $\omega' = \omega$. U slučaju da je c čisto imaginaran, ω' je tada manji od ω i, kao posljedica toga, član cT_0, kao i čitav Hamiltonijan, su hermitski. No međutim, za $c = \pm 2\imath\omega$ imamo $\omega' = 0$, i tada transformacija S postaje singularna, i sistem ulazi u kritičnu situaciju. Točka $c = \pm 2\imath\omega$ predstavlja granicu između područja diskretnih energija, koje dolazi do izražaja za ${\omega'}^2 > 0$, i kontinuiranog energetskog spektra koji opisuje stanja raspršenja i pojavljuje se za ${\omega'}^2 < 0$. Slučaj ${\omega'}^2 < 0$ povezan je sa pojmom invertiranog oscilatora. U točki $\omega' = 0$ norme valnih funkcija postaju beskonačne.

U nastavku ćemo navesti još neka daljnja svojstva konformnih sistema u proizvoljnom broju dimenzija. U prvom redu su to egzistencija univerzalne radijalne jednadžbe za radijalni dio valne funkcije, egzistencija univerzalnog operatora[2] konjugiranog Hamiltonijanu te opća struktura diskretnog energetskog spektra, svojstvena svim takvim sistemima.

Najprije promotrimo problem svojstvenih vrijednosti

$$H\psi_{k,n} = E_{k,n}\psi_{k,n},$$

sa rješenjima faktoriziranim u obliku $\psi_{k,n} = \phi_{k,n}(T_+)\Delta_n$. Da se rješenja mogu napisati u tom obliku biti će pokazano u narednoj točki. Tamo će biti objašnjeno i značenje kvantnih brojeva $k = 0, 1, 2, ...,$ i $n \geq 0$, a također će biti pokazano da se rješenja $\psi_{k,n}$ mogu prikazati na način $\psi_{k,n} = S{T_+}^k\Delta_n$, $k = 0, 1, 2, ...$ te da su njihove pripadne energije[3] dane sa $E_{k,n} = \omega'(2k + \epsilon_n)$. Operator S koji se pojavljuje u relaciji za $\psi_{k,n}$ definiran je u (4.6).

Koristeći radijalnu reprezentaciju generatora $T_\pm, T_0$,

$$T_- = T_+\frac{d^2}{d{T_+}^2} + \epsilon_n\frac{d}{dT_+}, \quad T_0 = T_+\frac{d}{dT_+} + \frac{\epsilon_n}{2}, \tag{4.8}$$

uz T_+ kao radijalnu varijablu, dolazimo do univerzalne radijalne jednadžbe,

$$[T_+\frac{d^2}{d{T_+}^2} + (\epsilon_n - cT_+)\frac{d}{dT_+} + (E_{k,n} - \omega^2 T_+ - c\frac{\epsilon_n}{2})]\phi_{k,n}(T_+) = 0, \tag{4.9}$$

za radijalni dio $\phi_{k,n}(T_+)$ valne funkcije $\psi_{k,n}(T_+)$. Rješenje jednadžbe (4.9) je oblika $\phi_{k,n}(T_+) = F_{k,n}(T_+)e^{-\omega' T_+}$, gdje je $F_{k,n}(T_+)$ pridruženi Laguerrov polinom $L^{\epsilon_n - 1}_{k+\epsilon_n-1}(2\omega T_+)$ za $c = 0$.

Skup operatora $\{T_\pm, T_0\}$ može se separirati na dio vezan uz centar mase i relativni dio, $T_\pm = (T_{CM})_\pm + (T_{rel})_\pm$ i $T_0 = (T_{CM})_0 + (T_{rel})_0$, sa istom separacijom za energijski parametar ϵ_n. Gibanje centra mase (CM) je općenito opisano sa D-dimenzionalnim oscilatorom [19],[45], a pobuđena stanja se mogu zapisati kao $\psi_{n_\alpha,k,n} = S\prod_{\alpha=1}^{D}(R_\alpha)^{n_\alpha}(T_{rel})_+^k\Delta_n$, gdje je $\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$ vektor centra mase.

---

[2]Tzv. operator vremena.

[3]Značenje veličine ϵ_n objašnjeno je u narednoj točki.

Fockov prostor koji odgovara stanjima $\psi_{k,n} = S{T_+}^k\Delta_n$, $k = 0, 1, 2, ...;\ n \geq 0$, Hamiltonijana (4.1) razapet je sa $\prod_{\alpha=1}^{D} ({A_{1,\alpha}}^+)^{n_\alpha} ({B_2}^+)^k \psi_{0,n}$, gdje su $\psi_{0,n} = S\Delta_n$ stanja najniže energije u odgovarajućim tornjevima stanja[4]. Ovdje su uvedeni operatori ${A_{1,\alpha}}^\pm$ i ${B_2}^\pm$ definirani sa

$$\begin{aligned} {A_{1,\alpha}}^+ &= SR_\alpha S^{-1}, \qquad {A_{1,\alpha}}^- = S\nabla_\alpha S^{-1}, \\ {B_2}^\pm &= S(T_{rel})_\pm S^{-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dalje konstruiramo vremenski operator konjugiran Hamiltonijanu (4.1).U tu svrhu koristimo relacije

$$\begin{aligned} T_+T_- &= \phi(T_0) = (T_0 - \tfrac{\epsilon}{2})(T_0 + \tfrac{\epsilon}{2} - 1), \\ T_-T_+ &= \phi(T_0 + 1) = (T_0 - \tfrac{\epsilon}{2} + 1)(T_0 + \tfrac{\epsilon}{2}), \end{aligned} \tag{4.11}$$

koje slijede iz $SU(1,1)$ algebre. Ovdje je $\omega'\epsilon$ generički zapis za energiju najnižeg stanja u odgovarajućem tornju stanja. Pored toga, za proizvoljnu funkciju $f(T_0)$ koja se može razviti u red potencija, vrijedi $T_- f(T_0) = f(T_0 + 1)T_-$ i $T_+ f(T_0) = f(T_0 - 1)T_+$. Casimirov operator je $-T_+T_- + T_0(T_0 - 1)$. Kada djeluje na određeni toranj stanja koji se temelji na stanju Δ_n, Casimirov operator ima svojstvene vrijednosti $\frac{\epsilon_n}{2}(\frac{\epsilon_n}{2} - 1)$. Veličina $\frac{\epsilon_n}{2} > 0$ je spin diskretne ireducibilne reprezentacije univerzalne grupe prekrivanja [49].

U svrhu daljnje konstrukcije uvodi se operator

$$Q = T_+ \frac{i}{T_0 + \frac{\epsilon}{2}}, \tag{4.12}$$

koji je konjugiran operatoru $-T_-$, za svaki toranj stanja izgrađen nad Δ_n (za $\epsilon > 0$, energetski spektar je diskretan). U tom slučaju vrijede slijedeće relacije,

$$[Q, -T_-] = i, \quad [Q, T_+] = iQ^2, \quad [Q, T_0] = -Q. \tag{4.13}$$

Ove relacije imaju i svoj adjungirani oblik koji izgleda kao,

$$[Q^\dagger, -T_-] = i, \quad [Q^\dagger, T_+] = i{Q^\dagger}^2, \quad [Q^\dagger, T_0] = -Q^\dagger. \tag{4.14}$$

Budući da Q nije hermitski operator, definiramo hermitski operator na način, $\mathcal{T}_0 = \frac{1}{2}(Q + Q^\dagger)$. Sada se operator koji je konjugiran Hamiltonijanu $H = -T_- + \omega^2 T_+ + cT_0$ može dobiti rješavanjem jednadžbe

$$[\mathcal{F}(Q), H] = i. \tag{4.15}$$

[4]Tornjevi stanja karakteristika su spektra sistema sa konformnom simetrijom i detaljno će biti objašnjeni u narednoj točki.

Uvažavajući relacije (4.13), jednadžba (4.15) direktno povlači $[\mathcal{F}(Q^\dagger), H] = i$. Uz pomoć (4.13), relacija (4.15) se reducira na

$$\frac{d\mathcal{F}}{dQ}(1 + \omega^2 Q^2 + icQ) = 1$$

i rezultat za vremenski operator $\mathcal{T}$ je

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}(Q) + \mathcal{F}(Q^\dagger)), \tag{4.16}$$

gdje je

$$\mathcal{F}(Q) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{4\omega^2}}} \frac{1}{2\omega} \arctan\left(\frac{\omega Q + \frac{ic}{2\omega}}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{4\omega^2}}} \right). \tag{4.17}$$

U slučaju da je Hamiltonijan H hermitski, vremenski operator $\mathcal{T}$, (4.16), je također hermitski.

Kada imamo jedan oscilator u D dimenzija ($V = 0$), operator Q, relacija (4.12), svodi se na oblik.[5]

$$Q = \vec{R}^2 (\vec{P} \cdot \vec{R})^{-1}, \quad \vec{P} = -\imath \nabla. \tag{4.18}$$

Za jedan harmonički oscilator u jednoj dimenziji, uz ($V = 0$), dobivamo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2\omega} \arctan(\omega x \frac{1}{p}) + h.c., \tag{4.19}$$

što se podudara sa rezultatom u [50]. U graničnom slučaju $c = 0$, $\omega \to 0$, imamo $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 = \frac{1}{2}(Q + Q^\dagger)$ i za $V = 0$, taj izraz se svodi na izraz za vremenski operator slobodne čestice

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\left(x\frac{1}{p} + \frac{1}{p}x \right). \tag{4.20}$$

Ova veličina egzaktno se podudara sa operatorom kojeg su konstruirali Aharonov i Bohm [51].

Kao poopćenje operatora (3.42), moguće je uvesti operatore

$$A_2^{\pm} = S(2\omega')^{\pm 1} T_{\pm} S^{-1} = \frac{(\omega' \pm \frac{c}{2})^2}{2\omega'} T_+ + \frac{1}{2\omega'} T_- - (\frac{c}{2\omega'} \pm 1) T_0, \tag{4.21}$$

gdje je ω' dan relacijom (4.7) i c je parametar koji se pojavljuje ispred PT-invarijantnog člana u izrazu (4.1). Zahvaljujući relacijama $[H, {A_2}^{\pm}] = \pm 2\omega' {A_2}^{\pm}$, vremenski operator se može napisati na način

$$\mathcal{T} = -\frac{i}{4\omega'}\left(\ln {A_2}^+ - \ln {A_2}^- \right). \tag{4.22}$$

[5] U nastavku se podrazumijeva da je $m = 1$.

4.2 Bargmann-Fockova reprezentacija

Transformacijom (4.6) prevodimo problem nalaženja svojstvenih funkcija i spektra Hamiltonijana (4.1) na mnogo jednostavniji problem integriranja Hamiltonijana $2\omega' T_0$ koji opisuje skup razvezanih harmoničkih oscilatora. Taj prijelaz je ono na što mislimo kada koristimo termin prijelaza u Bargmann-ovu reprezentaciju. Prema tome, preostaje izložiti detaljnu proceduru koja omogućava dobivanje, barem u principu, svih stanja Hamiltonijana u Bargmann-ovoj reprezentaciji. Nakon toga transformacijom (4.6) se vraćamo natrag na polazni problem te iz svojstvenih stanja za $2\omega' T_0$ dobivamo svojstvena stanja za Hamiltonijan (4.1). Konstrukcija spektra stanja u Bargmann-ovoj reprezentaciji pokazuje stanovitu jednostavnost[6]. Opća struktura diskretnog energetskog spektra je takva da su svojstvena stanja grupirana u tornjeve stanja, a u svakom tornju, svaka dva susjedna stanja međusobno su energetski jednako udaljena i taj razmak iznosi $2\omega'$, gdje je ω' određen sa (4.7). Ključnu ulogu u cijeloj konstrukciji ima $SU(1,1)$ algebra (4.4).

Započinjemo sa stanjem Δ_0, koje je vektor najmanje težine operatora T_- i istodobno je svojstveno stanje operatora T_0,

$$T_- \Delta_0 = 0, \quad T_0 \Delta_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \Delta_0. \tag{4.23}$$

Stanje Δ_0 je homogena funkcija najnižeg stupnja i najniže energije $\omega' \epsilon_0$, te stoga predstavlja osnovno stanje za operator $2\omega' T_0$. Osnovno stanje $\psi_{0,0}$ za Hamiltonijan (4.1) sada slijedi iz transformacije (4.6) kao $\psi_0 = S\Delta_0$. Osnovno stanje $\psi_{0,0}$ je dobro definirano ukoliko je ono kvadratno integrabilno. To će biti slučaj ako energija osnovnog stanja $\omega' \epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$, bude veća od $\omega' \frac{D}{2}$, što je uvjet koji je povezan sa egzistencijom kritične točke [17, 18, 19].

Postoje i druga homogena, općenito iracionalna, rješenja Δ_n sa homogenošću višeg stupnja i sa energijom $\omega' \epsilon_n = \omega'(\epsilon_0 + n)$, $n > 0$ (općenito, postoje degenerirana stanja sa istim n). Ta stanja zadovoljavaju uvjete

$$T_- \Delta_n = 0, \quad T_0 \Delta_n = \frac{n + \epsilon_0}{2} \Delta_n, \ \ n > 0. \tag{4.24}$$

Budući da postoji klasa PT-invarijantnih Hamiltonijana koji imaju realni energetski spektar [47, 48], imamo slobodu ograničiti se na slučajeve u kojima su energije $\omega' \epsilon_n$ sistema (4.1) realne. Prisustvo $SU(1,1)$ algebre (4.4) omogućava da se operatori T_+ i T_- interpretiraju kao operatori stvaranja i poništavanja. To znači da se, polazeći od osnovnog stanja Δ_n u danom tornju, sva pobuđenja u tom tornju mogu dobiti djelovanjem operatora T_+ na

[6] Lijep primjer strukture spektra predočen je na Slici 1, u narednoj točki, gdje će se ovdje izložena opća procedura primijeniti na jedan konkretan konformni model.

vakuum Δ_n. Isto tako, djelovanjem operatora T_- na neko pobuđeno stanje $T_+^k\Delta_n$ u tornju sa vakuumom Δ_n, dobivamo prvo susjedno stanje čija energija je za iznos $2\omega'$ manja,

$$T_-T_+^k\Delta_n \sim T_+^{k-1}\Delta_n.$$

Univerzalni skup pobuđenih stanja za Hamiltonijan (4.1) sada se može konstruirati na način $\psi_{k,n} = ST_+{}^k\Delta_n, \quad k = 0,1,2,...; \ n \geq 0.$ Pripadne energije tih stanja su $2\omega'(k+\frac{\epsilon_n}{2})$. Za dani $n \geq 0$, spektar je ekvidistantan sa elementarnim korakom $2\omega'$. Stoga su sva svojstvena stanja Hamiltonijana (4.1) grupirana u ekvidistantne tornjeve stanja koji su bazirani na stanjima $S\Delta_n, \quad n \geq 0$. Specijalno, za identične čestice u jednoj dimenziji, stanja $\psi_{k,n} = ST_+{}^k\Delta_n, \quad k,n = 0,1,2,...,$ prikazuju potpun skup S_N simetričnih rješenja, sa ekvidistantnim energetskim spektrom elementarnog koraka ω'.

Gore opisana procedura je iscrpna, tj. ona daje sva svojstvena stanja Hamiltonijana (4.1), pod uvjetom da je moguće riješiti uvjete (4.24). To općenito nije lagan zadatak, čak i za $D = 1$. Tako npr. u prethodnom poglavlju, pri razmatranju višefamilijarnih modela Calogerovog tipa, nismo bili u stanju riješiti uvjete (4.24) i na taj način dobiti sva svojstvena stanja, ali smo uspjeli naći sva polinomijalna rješenja koja opisuju globalna kolektivna stanja. Ta globalna kolektivna stanja zajednička su svim sistemima sa prisutnom $SU(1,1)$ simetrijom, a generiraju ih modovi definirani u relacijama (4.10). Modovi $A_{1,\alpha}^+$ opisuju dinamiku centra mase i u koordinatnoj reprezentaciji generiraju Hermiteove polinome, dok modovi B_2^+ opisuju relativno radijalno gibanje i u koordinatnoj reprezentaciji generiraju pridružene Laguerrove polinome.

Ipak, za razliku od modela razmatranih u prethodnom poglavlju, postoje situacije, od kojih ćemo neke i razmotriti [52], u kojima se uvjeti (4.24) mogu riješiti. Kao najjednostavniji primjer jednog od takvih sustava je skup N D-dimenzionalnih slobodnih harmoničkih oscilatora (to odgovara situaciji kada je $V = 0$ u jednadžbi (4.1)). Kada se Bargmann-Fockova procedura primijeni na taj jednostavni sustav, ona vodi na slijedeći skup svojstvenih stanja za (4.1),

$$S \cdot (\prod_{i=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{D} r_{i,\alpha}^{n_{i,\alpha}}), \qquad n_{i,\alpha} = 0,1,2...,, \tag{4.25}$$

gdje je

$$S = e^{-bT_+}\, e^{-aT_-} = e^{-\frac{b}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2}}\, e^{-\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{m_i}\vec{\nabla}_i^2},$$

gdje su a i b dani u (4.7). Pripadne energije su

$$\omega'(\frac{ND}{2} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{D} n_{i,\alpha}). \tag{4.26}$$

U tom slučaju vakuumi tornjeva, tj. stanja Δ_n su harmonički polinomi u ND dimenzija sa energijama $\omega'(\frac{ND}{2}+n)$, gdje je $n = 0, 1, 2, ...$

U doljnjoj tabeli prikazana je struktura nekoliko najnižih tornjeva stanja sa osnovnim stanjem (Δ_n) stupnja n za ovaj jednostavni slučaj kada je $V = 0$.

n	toranj stupnja n	indeksi
0	1	-
1	r_I	$I = (i, \alpha)$
2	$r_{I_1} r_{I_2}$	$I_1 \neq I_2$
3	$r_{I_1} r_{I_2} r_{I_3}$	$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Iako je, općenito, uvjete (4.24) teško riješiti, oni, kao i čitava konstrukcija u Bargmann-Fockovom prostoru, pružaju uvid u generalnu strukturu i osobitosti spektra svakog sistema koji posjeduje $SU(1,1)$ simetriju. U narednoj točki provest ćemo Bargmann-Fockovu konstrukciju na jednom konkretnom modelu i u cijelosti ćemo riješiti uvjete (4.24), tj. naći spektar i sva svojstvena stanja.

4.3 Konformna svojstva poopćenog dvočestičnog Calogerovog modela

4.3.1 Analiza u Bargmann-ovoj reprezentaciji

U ovom odjeljku proučavamo Hamiltonijan [52]

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\lambda}{2(x_1 - x_2)^2} + \frac{\mu}{2(x_1^2 + x_2^2)}, \quad (4.27)$$

kao primjer modela na kojem je moguće u cijelosti provesti Bargmann-Fockovu proceduru [19, 45], opisanu u prethodnom odjeljku. Gornji Hamiltonijan opisuje dvije međudjelujuće čestice na pravcu i istodobno vezane u zajedničkom harmoničkom potencijalu određenom frekvencijom ω. Zbog jednostavnosti, uzeli smo da su mase čestica jednake 1 te, kao i do sada, $\hbar = 1$. U skladu sa (4.3), uvodimo slijedeći skup operatora,

$$\begin{aligned} T_+ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{2} x_i{}^2 = \tfrac{1}{2}r^2, \\ T_- &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) - V, \\ T_0 &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{2} x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r} + \tfrac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

gdje je V dan sa

$$V = \frac{\lambda}{2(x_1 - x_2)^2} + \frac{\mu}{2(x_1^2 + x_2^2)}. \tag{4.29}$$

Ako stavimo $\mu = -\lambda$ u (4.27), dobiva se model koji je razmatran u [53]. Operatori T_+, T_-, T_0 u (4.28) izraženi su u terminima polarnih koordinata $x_1 = r\sin\phi$, $x_2 = r\cos\phi$. Lako se može vidjeti da Hamiltonijan (4.27) pripada klasi modela koji posjeduju konformnu simetriju [19, 45], a da je potencijal V realna homogena funkcija stupnja -2, tj. da zadovoljava relaciju (4.2). Operatori (4.28) zadovoljavaju $SU(1,1)$ konformnu algebru (4.4), a Hamiltonijan (4.27) se može pomoću njih prikazati na način $H = -T_- + \omega^2 T_+$. Kao što je to opisano u prethodnom odjeljku, transformacijom (4.6),(4.7), Hamiltonijan (4.27) se može preslikati na skup koji se sastoji od dva harmonička oscilatora frekvencije ω. Time se problem rješavanja jednadžbe $H\psi_{k,n} = E_{k,n}\psi_{k,n}$, svodi na problem svojstvenih vrijednosti za Hamiltonijan $2\omega T_0$. Dakle, prijelaz u Bargmann-ovu reprezentaciju možemo izvršiti transformacijom

$$H = 2\omega S T_0 S^{-1}, \tag{4.30}$$

gdje je

$$S = e^{-\omega T_+} e^{-\frac{1}{2\omega} T_-}. \tag{4.31}$$

Sada preostaje riješiti uvjete (4.24). Najprije je potrebno riješiti jednadžbu $T_-\Delta_n = 0$, $n > 0$, za potencijal (4.29),

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\lambda}{2(x_1 - x_2)^2} - \frac{\mu}{2(x_1^2 + x_2^2)} \right) \Delta_n = 0. \tag{4.32}$$

Prelaskom na polarne koordinate te separacijom varijabli na način $\Delta_n = u(r)\Phi(\phi)$, (4.32) se svodi na par jednadžbi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{C + \mu}{r^2} u = 0, \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} - \left(\frac{\lambda}{1 - \sin 2\phi} - C \right) \Phi = 0. \tag{4.34}$$

Prva od njih ima za rješenje $u \sim r^{\sqrt{C+\mu}}$, dok druga ima fizikalno prihvatljiva rješenja samo za specijalne vrijednosti konstante vezanja λ i konstante separacije C. S ciljem nalaženja tih rješenja, prelazimo na kutnu varijablu $\theta = \phi - \frac{\pi}{4}$, s vrijednostima unutar intervala $0 \leq \theta \leq \pi$, a nakon toga faktoriziramo funkciju Φ na način

$$\Phi_n(\theta) = (\sin\theta)^\nu f_n(\cos\theta) = (\sin\theta)^\nu f_n(x). \tag{4.35}$$

Ovdje je uvedena varijabla $x = \cos\theta$, a n je kvantni broj koji označava vakuum Δ_n. Supstitucija (4.35) u (4.34) vodi na jednadžbu za funkcije f_n, $n \geq 0$, koja ima fizikalno prihvatljiva rješenja samo ukoliko su ispunjeni uvjeti

$$\lambda = 2\nu(\nu - 1), \quad C = (n + \nu)^2. \tag{4.36}$$

U tom slučaju jednadžba za funkcije f_n se svodi na jednadžbu za Jacobieve polinome $P_n^{(a,b)}$,

$$(1 - x^2)\frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} - (2\nu + 1)x\frac{df_n(x)}{dx} + n(n + 2\nu)f_n(x) = 0, \tag{4.37}$$

tako da imamo $f_n(x) = P_n^{(a,a)}(x)$, gdje je $a = \frac{2\nu-1}{2}$. Na taj način vakuumi u Bargmann-ovoj reprezentaciji imaju oblik

$$\Delta_n = u\Phi_n = r^{\sqrt{C+\mu}}(\sin\theta)^{\nu} f_n(x) = r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}}(\sin\theta)^{\nu} P_n^{(a,a)}(\cos\theta), \qquad a = \frac{2\nu - 1}{2}. \tag{4.38}$$

Svojstvena stanja od (4.27) sada slijede kao

$$\psi_{k,n} = S{T_+}^k\Delta_n \sim e^{-\omega T_+} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!}(\frac{1}{2\omega}T_-)^l \left(r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+2k}(\sin\theta)^{\nu} P_n^{(a,a)}(\cos\theta)\right). \tag{4.39}$$

Pri izračunavanju izraza (4.39), koristi se činjenica da opetovana primjena operatora T_- na stanja $T_+^k\Delta_n$ vodi na izraz oblika

$$\begin{aligned} {T_-}^l\left({T_+}^k\Delta_n\right) \sim\ & 2^{-l}2k\left(2k + 2\sqrt{(n+\nu)^2 + \mu}\right)(2k-2)\left(2k - 2 + 2\sqrt{(n+\nu)^2 + \mu}\right) \times \\ & (2k-4)\left(2k - 4 + 2\sqrt{(n+\nu)^2 + \mu}\right)\cdots(2k-2(l-1))\left(2k - 2(l-1) + 2\sqrt{(n+\nu)^2 + \mu}\right) \times \\ & r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+2k-2l}(\sin\theta)^{\nu} P_n^{(a,a)}(\cos\theta). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Kada je $l = k$, gornji izraz je, u osnovi, Bargmann-ov vacuum Δ_n. Zahvaljujući prvom uvjetu u (4.24), prva slijedeća primjena operatora T_- daje 0, zbog čega se red u (4.39) prekida, ${T_-}^l\left({T_+}^k\Delta_n\right) = 0$ za $l > k$. Relacija (4.39) sada postaje

$$\psi_{k,n} \sim \omega^{-k} e^{-\frac{\omega}{2}r^2} r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}}(\sin\theta)^{\nu} P_n^{(a,a)}(\cos\theta) \sum_{l=0}^{k} (-1)^l(\omega r^2)^{k-l}\binom{k}{l} l! \binom{k + \sqrt{(n+\nu)^2 + \mu}}{l}, \tag{4.41}$$

gdje binomni koeficijenti u (4.41) imaju slijedeće značenje

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \equiv \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}.$$

U gornjem izrazu Γ je Eulerova gama funkcija. Poznavajući razvoj po potencijama za pridružene Laguerrove polinome [54],

$$L_k^\alpha(x) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{m!} \binom{k+\alpha}{k-m} x^m; \qquad \alpha > -1, \tag{4.42}$$

svojstvene funkcije Hamiltonijana (4.27) se konačno mogu napisati kao

$$\psi_{k,n} \sim (-1)^k k! \omega^{-k} e^{-\frac{\omega}{2}r^2} r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}} (\sin\theta)^\nu P_n^{(a,a)}(\cos\theta) L_k^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}}(\omega r^2). \tag{4.43}$$

Što se tiče spektra, on je isti kao i od operatora $2\omega T_0$, s obzirom da transformacija (4.31) ne mijenja spektar. Stoga su svojstvene energije Hamiltonijana (4.27), u stvari, stupnjevi homogenosti stanja u Bargmann-ovoj reprezentaciji. Kada se T_0 primijeni na Bargmann-ov vakuum (4.38), dobijemo $\frac{1}{2}\left(\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+1\right)\Delta_n$, a prema drugom uvjetu u (4.24), to mora biti jednako $\frac{1}{2}\epsilon_n$. Znajući opću strukturu spektra konformnih sistema, opisanu u prethodnom odjeljku, za spektar od (4.27) imamo

$$E_{k,n} = \omega(\epsilon_n + 2k) = \omega\left(\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+1+2k\right), \tag{4.44}$$

gdje je ν određen sa (4.36).

Casimirov operator za $SU(1,1)$ algebru određen je izrazom

$$\mathcal{C} = T_0^2 - T_0 - T_+T_-, \tag{4.45}$$

koji komutira sa Hamiltonijanom (4.27). Hamiltonijan (4.27) je element algebre (4.4). To je u skladu sa činjenicom da je promatrani sistem integrabilan, pri čemu su Hamiltonijan i Casimirov operator dvije očuvane veličine. Uz pomoć relacije (4.45), lako se vidi da vrijedi

$$\mathcal{C}\psi_{k,n} = \frac{\epsilon_n}{2}\left(\frac{\epsilon_n}{2}-1\right)\psi_{k,n}. \tag{4.46}$$

Odavde je očigledno da svaki toranj stanja, izgrađen nad vakuumom Δ_n, predstavlja ireducibilnu reprezentaciju $SU(1,1)$ algebre, klasificiranu pomoću svojstvene vrijednosti Casimirovog operatora $\mathcal{C}$, dane u (4.46).

4.3.2 Dinamička struktura i bozonski operatori

U ovom odjeljku želimo konstruirati operatore stvaranja i poništavanja [31, 55, 56, 57] koji generiraju kompletan skup svojstvenih stanja u Fockovom prostoru. U tu svrhu treba nam normalizirani oblik svojstvenih funkcija (4.43), a on se može dobiti korištenjem svojstava Jacobievih i Laguerrovih polinoma. Rezultat je

$$\psi_{k,n} = \sqrt{\frac{\omega^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+1} k! n! (n+\nu)\Gamma(n+2\nu)}{4^{\nu-1}\Gamma\left(\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+k+1\right)\Gamma(n+\nu+1/2)^2}}$$

$$e^{-\frac{\omega}{2}r^2} r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}} (\sin\theta)^\nu P_n^{(a,a)}(\cos\theta) L_k^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}}(\omega r^2) \tag{4.47}$$

Kako bismo našli operatore koji povezuju vakuume bilo koja dva susjedna tornja u Fockovom prostoru stanja, trebaju nam rekurzivne relacije [54] za Jacobieve polinome,

$$(2n+a+b)(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(a,b)}(x) =$$

$$n[(a-b)-(2n+a+b)x]P_n^{(a,b)}(x) + 2(n+a)(n+b)P_{n-1}^{(a,b)}(x), \tag{4.48}$$

$$2(n+1)(n+a+b+1)(2n+a+b)P_{n+1}^{(a,b)}(x) =$$

$$(2n+a+b+1)[(2n+a+b)(2n+a+b+2)x+a^2-b^2]P_n^{(a,b)}(x) - 2(n+a)(n+b)(2n+a+b+2)P_{n-1}^{(a,b)}(x). \tag{4.49}$$

Uz pomoć rekurzivnih relacija (4.48), (4.49), nalazimo rekurzivne relacije za normalizirane valne funkcije osnovnih stanja tornjeva, $\psi_{0,n}$,

$$[(n+\nu)x + (1-x^2)\frac{d}{dx}]\psi_{0,n} =$$

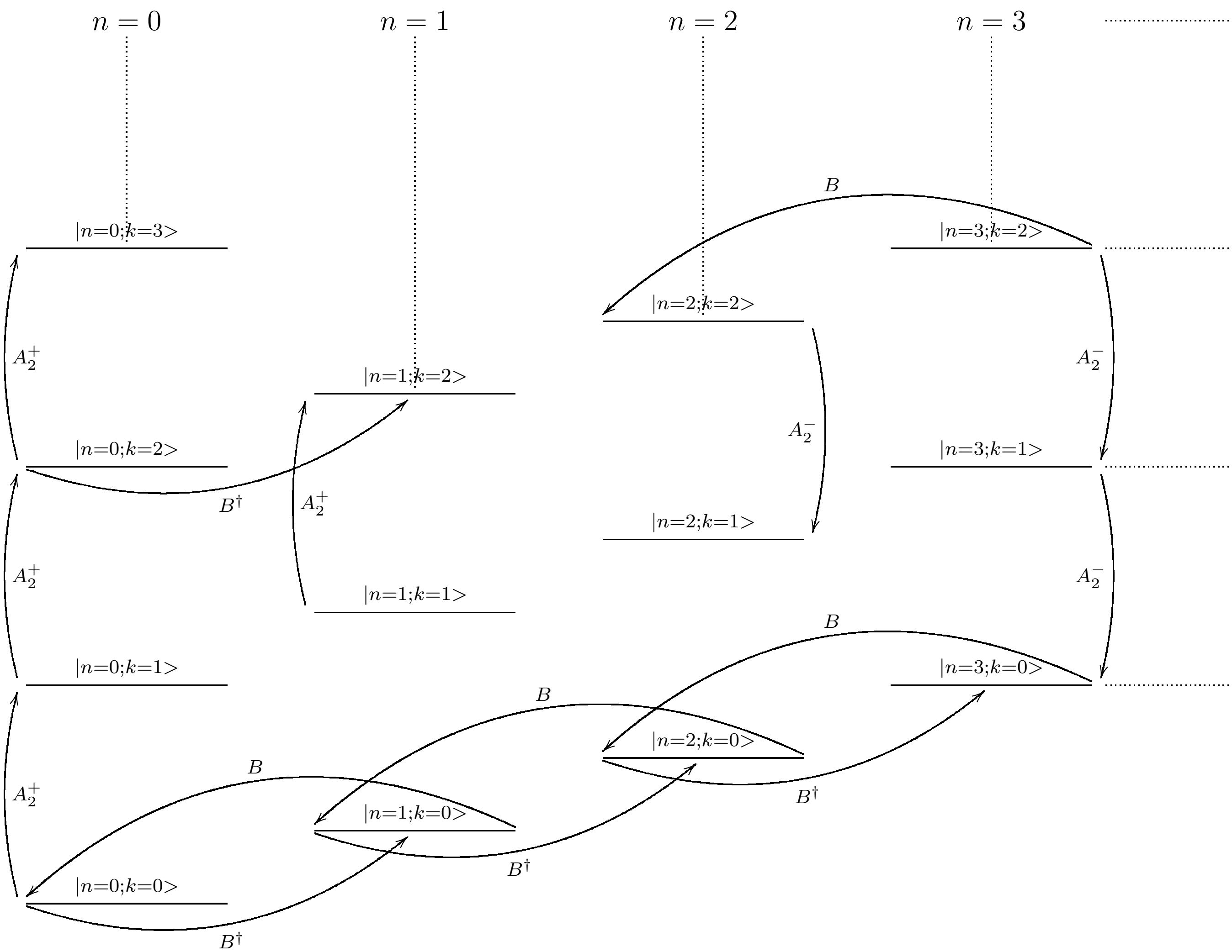
$$(n+a)\sqrt{\frac{\omega^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+1} n! (n+\nu)\Gamma(n+2\nu)}{4^{\nu-1}\Gamma\left(\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+1\right)\Gamma(n+\nu+1/2)^2}} e^{-\frac{\omega}{2}r^2} r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}} (1-x^2)^{\nu/2} P_{n-1}^{(a,a)}(x), \tag{4.50}$$

$$[(n-\nu+2a+1)x - (1-x^2)\frac{d}{dx}]\psi_{0,n} =$$

$$\frac{(n+1)(n+2a+1)}{n+a+1}\sqrt{\frac{\omega^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+1} n! (n+\nu)\Gamma(n+2\nu)}{4^{\nu-1}\Gamma\left(\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}+1\right)\Gamma(n+\nu+1/2)^2}}$$

$$e^{-\frac{\omega}{2}r^2} r^{\sqrt{(n+\nu)^2+\mu}} (1-x^2)^{\nu/2} P_{n+1}^{(a,a)}(x), \tag{4.51}$$

gdje je $x = \cos\theta$ i $a = \nu - \frac{1}{2}$.



Slika 1: Operatori $B^\dagger$ i B odgovorni su za horizontalne pomake u Fockovom prostoru stanja, dok vertikalne pomake opisuju operatori A_2^+ i A_2^-.

Iz gornjih rekurzija mogu se odrediti operatori b i $b^\dagger$ koji vrše prijelaz između bilo koja dva susjedna vakuuma,

$$b = [x(N+\nu)+(1-x^2)\frac{d}{dx}]\sqrt{\frac{\omega^{\sqrt{(N+\nu-1)^2+\mu}}}{\omega^{\sqrt{(N+\nu)^2+\mu}}}\frac{(N+\nu-1)}{(N+\nu)(N+2\nu-1)}\frac{\Gamma\left(\sqrt{(N+\nu)^2+\mu}+1\right)}{\Gamma\left(\sqrt{(N+\nu-1)^2+\mu}+1\right)}}, \tag{4.52}$$

$$b^\dagger = [x(N+\nu)-(1-x^2)\frac{d}{dx}]\sqrt{\frac{\omega^{\sqrt{(N+\nu+1)^2+\mu}}}{\omega^{\sqrt{(N+\nu)^2+\mu}}}\frac{(N+\nu+1)}{(N+\nu)(N+2\nu)}\frac{\Gamma\left(\sqrt{(N+\nu)^2+\mu}+1\right)}{\Gamma\left(\sqrt{(N+\nu+1)^2+\mu}+1\right)}}, \tag{4.53}$$

gdje je N operator broja čestica definiran kao

$$N\left[(1-x^2)^{\nu/2}P_n^{(a,a)}(x)\right] = n\left[(1-x^2)^{\nu/2}P_n^{(a,a)}(x)\right]. \tag{4.54}$$

Eksplicitan oblik tog operatora može se naći uz pomoć relacije (4.34),

$$N = \sqrt{L^2} - \nu, \qquad L^2 \equiv -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\lambda}{1-\cos 2\theta}. \tag{4.55}$$

S obzirom da operator N ovisi samo o kutnoj varijabli, relacija (4.54) se može direktno proširiti na

$$N\psi_{0,n} = n\psi_{0,n}. \tag{4.56}$$

Izravan račun pokazuje da su operatori b i $b^\dagger$ bozonski,

$$[b, b^\dagger] = 1, \tag{4.57}$$

te da vrijedi

$$[N, b] = -b, \qquad [N, b^\dagger] = b^\dagger. \tag{4.58}$$

To povlači da postoji jednostavna veza između bozonskih operatora i operatora broja čestica, $N = b^\dagger b$.

No međutim, ti operatori još uvijek nisu oni koje tražimo jer ne vrše prijelaz između susjednih stanja u Fockovom prostoru, što se vidi iz relacija (4.50) i (4.51). Kako bi našli stvarne “horizontalne” operatore stvaranja i poništavanja, uvodimo nove operatore $B, B^\dagger$, posredstvom određenog tipa transformacija sličnosti,

$$B = r^{\sqrt{L^2+\mu}} b r^{-\sqrt{L^2+\mu}}, \tag{4.59}$$

$$B^\dagger = r^{\sqrt{L^2+\mu}} b^\dagger r^{-\sqrt{L^2+\mu}}. \tag{4.60}$$

Ovi novi operatori imaju željena svojstva,

$$B\psi_{0,n} = \sqrt{n}\psi_{0,n-1}, \qquad B^\dagger\psi_{0,n} = \sqrt{n+1}\psi_{0,n+1}. \tag{4.61}$$

Oni su također bozonski,

$$[B, B^\dagger] = 1 \tag{4.62}$$

i zadržavaju isti odnos sa operatorom broja čestica, $N = B^\dagger B$. Na Slici 1 operatori (4.59) i (4.60) vrše pomake u horizontalnom smjeru u Fockovom prostoru stanja. Ti pomaci označeni su horizontalnim strelicama. Vertikalne pomake obavljaju operatori

$$A_2^\pm = ST_\pm S^{-1} = \frac{1}{2}\left(\omega T_+ + \frac{1}{\omega}T_-\right) \mp T_0, \tag{4.63}$$

gdje su T_+, T_-, T_0 konformni generatori (4.28) i S je transformacija (4.31). Naravno, operatori B i A_2^- poništavaju stanje najniže energije $|0\rangle \equiv \psi_{k=0,n=0}$. Fockov prostor stanja na Slici 1 dobiva se opetovanim djelovanjem operatora (4.60) i (4.63) na osnovno stanje $|0\rangle$,

$$\psi_{k,n} = (A_2^+)^k (B^\dagger)^n |0\rangle \tag{4.64}$$

i u koordinatnoj reprezentaciji stanje (4.64) je dano izrazom (4.47).

4.4 Poopćenje tročestičnog Calogero-Marchioro-Wolfes modela

Proučavanje potpuno rješivih sistema sa nekoliko međudjelujućih čestica, započeto radovima Calogera, Sutherlanda i Wolfesa, nastavljeno je sistematičnom klasifikacijom Olshanetskog i Perelomova. Različite varijante i poopćenja tih modela nastavljaju se istraživati, a kao neke od primjera možemo spomenuti tročestičnu varijantu Sutherlandovog problema, sa tročestičnim međudjelovanjem, kojeg je riješila Quesne te algebarski rješive tročestične probleme Calogerovog tipa, sa translaciono invarijantnim dvočestičnim i tročestičnim interakcijama, koje su riješili Khare i dr.

Ovdje ćemo također promatrati jedno određeno poopćenje modela spomenutih na početku ovog potpoglavlja, i to poopćenje tročestičnog Calogerovog modela sa dodatnim translaciono neinvarijantnim tročestičnim potencijalom. Dakle, promotrit ćemo model opisan Hamiltonijanom

$$H = \sum_{i=1}^{3}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \omega^2 x_i^2\right) + g\sum_{i<j}^{3}\frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\mu}{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} +$$

$$+3f \sum_{i<j \ \ i,j \neq k}^{3} \frac{1}{(x_i + x_j - 2x_k)^2}. \tag{4.65}$$

Model definiran Hamiltonijanom (4.65) pripada klasi modela sa podležećom konformnom $SU(1,1)$ simetrijom i na njega se također može gledati kao da opisuje tri međudjelujuće čestice iste mase u harmoničkom potencijalu generiranom četvrtom česticom beskonačne mase. Za $\mu = 0$, model (4.65) odgovara racionalnom G_2 rješivom modelu, dok za $\mu = 0$ i $\omega = 0$ model (4.65) postaje tročestični Calogero-Marchioro problem u sektoru raspršenja.

U onom što slijedi naći ćemo potpuni skup valnih funkcija i odgovarajućih svojstvenih energija za Hamiltonijan (4.65). Pored regularnih rješenja, analiza će također iznjedriti i neregularna rješenja, s time da ćemo u potonjem slučaju specificirati područje vrijednosti konstante vezanja u kojem su dobivena neregularna rješenja fizikalno prihvatljiva. Valne funkcije biti će izražene pomoću jedne radijalne i dvije kutne varijable. Koristimo konvenciju $\hbar = 2m = 1$. Tri lagane čestice međudjeluju u paru preko dvočestičnog potencijala koji opada sa kvadratom međusobne udaljenosti i tome je još pridodan translaciono neinvarijantni tročestični potencijal predočen članom $\frac{\mu}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

S obzirom da Hamiltonijan (4.65) nije separabilan u varijablama $\{x_1, x_2, x_3\}$, uvodimo novi skup varijabli $\{t, u, v\}$, pomoću koordinatnih transformacija,

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3), \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \quad v = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3). \tag{4.66}$$

Hamiltonijan (4.65) u novim varijablama poprima oblik

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \omega^2(t^2 + u^2 + v^2) + \frac{\mu}{t^2 + u^2 + v^2} +$$

$$+\frac{9g(u^2 + v^2)^2}{2(u^3 - 3uv^2)^2} + \frac{9f(u^2 + v^2)^2}{2(v^3 - 3vu^2)^2}. \tag{4.67}$$

Nakon prijelaza na sferne koordinate

$$t = r\cos\theta, \quad u = r\sin\theta\sin\phi, \quad v = r\sin\theta\cos\phi, \tag{4.68}$$

$$0 \leq r < \infty, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \tag{4.69}$$

Hamiltonijan (4.65) vodi na Schrodingerovu jednadžbu

$$\Bigg[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \omega^2 r^2 + \frac{\mu}{r^2} + \frac{1}{r^2}\Bigg[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} +$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(-\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{9g}{2\sin^2(3\phi)} + \frac{9f}{2\cos^2(3\phi)} \right) \Bigg] \Bigg] \Psi(r,\theta,\phi) = E\Psi(r,\theta,\phi). \tag{4.70}$$

Tročestični problem, opisan jednadžbom (4.70), može se preslikati na jednočestični problem u 3 dimenzije, sa centralnim potencijalom oblika

$$V(r, \theta\phi) = f_1(r) + \frac{f_2(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta},$$

iz čega je vidljivo da je promatrani problem separabilan u varijablama $\{r, \theta, \phi\}$. Separaciju ćemo izvršiti faktorizacijom

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{F(r)}{r} \frac{\Theta(\theta)}{\sqrt{\sin \theta}} \Phi(\phi), \tag{4.71}$$

nakon koje se jednadžba (4.70) razvezuje na tri obične diferencijalne jednadžbe,

$$\left(-\frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{9g}{2\sin^2(3\phi)} + \frac{9f}{2\cos^2(3\phi)} \right) \Phi_n(\phi) = B_n \Phi_n(\phi), \tag{4.72}$$

$$\left(-\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{B_n - \frac{1}{4}}{\sin^2 \theta} \right) \Theta_{l,n}(\theta) = D_{l,n} \Theta_{l,n}(\theta), \tag{4.73}$$

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \omega^2 r^2 + \frac{\mu + D_{l,n} - \frac{1}{4}}{r^2} \right) F_{k,l,n}(r) = E_{k,l,n} F_{k,l,n}(r). \tag{4.74}$$

U intervalu $0 \leq \phi \leq 2\pi$, potencijal u (4.72) ima singularitete za $\phi = k\frac{\pi}{6},\ k = 0, 1, 2, ..., 11$. Navedeni singulariteti definiraju dvanaest sektora: $q\frac{\pi}{6} < \phi < (q+1)\frac{\pi}{6},\ q = 0, 1, 2, ..., 11$. Svaki sektor odgovara točno određenom uređenju položaja triju čestica kao i točno određenoj polarizaciji čestica pri čemu se pod pojmom polarizacije podrazumijeva karakteristična konfiguracija u kojoj je srednja čestica bliže čestici koja joj je s desna nego onoj koja joj je s lijeva ili obratno. Stvarni odnos koji postoji između čestica može se zaključiti iz relacija

$$x_1 - x_2 = \sqrt{2} r \sin\theta \sin\phi, \tag{4.75}$$

$$x_1 - x_3 = \sqrt{2} r \sin\theta \sin(\phi + \frac{\pi}{3}), \tag{4.76}$$

$$x_2 - x_3 = \sqrt{2} r \sin\theta \sin(\phi + \frac{2\pi}{3}). \tag{4.77}$$

Jednadžbu (4.72) najprije rješavamo u sektoru $q = 0$, tj. u intervalu $0 < \phi < \frac{\pi}{6}$, koji odgovara uređenju $x_1 > x_2 > x_3$ i polarizaciji $x_1 - x_2 < x_2 - x_3$. Proširenje na čitav interval $0 \leq \phi \leq 2\pi$ može se postići iskorištavanjem činjenice da se promatrane čestice pokoravaju Boseovoj, odnosno Fermijevoj statistici, kao i korištenjem simetrijskih argumenata koji iz toga proizlaze, posebno svojstava paritetnosti specijalnih funkcija koje se pojavljuju u konačnom rješenju.

Rješenje jednadžbe (4.72) na intervalu $\phi \in [0, \frac{\pi}{6}]$, sa Dirichletovim rubnim uvjetom, može se prikazati na način,

$$\Phi_n(\phi) = (\sin 3\phi)^{a+\frac{1}{2}} (\cos 3\phi)^{b+\frac{1}{2}} f_n(z), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{4.78}$$

gdje je $z = \cos 6\phi$. Uvrštavanje gornjeg izraza u (4.72) daje

$$\Big[(2a+1)\frac{2b+1}{2} - \frac{2a+1}{2}\frac{2a-3}{2} - \frac{2b+1}{2}\frac{2b-3}{2} - \frac{B_n}{9}\Big] f_n(z) + (2a+1)\frac{2a-1}{2} f_n(z) -$$
$$-(2a+1)\frac{2a-1}{2}\frac{1}{1-z} f_n(z) + (2b+1)\frac{2b-1}{2} f_n(z) -$$
$$-(2b+1)\frac{2b-1}{2}\frac{1}{1+z} f_n(z) + \frac{g}{1-z} f_n(z) + \frac{f}{1+z} f_n(z) + 4z\frac{df_n(z)}{dz} +$$
$$\Big[2(2a+1) - 2(2b+1)\Big]\frac{df_n(z)}{dz} + \Big[2(2a+1) + 2(2b+1)\Big] z\frac{df_n(z)}{dz} - 4(1-z^2)\frac{d^2 f_n(z)}{dz^2} = 0.$$

Uz izbor

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{1+2g}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{1+2f}, \tag{4.79}$$

prethodna relacija se pojednostavljuje u

$$(1-z^2)\frac{d^2 f_n(z)}{dz^2} + \Big[b - a - (a+b+2)z\Big]\frac{df_n(z)}{dz} + \frac{1}{4}\Big[\frac{B_n}{9} - (a+b+1)^2\Big] f_n(z) = 0. \tag{4.80}$$

Jednadžba (4.72) će imati fizikalno prihvatljiva rješenja ukoliko rješenja od (4.80) budu polinomijalna, a to će se desiti ukoliko bude ispunjen slijedeći uvjet,

$$B_n = 9(2n + a + b + 1)^2, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4.81}$$

Uz svojstvene vrijednosti B_n dane sa (4.81), jednadžba (4.80) postaje Jacobijeva jednadžba čija su rješenja Jacobijevi polinomi $P_n^{(a,b)}$, tako da na intervalu $\phi \in [0, \frac{\pi}{6}]$ za svojstvene funkcije operatora na lijevoj strani u (4.72) imamo,

$$\Phi_n(\phi) = (\sin 3\phi)^{a+\frac{1}{2}} (\cos 3\phi)^{b+\frac{1}{2}} P_n^{(a,b)}(\cos 6\phi), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{4.82}$$

pri čemu su a i b dani sa (4.79).

Sada se okrećemo jednadžbi (4.73). Zahvaljujući činjenici da $B_n \neq 0$, operator na lijevoj strani u (4.73) je hermitski operator na domeni $\mathcal{D} = \{\Theta \in L^2[0,\pi], \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0\}$. Kada je $B_n = 0$, isti operator ima nekoliko hermitskih proširenja. Za funkciju Θ uzimamo ansatz

$$\Theta_{l,n}(\theta) = (\sin\theta)^{\beta} h_{l,n}(y), \quad y = \cos\theta, \tag{4.83}$$

koji vodi na diferencijalnu jednadžbu za $h_{l,n}$,

$$(1-y^2)\frac{d^2h_{l,n}(y)}{dy^2}-(2\beta+1)y\frac{dh_{l,n}(y)}{dy}+\left(D_{l,n}-\beta+\frac{1-4B_n+4\beta(\beta-1)y^2}{4(1-y^2)}\right)h_{l,n}(y)=0. \tag{4.84}$$

Jednadžba (4.84) će imati fizikalno prihvatljiva rješenja ukoliko su ispunjeni uvjeti

$$B_n=(\beta-\frac{1}{2})^2, \tag{4.85}$$

$$D_{l,n}=(l+\beta)^2, \quad l=0,1,2,... \tag{4.86}$$

U tom slučaju jednadžba (4.84) se svodi na jednadžbu

$$(1-y^2)\frac{d^2h_{l,n}(y)}{dy^2}-(2\beta+1)y\frac{dh_{l,n}(y)}{dy}+l(l+2\beta)h_{l,n}(y)=0, \tag{4.87}$$

čija rješenja su Gegenbauerovi polinomi $h_{l,n}(y)=C_l^{(\beta)}(y)$. Jednadžba (4.85) ima dva rješenja

$$\beta_1=\frac{1}{2}+\sqrt{B_n}, \tag{4.88}$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}-\sqrt{B_n}, \tag{4.89}$$

gdje je $\sqrt{B_n}=3(2n+a+b+1)$. Za $\beta=\beta_1$ imamo regularno rješenje, dok za $\beta=\beta_2$ imamo neregularno rješenje. Ovo potonje odbacujemo jer ono za većinu vrijednosti n nije kvadratno integrabilno. Uzevši sve navedeno u obzir, regularno svojstveno rješenje na intervalu $[0,\pi]$, od jednadžbe (4.73) je dano sa

$$\Theta_{l,n}(\theta)=(\sin\theta)^{\sqrt{B_n}+\frac{1}{2}}C_l^{(\sqrt{B_n}+\frac{1}{2})}(\cos\theta), \quad l=0,1,2,..., \tag{4.90}$$

dok su svojstvene vrijednosti jednake

$$D_{l,n}=(l+\sqrt{B_n}+\frac{1}{2})^2=(l+6n+3a+3b+\frac{7}{2})^2, \quad l=0,1,2,... \tag{4.91}$$

Za kraj je ostalo još razmotriti radijalnu jednadžbu (4.74). Kako bi našli njeno rješenje na intervalu $0\leq r<\infty$, pretpostavimo to rješenje u obliku

$$F_{k,l,n}(r)=r^{\alpha_{l,n}+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\omega r^2}{2}}g_{k,l,n}(s), \quad s=\omega r^2, \tag{4.92}$$

pri čemu je $\alpha_{l,n}$ pokrata, $\alpha_{l,n}=\sqrt{\mu+D_{l,n}}$. Uvrštavanje gornjeg ansatza u (4.74) vodi na diferencijalnu jednadžbu za funkciju $g_{k,l,n}$,

$$s\frac{d^2g_{k,l,n}(s)}{ds^2}+(\alpha_{l,n}+1-s)\frac{dg_{k,l,n}(s)}{ds}+\left(\frac{E_{k,l,n}}{4\omega}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_{l,n}}{2}\right)g_{k,l,n}(s)=0. \tag{4.93}$$

S obzirom da rješenja jednadžbe (4.74) moraju biti kvadratnointegrabilna, funkcije $g_{k,l,n}$ moraju biti polinomi, a to će se desiti ako zahtijevamo da vrijedi

$$\left(\frac{E_{k,l,n}}{4\omega}-\frac{1}{2}-\frac{\alpha_{l,n}}{2}\right)=k, \quad k=0,1,2,... \tag{4.94}$$

U tom slučaju rješenja jednadžbe (4.93) postaju pridruženi Laguerrovi polinomi $L_k^{(\alpha_{l,n})}$ i regularno svojstveno rješenje radijalne jednadžbe (4.74) je

$$F_{k,l,n}(r)=r^{\alpha_{l,n}+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\omega r^2}{2}}L_k^{(\alpha_{l,n})}(\omega r^2), \quad k=0,1,2,... \tag{4.95}$$

Pripadne svojstvene vrijednosti, koje ujedno opisuju spektar Hamiltonijana (4.65), slijede iz relacija (4.91) i (4.94),

$$E_{k,l,n}=2\omega\left(2k+\sqrt{\mu+\left(l+6n+3a+3b+\frac{7}{2}\right)^2}+1\right), \tag{4.96}$$

$$k=0,1,2,..., \quad l=0,1,2,..., \quad n=0,1,2,... \tag{4.97}$$

Rješenja (4.95) iščezavaju u beskonačnosti i time osiguravaju kvadratnu integrabilnost. Njihov oblik ukazuje na to da moramo postaviti uvjet $\mu+D_{l,n}>0$, kako bismo mogli tretirati centrifugalnu barijeru u okolišu točke $r=0$.

Sumirajući sve dosadašnje rezultate, za potpune valne funkcije tročestičnog problema definiranog Hamiltonijanom (4.65) možemo napisati

$$\begin{aligned}\Psi_{k,l,n}(r,\theta,\phi)&=r^{\sqrt{\mu+\left(l+6n+3a+3b+\frac{7}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\omega r^2}{2}}L_k^{\left(\sqrt{\mu+\left(l+6n+3a+3b+\frac{7}{2}\right)^2}\right)}(\omega r^2)\\&\times(\sin\theta)^{6n+3a+3b+\frac{7}{2}}C_l^{(6n+3a+3b+\frac{7}{2})}(\cos\theta)\\&\times(\sin 3\phi)^{a+\frac{1}{2}}(\cos 3\phi)^{b+\frac{1}{2}}P_n^{(a,b)}(\cos 6\phi)\\&k=0,1,2,..., \quad l=0,1,2,..., \quad n=0,1,2,...\\&0\le\phi\le\frac{\pi}{6}, \quad a=\frac{1}{2}\sqrt{1+2g}, \quad b=\frac{1}{2}\sqrt{1+2f}.\end{aligned} \tag{4.98}$$

Zahvaljujući paritetnim svojstvima specijalnih funkcija koje se pojavljuju u konačnom rješenju, valne funkcije (4.98) imaju svojstvo

$$\Psi_{k,l,n}(r,\theta,\phi+\frac{1}{3}p\pi)=(-1)^{pn}(-1)^{p(1-\epsilon)/2}\Psi_{k,l,n}(r,\theta,\phi), \tag{4.99}$$

$$0\le\phi\le\frac{\pi}{3}, \quad p=1,2,3,4,5,$$

pri čemu je $\epsilon = 1$ za bozone i $\epsilon = -1$ za fermione. Zadnje svojstvo omogućuje da rješenje (4.98) proširimo na preostalih 11 od 12 sektora koji dijele interval $[0, 2\pi]$. Dobivena rješenja možemo izraziti preko koordinata triju čestica, x_1, x_2, x_3, primjenom transformacija

$$r = \sqrt{t^2 + u^2 + v^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{t}{r}\right) = \arccos\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sqrt{3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}}\right),$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{u}{v}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x_1 - x_2)}{\sqrt{x_1 + x_2^2 - 2x_3}}\right).$$

Na kraju primijetimo da u specijalnom slučaju kada je $f = 0$, rezultati za spektar i valne funkcije, koje smo ovdje dobili, svode se na rezultate (4.44) i (4.43) iz poglavlja 4.3, dok je za $\mu = 0$ spektar (4.96) linearan u kvantnim brojevima.

4.5 Supersimetrična kvantna mehanika

4.5.1 Hijerarhija Hamiltonijana i invarijantnost oblika

Krenuvši od jednočestičnog Hamiltonijana

$$H^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \tag{4.100}$$

moguće je pronaći sva njegova vezana stanja, kao i svojstva u sektoru raspršenja, ukoliko on posjeduje svojstvo invarijantnosti oblika (SIP)[7] [58], [59],[60], [61],[62],[63] [64]. Hamiltonijani, tj. potencijali koji imaju SIP su integrabilni. Korištenjem metoda supersimetrične kvantne mehanike moguće je dobiti svojstvene energije i svojstvene funkcije bilo kojeg Hamiltonijana koji posjeduje SIP, u situaciji kada supersimetrija nije slomljena. Vratit ćemo se na SIP nakon što objasnimo pojam hijerarhije Hamiltonijana.

Hamiltonijan (4.100) može se faktorizirati na način

$$H^{(1)} = A^\dagger A, \tag{4.101}$$

gdje su

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x), \qquad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x). \tag{4.102}$$

[7] Odgovarajući engl. termin je *shape invariance*, a SIP je pokrata za potencijal $V_1(x)$ koji ima svojstvo invarijantnosti oblika (engl. *shape invariant potential*).

To omogućava identifikaciju

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx}. \tag{4.103}$$

Veličina $W(x)$ naziva se superpotencijal. Ako je ψ_0 valna funkcija osnovnog stanja za $H^{(1)}$, onda zahtjev $A\psi_0 = 0$ također povlači da vrijedi $H^{(1)}\psi_0 = 0$ i energija osnovnog stanja je 0.

Slijedeći korak u konstrukciji supersimetrične teorije jest definicija operatora $H^{(2)} = AA^\dagger$. Operator $H^{(2)}$ je Hamiltonijan koji odgovara novom potencijalu $V_2(x)$,

$$H^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \qquad V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx}. \tag{4.104}$$

Potencijali $V_1(x)$ i $V_2(x)$ su poznati kao supersimetrični partneri-potencijali. Svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije od Hamiltonijana $H^{(1)}$ i $H^{(2)}$ međusobno su povezane, i to na način,

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0, \tag{4.105}$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}}A\psi_{n+1}^{(1)}, \quad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}}A^\dagger\psi_n^{(2)}, \tag{4.106}$$

pri čemu su $E_n^{(1)}$ i $\psi_n^{(1)}$ svojstvene vrijednosti, odnosno svojstvene funkcije Hamiltonijana $H^{(1)}$. Slično su $E_n^{(2)}$ i $\psi_n^{(2)}$ svojstvene vrijednosti, odnosno svojstvene funkcije Hamiltonijana $H^{(2)}$. Spektri supersimetričnih partnera su očigledno degenerirani. Uzrok degeneracije leži u svojstvima podležeće superalgebre. Kako bi smo to vidjeli, možemo razmotriti matrični super-Hamiltonijan oblika

$$H = \begin{pmatrix} H^{(1)} & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Super-Hamiltonijan H je dio algebre koja još sadrži supernaboje Q i $Q^\dagger$,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovi operatori zatvaraju $sl(1|1)$ superalgebru,

$$[H,Q] = [H,Q^\dagger] = 0, \tag{4.107}$$

$$\{Q,Q^\dagger\} = H, \quad \{Q,Q\} = \{Q^\dagger,Q^\dagger\} = 0. \tag{4.108}$$

Činjenica da supernaboji komutiraju sa H odgovorna je za degeneraciju spektara od $H^{(1)}$ i $H^{(2)}$. Supernaboji Q i $Q^\dagger$ dopuštaju interpretaciju operatora koji izmjenjuju bozonske i fermionske stupnjeve slobode, s time da se pri tome ne mijenja energija stanja. Opisana situacija predstavlja bozonsko-fermionsku degeneraciju koja je karakteristična za sve supersimetrične teorije.

Ako uvedemo fermionske varijable ψ i $\psi^\dagger$, koje zadovoljavaju algebru

$$\{\psi, \psi^\dagger\} = 1, \qquad \{\psi, \psi\} = \{\psi^\dagger, \psi^\dagger\} = 0, \tag{4.109}$$

možemo ih reprezentirati matricama

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada se supernaboji mogu izraziti na način

$$Q = A\psi^\dagger, \qquad Q^\dagger = A^\dagger \psi, \tag{4.110}$$

a Hamiltonijan u obliku

$$H = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + W^2\right) I - [\psi, \psi^\dagger]\frac{dW}{dx}, \tag{4.111}$$

što je generalizacija harmoničkog super-oscilatora[8].

Ako $H^{(1)}$ nema normalizabilno osnovno stanje, onda je njegova energija osnovnog stanja pozitivno-definitna, a ne 0 i supersimetrija je slomljena. Ukoliko sa $|0>$ označimo osnovno stanje od super-Hamiltonijana H, onda očuvanje supersimetrije zahtijeva da budu ispunjena slijedeća dva uvjeta,

$$Q|0> = Q^\dagger|0> = 0. \tag{4.112}$$

U slučaju da je energija $E_0^{(1)}$ osnovnog stanja Hamiltonijana $H^{(1)}$ različita od 0, $H^{(1)}$ se može faktorizirati na način

$$H^{(1)} = A^{(1)^\dagger} A^{(1)} + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \tag{4.113}$$

gdje su

$$A^{(1)} = \frac{d}{dx} + W_1(x), \qquad A^{(1)^\dagger} = -\frac{d}{dx} + W_1(x). \tag{4.114}$$

Ovdje je superpotencijal W_1 dan sa $W_1(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(1)}}{dx}$, a $\psi_0^{(1)}$ je valna funkcija osnovnog stanja za $H^{(1)}$. Supersimetrični partner-Hamiltonijan $H^{(2)}$ je onda određen sa

$$H^{(2)} = A^{(1)} A^{(1)^\dagger} + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \tag{4.115}$$

[8]Harmonički super-oscilator je specijalan slučaj od (4.111) kada je $W = \frac{x}{2}$. Treba primijetiti da su rezultati od (4.111) do (4.124) napisani u jedinicama u kojima je $\hbar = 2m = 1$.

pri čemu je

$$V_2(x) = W_1^2(x) + \frac{dW_1(x)}{dx} + E_0^{(1)} = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_0^{(1)}. \qquad (4.116)$$

U gornjim, kao i u izrazima koji slijede, uvedena je takva notacija da u $E_n^{(m)}$, n označava energetski nivo, dok se m odnosi na m-ti supersimetrični partner-Hamiltonijan $H^{(m)}$. Slijedeći korak u konstrukciji supersimetričnih partner-Hamiltonijana je konstrukcija $H^{(3)}$ i taj korak je važan jer koristi SIP (svojstvo invarijantnosti oblika). Naime, polazni Hamiltonijan posjeduje SIP, ukoliko postoji par operatora $A^{(2)}, A^{(2)\dagger}$, takav da vrijedi

$$A^{(1)}A^{(1)\dagger} = A^{(2)\dagger}A^{(2)} + E_1^{(1)} - E_0^{(1)} \qquad (4.117)$$

i gdje je

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= \frac{d}{dx} + W_2(x), \qquad A^{(2)\dagger} = -\frac{d}{dx} + W_2(x), &(4.118)\\ W_2(x) &= -\frac{d\ln\psi_0^{(2)}}{dx}. &(4.119)\end{aligned}$$

Na taj način dolazimo do

$$\begin{aligned} H^{(3)} &= A^{(2)}A^{(2)\dagger} + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x), &(4.120)\\ V_3(x) &= W_2^2(x) + \frac{dW_2(x)}{dx} + E_1^{(1)} = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\psi_0^{(1)}\psi_0^{(2)}) &(4.121)\end{aligned}$$

Nastavljajući tako, jasno je da ako polazni Hamiltonijan $H^{(1)}$ ima SIP i ako ima p vezanih stanja sa svojstvenim energijama $E_n^{(1)}$ i svojstvenim funkcijama $\psi_n^{(1)}$, gdje je $0 \leq n \leq p-1$, tada je uvijek moguće generirati hijerarhiju od $(p-1)$ Hamiltonijana, takvu da m-ti član hijerarhije ima isti spektar kao i $H^{(1)}$, osim što prvih $(m-1)$ svojstvenih vrijednosti od $H^{(1)}$ nedostaje u $H^{(m)}$. To znači da za m-ti član hijerarhije $(m = 2, 3, ..., p)$ možemo napisati

$$H^{(m)} = A^{(m)\dagger}A^{(m)} + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x), \qquad (4.122)$$

gdje su

$$\begin{aligned} A^{(m)} &= \frac{d}{dx} + W_m(x), \qquad A^{(m)\dagger} = -\frac{d}{dx} + W_m(x), &(4.123)\\ W_m(x) &= -\frac{d\ln\psi_0^{(m)}}{dx}, \qquad V_m(x) = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\psi_0^{(1)}\cdots\psi_0^{(m-1)}). \end{aligned}$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned} E_n^{(m)} &= E_{n+1}^{(m-1)} = \cdots = E_{n+m-1}^{(1)} \\ \psi_n^{(m)} &= \frac{1}{\sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}} \cdots \sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}}} A^{(m-1)} \cdots A^{(1)} \psi_{n+m-1}^{(1)}. \end{aligned} \tag{4.124}$$

4.5.2 Invarijantnost oblika poopćenog dvočestičnog Calogerovog modela

Promatramo Schrodingerovu jednadžbu $H\Psi = E\Psi$ za Hamiltonijan (4.27). Nakon što prijeđemo na polarne koordinate i izvršimo separaciju $\Psi(r,\phi) = \frac{\psi(r)}{\sqrt{r}}\Phi(\phi)$, dolazimo do radijalne jednadžbe

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \omega^2 r^2 + \frac{C + \mu - \frac{1}{4}}{r^2}\right)\psi = E\psi, \tag{4.125}$$

koja definira radijalni Hamiltonijan

$$H_r = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \omega^2 r^2 + \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{r^2}\right), \tag{4.126}$$

gdje je uveden parametar $\alpha = \sqrt{C+\mu}$, a C je konstanta separacije određena sa (4.36).

Radijalni Hamiltonijan (4.126) posjeduje SIP i to svojstvo se može potvrditi uvođenjem odgovarajućeg superpotencijala,

$$W = \omega r - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{r}, \tag{4.127}$$

te faktorizacijom Hamiltonijana (4.126) uz pomoć operatora $A^{(0)}$, $A^{(0)\dagger}$,

$$A^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + W\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \omega r - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{r}\right), \tag{4.128}$$

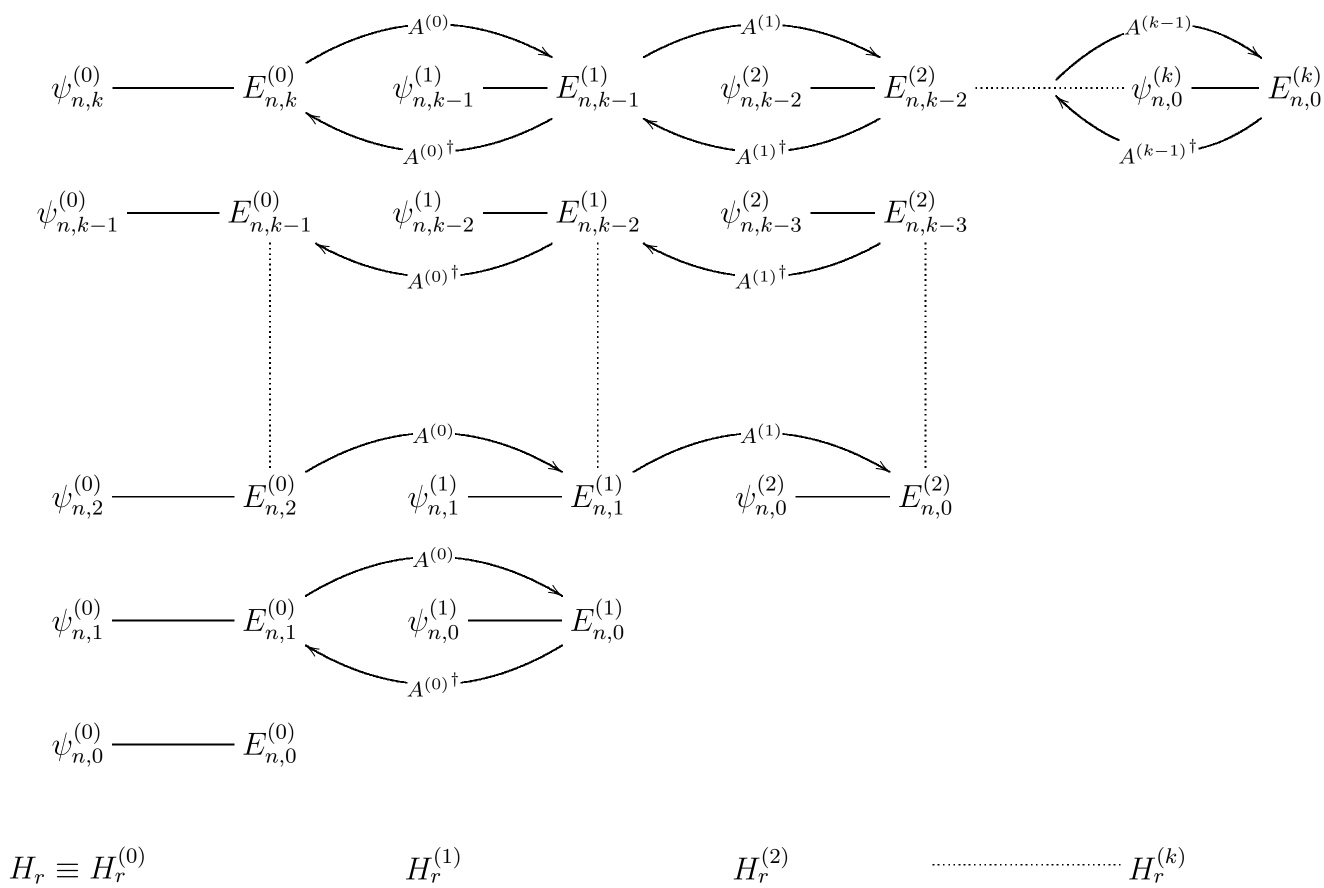
$$A^{(0)\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + W\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + \omega r - \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{r}\right). \tag{4.129}$$

Sada imamo

$$H_r = A^{(0)\dagger} A^{(0)} + e_0, \tag{4.130}$$

gdje je e_0 dan izrazom (4.44) kao $e_0 = E_{0,n} = \omega(\alpha + 1)$. U nastavku konstruiramo operator $H_r^{(1)}$ koji je supersimetrični partner Hamiltonijana $H_r \equiv H_r^{(0)}$,

$$H_r^{(1)} = A^{(0)} A^{(0)\dagger} + e_0. \tag{4.131}$$



Slika 2: Procedura za konstrukciju svojstvenih funkcija Hamiltonijana H_r, iz svojstvenih stanja njegovih supersimetričnih partnera $H_r^{(i)}$.

Faktorizacija od (4.131) po uzoru na (4.130), gdje operator stvaranja dolazi s lijeva od operatora poništavanja, postiže se uvođenjem operatora,

$$A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \omega r - \frac{\alpha + \frac{3}{2}}{r}\right), \tag{4.132}$$

$$A^{(1)\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + \omega r - \frac{\alpha + \frac{3}{2}}{r}\right). \tag{4.133}$$

Moguće je izravno provjeriti da parovi operatora (4.128), (4.129) te (4.132), (4.133) zadovoljavaju SIP, (4.117),

$$A^{(0)}A^{(0)\dagger} = A^{(1)\dagger}A^{(1)} + e_1, \tag{4.134}$$

gdje je $e_1 = 2\omega$.

Da bi se stekao uvid u konstrukciju koja slijedi, potrebno je istovremeno imati u vidu Slike 1 i 2. Možemo uzeti da stanja na Slici 1 predstavljaju svojstvena stanja radijalnog Hamiltonijana $H_r \equiv H_r^{(0)}$. Sa Slike 1 uzmemo bilo koji toranj stanja, npr. onaj izgrađen nad vakuumom označenim sa kvantnim brojem n, te taj toranj identificiramo sa nultim tornjem na Slici 2. Pri tome, ostali tornjevi stanja sa Slike 2 predstavljaju svojstvena stanja operatora $H_r^{(i)}$, koji su supersimetrični partneri od H_r, (4.130). U ovoj notaciji, kao i u prethodnom odjeljku, indeksi i, stavljeni na valne funkcije, označavaju da te funkcije pripadaju supersimetričnom partneru $H_r^{(i)}$ Hamiltonijana H_r. Svaki supersimetrični partner $H_r^{(i)}$ ima svoj vlastiti skup svojstvenih funkcija $\psi_{n,k}^{(i)}$ i svoj vlastiti spektar $E_{n,k}^{(i)}$, gdje su n, i fiksirani, a k je nenegativni cijeli broj,

$$H_r^{(i)}\psi_{n,k}^{(i)} = E_{n,k}^{(i)}\psi_{n,k}^{(i)}, \quad k = 0, 1, ... \tag{4.135}$$

Stanja sa Slike 2 iz različitih tornjeva, ali u istoj vodoravnoj liniji, imaju iste energije i međusobno su povezana na jednostavan način [58, 62].

Temeljni vakuum, tj. stanje $\psi_{n,0}^{(0)}$, dobiva se iz uvjeta

$$A^{(0)}\psi_{n,k=0}^{(0)} = 0. \tag{4.136}$$

Jednadžba (4.136) ima za rješenje

$$\psi_{n,0}^{(0)} = r^{\alpha+\frac{1}{2}}e^{-\frac{\omega}{2}r^2}. \tag{4.137}$$

Na sličan način, vakuum tornja $i = 1$ slijedi iz uvjeta

$$A^{(1)}\psi_{n,k=0}^{(1)} = 0, \tag{4.138}$$

koji vodi na rješenje

$$\psi_{n,k=0}^{(1)} \sim r^{\alpha+\frac{3}{2}}e^{-\frac{\omega}{2}r^2}. \tag{4.139}$$

Prvo pobuđeno stanje $\psi_{n,k=1}^{(0)}$ i pripadna energija $E_{n,k=1}^{(0)}$ polaznog Hamiltonijana (4.126) dobiva se na način,

$$\psi_{n,k=1}^{(0)} \sim A^{(0)\dagger}\psi_{n,k=0}^{(1)}, \tag{4.140}$$

što daje

$$\psi_{n,k=1}^{(0)} \sim e^{-\frac{\omega}{2}r^2}r^{\alpha+\frac{1}{2}}[\omega r^2 - (\alpha+1)] = e^{-\frac{\omega}{2}r^2}r^{\alpha+\frac{1}{2}}L_1^{\alpha}(\omega r^2), \tag{4.141}$$

$$E_{n,k=1}^{(0)} = E_{n,k=0}^{(1)} = e_0 + e_1 = e_0 + 2\omega, \tag{4.142}$$

gdje je $L_k^\alpha(\omega r^2)$ pridruženi Laguerrov polinom. Zadnji izraz slijedi kombiniranom primjenom relacija (4.131), (4.134) i (4.135).

Nastavljajući u istom duhu, uvodi se par operatora,

$$A^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \omega r - \frac{\alpha + k + \frac{1}{2}}{r}\right), \tag{4.143}$$

$$A^{(k)\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dr} + \omega r - \frac{\alpha + k + \frac{1}{2}}{r}\right). \tag{4.144}$$

koji omogućuju konstrukciju općih radijalnih pobuđenja, kao i njihovih pripadnih energija. Važan korak u spomenutoj konstrukciji je analiza funkcija oblika

$$\psi_{n,j}^{(k-j)} \sim A^{(k-j)\dagger} \cdots A^{(k-2)\dagger} A^{(k-1)\dagger} \psi_{n,0}^{(k)}.$$

Može se pokazati [52] da vrijedi slijedeća relacija

$$\psi_{n,j}^{(k-j)} \sim r^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}r^2} r^{k-j} \sum_{s=0}^{j} (-1)^s \binom{j}{s} s! \binom{\alpha+k}{s} z^{j-s}, \tag{4.145}$$

gdje je uvedena varijabla $z = \omega r^2$.

Korištenjem relacije (4.145), mogu se dobiti svojstvena stanja radijalnog Hamiltonijana $H_r \equiv H_r^{(0)}$ tako da stavimo $j = k$,

$$\psi_{n,k}^{(0)} \sim r^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}r^2} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s! \binom{\alpha+k}{s} z^{k-s}. \tag{4.146}$$

Izraz (4.146) se može prepoznati kao razvoj (4.42) za pridružene Laguerrove polinome,

$$\psi_{n,k}^{(0)} \sim r^{\alpha+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega}{2}r^2} L_k^\alpha(\omega r^2). \tag{4.147}$$

Ovaj rezultat se slaže sa onim dobivenim preko analize u Bargmann-ovoj reprezentaciji.

Analiza spektra unutar okvira supersimetrične kvantne mehanike također pokazuje podudarnost sa rezultatom dobivenim u Bargmann-Fockovoj reprezentaciji. Važna činjenica u tom kontekstu je da H_r posjeduje SIP (svojstvo invarijantnosti oblika) na općem nivou,

$$A^{(k-1)} A^{(k-1)\dagger} = A^{(k)\dagger} A^{(k)} + e_k, \quad e_k = 2\omega, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.148}$$

Ovdje su bitne još dvije činjenice. Prva je da operatori $A^{(k)}$ poništavaju odgovarajući vakuum,

$$A^{(k)} \psi_{n,0}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.149}$$

Druga je da, kao što sugerira Slika 2, stanja u različitim tornjevima, ali u istoj vodoravnoj liniji, imaju iste energije,

$$E^{(0)}_{n,k} = E^{(1)}_{n,k-1} = E^{(2)}_{n,k-2} = \cdots = E^{(k)}_{n,0}. \tag{4.150}$$

Opći oblik supersimetričnog partnera $H_r^{(k)}$ Hamiltonijana H_r može se zaključiti iz SIP uvjeta (4.148),

$$H_r^{(k)} = A^{(k)\dagger} A^{(k)} + \sum_{j=0}^{k} e_j, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{4.151}$$

Ako se primijeni (4.151) na $\psi^{(k)}_{n,0}$, i istovremeno se koriste relacije (4.135), (4.149) i (4.150), tada dobivamo spektar za H_r kao,

$$E^{(0)}_{n,k} = \sum_{j=0}^{k} e_j = e_0 + 2\omega k = \omega(2k + \alpha + 1). \tag{4.152}$$

Taj rezultat se podudara sa (4.44), kao što je bilo za očekivati.

Poglavlje 5

Neekvivalentne kvantizacije

5.1 Von Neumann-ov teorem

Kao što je već rečeno na samom početku, spektar N-čestičnog racionalnog Calogerovog modela po prvi puta je nađen u radovima [1, 2, 3], pri čemu je u tim radovima korišten rubni uvjet da valna funkcija i struja iščezavaju kad god se dvije ili više čestica preklapaju, tj. zauzimaju isto mjesto u prostoru. Sa tim rubnim uvjetom promatrani Hamiltonijan je hermitski, što osigurava realnost pripadnog spektra, kao i kompletnost svojstvenih stanja. Važno pitanje koje se može postaviti na ovom mjestu jest da li je tako dobiven spektar jedinstven, odnosno da li promatrani sistem dopušta neekvivalentne kvantizacije koje vode na nove, različite spektre. Način na koji je moguće pobliže pristupiti tom problemu je da se pokuša pronaći opća klasa rubnih uvjeta za koje je promatrani Hamiltonijan hermitski. Mogući rubni uvjeti koji udovoljavaju navedenom kriteriju implicitno su sadržani u izboru domena Hamiltonijana. Domene Hamiltonijana, s druge strane, su klasificirane njegovim hermitskim proširenjima, ukoliko postoje. Zbog toga je prirodno promatrati hermitska proširenja kako Calogerovog modela, tako i njegovih poopćenja. Hermitska proširenja općenito nalaze široku primjenu u različitim fizikalnim situacijama, kao što su anioni [65], anomalije [66, 67], ζ-renormalizacija [68], statistika čestica u jednoj dimenziji [69] te fizika crnih rupa [70, 71, 72, 73].

U [8, 9] proučavano je hermitsko proširenje racionalnog Calogerovog modela u odsustvu zajedničkog harmoničkog vezanja, dok je u [10] napravljen isti posao, ali u prisustvu harmoničkog vezanja. Posebno, u [10] pokazano je da se Calogerov model sa harmoničkim vezanjem može konzistentno kvantizirati uz izbor rubnih uvjeta različitih od onih primijenjenih u [1, 2, 3]. Tamo je pokazano da, pod određenim uvjetima, pripadni Hamiltonijan dopušta hermitsko proširenje parametrizirano realnim parametrom $z \in R$ (mod 2π). Parametar z klasificira sve rubne uvjete za koje je promatrani operator (u ovom slučaju Hamiltonijan) hermitski. U svakoj pojedinoj situaciji, fizikalna interpretacija parametra z ovisi o detaljima sistema koji se proučava. Za primjer, pri opisu crnih rupa u terminima Calogerovog modela, parametar z povezan je sa masom i entropijom crne rupe. Također, pri proučavanju poopćenih statistika isključenja unutar okvira Calogerovog modela, z je povezan sa statističkim parametrom.

U ovom poglavlju razmatrat ćemo hermitska proširenja nekih poopćenja Calogerovog modela, kao i primjenu metode hermitskog proširenja na neke fizikalne situacije, kao što je elektronski uhvat u dipolnom polju polarne molekule. Specifično, od poopćenja Calogerovog modela, razmatrat ćemo hermitsko proširenje dvočestičnog konformnog modela iz prethodnog poglavlja te Calogerovog modela proširenog članom Coulombovog tipa. Kao posljedicu hermitskog proširenja, dobivamo novu klasu vezanih stanja. Tako u slučaju dvočestičnog konformnog modela razmatranog u prethodnom poglavlju, u ovom poglavlju dobit ćemo beskonačno mnogo vezanih stanja koja energetski nisu međusobno jednako udaljena (što je u potpunoj suprotnosti od spektra (4.44) dobivenog u prethodnom poglavlju), osim za specijalne vrijednosti parametra z. I dodatno, spektar općenito uključuje jedno vezano stanje negativne energije. Spektar eksplicitno ovisi o vrijednosti parametra hermitskog proširenja z, što vodi na neekvivalentne kvantizacije promatranog sistema. Prije nego što se okrenemo ka konkretnim modelima, navest ćemo važan matematički rezultat koji se koristi u narednim razmatranjima.

Neka je $\mathcal{O}$ neograničeni diferencijalni operator koji djeluje na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ i neka je $D(\mathcal{O})$ domena od $\mathcal{O}$. Skalarni produkt bilo koja dva elementa $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$ na tom prostoru označimo sa (α, β). Neka je dalje $D(\mathcal{O}^*)$ skup elemenata $\varphi \in \mathcal{H}$ za koje postoji jedinstveni element $\eta \in \mathcal{H}$ sa svojstvom $(\mathcal{O}\xi, \varphi) = (\xi, \eta)$ za sve elemente ξ iz domene $D(\mathcal{O})$. Za svaki takav element $\varphi \in D(\mathcal{O}^*)$, definiramo $\mathcal{O}^*\varphi = \eta$. Operator $\mathcal{O}^*$ tada definira operator koji je adjungiran operatoru $\mathcal{O}$ i $D(\mathcal{O}^*)$ je odgovarajuća domena od operatora $\mathcal{O}^*$. Operator $\mathcal{O}$ se naziva simetričnim ako i samo ako vrijedi $(\mathcal{O}\varphi, \eta) = (\varphi, \mathcal{O}\eta)$ za sve $\varphi, \eta \in D(\mathcal{O})$. Operator $\mathcal{O}$ se naziva hermitskim ako i samo ako vrijedi $\mathcal{O} = \mathcal{O}^*$ i $D(\mathcal{O}) = \mathcal{D}(\mathcal{O}^*)$.

Sada ćemo iskazati kriterij [74] kojim se određuje da li je neograničeni operator $\mathcal{O}$ hermitski. U tu svrhu definiramo slijedeće potprostore, $K_\pm \equiv \mathrm{Ker}(i \mp \mathcal{O}^*)$ od $\mathcal{H}$. Ti potprostori su, u stvari, jezgre operatora $(i \mp \mathcal{O}^*)$. Također, definiramo defekte $n_\pm(\mathcal{O}) \equiv \dim[\mathcal{K}_\pm]$ kao dimenzije spomenutih potprostora. Tada $\mathcal{O}$ pripada u jednu od slijedećih kategorija,

1. $\mathcal{O}$ je (u osnovi) hermitski ako i samo ako vrijedi $(n_+, n_-) = (0, 0)$.

2. $\mathcal{O}$ u osnovi nije hermitski operator na polaznoj domeni $D(\mathcal{O})$, ali se njegova domena može proširiti tako da na toj novoj domeni on bude hermitski. To će biti ispunjeno ako i samo ako vrijedi $n_+ = n_-$. U tom slučaju kaže se da operator $\mathcal{O}$ posjeduje hermitska proširenja. Postoji jedan-jedan korespondencija između hermitskih proširenja od $\mathcal{O}$ i unitarnih preslikavanja sa K_+ u K_-.

3. Operator $\mathcal{O}$ niti je u osnovi hermitski, niti ima hermitskih proširenja ako vrijedi $n_+ \neq n_-$.

Navedeni rezultat naziva se von Neumann-ov teorem [74].

5.2 Neekvivalentne kvantizacije poopćenog dvočestičnog Calogerovog modela

U svrhu proučavanja neekvivalentnih kvantizacija poopćenog dvočestičnog Calogerovog modela, fokusiramo se na ispitivanje svojstava operatora $\mathcal{O}_r$,

$$\mathcal{O}_r = \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \omega^2 r^2 + \frac{\mu + C}{r^2}\right], \tag{5.1}$$

koji određuje radijalnu jednadžbu dobivenu separacijom Schrodingerove jednadžbe za Hamiltonijan (4.27). Posebno nas zanima odgovor na pitanje da li je operator $\mathcal{O}_r$ hermitski, te ukoliko nije, da li dopušta hermitska proširenja. U izrazu (5.1) konstanta C je separacijska konstanta za koju je u prethodnom poglavlju, u relaciji (4.36), pokazano da mora biti kvantizirana na način $C = (n+\nu)^2, \quad n = 0, 1, 2, ...$

Operator $\mathcal{O}_r$ je neograničeni diferencijalni operator definiran na R^+ i simetričan je na domeni $D(\mathcal{O}_r) \equiv \{\varphi(0) = \varphi'(0) = 0,\ \varphi,\ \varphi'$ neprekidne, $\varphi \in \mathrm{L}^2(rdr)\}$. Defekti $n_\pm$ su određeni brojem kvadratno integrabilnih rješenja jednadžbi

$$\mathcal{O}_r^* u_\pm(r) = \pm i u_\pm(r), \tag{5.2}$$

gdje je $\mathcal{O}_r^*$ adjungirani operator od $\mathcal{O}_r$, a funkcije $u_\pm(r)$ razapinju potprostore $K_\pm$. Operator $\mathcal{O}_r^*$ je zadan istim diferencijalnim operatorom kao i $\mathcal{O}_r$.

Jednadžba (5.2) može se napisati na način

$$\left[t\frac{d^2}{dt^2} + (\alpha + 1 - t)\frac{d}{dt} - \left(\frac{\alpha+1}{2} \pm \frac{i}{2\omega}\right)\right]\chi_\pm(r) = 0, \tag{5.3}$$

gdje je

$$u_\pm(r) = r^\alpha e^{-\frac{\omega r^2}{2}}\chi_\pm(r), \qquad \alpha = \sqrt{\mu + C} > 0. \tag{5.4}$$

Diferencijlna jednadžba (5.3) za opće rješenje ima linearnu kombinaciju hipergeometrijskih konfluentnih funkcija prve i druge vrste. Kako rješenja $u_{\pm}(r)$ od (5.2) moraju biti kvadratno integrabilna, odabiru se ona rješenja od (5.3) koja udovoljavaju tom zahtjevu. Ta se rješenja mogu izraziti preko hipergeometrijske konfluentne funkcije druge vrste na način,

$$\chi_{\pm}(r) = U\left(g_{\pm},\ \alpha+1,\ \omega r^2\right), \tag{5.5}$$

gdje je

$$U\left(g_{\pm},\ \alpha+1,\ \omega r^2\right) = A\left[\frac{M\left(g_{\pm},\ \alpha+1,\ \omega r^2\right)}{\Gamma(d_{\pm})\Gamma(\alpha+1)} - \left(\omega r^2\right)^{-\alpha}\frac{M\left(d_{\pm},\ 1-\alpha,\ \omega r^2\right)}{\Gamma(g_{\pm})\Gamma(1-\alpha)}\right], \tag{5.6}$$

uz $g_{\pm} = \frac{\alpha+1}{2} \mp \frac{i}{2\omega}$, $d_{\pm} = \frac{1-\alpha}{2} \mp \frac{i}{2\omega}$ i $A = \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha+1))}$. Odavde slijedi

$$u_{\pm}(r) = r^{\alpha} e^{-\frac{\omega r^2}{2}} U\left(g_{\pm},\ \alpha+1,\ \omega r^2\right). \tag{5.7}$$

Funkcije $u_{\pm}(r)$ su rješenja od (5.2) koja za $r \to \infty$ teže k nuli dovoljno brzo, tako da su kvadratno integrabilna u beskonačnosti. S ciljem da se istraži kvadratna integrabilnost funkcija $u_{\pm}(r)$ blizu $r = 0$, treba iskoristiti činjenicu da za $r \to 0$, $M(g_{\pm},\ b+1,\ \omega r^2) \to 1$. Na taj način, za $r \to 0$ imamo,

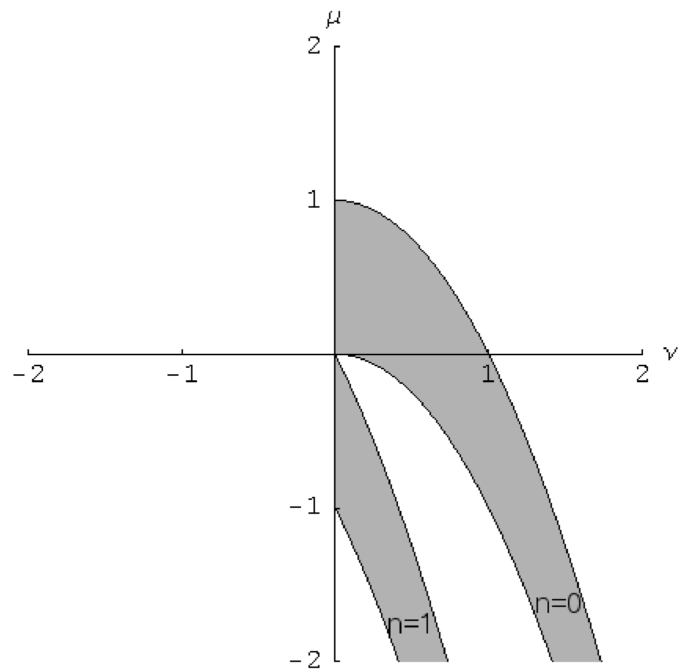
$$|u_{\pm}|^2 r dr \to \left[A_1 r^{(1+2\alpha)} + A_2 r + A_3 r^{(1-2\alpha)}\right] dr, \tag{5.8}$$

gdje su A_1, A_2 i A_3 konstante neovisne o r. Iz (5.8) jasno je da funkcije $u_{\pm}(r)$ nisu kvadratno integrabilne blizu $r = 0$ kada je $\alpha \geq 1$. Stoga, kada je $\alpha \geq 1$, imamo $n_+ = n_- = 0$ i operator $\mathcal{O}_r$ je u osnovi hermitski operator na domeni $D(\mathcal{O}_r)$. S druge strane, kada je $0 < \alpha < 1$, funkcije $u_{\pm}(r)$ jesu kvadratno integrabilne blizu $r = 0$ i stoga za sve r. Zato za $0 < \alpha < 1$ imamo $n_+ = n_- = 1$. U tom slučaju, prema von Neumann-ovom teoremu, operator $\mathcal{O}_r$ nije hermitski operator na domeni $D(\mathcal{O}_r)$, ali dopušta jednoparametarsku familiju hermitskih proširenja koja su označena sa faznim faktorom e^{iz}, gdje je $z \in R \pmod{2\pi}$. Domena na kojoj je operator sada hermitski je $D_z(\mathcal{O}_r) = D(\mathcal{O}_r) \oplus \{a(u_+(r) + e^{iz}u_-(r))\}$, gdje je a proizvoljni kompleksni broj.

Iz uvjeta na parametar α, $\alpha > 0$, vidi se da hermitska proširenja postoje kada je ispunjen zahtjev

$$0 < \mu + (n+\nu)^2 < 1. \tag{5.9}$$

Svojstvene vrijednosti C kutne jednadžbe karakterizirane su cijelim brojem $n \geq 0$. Za svaku vrijednost n, (5.9) daje područje na desnoj polovini $\mu - \nu$ ravnine za koje postoji hermitsko proširenje. To područje $\mu - \nu$ ravnine



Slika 3. Na slici su prikazane vrpce $n = 0$ i $n = 1$, koje predstavljaju područja parametarskog prostora u kojima je moguće hermitsko proširenje operatora $\mathcal{O}_r$. Postoji beskonačan broj takvih vrpci na desnoj polovini $\mu - \nu$ ravnine.

nazovimo n-ta vrpca. Takve vrpce, koje odgovaraju različitim vrijednostima n, međusobno se ne prekrivaju. Stoga, ako su vrijednosti konstanti vezanja μ i ν fiksirane na n-toj vrpci, sistem će dopustiti hermitsko proširenje samo ukoliko je svojstvena vrijednost C kutne jednadžbe jednaka n. Između bilo koje dvije susjedne vrpce, označene sa cjelobrojnim vrijednostima n i $n + 1$, postoji konačni procjep. S obzirom da unutar tih procjepa uvjet (5.9) nije zadovoljen niti za jednu svojstvenu vrijednost C kutne jednadžbe i s obzirom da (5.9) nije zadovoljeno u području $\mu+\nu^2 > 1$, sistem je u osnovi hermitski u tim područjima. Stoga, opisana vrpčasta struktura, sa beskonačnim brojem vrpci na desnoj polovini $\mu - \nu$ ravnine, prikazuje područja u parametarskom prostoru gdje sistem dopušta hermitska proširenja. Na Slici 3 nacrtane su prve dvije od beskonačnog broja vrpci, tj. vrpce $n = 0$ i $n = 1$.

S ciljem da proučimo rješenja radijalne jednadžbe $\mathcal{O}_r u(r) = E u(r)$, treba najprije primijetiti da su spektar, kao i svojstvene funkcije već prije nađeni, relacije (4.44) i (4.43), u sektoru parametarskog prostora gdje je operator $\mathcal{O}_r$ u osnovi hermitski. Sada ćemo naći spektar od $\mathcal{O}_r$ na domeni

$D_z(\mathcal{O}_r)$, u sektoru parametarskog prostora gdje $\mathcal{O}_r$ dopušta hermitska proširenja. Za to nam treba rješenje radijalne jednadžbe $\mathcal{O}_r u(r) = Eu(r)$, koje je kvadratno integrabilno u beskonačnosti. Takvo rješenje je dano sa

$$u(r) = Br^{\alpha} e^{-\frac{\omega r^2}{2}} U\left(g,\ \alpha+1,\ \omega r^2\right), \tag{5.10}$$

gdje je $g = \frac{\alpha+1}{2} - \frac{E}{2\omega}$ i B je konstanta. U granici $r \to 0$, koristeći (5.6), dobivamo

$$u(r) \to AB\left[\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(d)\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\omega^{-\alpha} r^{-\alpha}}{\Gamma(g)\Gamma(1-\alpha)}\right], \tag{5.11}$$

sa $d = \frac{1-\alpha}{2} - \frac{E}{2\omega}$. Sada vidimo da je za $r \to 0$,

$$u_+(r) + e^{iz} u_-(r) \to A\left[\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1}{\Gamma(d_+)} + \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\Gamma(d_-)}\right) - \frac{\omega^{-\alpha} r^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{1}{\Gamma(g_+)} + \frac{\mathrm{e}^{iz}}{\Gamma(g_-)}\right)\right]. \tag{5.12}$$

S obzirom da mora biti $u(r) \in D_z(\mathcal{O}_r)$, usporedba koeficijenata različitih potencija od r u izrazima (5.11) i (5.12) daje,

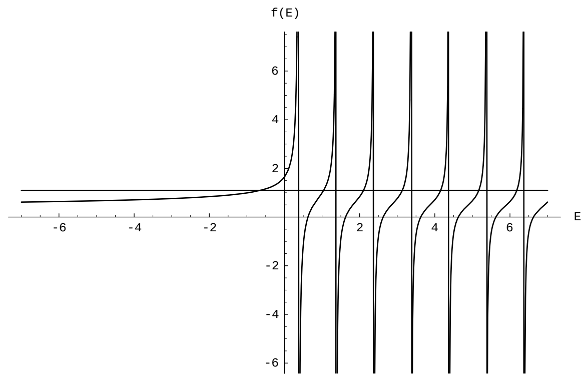
$$f(E) \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2} - \frac{E}{2\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} - \frac{E}{2\omega}\right)} = \frac{\rho_2 \cos(\frac{z}{2} - \sigma_1)}{\rho_1 \cos(\frac{z}{2} - \sigma_2)}, \tag{5.13}$$

gdje je $\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + \frac{i}{2\omega}\right) \equiv \rho_1 \mathrm{e}^{i\sigma_1}$ i $\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2} + \frac{i}{2\omega}\right) \equiv \rho_2 \mathrm{e}^{i\sigma_2}$. Za dani izbor parametara sistema, (5.13) daje svojstvenu energiju E kao funkciju parametra hermitskog proširenja z. Za fiksni skup parametara sistema, različiti izbori parametra z vode na neekvivalentne kvantizacije i na spektar promatranog modela u sektoru parametarskog prostora gdje on dopušta hermitsko proširenje. Općenito, energija E ne može se dobiti analitički, već se mora tražiti numerički crtanjem grafa funkcije $f(E)$, relacija (5.13), te iščitavanjem apscisa sjecišta, primjer čega je dan na Slici 4.

U zaključku slijedi par primjedbi.

1. Ako je $\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} - \frac{E}{2\omega}\right) = \infty$, onda dobivamo $E_k = \omega(2k + \alpha + 1)$, gdje je k pozitivni cijeli broj. Da se to desi, parametar hermitskog proširenja z mora poprimiti vrijednost $\pi + 2\sigma_1$ i za taj izbor za z, reproducira se spektar (4.44) za ovaj sistem, poznat iz prethodnog poglavlja.

2. Za bilo koji drugi izbor od z, spektar od $\mathcal{O}_r$ može se dobiti jedino numerički i u tom slučaju spektar nije ekvidistantan u kvantnom broju k. Štoviše, općenito postoji jedno vezano stanje negativne energije. To je posljedica činjenice da u dijelu parametarskog prostora gdje model dopušta hermitsko proširenje, i za danu vrijednost od z, $SU(1,1)$ nema više ulogu algebre koja generira spektar.



Slika 4. Graf jednadžbe (5.13) uz izbor parametara $\omega = 0.25$, $\alpha = 0.25$ i $z = -1.5$. Ravna vodoravna linija odgovara desnoj strani jednadžbe (5.13).

5.3 Neekvivalentne kvantizacije Calogerovog modela sa međudjelovanjem Coulombovog tipa

Hamiltonijan za Calogerov model sa interakcijom Coulombovog tipa opisan je izrazom

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g \sum_{i<j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2}} . \tag{5.14}$$

Kao i Hamiltonijan (2.1), i izraz (5.14) opisuje N čestica jednake mase na pravcu i u jedinicama u kojima je $2mh^{-2} = 1$. Konstanta vezanja g mora zadovoljavati uvjet $g > -\frac{1}{2}$, kako bi sustav ostao stabilan. Parametar α može biti i pozitivan i negativan, što nam omogućava da analiziramo kako privlačni, tako i odbojni Coulombov potencijal.

Rješavanje jednadžbe (2.2) za Hamiltonijan (5.14) slijedi iste korake (2.3)-(2.6), korištene za Hamiltonijan (2.1). Ti koraci uključuju faktorizaciju (2.3) ukupne valne funkcije, uvođenje radijalne varijable r, relacija (2.4), te separaciju jednadžbe (2.2) iz koje proizlaze dvije diferencijalne jednadžbe. Prva je parcijalna diferencijalna jednadžba (2.5) za homogene polinome $P_k(x)$. Druga jednadžba je radijalna jednadžba za funkciju $\phi(r)$,

$$H_r \, \phi = E\phi, \tag{5.15}$$

koja za razliku od (2.6), sada ima oblik

$$-\frac{d^2}{dr^2}\phi(r) - (2k+2b+1)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\phi(r) - \frac{\alpha}{\sqrt{N}r}\phi(r) = E\phi(r). \tag{5.16}$$

Parametar b, koji ulazi u (5.16), definiran je sa

$$b = \frac{N(N-1)}{2}\big(a+\frac{1}{2}\big) + \frac{N}{2} - \frac{3}{2}, \tag{5.17}$$

a parametar a je povezan sa konstantom vezanja g na način $a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+2g}$. Na osnovu jednadžbe (5.16) može se vidjeti da je mjera na prostoru kvadratno integrabilnih funkcija $\phi(r)$ određena sa $d\sigma = r^{\beta}dr$, gdje je $\beta = 2k+2b+1$. Jednadžba (5.16) također definira radijalni Hamiltonijan H_r,

$$H_r = -\frac{d^2}{dr^2} - (2k+2b+1)\frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\alpha}{\sqrt{N}r}. \tag{5.18}$$

S obzirom na to da nam je cilj, pored nalaženja spektra operatora H_r, ispitati i njegova svojstva u Hilbertovom prostoru, promatramo malo općenitiju jednadžbu od one u (5.16),

$$-\frac{d^2}{dr^2}\phi(r) - (2k+2b+1)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\phi(r) - \frac{\alpha}{\sqrt{N}r}\phi(r) = \tilde{E}\phi(r), \tag{5.19}$$

sa $\tilde{E} = E, +i, -i,$ ovisno o tome da li nas zanimaju svojstvene funkcije ili defekti (zajedno sa odgovarajućim potprostorima) radijalnog Hamiltonijana (5.18).

Uz pomoć transformacije

$$\phi(r) = r^{-\frac{\beta}{2}}\psi(r),\ \beta = 2k+2b+1, \quad y = cr, \tag{5.20}$$

sa parametrom c kao još nespecificiranom konstantom, jednadžba (5.19) se reducira na Whittakerovu jednadžbu, koja je povezana sa konfluentnom hipergeometrijskom jednadžbom

$$\left[y\frac{d^2}{dy^2} + (2\mu+1-y)\frac{d}{dy} - \left(\frac{1}{2}+\mu-\kappa\right)\right]\chi(y) = 0. \tag{5.21}$$

Zadnji korak, u kojem se Whittakerova jednadžba (funkcija ψ zadovoljava Whittakerovu jednadžbu) svodi na jednadžbu (5.21), postiže se faktorizacijom $\psi(r) = e^{-\frac{y}{2}}y^{\frac{\beta}{2}}\chi(y)$. Parametri μ, c, κ uvedeni u (5.21) definirani su sa

$$\mu = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2},$$

$$c = 2\sqrt{-\tilde{E}}, \tag{5.22}$$
$$\kappa = \frac{\alpha}{c\sqrt{N}} = \frac{\alpha}{\sqrt{-4N\tilde{E}}}.$$

Opće rješenje jednadžbe (5.21) je linearna kombinacija konfluentnih hipergeometrijskih funkcija prve i druge vrste [54],

$$\chi(r) = A\,M\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa,\ 2\mu + 1,\ cr\right) + B\,U\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa,\ 2\mu + 1,\ cr\right), \tag{5.23}$$

gdje su A i B proizvoljne konstante. Zbog relacija $\psi(r) = e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\beta}{2}} \chi(y)$ i $y = cr$, jednadžba (5.23) daje opći oblik za funkciju $\psi(r)$,

$$\psi(r) = e^{-\frac{cr}{2}} (cr)^{\frac{\beta}{2}} \left(A\,M\left(\frac{\beta}{2} - \kappa,\ \beta,\ cr\right) + B\,U\left(\frac{\beta}{2} - \kappa,\ \beta,\ cr\right)\right). \tag{5.24}$$

Jer je mjera na prostoru kvadratno integrabilnih funkcija ϕ jednaka $d\sigma = r^{\beta} dr$, jednadžba (5.20) povlači da vrijedi

$$\int \phi^{\star} \phi d\sigma = \int \psi^{\star} \psi dr,$$

što pokazuje da je na prostoru kvadratno integrabilnih funkcija ψ mjera jednostavno dr.

Konfluentne hipergeometrijske funkcije M i U određene su izrazima [54],

$$M(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{a(a+1)z^2}{b(b+1)2!} + \cdots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!} + \cdots, \tag{5.25}$$

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b}\left[\frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1 + a - b)\Gamma(b)} - (z)^{1-b} \frac{M(1 + a - b, 2 - b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2 - b)}\right], \tag{5.26}$$

gdje su a, b opći parametri, a z opća varijabla. Simbol $(a)_n$ ima značenje

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)......(a+n-1),\ (a)_0 = 1. \tag{5.27}$$

Izrazi (5.25) i (5.26) pokazuju da je $M(a, b, z)$ nesingularna funkcija u $z = 0$, dok je $U(a, b, z)$ singularna u $z = 0$, sa vodećom potencijom z^{1-b}. Zato je u slučaju $B \neq 0$, rješenje (5.24) za $\psi(r)$ singularno u točki $r = 0$. U ovom odjeljku će glavni zadatak biti iskoristiti ova singularna rješenja za konstrukciju kako vezanih stanja, tako i stanja koja opisuju raspršenja. U ispunjenju tog zadatka koristit će se von Neumann-ova teorija hermitskog proširenja. S druge strane, u slučaju $B = 0$, $\beta \geq 0$, rješenje (5.24) vodi na $\psi(r)$ koji je nesingularan u $r = 0$. Takva nesingularna rješenja za $\psi(r)$, kako u sektoru vezanih stanja, tako i u sektoru raspršenja, nađena su u [75]. Ta rješenja, kao i pripadni spektar posljedica su, odnosno proizlaze iz uobičajenog rubnog uvjeta koji zahtijeva da valna funkcija iščezava u točki $r = 0$ i da bude kvadratno integrabilna. Sada ćemo naći najopćenitiji skup rubnih uvjeta za koje je radijalni Hamiltonijan H_r hermitski.

U tu svrhu promatramo operator H_r definiran izrazom (5.18). Kao prvo, to je neograničeni diferencijalni operator definiran na R^+. On je i simetričan operator na domeni

$$D(H_r) \equiv \{\phi(0) = \phi'(0) = 0,\ \phi,\ \phi' \text{ neprekidne},\ \phi \in \mathrm{L}^2(d\sigma)\},$$

gdje je $d\sigma = r^\beta dr$. Da bismo ispitali operatorska svojstva operatora H_r, tj. da bi vidjeli da li je on hermitski na domeni $D(H_r)$, nužno je ispitati kvadratno integrabilna rješenja jednadžbe

$$H_r^* \phi_\pm(r) = \pm i \phi_\pm(r). \tag{5.28}$$

Operator H_r^* je adjungirani operator operatoru H_r i predstavljen je istim diferencijalnim operatorom kao i H_r, iako im se domene razlikuju. Jednadžba (5.28) je identična jednadžbi (5.19) za $\tilde{E} = \pm i$,

$$-\frac{d^2}{dr^2}\phi_\pm(r) - (2k + 2b + 1)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\phi_\pm(r) - \frac{\alpha}{\sqrt{N}r}\phi_\pm(r) = \pm i\phi_\pm(r). \tag{5.29}$$

Rješenja od (5.28) ili (5.29), koja su kvadratno integrabilna u beskonačnosti, dana su sa $\phi_\pm(r) = r^{-\frac{\beta}{2}}\psi_\pm(r)$, gdje je

$$\psi_\pm(r) = e^{-\frac{1}{2}c_\pm r}(c_\pm r)^{\frac{\beta}{2}} U(\frac{\beta}{2} - \kappa_\pm,\ \beta,\ c_\pm r), \tag{5.30}$$

uz

$$\begin{aligned} c_+ &= c(\tilde{E} = i) = 2\sqrt{-i}, \quad c_- = c(\tilde{E} = -i) = 2\sqrt{i}, \\ \kappa_+ &= \frac{\alpha}{c_+\sqrt{N}} = \frac{\alpha}{\sqrt{-4Ni}}, \quad \kappa_- = \frac{\alpha}{c_-\sqrt{N}} = \frac{\alpha}{\sqrt{4Ni}}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

S obzirom da ta rješenja moraju biti kvadratno integrabilna i blizu ishodišta, neophodno je istražiti njihovo ponašanje u granici $r \to 0$. To ponašanje izgleda kao [1]

$$\psi_\pm(r) \longrightarrow (c_\pm r)^{\frac{\beta}{2}} \frac{\pi}{\sin \pi\beta}\left[\frac{1}{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2} - \kappa_\pm)\Gamma(\beta)} - \frac{(c_\pm r)^{1-\beta}}{\Gamma(\frac{\beta}{2} - \kappa_\pm)\Gamma(2 - \beta)}\right]. \tag{5.32}$$

[1] U razmatranjima koja slijede radimo na prostoru funkcija $\psi(r)$ na kojem je mjera dr.

Kvadratna integrabilnost funkcije (5.30) blizu $r = 0$ određena je sa (5.32), što znači da u granici $r \to 0$ imamo,

$$|\psi_{\pm}(r)|^2 dr \longrightarrow \left[A_1 r^{\beta} + A_2 r + A_3 r^{2-\beta} \right] dr, \tag{5.33}$$

gdje su A_1, A_2, A_3 konstante neovisne o r. Iz (5.33) vidi se da, blizu ishodišta, funkcije $\psi_{\pm}$ (a time i funkcije $\phi_{\pm}$) nisu kvadratno integrabilne kada parametar β leži u području za koje je $\beta < -1$ ili $\beta > 3$. Zato u parametarskom području $\beta < -1$ ili $\beta > 3$, funkcije $\psi_{\pm}$ nisu kvadratno integrabilne. U tom slučaju je $n_+ = n_- = 0$ i H_r je u osnovi hermitski na domeni $D(H_r)$. S druge strane, ako je $-1 < \beta < 3$, funkcije $\psi_{\pm}$ (a time i funkcije $\phi_{\pm}$) jesu kvadratno integrabilne. Stoga, ako β leži u tom intervalu, imamo $n_+ = n_- = 1$ i Hamiltonijan H_r nije hermitski na domeni $D(H_r)$, ali dopušta hermitska proširenja. Iz (5.22) slijedi da, u tom slučaju, parametar μ mora biti u intervalu $-1 < \mu < 1$.

Interval $-1 < \mu < 1$ za μ, zajedno sa (5.17), (5.20) i (5.22), povlači da vrijednosti za N, k i $a + \frac{1}{2}$ moraju zadovoljavati relaciju

$$-\frac{N - 1 + 2k}{N(N-1)} < a + \frac{1}{2} < -\frac{N - 5 + 2k}{N(N-1)}, \tag{5.34}$$

kako bi hermitsko proširenje bilo moguće. Za $N \geq 3$, rubni uvjeti kojima se promatrani sistem podvrgava mogu se klasificirati [76] u ovisnosti o vrijednosti parametra $a + \frac{1}{2}$

Von Neumann-ova metoda također daje način na koji se može dobiti proširena domena na kojoj je promatrani operator hermitski. Proširena domena $D_z(H_r)$, na kojoj je H_r hermitski, sadrži sve elemente od $D(H_r)$, zajedno sa elementima oblika $e^{i\frac{z}{2}}\psi_+ + e^{-i\frac{z}{2}}\psi_-$, gdje je $z \in R$ (mod 2π). Dakle, hermitska proširenja ovog modela postoje kada je $-1 < \beta < 3$, i u tom slučaju,

$$D_z(H_r) = D(H_r) \oplus \{e^{i\frac{z}{2}}\psi_+ + e^{-i\frac{z}{2}}\psi_-\}$$

je proširena domena na kojoj je H_r hermitski operator.

U nastavku proučavamo sektor raspršenja za model opisan Hamiltonijanom (5.14). Budući da stanja raspršenja odgovaraju pozitivno-energetskim rješenjima jednadžbe (5.19) za $\tilde{E} = E > 0$, varijabla $y = cr = 2\sqrt{-E}r$ postaje čisto imaginarna, tj. $y = iqr$, pri čemu je q definiran na način $q = 2\sqrt{E}$. Za analizu asimptotske granice, $r \to \infty$, stanja raspršenja, moramo poznavati ponašanje konfluentnih hipergeometrijskih funkcija $M(a, b, z)$ i $U(a, b, z)$ u asimptotskom području $\mathrm{Re}(z) = 0$ i $\mathrm{Im}(z) \to +\infty$. Funkcije M i U se u tom području ponašaju na način [54],

$$M(a, b, z) \longrightarrow \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} \left[1 + O(|z|^{-1}) \right] + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} \left[1 + O(|z|^{-1}) \right],$$

$$U(a,b,z) \longrightarrow O(|z|^{-a}). \tag{5.35}$$

U svrhu nalaženja matrice raspršenja, umjesto izraza (5.23), jednako tako smo mogli uzeti i slijedeću linearnu kombinaciju,

$$\chi(y) = AM\left(\frac{1}{2}+\mu-\kappa,\ 1+2\mu,\ y\right) + By^{-2\mu}M\left(\frac{1}{2}-\mu-\kappa,\ 1-2\mu,\ y\right), \tag{5.36}$$

kao opće rješenje jednadžbe (5.21). U tom slučaju, funkcija ψ, koja se pojavljuje u (5.20), će izgledati kao

$$\psi(r) = e^{-\frac{1}{2}cr}(cr)^{\frac{\beta}{2}}\left(A(q)M\left(\frac{\beta}{2}-\kappa,\ \beta,\ cr\right) + B(q)(cr)^{1-\beta}M\left(1-\frac{\beta}{2}-\kappa,\ 2-\beta,\ cr\right)\right), \tag{5.37}$$

gdje je pretpostavljeno da koeficijenti $A(q)$ i $B(q)$ ovise o realnom parametru q.

Koristeći (5.35), imamo slijedeće $r \to \infty$ granice,

$$M(\frac{\beta}{2}-\kappa,\ \beta,\ cr) \longrightarrow \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa)}e^{cr}(cr)^{-\frac{\beta}{2}-\kappa} + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+\kappa)}(-cr)^{-\frac{\beta}{2}+\kappa}, \tag{5.38}$$

$$M(1-\frac{\beta}{2}-\kappa,\ 2-\beta,\ cr) \longrightarrow \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa)}e^{cr}(cr)^{\frac{\beta}{2}-\kappa-1} + \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}+\kappa)}(-cr)^{\frac{\beta}{2}+\kappa-1}, \tag{5.39}$$

tako da se valna funkcija (5.37), koja opisuje stanja raspršenja, u granici $r \to \infty$ ponaša na način,

$$\begin{aligned}\psi(r) \longrightarrow\ & A(q)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa)}e^{\frac{1}{2}cr}(cr)^{-\kappa} + A(q)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+\kappa)}e^{-\frac{1}{2}cr}(-1)^{-\frac{\beta}{2}+\kappa}(cr)^{\kappa} \\ & + B(q)\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa)}e^{\frac{1}{2}cr}(cr)^{-\kappa} + B(q)(-1)^{\frac{\beta}{2}+\kappa-1}\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}+\kappa)}e^{-\frac{1}{2}cr}(cr)^{\kappa}.\end{aligned} \tag{5.40}$$

Parametar κ je također čisto imaginaran u sektoru raspršenja. Kada je konstanta vezanja α veća od 0, parametar κ se može izraziti na način $\kappa = -i\frac{\alpha}{q\sqrt{N}} = -i\frac{|\alpha|}{q\sqrt{N}} = -i|\kappa|$. Korištenjem relacija $y = cr = iqr$ i $\kappa = -i|\kappa|$, valna funkcija $\psi(r)$, u izrazu (5.40), može se prikazati pomoću oscilatornog ulaznog i izlaznog vala,

$$\psi(r) \longrightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}\kappa}q^{-\kappa}\left(A(q)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa)} + B(q)\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa)}\right)e^{i(\frac{1}{2}qr+|\kappa|\ln r)} +$$

$$+e^{i\frac{\pi}{2}\kappa}q^{\kappa}\left(A(q)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+\kappa)}e^{i\pi(\kappa-\frac{\beta}{2})}+B(q)\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}+\kappa)}e^{i\pi(\kappa+\frac{\beta}{2}-1)}\right)e^{-i(\frac{1}{2}qr+|\kappa|\ln r)}. \tag{5.41}$$

Matrica raspršenja i pripadni fazni pomak mogu se dobiti iz gornjeg graničnog izraza kao omjer ulazne i izlazne amplitude,

$$S(q)=e^{2i\varphi(q)}=\frac{\left(A(q)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa)}+B(q)\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa)}\right)q^{-2\kappa}e^{-i\pi\kappa}}{\left(A(q)\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+\kappa)}e^{i\pi(\kappa-\frac{\beta}{2})}+B(q)\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}+\kappa)}e^{i\pi(\kappa+\frac{\beta}{2}-1)}\right)}. \tag{5.42}$$

U nastavku, da bi se našao odnos između, za sada još nespecificiranih konstanti $A(q)$ i $B(q)$, koristi se razvoj (5.25) kako bi se dobio $r \to 0$ granični oblik valne funkcije (5.37), u najnižem redu u r,

$$\psi(r)\longrightarrow A(q)(cr)^{\frac{\beta}{2}}+B(q)(cr)^{1-\frac{\beta}{2}}. \tag{5.43}$$

Od prije je poznato da Hamiltonijan H_r dopušta hermitsko proširenje u parametarskom području $3>\beta>-1$. S obzirom da valna funkcija (5.37) mora pripadati domeni hermitičnosti $D_z(H_r)=D(H_r)\oplus\{e^{i\frac{z}{2}}\psi_+ + e^{-i\frac{z}{2}}\psi_-\}$, možemo napisati

$$\rho\,\psi(r)=e^{i\frac{z}{2}}\psi_+ + e^{-i\frac{z}{2}}\psi_-, \tag{5.44}$$

gdje je ρ neka konstanta, a funkcije $\psi_\pm$ su kvadratno integrabilna rješenja jednadžbe (5.19) za $\tilde{E}=\pm i$. Ponašanje funkcija $\psi_\pm$ u granici $r\to 0$, dano je relacijom (5.32).

Budući da se prema jednadžbi (5.44) koeficijenti odgovarajućih potencija od r u (5.43) i (5.32) moraju podudarati, proizlaze slijedeća dva uvjeta,

$$\rho\,A(q)c^{\frac{\beta}{2}}=e^{i\frac{z}{2}}\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\frac{{c_+}^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa_+)\Gamma(\beta)}+e^{-i\frac{z}{2}}\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\frac{{c_-}^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa_-)\Gamma(\beta)}, \tag{5.45}$$

$$\rho\,B(q)c^{1-\frac{\beta}{2}}=-e^{i\frac{z}{2}}\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\frac{{c_+}^{1-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa_+)\Gamma(2-\beta)}-e^{-i\frac{z}{2}}\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\frac{{c_-}^{1-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa_-)\Gamma(2-\beta)}. \tag{5.46}$$

Dijeljenjem tih relacija dobivamo

$$\frac{A(q)}{B(q)}=-\frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{e^{i\frac{z}{2}}\frac{{c_+}^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa_+)}+e^{-i\frac{z}{2}}\frac{{c_-}^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa_-)}}{e^{i\frac{z}{2}}\frac{{c_+}^{1-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa_+)}+e^{-i\frac{z}{2}}\frac{{c_-}^{1-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa_-)}}c^{1-\beta}. \tag{5.47}$$

Korištenjem izraza (5.47), matrica raspršenja (5.42) postaje

$$S(q) = e^{2i\varphi(q)} = \frac{\frac{F_2(\beta,\ \alpha,\ z)}{F_1(\beta,\ \alpha,\ z)}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\beta)}q^{1-\beta}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa)} - \frac{1}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa)}}{\frac{F_2(\beta,\ \alpha,\ z)}{F_1(\beta,\ \alpha,\ z)}\frac{e^{i\pi(\kappa-\beta+\frac{1}{2})}q^{1-\beta}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+\kappa)} - \frac{e^{i\pi(\frac{\beta}{2}+\kappa-1)}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}+\kappa)}} e^{-i\pi\kappa}q^{-2\kappa}, \qquad (5.48)$$

gdje je $c = 2\sqrt{-E} = iq$, i $\kappa = \frac{\alpha}{c\sqrt{N}} = \frac{\alpha}{\sqrt{-4NE}}$. Zbog jednostavnosti, u izrazu (5.48) uvedene su slijedeće dvije funkcije,

$$F_1(\beta,\ \alpha,\ z) = e^{i\frac{z}{2}}\frac{{c_+}^{1-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa_+)} + e^{-i\frac{z}{2}}\frac{{c_-}^{1-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa_-)}, \qquad (5.49)$$

$$F_2(\beta,\ \alpha,\ z) = e^{i\frac{z}{2}}\frac{{c_+}^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa_+)} + e^{-i\frac{z}{2}}\frac{{c_-}^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\kappa_-)}, \qquad (5.50)$$

pri čemu je z parametar hermitskog proširenja, a $c_\pm$ i $\kappa_\pm$ su definirani u (5.31).

Kao što se može vidjeti iz oblika matrice raspršenja, za bilo koju vrijednost parametra β u parametarskom području u kojem postoji hermitsko proširenje, matrica raspršenja ima beskonačan skup polova na pozitivnom dijelu imaginarne osi u kompleksnoj q-ravnini. Egzistencija tih polova znači da sistem koji se promatra posjeduje vezana stanja. Uzimajući $q = ip$, kao neki proizvoljni pol matrice raspršenja (5.48), moguće je dobiti slijedeći izraz koji, u sistemu definiranom Hamiltonijanom (5.14), određuje energije vezanih stanja, $E_b = -E = \frac{p^2}{4}$,

$$\frac{F_2(\beta,\ \alpha,\ z)}{F_1(\beta,\ \alpha,\ z)}\frac{e^{i\pi(\kappa-\beta+\frac{1}{2})}q^{1-\beta}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}+\kappa)} - \frac{e^{i\pi(\frac{\beta}{2}+\kappa-1)}}{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}+\kappa)} = 0. \qquad (5.51)$$

Nakon što se iskoristi skup relacija, $q = 2\sqrt{E} = ip = i2\sqrt{E_b}$ i $\kappa = -i\frac{\alpha}{q\sqrt{N}} = -\frac{\alpha}{p\sqrt{N}} = -\frac{\alpha}{2\sqrt{E_b}\sqrt{N}}$, izraz (5.51) daje

$$\frac{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2\sqrt{E_b}\sqrt{N}})}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2\sqrt{E_b}\sqrt{N}})}p^{1-\beta} = \frac{F_1(\beta,\ \alpha,\ z)}{F_2(\beta,\ \alpha,\ z)}. \qquad (5.52)$$

Ako napišemo $\frac{c_+^{1-\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\kappa_+)} = \xi_1 e^{i\theta_1}$ i $\frac{c_+^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma(1-\kappa_+-\frac{\beta}{2})} = \xi_2 e^{i\theta_2}$, (5.52) se može izraziti na način,

$$\frac{\Gamma(1-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{\sqrt{4NE_b}})}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{\sqrt{4NE_b}})}(2\sqrt{E_b})^{1-\beta} = \frac{\xi_1\cos(\theta_1+\frac{z}{2})}{\xi_1\cos(\theta_2+\frac{z}{2})}. \qquad (5.53)$$

Ta relacija, dakle, određuje spektar sistema u sektoru vezanih stanja. U tom sektoru energija sistema je negativna, $E < 0$, i valna funkcija (5.37) se svodi na kvadratno integrabilnu valnu funkciju oblika,

$$\psi(r) = Be^{-\frac{cr}{2}}(cr)^{\frac{\beta}{2}}U\left(\frac{\beta}{2} - \kappa,\ \beta,\ cr\right). \tag{5.54}$$

Parametri c i κ, koji se pojavljuju u (5.54), definirani su sa (5.22), osim što su sada napisani za $\tilde{E} = E$. Zbog toga što je za vezana stanja $E < 0$, ti parametri su realni,

$$c = 2\sqrt{-E} = 2\sqrt{E_b} = p,$$
$$\kappa = \frac{\alpha}{c\sqrt{N}} = \frac{\alpha}{\sqrt{-4NE}} = \frac{\alpha}{\sqrt{4NE_b}} = \frac{\alpha}{p\sqrt{N}}. \tag{5.55}$$

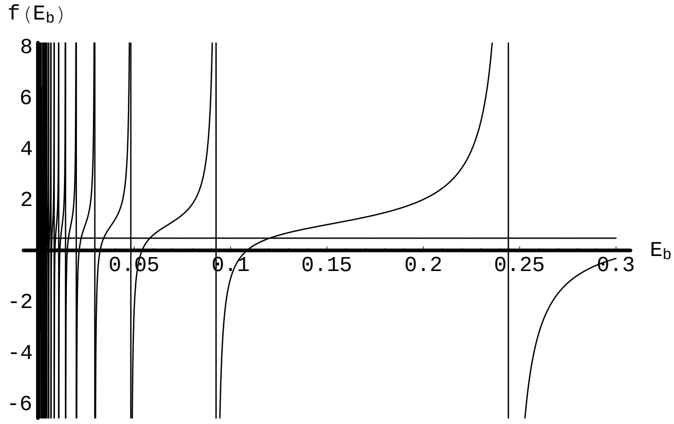
Vidimo da za dani izbor parametara sistema, izraz (5.53) daje energije $E = -E_b$ kao funkcije parametra hermitskog proširenja z. Za fiksni skup parametara sitema, različiti izbori za z vode na neekvivalentne kvantizacije te na spektar promatranog modela u parametarskom području u kojem sistem dopušta hermitska proširenja. Općenito, energija $E = -E_b$ ne može se odrediti analitički, već se mora tražiti numerički, kao na primjer na Slikama 5,6 i 7. Slike 5 i 6 prikazuju lijevu, odnosno desnu stranu izraza (5.53) za dva različita, reprezentativna skupa sistemskih parametara, kao i za dva različita izbora parametra hermitskog proširenja z. Krivulje na tim slikama predstavljaju grafičke prikaze funkcije $f(E_b)$, koja je dana sa lijevom stranom izraza (5.53). S druge strane, desna strana izraza (5.53) predstavljena je vodoravnom linijom. Energije sistema opisanog Hamiltonijanom (5.14) dobivaju se iščitavanjem apscisa sjecišta krivulja i vodoravne linije. Vidi se da blizu $E_b \to 0$ postoji beskonačan broj vezanih stanja Za $\alpha > 0$, postoji beskonačan broj vezanih stanja, za bilo koju vrijednost od z. Međutim, postojanje neoscilatornog dijela krivulje za $f(E_b)$ pokazuje da spektar ima donju granicu za sve moguće vrijednosti od z. Situacija kada je $\alpha > 0$ prikazana je na Slikama 5 i 6.

Za izbor $z = z_1$, gdje je z_1 određen sa $\theta_1 + \frac{z_1}{2} = \frac{\pi}{2}$, desna strana od (5.53) je 0. To povlači da vrijedi

$$\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{4NE_b}} = -n, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{5.56}$$

što vodi na slijedeći analitički izraz za spektar,

$$E_n = -\frac{1}{4N}\frac{\alpha^2}{\left(k + b + n + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{5.57}$$



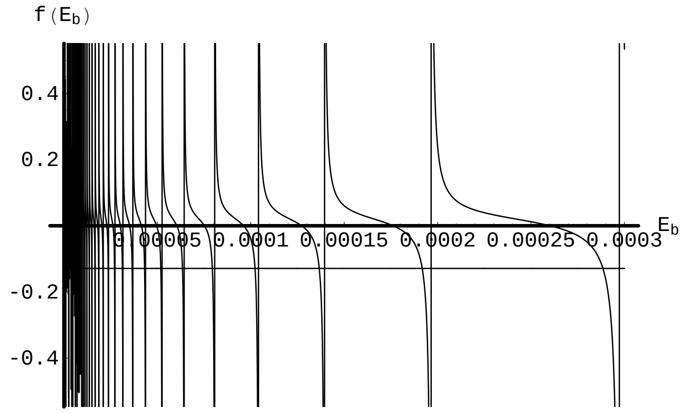
Slika 5. Graf od (5.53) za $N = 1000$, $\alpha = 50$, $\beta = 0.8$, $k = 1$ i $z = 0.1$. Ravna vodoravna linija odgovara vrijednosti desne strane od (5.53).

Taj spektar se podudara sa onim nađenim u [75]. Isto tako, izbor $z = z_2$, gdje je z_2 dan sa $\theta_2 + \frac{z_2}{2} = \frac{\pi}{2}$, daje sličan rezultat. Na ovom mjestu važno je primijetiti da rezultat (5.56) implicira da za određene vrijednosti parametra hermitskog proširenja, kao i parametara sistema, čak i odbojni Coulombov potencijal vodi na tvorbu jednog vezanog stanja. To se može vidjeti ako se (5.56) napiše u obliku $\alpha = \sqrt{NE_b}(2n+\beta)$. Odavde se vidi da se, za $\alpha < 0$, parametar β mora ograničiti na interval $-1 < \beta < 0$, a n mora biti 0, što znači da postoji samo jedno vezano stanje. Isti zaključak vrijedi također i u općem slučaju, gdje analitičko rješenje nije moguće , i to se može provjeriti temeljitim numeričkim istraživanjem relacije (5.53). Primjer toga je prikazan na Slici 7.

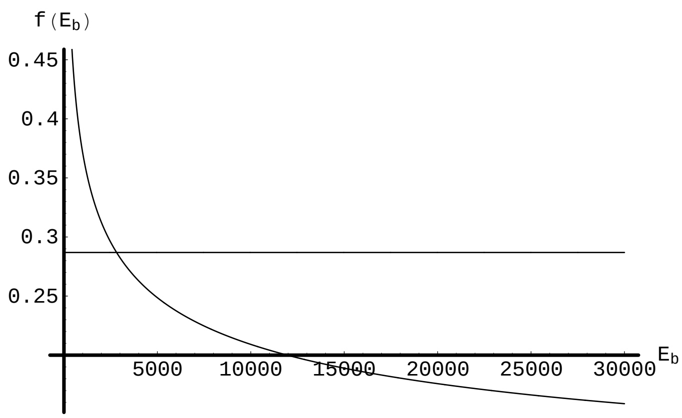
Važna karakteristika sistema opisanog Hamiltonijanom (5.14) je njegovo fundamentalno različito ponašanje koje ovisi o predznaku parametra α. Dok za $\alpha > 0$, lijeva strana od (5.53) pokazuje kako oscilatorno, tako i neoscilatorno ponašanje, što vodi na beskonačan broj vezanih stanja, za $\alpha \leq 0$, lijeva strana od (5.53) pokazuje samo neoscilatorno ponašanje, što vodi na postojanje najviše jednog vezanog stanja.

5.4 Raspršenje na polarnim molekulama

U ovom odjeljku primjenjujemo von Neumann-ovu teoriju hermitskog proširenja na opis anomalnog raspršenja elektrona na dipolnom polju polarne molekule [82].



Slika 6. Graf od (5.53) za $N = 100$, $\alpha = 1.5$, $\beta = -0.7$, $k = 1$ i $z = -0.73$. Ravna vodoravna linija odgovara vrijednosti desne strane od (5.53).



Slika 7. Graf od (5.53) za $N = 1000$, $\alpha = -1$, $\beta = 1.5$, $k = 1$ i $z = 0.1$. Ravna vodoravna linija odgovara vrijednosti desne strane od (5.53). Graf pokazuje opće ponašanje za proizvoljno snažni Coulombov potencijal, tj. za bilo koji $\alpha < 0$.

Elektroni koji upadaju u polje dipola, u određenim okolnostima bivaju zarobljeni te formiraju vezano stanje sa molekulom, što uzrokuje anomalno raspršenje. Jednostavni model točkastog električnog dipola predviđa [77, 78, 79, 80, 81] postojanje kritične vrijednosti D_0 za električni dipolni moment, ispod kojeg se vezanje elektrona za polarnu molekulu ne može dogoditi. Ta kritična vrijednost iznosi 1.63×10^{-18} esu cm. Isti model predviđa beskonačan broj vezanih stanja elektrona u molekuli kada je dipolni moment D molekule veći od kritične vrijednosti D_0. Dakle, ukratko, jednostavni model točkastog dipola predviđa da za $D > D_0$ postoji beskonačan broj vezanih stanja, dok za $D < D_0$ nema vezanih stanja.

Međutim, većina mjerenja pokazuje da postoji samo jedno vezano stanje za $D > D_0$. Također, postoje molekule, kao što su na primjer H_2S i HCl, čiji dipolni moment je manji od D_0, ali unatoč tome pokazuju anomalno raspršenje, tj. formiraju vezano stanje sa elektronom.

Ovdje ćemo se pokušati pozabaviti objašnjenjem tih neslaganja. U tom pokušaju, zadržat ćemo sliku jednostavnog točkastog dipola jer ona uključuje elektron-dipol interakciju koja opada sa kvadratom udaljenosti, a koja u sebi sadrži glavne aspekte dugodosežne dinamike koja vodi na formaciju labavo vezanih stanja. Međutim, ključna točka u kojoj se analiza koja slijedi razlikuje od jednostavnog modela točkastog dipola jest uključivanje efekata sila kratkog dosega koje nisu uzete u obzir u modelu jednostavnog točkastog dipola. Za očekivati je da su gore opisana neslaganja između mjerenja i teorije posljedica upravo neuzimanja u obzir učinaka međudjelovanja kratkog dosega, koja imaju ulogu u mehanizmu elektronskog uhvata. Unutar opisane aproksimacije, i bez poznavanja detaljnog oblika sila kratkog dosega, njihove učinke ćemo uključiti u analizu putem nametanja rubnih uvjeta kojima se Hamiltonijan modela mora pokoravati [82]. To, drugim riječima, znači da efekte sila kratkog dosega simuliramo pomoću izbora rubnih uvjeta. Prema tome, problem se sada svodi na nalaženje svih mogućih rubnih uvjeta, za kvantni sistem sa međudjelovanjem koje opada sa kvadratom udaljenosti, za koje je Hamiltonijan modela hermitski operator.

Dinamiku elektrona naboja e i mase μ, u polju točkastog dipola dipolnog momenta D, opisuje jednadžba

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{eD}{r^2}\cos\theta\right]\Psi = E\Psi, \tag{5.58}$$

gdje je E energija. Jednadžba (5.58) je napisana u sfernim polarnim koordinatama (r,θ,ϕ). U tim koordinatama valna funkcija se može separirati na način $\Psi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}R(r)\Theta(\theta)e^{im\phi}$, što vodi na radijalnu jednadžbu

$$H_r R(r) \equiv \left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\lambda}{r^2}\right] R(r) = \epsilon R(r), \tag{5.59}$$

gdje je H_r radijalni Hamiltonijan, $\epsilon = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$ je svojstvena vrijednost radijalne jednadžbe (5.59), a λ je svojstvena vrijednost kutne jednadžbe i do reda $O((\frac{1}{6}d^2)^3)$ dana je sa [77]

$$\lambda = -\frac{1}{6}d^2 + \frac{11}{1080}d^4 - \frac{133}{97200}d^6 + \dots, \tag{5.60}$$

uz $d = \frac{2\mu e D}{\hbar^2}$. Poznato je da Hamiltonijan H_r u (5.59) dopušta pojavu vezanog stanja ako je ispunjen uvjet $\lambda < -\frac{1}{4}$ [77]. Taj uvjet vodi na postojanje kritične vrijednosti dipolnog momenta $D_0 = 1.63\times 10^{-18}$ esu cm. Korištenjem von Neumann-ove teorije i vrlo općenite pretpostavke da Hamiltonijan H_r bude hermitski, pokazat ćemo da je moguća formacija vezanog stanja u promatranom sistemu čak i ako je λ podvrgnut slabijem uvjetu, tj. i za vrijednosti dipolnog momenta manje od D_0.

Hamiltonijan H_r je realan simetričan operator na domeni $D(H_r) \equiv \{\phi(0) = \phi'(0) = 0,\ \phi,\ \phi'$ neprekidne$\}$. Kao i prije, zanima nas jednadžba

$$H_r^* \phi_\pm = \pm i \phi_\pm, \tag{5.61}$$

iz koje možemo steći uvid u operatorska svojstva od H_r. Poglavito nas zanima da li je H_r hermitski na $D(H_r)$ ili, ako nije, da li dopušta hermitska proširenja. U (5.61) operator H_r^* je adjungirani operator od H_r.

Iz jednadžbe (5.60) se vidi da za bilo koju vrijednost dipolnog momenta različitu od 0, vrijedi $\lambda < 0$. Ograničimo analizu na interval $-\frac{1}{4} \leq \lambda < 0$, jer analiza vezanih stanja za $\lambda < -\frac{1}{4}$ već postoji u literaturi [77]. U terminima parametra $\nu = \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$, rješenja od (5.61), koja su kvadratno integrabilna u beskonačnosti, imaju oblik

$$\begin{aligned} \phi_+(r) &= r^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(1)}(re^{i\frac{\pi}{4}}), \\ \phi_-(r) &= r^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(2)}(re^{-i\frac{\pi}{4}}), \end{aligned} \tag{5.62}$$

gdje su H_ν Hankelove funkcije [54]. Za sada razmotrimo slučaj $\lambda \neq -\frac{1}{4}$, tj. $\nu \neq 0$. Funkcije $\phi_\pm$ su ograničene kako $r \to \infty$. Za $r \to 0$, one se ponašaju na način,

$$\begin{aligned} \phi_+(r) &\to \mathcal{C}_1(\nu) r^{\nu+\frac{1}{2}} + \mathcal{C}_2(\nu) r^{-\nu+\frac{1}{2}}, \\ \phi_-(r) &\to \mathcal{C}_1^*(\nu) r^{\nu+\frac{1}{2}} + \mathcal{C}_2^*(\nu) r^{-\nu+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{5.63}$$

gdje su $\mathcal{C}_1(\nu) = \frac{i}{\sin\nu\pi} \frac{1}{2^\nu} \frac{e^{-i\frac{3\nu\pi}{4}}}{\Gamma(1+\nu)}$, $\mathcal{C}_2(\nu) = -\frac{i}{\sin\nu\pi} \frac{1}{2^{-\nu}} \frac{e^{-i\frac{\nu\pi}{4}}}{\Gamma(1-\nu)}$, a $\mathcal{C}_1^*(\nu)$ i $\mathcal{C}_2^*(\nu)$ su kompleksno konjugirane veličine od $\mathcal{C}_1(\nu)$ i $\mathcal{C}_2(\nu)$. Može se vidjeti da funkcije $\phi_\pm$ nisu kvadratno integrabilne blizu ishodišta kada je $\nu^2 \geq 1$. U tom slučaju, $n_+ = n_- = 0$ i H_r je u osnovi hermitski na domeni $D(H_r)$ [74]. S druge strane, obje funkcije $\phi_\pm$ su kvadratno integrabilne kada je ili $-1 < \nu < 0$ ili $0 < \nu < 1$. Zbog toga, za bilo koju vrijednost od ν u tim intervalima, defekti od H_r su $n_+ = n_- = 1$. U tom slučaju, operator H_r nije hermitski na domeni $D(H_r)$, ali dopušta hermitska proširenja. Domena $D_z(H_r)$ na kojoj je H_r hermitski sadrži sve elemente od $D(H_r)$, zajedno sa elementima oblika $\phi_+ + e^{iz}\phi_-$, gdje je $z \in R \pmod{2\pi}$ [74]. Sada nam je cilj naći spektar od H_r na domeni $D_z(H_r)$.

Rješenje od (5.59) mora biti kvadratno integrabilno, kako bi zadovoljavalo uvjete koje mora zadovoljavati valna funkcija koja opisuje vezano stanje. Stoga ono ima oblik

$$R(r) = Br^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(1)}(qr)\,, \tag{5.64}$$

gdje je $q^2 = \epsilon$. Sada, u granici $r \to 0$, imamo

$$\phi_+(r) + e^{iz}\phi_-(r) \to \left[\mathcal{C}_1(\nu) + e^{iz}\mathcal{C}_1^*(\nu)\right] r^{\nu+\frac{1}{2}} + \left[\mathcal{C}_2(\nu) + e^{iz}\mathcal{C}_2^*(\nu)\right] r^{-\nu+\frac{1}{2}}$$

i

$$R(r) \to \mathcal{D}_1(\nu, q) r^{\nu+\frac{1}{2}} + \mathcal{D}_2(\nu, q) r^{-\nu+\frac{1}{2}}, \tag{5.65}$$

gdje su $\mathcal{D}_1(\nu, q) = \frac{i}{\sin\pi\nu}\frac{e^{-i\pi\nu}q^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$ i $\mathcal{D}_2(\nu, q) = -\frac{i}{\sin\pi\nu}\frac{q^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$. S obzirom da mora vrijediti $R(r) \in D_z(H_r)$, koeficijenti od $r^{\nu+\frac{1}{2}}$ i $r^{-\nu+\frac{1}{2}}$ u (5.65) i (5.65) moraju se složiti. Usporedba tih koeficijenata daje energiju vezanog stanja,

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Big[\cos\frac{\pi\nu}{2} + \cot(\frac{z}{2} + \frac{\pi\nu}{4})\sin\frac{\pi\nu}{2}\Big]^{\frac{1}{\nu}}. \tag{5.66}$$

Odavde se vidi da, za danu vrijednost parametra ν unutar dozvoljenog intervala (u kojem H_r dopušta hermitska proširenja), $0 < \nu < 1$, operator H_r ima jedno jedino vezano stanje sa energijom (5.66). Također, za fiksnu vrijednost od ν, vezano stanje postoji samo za one vrijednosti z za koje je veličina u prvoj zagradi u (5.66) pozitivna. Iz jednadžbe (5.64) te imajući na umu da je ϵ negativan, dobivamo da je svojstvena funkcija vezanog stanja dana sa

$$R(r) = Br^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(1)}(i\sqrt{|\epsilon|}r), \tag{5.67}$$

gdje je B normalizacijska konstanta. Energija osnovnog stanja i pripadna valna funkcija ovise o izboru parametra hermitskog proširenja z, koji klasificira sve rubne uvjete za koje je operator H_r hermitski.

Slučaj kada je $\nu = 0$, tj. $\lambda = -\frac{1}{4}$, može se analizirati na sličan način. Energija vezanog stanja i pripadna valna funkcija u tom slučaju su dani sa,

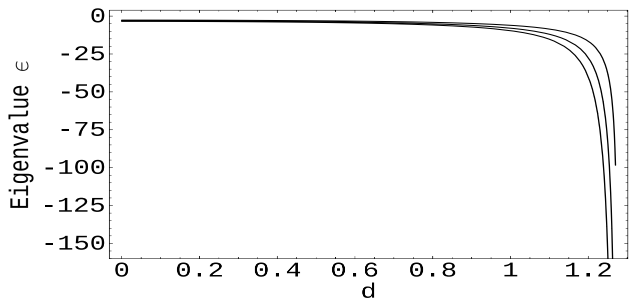
$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\exp\left[\frac{\pi}{2}\cot\frac{z}{2}\right]\,, \tag{5.68}$$

i

$$\psi(r) = \sqrt{-2\epsilon r}K_0\left(\sqrt{-\epsilon}\; r\right)\,, \tag{5.69}$$

gdje je K_0 modificirana Besselova funkcija [54].

Gornja analiza pokazuje da za $0 < \nu < 1$, tj. za $-\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4}$, radijalni Hamiltonijan dopušta jedno vezano stanje. S obzirom da je uvijek $\lambda < 0$, za



Slika 8. Prikaz energije vezanja kao funkcije dipolnog momenta $d = \frac{2\mu e D}{\hbar^2}$ polarnih molekula za tri različite vrijednosti parametra hermitskog proširenja z. Odozgo prema dolje, $z = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}$.

bilo koju vrijednost λ iz intervala $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$, promatrani sistem ima jedno vezano stanje. To je zaključak koji je potpuno drugačiji od tvrdnje da za pojavu vezanog stanja mora biti ispunjen uvjet $\lambda < -\frac{1}{4}$ [77]. Stoga ova analiza pokazuje da polarna molekula sa proizvoljno malim, ali različitim od 0, dipolnim momentom može zarobiti elektron i formirati vezano stanje. Posebno, taj argument pokazuje da i molekule kao što su H_2S i HCl, čiji dipolni momenti su manji od kritične vrijednosti, također mogu vezati elektron. To je konstatacija koja je u skladu sa eksperimentalno opaženim anomalnim raspršenjem elektrona na polarnim molekulama, što prijašnja analiza [77] nije mogla objasniti. Postojanje jednog vezanog stanja je također rezultat koji je u skladu sa eksperimentalnim opažanjima. Na Slici 8 prikazana je energija vezanja kao funkcija dipolnog momenta d. Graf je dobiven korištenjem rezultata (5.60) i (5.66) te činjenice da λ leži u intervalu $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$. Iz slike se vidi da molekule sa proizvoljno malim dipolnim momentom mogu vezati elektron, kao i da energije vezanja mogu biti vrlo male, tj. da se elektron može vrlo labavo vezati na njih.

Može se pokazati da u promatranom sistemu dolazi do narušavanja invarijantnosti na promjenu skale [82], što je posljedica kvantizacije, jer je spomenuta simetrija prisutna na klasičnom nivou. Ta pojavnost je ključna za formaciju bilo kojeg vezanog stanja u sistemu. Dakle, simetrija skaliranja slama se odabirom domene hermitičnosti. S obzirom da domena sadrži informacije o rubnim uvjetima, a oni su povezani sa efektima kratkodosežnih sila u sistemu, kvalitativno imamo zaključak da su međudjelovanja kratkog dosega odgovorna za narušavanje invarijantnosti na promjenu skale. Ipak, za specijalni izbor parametra hermitskog proširenja, $z = -\frac{\nu\pi}{2}$ i $z = -\frac{3\nu\pi}{2}$, promatrani sustav je ponovno invarijantan na transformaciju skaliranja [82].

Poglavlje 6

Korespondencija između Calogerovog modela i klasične gravitacije u AdS pozadini

6.1 Gravitacijski model holografski dualan poopćenom Calogerovom modelu

U ovoj točki razmotrit ćemo korespondenciju između Calogerovog modela u d prostornih dimenzija i klasične gravitacije u pozadini definiranoj sa deformiranom Anti-de Sitter (AdS) metrikom. Drugim riječima, promotrit ćemo konstrukciju holografskog modela gravitacije, dualnog kvantnom Calogerovom modelu, koji je sam po sebi nerelativistički [83]. Spomenuta korespondencija u bliskoj je vezi sa poopćenjem nedavnih napredaka na području nerelativističke verzije AdS/CFT korespondencije (skraćena oznaka je AdS/NRCFT korespondencija). Nova značajka te korespondencije leži u neposrednoj realizaciji konformalnosti uz pomoć deformacije AdS geometrije i u primjeni holografskog načela. AdS/NRCFT korespondencija može se primijeniti na sistem sa vezujućim harmonijskim potencijalom, a to je moguće zahvaljujući činjenici što je neslomljena $SL(2,R)$ simetrija, sakrivena unutar konformne grupe $SO(d+4,2)$. U toj situaciji moguće je redefinirati pripadni Hamiltonijan te uključiti u njega harmoničko vezanje deformirajući g_{tt} komponentu metrike. Općenito, deformacija AdS geometrije može biti rezultat uključivanja doprinosa dodatne materije, čija jednadžba stanja je okarakterizirana nepostojanjem tlaka, pri čemu se doprinos te dodatne egzotične materije pridodaje već postojećem AdS vakuumskom doprinosu. Efektivno se promatrana deformacija AdS metrike postiže, a to ćemo i uraditi ovdje, istovremeno deformirajući komponente g_{tt} i $g_{t\vec{x}}$ metrike, pridodajući im određene dodatne članove.

U onom što slijedi iskoristit ćemo $SL(2, R)$ simetriju kako bismo napisali deformiranu AdS[1] metriku (tj. opću holografsku metriku) koja odgovara Hamiltonijanu (4.1) za poopćeni Calogerov model.

Promatramo najprije korespondenciju za slučaj jedne čestice mase m. Kako bismo mogli povezati Calogerov model koji je u svojoj osnovi nerelativistički model sa gravitacijom, koja je relativistička teorija, jedna opcija je da uvedemo dodatne dvije dimenzije: holografski smjer r i kompaktificirani nul-smjer ξ. Polazeći od $(d+1)$-dimenzionalnog Anti-de Sitter prostora, koji uključuje jednu vremensku i d prostornih dimenzija, njegovom deformacijom, koja pored deformacije komponenti g_{tt} i $g_{t\vec{x}}$ uključuje i pridodavanje dodatne dvije holografske dimenzije r i ξ, dolazimo do deformiranog AdS_{d+3} prostora čija metrika ima slijedeći oblik

$$ds^2 = -2\frac{r^4}{R^4}A(r,\vec{x})dt^2 + \frac{r^2}{R^2}(-2dtd\xi + d\vec{x}^2) + \frac{r^3}{R^3}(-2dtd\vec{x}\cdot\vec{B}(r,\vec{x})) + \frac{R^2}{r^2}dr^2. \tag{6.1}$$

U gornjoj relaciji R je radijus zakrivljenosti prostora AdS_{d+3}, a dimenzionalnost od R je takva da su komponente $g_{\mu\nu}$ metrike bezdimenzionalne. Za funkcije $A, \vec{B}$ uzimamo da imaju oblik

$$A(r,\vec{x}) = \gamma^2(\frac{R}{r})^4 + a_{-2}(\frac{R}{r})^2\frac{1}{|\vec{x}|^2} + a_0 + a_2(\frac{R}{r})^2|\vec{x}|^2, \qquad \vec{B}(r,\vec{x}) = b_1(\frac{R}{r})\vec{x}, \tag{6.2}$$

pri čemu je dimenzionalnost svih koeficijenata odabrana na takav način da su sve funkcije, kao i metrika u cjelini, invarijantne na reskaliranje sa parametrom λ,

$$(t,\vec{x},\xi,r) \to (\lambda^2 t, \lambda\vec{x}, \xi, \lambda^{-1}r). \tag{6.3}$$

Vidjet ćemo kasnije da je uključivanje nedijagonalnog člana $dtd\vec{x}$, ili drugim riječima funkcije $B(r,\vec{x})$, odgovorno za pojavu dodatnog harmoničkog vezanja, kao i dilatacijskog člana u rezultirajućem Calogerovom modelu.

Okrećemo se sada proučavanju korespondencije, pri čemu posebno razmatramo operator $\mathcal{O}(t,\vec{x})$, dualan skalarnom polju $\phi(r,\xi,t,\vec{x})$ sa masom m_0. Relevantna akcija sa minimalnim vezanjem, koja opisuje dinamiku skalarnog polja Φ u pozadini opisanoj metrikom $g_{\mu\nu}$, (6.1), je

$$S = -\int d^{d+3}x\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + m_0^2\Phi^*\Phi). \tag{6.4}$$

[1]U slučaju jedne čestice promatramo deformaciju AdS metrike u $(d+3)$-dim. prostoru, dok u N-čestičnom slučaju promatramo deformaciju AdS metrike u $(Nd+3)$-dim. prostoru.

Iz gornje akcije proizlazi jednadžba gibanja polja Φ,

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}\ g^{\mu\lambda}\partial_\mu\Phi^*) = \sqrt{-g}\ m_0^2\Phi^*. \tag{6.5}$$

Kako bismo jednadžbu gibanja napisali u eksplicitnijem obliku, potrebno je identificirati metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ u izrazu (6.1),

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\frac{r^4}{R^4}A & -2\frac{r^3}{R^3}B_1 & -2\frac{r^3}{R^3}B_2 & -2\frac{r^3}{R^3}B_3\cdots & -2\frac{r^3}{R^3}B_d & 0 & -2\frac{r^2}{R^2} \\ -2\frac{r^3}{R^3}B_1 & \frac{r^2}{R^2} & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & . & \cdots & . \\ -2\frac{r^3}{R^3}B_d & 0 & 0\cdots & 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & \frac{R^2}{r^2} & 0 \\ -2\frac{r^2}{R^2} & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

te njegov inverz $g^{\mu\nu}$,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -\frac{R^2}{2r^2} \\ 0 & \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & -\frac{R}{r}B_1 \\ . & . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 & \frac{R^2}{r^2} & 0 & -\frac{R}{r}B_d \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & \frac{r^2}{R^2} & 0 \\ -\frac{R^2}{2r^2} & -\frac{R}{r}B_1 & -\frac{R}{r}B_2 & -\frac{R}{r}B_3\cdots & -\frac{R}{r}B_d & 0 & \frac{1}{2}A+B_1^2+\cdots+B_d^2 \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

U gornjim izrazima veličine $A, \vec{B}$ definirane su u (6.2), a indeksi μ, ν idu od 0 do $d+2$, pri čemu je nulta komponenta vremenska, $\mu = 1, ...d$ su prostorne komponente, a $\mu = d+1, d+2$ su holografske koordinate r i ξ. Koristeći relacije (6.6) i (6.7), jednadžba (6.5) postaje

$$-\partial_0\partial_\xi\Phi^* + \nabla^2\Phi^* - b_1 d\partial_\xi\Phi^* - 2b_1\vec{x}\cdot\nabla\partial_\xi\Phi^* + \frac{r^2}{R^4}\left((d+3)r\partial_r\Phi^* + r^2\partial_r^2\Phi^*\right) +$$
$$+\frac{r^2}{R^2}\left(\frac{1}{2}A(r,\vec{x}) + B_1^2(r,\vec{x}) + \cdots + B_d^2(r,\vec{x})\right)\partial_\xi^2\Phi^* = \frac{r^2}{R^2}m_0^2\Phi^*. \tag{6.8}$$

Uvažavajući činjenicu da je kompaktificirani smjer ξ veličine reda $\frac{1}{M}$, možemo za stacionarno skalarno polje uzeti

$$\Phi(r,\xi,r,\vec{x}) = e^{i\omega t + iM\xi}\Lambda(r)\Psi(\vec{x}). \tag{6.9}$$

Nakon separacije jednadžbe (6.8), ona se razdvaja na dvije, jednadžbu za Ψ koja ovisi samo o $\vec{x}$,

$$-\frac{1}{2M}\nabla^2\Psi + \frac{M}{4}\frac{a_{-2}}{|\vec{x}|^2}\Psi + \frac{M}{2}\omega^2|\vec{x}|^2\Psi - ib_1\vec{x}\cdot\nabla\Psi = \epsilon_x\Psi, \qquad \omega^2 \equiv \frac{1}{2}a_2 + b_1^2, \tag{6.10}$$

i jednadžbu za Λ koja ovisi samo o r,

$$-\frac{r^4}{2MR^4}\partial_r^2\Lambda - \frac{d+r}{2M}\frac{r^3}{R^4}\partial_r\Lambda + \left(\frac{M}{4}\gamma^2\frac{R^2}{r^2} + \frac{M}{4}a_0\frac{r^2}{R^2} + \frac{m_0^2}{2M}\frac{r^2}{R^2}\right)\Lambda =$$

$$= \left(\frac{\omega}{2} + \frac{i}{2}b_1 d - \epsilon_x\right)\Lambda \equiv \epsilon_z\Lambda, \tag{6.11}$$

pri čemu je ϵ_x konstanta separacije. Ako u posljednjoj jednadžbi načinimo zamjenu varijable, $z = R^2/r$, ona prelazi u

$$-\frac{1}{2M}[\partial_z^2\Lambda - \frac{d+1}{z}\partial_z\Lambda] + [\frac{m^2R^2}{2Mz^2} + \frac{M\gamma^2}{4R^2}z^2 - \epsilon_z]\Lambda = 0,$$
$$\epsilon_z \equiv \frac{\omega}{2} + \frac{i}{2}db_1 - \epsilon_x, \qquad m^2 \equiv m_0^2 + \frac{1}{2}a_0M^2. \tag{6.12}$$

Relacija (6.10) opisuje jednočestični poopćeni Calogerov model. Uz identifikaciju $c = -2ib_1$, lijeva strana od (6.10) podudara se sa modelom (4.1), pri čemu separacijska konstanta ϵ_x, do na konstantu $\frac{cd}{4}$, ima interpretaciju svojstvene energije Hamiltonijana (4.1).

S druge strane, fizikalno prihvatljivo rješenje (rješenje koje ne divergira u beskonačnosti) za $\Lambda(z)$ poprima oblik linearne kombinacije konfluentne hipergeometrijske funkcije i pridruženog Laguerre-ovog polinoma,

$$\Lambda(z) = 2^{\frac{1+\nu}{2}}e^{\frac{1}{2}M\gamma z^2}z^{\frac{d}{2}+1+\nu}\{c_-U(n, 1+\nu, -M\gamma z^2) + c_+L_{-n}^{\nu}(-M\gamma z^2)\},$$
$$n \equiv \frac{1+\nu}{2} + \frac{\epsilon_z}{4M\gamma}, \qquad \nu \equiv \sqrt{m^2 + (\frac{d+2}{2})^2}. \tag{6.13}$$

U asimptotskom približenju $z \to 0$ imamo ponašanje $\Lambda(z) \sim c_-z^{\Delta_-} + c_+z^{\Delta_+}$, gdje su $\Delta_\pm = \frac{d+2}{2} \pm \nu$. Kao u AdS/CFT korespondenciji, uobičajeno je razmatrati operator $\mathcal{O}$ dualan masivnom skalarnom polju Φ. Uz izbor $\nu \geq 1, \quad m^2 \geq d+3$, samo je drugi član renormalizabilan te se stoga prvi član ponaša kao izvor. Korelacijska funkcija tada ima slijedeće ponašanje

$$< \mathcal{O}\mathcal{O} > \sim |\epsilon_z|^{2\nu}, \tag{6.14}$$

pri čemu je skalirajuća dimenzija od $\mathcal{O}$ jednaka $\frac{d+2}{2} + \nu$. U slučaju $0 < \nu < 1$, oba člana su renormalizabilna i stoga se bilo koji od njih može odabrati kao izvor, a preostali onda kao kondenzat.

U prethodnom razmatranju predočili smo gravitacijski model holografski dualan kvantnom Calogerovom modelu. Pri tome smo Hamiltonijan konformnog sistema sa AdS pozadinom separirali na dio koji opisuje Calogerov model sa energijama ϵ_x, i na dio koji opisuje unutrašnju dinamiku, pri čemu se

z može interpretirati kao unutrašnji hiperradius, a ϵ_z kao unutrašnja energija. Na kraju je korisno napomenuti da različiti odabiri slobodnih parametara $\gamma, a_{-2}, a_0, a_2, b_1$[2] definiraju različite metrike i zato vode na različite Hamiltonijane za Calogerov model. Međutim, kako su svi ti Hamiltonijani istog oblika (tj. mogu se prikazati kao linearna kombinacija generatora (4.3)), oni se mogu međusobno povezati unitarnim transformacijama. Stoga, metrike (6.1), (6.2), koje odgovaraju različitim izborima parametara $\gamma, a_{-2}, a_0, a_2, b_1$, vode na različite definicije energije, sve međusobno povezane unitarnim transformacijama.

6.2 N-čestično poopćenje

U ovom potpoglavlju proširujemo netom dobivenu korespondenciju na slučaj Calogerovog modela sa N identičnih čestica. Relevantna metrika koja odražava pozadinsku geometriju u $Nd+3$ dimenzija poopćuje se na

$$\begin{aligned} ds^2 = \quad & -2\frac{r^4}{R^4}A(r,\vec{x_i})dt^2 + \frac{r^2}{R^2}(-2dtd\xi + \sum_i^N d\vec{x_i}^2) \\ & + \frac{r^3}{R^3}(-2\sum_i^N dtd\vec{x_i}\cdot\vec{B}_i(r,\vec{x_i})) + \frac{R^2}{r^2}dr^2, \end{aligned} \tag{6.15}$$

te

$$\begin{aligned} A(r,\vec{x_i}) &= \gamma^2(\frac{R}{r})^4 + (\frac{R}{r})^2\sum_{i\neq j}\frac{a_{-2}}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|^2} + a_0 + a_2(\frac{R}{r})^2(\sum_i^N|\vec{x_i}|^2), \\ \vec{B}_i(r,\vec{x_i}) &= b_1(\frac{R}{r})\vec{x_i}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Ovdje $\vec{x_i}$ opisuje položaj i-te četice, dok je hiperradius $z = R^2/r = \sqrt{|\sum_i^N\vec{x_i}|^2/N}$. Slijedeći identičnu proceduru kao u slučaju jedne četice, moguće je reproducirati N-čestični Calogerov model sa identičnim česticama, pri čemu se relacija $\epsilon_z \equiv \frac{\omega}{2} + \frac{i}{2}db_1 - \epsilon_x$ zamjenjuje sa $N\epsilon_z \equiv N\frac{\omega}{2} + \frac{i}{2}Ndb_1 - N\epsilon_x$.

[2]Treba se prisjetiti da je njihova sloboda ograničena jedino zahtjevom za invarijantnošću metrike na reskaliranje sa proizvoljnim parametrom λ.

6.3 Poopćenje na N čestica sa različitim masama

Korespondencija između N-čestičnog Calogerovog modela sa česticama različite mase i Anti-de Sitter gravitacije može se uspostaviti uvođenjem dodatnih koeficijenata a_{-2}^{ij} te b_i za čestice različite mase,

$$
\begin{aligned}
A(r,\vec{x_i}) &= \gamma^2(\frac{R}{r})^4 + (\frac{R}{r})^2 \sum_{i\neq j} \frac{a_{-2}^{ij}}{|\vec{x_i}-\vec{x_j}|^2} + a_0 \sum_i^N m_i^2 + a_2(\frac{R}{r})^2(\sum_i^N m_i|\vec{x_i}|^2), \\
\vec{B_i}(r,\vec{x_i}) &= b_i(\frac{R}{r})m_i\vec{x_i}.
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

U dodatku, nužna je i redefinicija,

$$
m^2 = m_0^2 + \sum_i^N m_i^2, \qquad \omega_i^2 = \frac{1}{2}a_2 + b_i^2, \tag{6.18}
$$

za efektivnu masu zapremine i kutnu frekvenciju i-te čestice.

Poglavlje 7

$N = 2$ Superkonformno proširenje Calogerovog modela

U ostatku teze bavit ćemo se supersimetričnim poopćenjima originalnog racionalnog Calogerovog modela. To će nas neminovno dovesti do novih (grupa) simetrija koje se tim poopćenjima realiziraju. Fizikalni motivi za proučavanje supersimetričnih poopćenja Calogerovog modela su brojni, a posebno se može istaknuti uloga BPS operatora u Super-Yang-Mills teoriji te veza sa crnim rupama. Ovo potonje posebno se odnosi na činjenicu da bi $N = 4$ superkonformno proširenje [84] Calogerovog modela moglo osigurati [85] mikroskopski opis ekstremalne Reissner-Nordstrom crne rupe u području blizu njenog horizonta. Spomenuta mogućnost je posljedica činjenice da je u Calogerovom modelu realizirana $SO(1,2)$ simetrija, te činjenice da je grupa $SO(1,2)$ izometrijska grupa prostora AdS_2.

Ideja o ekvivalentnosti nekog sustava i skupa slobodnih čestica pokazat će se vrlo korisnom i plodonosnom i u kontekstu supersimetričnih poopćenja modela koji opisuje promatrani sustav i uvelike ćemo je koristiti u razmatranjima koja slijede. U ovom poglavlju iskoristit ćemo spomenutu ekvivalentnost, realiziranu pomoću specijalne konstrukcije opisane u narednom odjeljku, kako bismo dobili supersimetrično poopćenje Calogerovog modela, bazirano na $SU(1,1|1)$ supersimetriji. U naredna dva poglavlja otkrit ćemo ekvivalentnost supersimetričnog Calogerovog modela, te čak još i općenitije klase supersimetričnih modela, sa slobodnim oscilatorima. Taj rezultat, tj. spomenutu ekvivalenciju, iskoristit ćemo kako bismo istražili modele u kojima je realizirana $Osp(2|2)$ supersimetrija. Ta će nam simetrija dalje poslužiti za algebarsku konstrukciju svojstvenih stanja promatranog supersimetričnog modela.

7.1 Preslikavanje na sustav slobodnih čestica

U prethodnim razmatranjima vidjeli smo da je Calogerov model ekvivalentan skupu slobodnih čestica te smo i eksplicitno konstruirali transformacije koje obavljaju odgovarajući prijelaz između spomenutih modela. Međutim, ta ranije opisana preslikavanja ne predstavljaju jedini način na koji se može uspostaviti veza između sustava slobodnih čestica i sustava u kojem čestice međudjeluju sa potencijalom koji opada sa kvadratom njihove međusobne udaljenosti. U literaturi [13], [86], [87] razmatrana su i neka druga preslikavanja koja obavljaju istu ili sličnu funkciju i svaka od njih ima neke prednosti kao i neke nedostatke. Ovdje ćemo se pozabaviti pristupom koji koristi konformnu $SO(1,2)$ simetriju i koji se čini posebno prikladnim za supersimetrično poopćenje. Spomenuti pristup koristi unitarno preslikavanje generirano sa elementima $so(1,2)$ algebre i osigurava prijelaz na sustav slobodnih $N = 2$ superčestica sa realiziranom $SU(1,1|1)$ grupom simetrija, čiju ćemo realizaciju, u kontekstu Calogerovog modela, kasnije razmotriti.

Ključnu važnost u razmatranju koje slijedi imat će, dakle, $so(1,2)$ algebra,

$$[H, D] = \mathrm{i}H \ , \qquad [H, K] = 2\mathrm{i}D \ , \qquad [D, K] = \mathrm{i}K \ , \tag{7.1}$$

koja će u ovom konkretnom slučaju biti realizirana preko generatora

$$H \equiv H_{cal} \ = \ \tfrac{1}{2}p_i p_i + \sum_{i<j} \tfrac{g^2}{(x^i - x^j)^2} \ , \qquad D \ = \ -\tfrac{1}{4}(x^i p_i + p_i x^i) \ , \qquad K \ = \ \tfrac{1}{2}x^i x^i \ , \tag{7.2}$$

koji redom definiraju Hamiltonijan za kvantni n-čestični Calogerov model (H_{cal}), operator dilatacije (D) te generator specijalne konformne transformacije (K). Kasnije ćemo prosiriti Hamiltonijan H_{cal} sa članom koji će uključivati dodatne fermionske varijable. To prosirenje imat će za posljedicu prosirenje algebre (7.1) na superalgebru $su(1,1|1)$, koja $so(1,2)$ sadrži kao svoju podalgebru. To znači da će novi, superkonformni Hamiltonijan i dalje zadovoljavati algebru (7.1). U relaciji (7.2) i svim relacijama koje slijede podrazumijeva se sumacija po ponovljenim indeksima kao i to da međudjelujuće čestice imaju jediničnu masu. g je bezdimenzionalna konstanta vezanja. Za $g{=}0$ imamo reprezentaciju $so(1,2)$ algebre koja opisuje slobodne čestice i čiji generatori su dani sa $H_0 \equiv \frac{1}{2}p_i p_i$, D i K,

$$[H_0, D] = \mathrm{i}H_0 \ , \qquad [H_0, K] = 2\mathrm{i}D \ , \qquad [D, K] = \mathrm{i}K \ . \tag{7.3}$$

Sada prelazimo na osnovnu konstrukciju. Opći element Lieve algebre

$$A \ = \ \alpha H + \beta K + \gamma D \ , \tag{7.4}$$

gdje realne konstante α i β^{-1} imaju dimenziju duljine, a γ je bezdimenzionalan, generira unitarnu transformaciju

$$(H, D, K) \quad \longmapsto \quad (H', D', K') \;=\; (\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} H \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}A} D \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}A} K \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}). \quad (7.5)$$

Gornja unitarna transformacija je automorfizam algebre $so(1, 2)$, sto se može verificirati eksplicitnim izračunavanjem desne strane u (7.5). U tome nam može pomoći Baker-Campbell-Hausdorff formula

$$O' \;\equiv\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}A} O \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^m}{m!} \underbrace{[A, [A, \ldots [A, O] \ldots]}_{m \text{ puta}} \; . \quad (7.6)$$

Pogledajmo kako se transformira Hamiltonian $H \equiv H_{cal}$. Izračunavanjem vodeća tri člana razvoja (7.6) dobivamo slijedeći rezultat: član $m = 0$ jednak je polaznom operatoru $H \equiv H_{cal}$ kojeg transformiramo, dok su slijedeća dva člana, $m = 1$ i $m = 2$ dani sa

$$\mathrm{i}[A, H] \;=\; 2\beta D + \gamma H \; , \qquad \tfrac{\mathrm{i}^2}{2!}[A, [A, H]] \;=\; (\tfrac{\gamma^2}{2} - \alpha\beta) H + \beta^2 K + \beta\gamma D \; . \quad (7.7)$$

Na ovom mjestu je važno uočiti da izbor

$$\gamma \;=\; \pm 2 \sqrt{\alpha\beta} \qquad \text{za} \quad \alpha\beta > 0 \quad (7.8)$$

daje $\frac{\mathrm{i}^2}{2!}[A, [A, H]] = \beta A$, a to za posljedicu ima da svi članovi rednog broja većeg od $m = 2$ nestaju, zbog čega BCH razvoj za $H \equiv H_{cal}$ postaje konačan. Isti uvjet (7.8) osigurava da se i BCH razvoji za generatore D i K također prekidaju na trećem koraku, tj. da budu konačni. Stoga se u daljnjem razmatranju uvijek podrazumijeva da vrijedi uvjet (7.8). Uz tu naznaku transformacija (7.6) daje slijedeće egzaktne izraze za transformirane generatore konformne algebre,

$$\begin{aligned} H' &= (1+\gamma+\alpha\beta) H + \beta(2+\gamma) D + \beta^2 K, \\ D' &= -\alpha(1+\tfrac{\gamma}{2}) H + (1-\tfrac{\gamma^2}{2}) D + \beta(1-\tfrac{\gamma}{2}) K, \\ K' &= \alpha^2 H + \alpha(\gamma-2) D + (1-\tfrac{\gamma}{2})^2 K, \end{aligned} \quad (7.9)$$

Na isti način na koji smo unitarnom transformacijom (7.5) transformirali generatore $H \equiv H_{cal}$,D i K, sada istom transformacijom preslikavamo generatore H_0,D i K, s tom razlikom da je sada transformacija određena općim elementom B algebre, definiranim sa

$$B \;=\; \lambda H_0 + \sigma K + \delta D \; . \quad (7.10)$$

Dakle, zanima nas unitarna transformacija

$$(H_0, D, K) \quad \longmapsto \quad (H_0', D', K') \;=\; (\mathrm{e}^{\mathrm{i}B} H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}B} D \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}B} K \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}). \tag{7.11}$$

S obzirom da generatori H_0,D i K za sistem slobodnih čestica zatvaraju istu algebru kao i H,D i K, a struktura konformne algebre je jedino sto je važno u nasoj konstrukciji, možemo direktno preuzeti rezultate (7.9) te za egzaktan rezultat transformacije (7.11) napisati

$$\begin{aligned} H_0' &= (1{+}\delta{+}\lambda\sigma)H_0 + \sigma(2{+}\delta)D + \sigma^2 K, \\ D' &= -\lambda(1{+}\tfrac{\delta}{2})H_0 + (1{-}\tfrac{\delta^2}{2})D + \sigma(1{-}\tfrac{\delta}{2})K, \\ K' &= \lambda^2 H_0 + \lambda(\delta{-}2)D + (1{-}\tfrac{\delta}{2})^2 K, \end{aligned} \tag{7.12}$$

pri čemu se, po analogiji sa (7.8), podrazumijeva da vrijedi

$$\delta \;=\; \pm 2\sqrt{\lambda\sigma} \qquad \text{za} \quad \lambda\sigma > 0. \tag{7.13}$$

Budući da nam je cilj preslikati Hamiltonijan $H \equiv H_{cal}$ na sistem slobodnih čestica karakteriziran sa H_0, pažljiv uvid u rezultate (7.9) i (7.12) ukazuje na to da taj posao može obaviti kompozitna transformacija

$$(H, D, K) \quad \longmapsto \quad (\widetilde{H}, \widetilde{D}, \widetilde{K}) \;=\; (\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} H \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} D \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} K \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}), \tag{7.14}$$

uz izbor koeficijenata transformacije takav da vrijedi $\alpha\beta = 1$ i $\gamma = -2$ za A-transformaciju, odnosno $\lambda\sigma = 1$ i $\delta = 2$ za B-transformaciju. Primjenom transformacije[1] (7.14) na $H \equiv H_{cal}$ imamo

$$\widetilde{H} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} H \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\beta^2 K \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} \;= \beta^2\lambda^2 H_0. \tag{7.15}$$

Primjena iste transformacije na D daje

$$\widetilde{D} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} D \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}(-D + 2\beta K)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} = (2\lambda + 2\beta\lambda^2)H_0 + D \tag{7.16}$$

i konačno, primjena (7.14) na K daje

$$\widetilde{K} \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} K \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}B}(4K - 4\alpha D + \alpha^2 H)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} =$$

$$= (4\alpha^2 + 4\lambda^2 + 8\alpha\lambda)H_0 + (4\alpha^2\sigma + 4\alpha)D + \alpha^2\sigma^2 K + \alpha^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}B} H_{int} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}, \tag{7.17}$$

[1]Transformacija (7.14) se primjenjuje uz izbor $\alpha\beta = 1$ i $\gamma = -2$ za A-transformaciju te $\lambda\sigma = 1$ i $\delta = 2$ za B-transformaciju.

gdje je $H_{int} = \sum_{i<j} \frac{g^2}{(x^i - x^j)^2}$. Iz prethodnih izraza vidimo da će transformacija (7.14) u konačnici rezultirati sa

$$H \mapsto \widetilde{H} = H_0 \,, \qquad D \mapsto \widetilde{D} = D \,, \qquad K \mapsto \widetilde{K} = K + \alpha^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}B} H_{int} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B} \,, \tag{7.18}$$

pod uvjetom da zahtijevamo da vrijede slijedeće dodatne relacije između koeficijenata,

$$\beta\lambda = -1, \qquad \alpha\sigma = -1, \qquad \alpha + \lambda = 0 \,. \tag{7.19}$$

Na ovaj način $H \equiv H_{cal}$ je preslikan na Hamiltonijan sistema slobodnih čestica, H_0. U svjetlu relacija (7.19) te relacija $\alpha\beta = 1$, $\gamma = -2$, $\lambda\sigma = 1$, $\delta = 2$, opći elementi A i B Lieve algebre $so(1,2)$, koji generiraju transformacije (7.5), odnosno (7.11), mogu se napisati samo pomoću jedinog preostalog slobodnog parametra α,

$$A = \alpha H + \tfrac{1}{\alpha} K - 2D, \qquad B = -\alpha H_0 - \tfrac{1}{\alpha} K + 2D \,. \tag{7.20}$$

U zaključku ovog dijela, vidimo da se Hamiltonijan kvantnog Calogerovog modela, H_{cal}, može preslikati na Hamiltonijan H_0 sistema slobodnih čestica, uz pomoć odgovarajuće unitarne transformacije. Poznavajući njen eksplicitni oblik, iz stacionarnih stanja od H_0 moguće je konstruirati stacionarna stanja od H_{cal}. Taj rezultat je u skladu sa iskazom načinjenim u [14] prema kojem Calogerov model na skriveni način opisuje slobodne čestice u jednoj dimenziji. On je također na liniji izlaganja iz prethodnih poglavlja gdje je ustanovljena ekvivalentnost Calogerovog modela sa slobodnim oscilatorima i, kao takav, taj rezultat, kao i cijela konstrukcija načinjena u ovom potpoglavlju, predstavlja jos jednu alternativnu realizaciju te činjenice. Ipak, treba napomenuti da je cijena koja je plaćena u ovoj konstrukciji ta da ona vodi na nelokalnu realizaciju nekih generatora konformne algebre.

7.2 Superkonformno poopćenje

U razmatranju koje slijedi razmatrat ćemo $N = 2$ superkonformno poopćenje Calogerovog modela. Od sada pa nadalje, Hamiltonijan superkonformnog poopćenja Calogerovog modela označit ćemo sa H i definirat ćemo ga na način

$$H = H_{cal} + V = \tfrac{1}{2} p_i p_i + \sum_{i<j} \frac{g^2}{(x^i - x^j)^2} + V \equiv \tfrac{1}{2} p_i p_i + H_{int} = H_0 + H_{int}, \tag{7.21}$$

gdje je V dodatni potencijal koji uključuje i fermionske stupnjeve slobode. Hamiltonijan H, definiran sa (7.21), zajedno sa generatorima D i K iz (7.2) zatvara $so(1,2)$ algebru (7.1). Zahvaljujući činjenici da se prosirenje Hamiltonijana H_{cal} na superkonformnu inačicu i dalje pokorava algebri (7.1), za preslikavanje superkonformnog prosirenja H na slobodni Hamiltonijan H_0 možemo koristiti ne samo identičnu konstrukciju kao u prethodnoj točki, već i sve tamo dobivene rezultate. Konkretno, unitarna transformacija $\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$ preslikava skup operatora $(H,\ D,\ K)$ u skup $(\widetilde{H} = H_0,\ \widetilde{D} = D,\ \widetilde{K} = K + \alpha^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}B} H_{int} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B})$, pri čemu su elementi algebre A i B određeni sa (7.20). Povratni smjer, tj. prijelaz sa skupa $(\widetilde{H},\ \widetilde{D},\ \widetilde{K})$ na skup $(H,\ D,\ K)$, osigurava inverzna unitarna transformacija $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}$. Ta inverzna transformacija dakle obavlja prijelaz sa skupa slobodnih superčestica natrag na superkonformni Calogerov model, čiji oblik tek trebamo naći i kojem odgovara standardna reprezentacija (7.2) za generator K.

Pored $so(1,2)$ generatora, $N = 2$ superkonformna algebra $su(1,1|1)$ sadrži i jedan $u(1)$ generator J te dva para supernaboja: dva generatora supersimetrije Q i $\bar{Q}$ koji su si međusobno hermitski konjugirani te dva superkonformna generatora S i $\bar{S}$ koji su također međusobno povezani operacijom hermitskog konjugiranja. Sve zajedno, $su(1,1|1)$ superalgebra sadrži četiri bozonska i četiri fermionska generatora, koji zadovoljavaju komutacijske relacije

$$\begin{aligned}
&[H,D] = \mathrm{i}H\ , && [K,D] = -\mathrm{i}K && [Q,D] = \tfrac{\mathrm{i}}{2}Q\ , && [S,D] = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}S\ ,\\
&[Q,J] = -\tfrac{1}{2}Q\ , && [S,J] = -\tfrac{1}{2}S\ , && [H,K] = 2\mathrm{i}D\ , && [Q,K] = -\mathrm{i}S\ ,\\
&\{Q,\bar{Q}\} = 2H\ , && \{S,\bar{S}\} = 2K\ , && \{Q,\bar{S}\} = -2D - 2\mathrm{i}J + \mathrm{i}C\ , && [S,H] = \mathrm{i}Q\ .
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Hermitski konjugirane inačice gornjih relacija također su ispunjene, a sve preostale komutacijske relacije isčezavaju. Realna konstanta C, koja se pojavljuje u (7.22), označava centralni naboj. Realizacija superalgebre (7.22) zahtijeva, pored koordinata x^i, uvođenje n parova fermionskih koordinata ψ^i i $\bar{\psi}^i$, koje opisuju slobodne fermione i zadovoljavaju antikomutacijske relacije

$$\{\psi^i, \bar{\psi}^j\} \;=\; \delta^{ij}, \qquad \{\psi^i, \psi^j\} \;=\; 0 \;=\; \{\bar{\psi}^i, \bar{\psi}^j\} \qquad \text{sa} \quad (\psi^i)^* = \bar{\psi}^i\ . \tag{7.23}$$

S obzirom da nakon transformacije sa $\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$ komutacijske relacije (7.22) ostaju nepromijenjene, superalgebra (7.22) sugerira da se u modelu bez interakcije generatoru $\widetilde{H} = H_0 = \frac{1}{2}p^i p^i$ može pridodati par supernaboja,

$$\widetilde{Q} \;=\; Q_0 \;=\; \psi^i p^i, \qquad \widetilde{\bar{Q}} \;=\; \bar{Q}_0 \;=\; \bar{\psi}^i p^i, \tag{7.24}$$

kao i dilatacijski i $u(1)$ generator,

$$\widetilde{D} \;=\; D \;=\; -\tfrac{1}{4}(x^i p_i + p_i x^i), \qquad \widetilde{J} \;=\; J \;=\; \tfrac{1}{4}\big(\psi^i\bar{\psi}^i - \bar{\psi}^i\psi^i\big), \tag{7.25}$$

kako bi se upotpunila $su(1,1|1)$ algebra. Preostali superkonformni generatori $\widetilde{K}$, $\widetilde{S}$ i $\widetilde{\bar{S}}$ u modelu bez interakcije nelokalnog su karaktera (primjer toga je izraz za $\widetilde{K}$), ali poprimaju standardni oblik u modelu sa interakcijom,

$$K \;=\; \tfrac{1}{2}x^i x^i, \qquad S \;=\; \psi^i x^i \;, \qquad \bar{S} \;=\; \bar{\psi}^i x^i \;. \tag{7.26}$$

Za cilj sada imamo naći Hamiltonijan H, tj. potencijal V u modelu sa interakcijom, koji zadovoljava relacije (7.22). Strukturne relacije superkonformne algebre (7.22) vode na slijedeće restrikcije na oblik potencijala V:

$$\begin{aligned}
&[K,V] \;=\; 0 \;, \qquad [D,V] \;=\; -\mathrm{i}V \;, \qquad [J,V] \;=\; 0 \;, \\
&[\widetilde{Q},\, H_{\rm int}] \;+\; \mathrm{i}[H_0{+}V,[S,V]] \;=\; 0 \;, \qquad \{S,[\bar{S},V]\} \;=\; C \;, \\
&\{[S,V],[\bar{S},V]\} \;+\; \mathrm{i}\{Q,[\bar{S},V]\} \;+\; \mathrm{i}\{\bar{Q},[S,V]\} \;+\; 2H_{\rm int} \;=\; 0 \;.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

$N = 2$ superkonformni Calogerov model određen je rjesenjem jednadžbi (7.27). Prve dvije komutacijske relacije u (7.27) zahtijevaju da potencijal V mora biti homogena funkcija stupnja -2 u varijablama x^i. Budući da komutira sa $u(1)$ generatorom J, potencijal V mora sadržavati jednaki broj fermionskih varijabli ψ^i i $\bar{\psi}^i$. Stoga je najjednostavniji ansatz oblika

$$V \;=\; V_{ij}(x)\,\psi^i\bar{\psi}^j \;=\; \tfrac{1}{2}V_{ii}(x) \;+\; \tfrac{1}{2}V_{ij}(x)\,[\psi^i,\bar{\psi}^j], \tag{7.28}$$

gdje su $V_{ij}(x)$ nepoznate funkcije. Ubacivanje ansatza (7.28) u preostale (anti)komutatore u (7.27) vodi na parcijalne diferencijalne jednadžbe,

$$\begin{aligned}
&-2V_{ij} \;=\; \partial_i(V_{jp}x^p) \;+\; \partial_j(V_{ip}x^p) \;, \qquad V_{ij} \;+\; \partial_j(V_{ip}x^p) \;=\; 0 \;, \\
&\partial_i(V_{ip}x^p) \;+\; (V_{ip}x^p)(V_{is}x^s) \;-\; 2\textstyle\sum_{i<j}\frac{g^2}{(x^i-x^j)^2} \;=\; 0 \;, \qquad V_{ij}x^ix^j \;=\; C \;.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Prva jednadžba daje $V_{ij} = V_{ji}$, a u kombinaciji s drugom vodi na uvjet

$$\partial_i(V_{jp}x^p) \;-\; \partial_j(V_{ip}x^p) \;=\; 0. \tag{7.30}$$

Iz posljednje relacije slijedi da se može napisati

$$V_{ip}x^p \;=\; \partial_i\Phi, \tag{7.31}$$

a onda i

$$V_{ij} \;=\; -\partial_i\partial_j\Phi, \tag{7.32}$$

gdje je Φ skalarna funkcija koja se može odrediti iz zadnje dvije jednadžbe u (7.29),

$$\partial_i\partial_i\Phi \;+\; (\partial_i\Phi)(\partial_i\Phi) \;=\; 2\textstyle\sum_{i<j}\frac{g^2}{(x^i-x^j)^2}, \qquad x^i\partial_i\Phi \;=\; C \;. \tag{7.33}$$

Bilo koje rjesenje Φ ovih jednadžbi vodi na $N = 2$ superkonformno poopćenje Calogerovog modela.

Opće rjesenje sustava (7.33) ima oblik

$$\Phi \;=\; \mu \sum\nolimits_{i<j} \ln|x^i - x^j| \;+\; \nu \ln\sqrt{x^2} \;+\; \Lambda\big(\{\tfrac{x^i}{x^1}\}\big) \;, \tag{7.34}$$

pri čemu su μ i ν bezdimenzionalne konstante, $x^2 \equiv x^i x^i$, a Λ je opća funkcija omjera koordinata. Zbog jednostavnosti stavimo $\Lambda \equiv 0$ i uvrstimo (7.34) u (7.33). Kao rezultat proizlaze dva uvjeta,

$$\mu\,(\mu{-}1) \;=\; g^2 \;>-\tfrac14, \qquad \nu\,\big(\nu + n(n{-}1)\,\mu + n - 2\big) \;=\; 0 \;, \tag{7.35}$$

koja daju četiri dozvoljena para $(\mu(n,g), \nu(n,g))$. Drugi uvjet u (7.33) daje rezultat za centralni naboj,

$$C(n,g) \;=\; \tfrac{n(n-1)}{2}\,\mu \;+\; \nu \;. \tag{7.36}$$

Deriviranje skalarnog potencijala Φ kao u (7.32) te uvrstavanje u (7.28) vodi na konačan oblik potencijala V,

$$V \;=\; \sum_{i<j} \tfrac{\mu}{(x^i-x^j)^2} - \tfrac{n-2}{2}\,\tfrac{\nu}{x^2} + \tfrac12 \sum_{i\neq j} \tfrac{\mu}{(x^i-x^j)^2}\,[\psi^i, \bar\psi^i{-}\bar\psi^j] - \tfrac12 \sum_{i,j} \tfrac{\nu}{x^2}\,\tfrac{x^2\delta^{ij}-2x^ix^j}{x^2}\,[\psi^i, \bar\psi^j] \tag{7.37}$$

i, uz uvažavanje relacija (7.35), na konačan oblik Hamiltonijana interakcije,

$$H_{\text{int}} \;=\; \sum_{i<j} \tfrac{\mu^2}{(x^i-x^j)^2} + \tfrac12 \sum_{i\neq j} \tfrac{\mu}{(x^i-x^j)^2}\,[\psi^i, \bar\psi^i{-}\bar\psi^j] - \tfrac{n-2}{2}\,\tfrac{\nu}{x^2} - \tfrac12 \sum_{i,j} \tfrac{\nu}{x^2}\,\tfrac{x^2\delta^{ij}-2x^ix^j}{x^2}\,[\psi^i, \bar\psi^j]. \tag{7.38}$$

Iz zadnje relacije se vidi da je početno vezanje g^2 u Calogerovom modelu zamijenjeno sa μ^2, veličinom određenom sa (7.35).

Prema samoj konstrukciji, operator $H = H_0 + H_{int}$, zajedno sa D i K, predstavlja reprezentaciju $so(1,2)$ algebre i stoga se, kao sto je već ranije rečeno, ta trojka generatora može iskoristiti za konstrukciju inverzne transformacije $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}$ i, posljedično, za konstrukciju supernaboja Q, koji za $\nu{=}0$ ima oblik

$$Q \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}A}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}\big(\psi^i p^i\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} \;=\; \psi^i p^i \;+\; \mathrm{i}[V,S] \;=\; \psi^i\big(p^i + \mathrm{i}\sum\nolimits_{k(\neq i)} \tfrac{\mu}{x^i-x^k}\big) \;. \tag{7.39}$$

Iz dobivenog rezultata (7.38) za Hamiltonijan interakcije vidi se da on za $\nu{=}0$ točno reproducira $N = 2$ supersimetrično poopćenje Calogerovog modela, koje su konstruirali Freedman i Mende [88] unutar okvira supersimetrične kvantne mehanike. Za drugo rjesenje uvjeta (7.35), $\nu = 2 - n - n(n{-}1)\mu$, dobiva se alternativno i potpuno novo supersimetrično poopćenje Calogerovog modela.

Poglavlje 8

Egzaktna rješivost supersimetričnog racionalnog Calogerovog modela tipa A_{N+1}

8.1 Super-Calogero model A_{N+1} tipa

U prethodnom poglavlju poslužili smo se prikladno dizajniranom unitarnom transformacijom koja nam je omogućila elegantnu konstrukciju $N = 2$ superkonformnog racionalnog Calogerovog modela tipa A_{N+1}. U ovom poglavlju pokazat ćemo da je supersimetrični Calogerov model tipa A_{N+1} ekvivalentan skupu super-oscilatora te da je egzaktno rješiv. Transformacija sličnosti koja će izvršiti opisani prijelaz potpuno je drugačijeg karaktera od transformacije korištene u prethodnom poglavlju. Transformacija iz prethodnog poglavlja obavila je prijelaz na skup slobodnih fermiona koji se nalaze u nikakvom potencijalu, za razliku od transformacije koju ćemo rabiti u ovom poglavlju i koja će izvršiti prijelaz na skup razvezanih fermiona u harmoničkom potencijalu. Ista transformacija će nam poslužiti za konstrukciju potpunog spektra i pridruženih svojstvenih funkcija kako u fazi koja čuva supersimetriju, tako i u fazi u kojoj je supersimetrija slomljena. U narednom poglavlju će se pokazati da je široka klasa super-Hamiltonijana koji realiziraju dinamičku $OSp(2|2)$ supersimetriju, a koja također uključuje sve tipove racionalnih supersimetričnih Calogero modela kao podskup, ekvivalentna skupu super-oscilatora. U tom kontekstu u osnovnim crtama ćemo razmotriti i supersimetrični Calogerov model tipa BC_{N+1}.

Proučavanje integrabilnosti supersimetričnog Calogerovog modela A_{N+1} tipa zahtijeva razdvajanje faze u kojoj je supersimetrija očuvana od faze u kojoj je supersimetrija slomljena pa ćemo ih u tom redosljedu i razmotriti.

No, prethodno ćemo reproducirati super-Calogero model A_{N+1} tipa unutar okvira supersimetrične kvantne mehanike, prilagođene za razmatranje sistema sa većim brojem stupnjeva slobode.

Za početak, u višečestičnoj supersimetričnoj kvantnoj mehanici uvodi se operator supernaboja Q i njemu konjugirani operator supernaboja $Q^\dagger$ na slijedeći način,

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \psi_i^\dagger \; a_i, \qquad Q^\dagger = \sum_{i=1}^{N} \psi_i \; a_i^\dagger, \tag{8.1}$$

gdje fermionske koordinate ψ_i zadovoljavaju algebru,

$$\{\psi_i, \psi_j\} = 0 = \{\psi_i^\dagger, \psi_j^\dagger\}, \quad \{\psi_i, \psi_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, N. \tag{8.2}$$

Operatori a_i, $a_i^\dagger$ analogni su operatorima poništavanja, odnosno stvaranja. Oni su definirani pomoću operatora impulsa $p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$ i superpotencijala $W(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ na način,

$$a_i = p_i - i\frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad a_i^\dagger = p_i + i\frac{\partial W}{\partial x_i}, \tag{8.3}$$

i između sebe zadovoljavaju slijedeće komutacijske relacije,

$$[a_i, a_j] = 0 = [a_i^\dagger, a_j^\dagger], \; [a_i, a_j^\dagger] = [a_j, a_i^\dagger] = 2\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{8.4}$$

Supersimetrični Hamiltonijan (kratko super-Hamiltonijan) je definiran pomoću supernaboja na način,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\{Q, Q^\dagger\} \\ &= \frac{1}{4}\sum_i \{a_i, a_i^\dagger\} + \frac{1}{4}\sum_{i,j} [a_i, a_j^\dagger][\psi_i^\dagger, \psi_j]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Oba supernaboja, Q i $Q^\dagger$, komutiraju sa super-Hamiltonijanom i poništavaju osnovno stanje od H. Stoga postoje dvije mogućnosti za osnovno stanje od H,

$$\Phi_0 = e^{-W}|0>, \quad \Phi_N = e^{W}|\bar{0}>, \tag{8.6}$$

gdje su fermionski vakuum $|0>$ i njemu konjugirani vakuum $|\bar{0}>$ definirani sa,

$$\psi_i|0>= 0, \quad \psi_i^\dagger|\bar{0}>= 0. \tag{8.7}$$

Vakuumi $|0>$ i $|\bar{0}>$ su stanja u 2^N dimenzionalnom fermionskom Fockovom prostoru u kojem se varijable $\psi_i^\dagger$ i ψ_i mogu interpretirati kao operatori stvaranja i poništavanja fermiona.

Prva jednadžba u (8.7) definira sektor bez fermiona, dok drugi uvjet definira sektor sa N fermiona. U slučaju da je ili Φ_0 ili Φ_N normalizabilna funkcija, to će biti signal da je supersimetrija očuvana, sa energijom osnovnog stanja koja iščezava. Da bi supersimetrija bila očuvana, energija osnovnog stanja mora iščezavati. S druge strane, ukoliko niti Φ_0 niti Φ_N nisu normalizabilne funkcije, supersimetrija će biti slomljena i, kao posljedica toga, energija osnovnog stanja neće biti 0, nego će biti pozitivno-definitna.

Superpotencijal za racionalni Calogerov model tipa A_{N+1} dan je sa

$$W = -\lambda \ln \prod_{i<j} (x_i - x_j) + \frac{1}{2} \sum_i x_i^2. \tag{8.8}$$

Super-Hamiltonijan (8.5), sa gornjim izborom za W, ima oblik,

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1) \sum_{i\neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{1}{2} \sum_i x_i^2 - \frac{1}{2} N \left(1 + \lambda(N-1)\right) \\ &+ \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i + \lambda \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \left(\psi_i^\dagger \psi_i - \psi_i^\dagger \psi_j \right). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Hamiltonijan H je permutacijski invarijantan na kombiniranu zamjenu bozonskih i fermionskih koordinata. U sektoru bez fermiona (8.9) se reducira na obični Calogerov model, do na konstantu koja je jednaka energiji njegovog osnovnog stanja. Prema (8.6) i (8.8), osnovno stanje super-Hamiltonijana (8.9) je

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{-W} |0> \\ &= \prod_{i<j} (x_i - x_j)^\lambda e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} |0> \end{aligned} \tag{8.10}$$

i ono je normalizabilno pod uvjetom da vrijedi $\lambda > -\frac{1}{2}$. Ipak, jači uvjet, koji zahtijeva da svaki operator impulsa p_i bude hermitski operator za valne funkcije oblika Φ, nalaže da vrijedi $\lambda > 0$. U [88] je pokazano da je supersimetrija u slučaju super-Hamiltonijana (8.9) očuvana za $\lambda > 0$, dok je za $\lambda < 0$ slomljena.

Hamiltonijan (8.9) su prvi razmatrali Freedman i Mende [88]. U prethodnom poglavlju smo isti taj Hamiltonijan reproducirali kao specijalni slučaj $N = 2$ superkonformnog proširenja (7.38), koji odgovara rješenju $\nu = 0$ uvjeta (7.35).

8.2 Faza u kojoj je supersimetrija očuvana

Ekvivalentnost između supersimetričnog Calogerovog modela A_{N+1} tipa i razvezanih fermionskih oscilatora ispunjena je samo u situaciji kada je supersimetrija očuvana. U toj situaciji onda, kao posljedicu te ekvivalencije, imamo činjenicu da su spektri navedenih sistema identični. Njihove svojstvene funkcije naravno nisu iste, ali uz pomoć transformacije sličnosti koja ostvaruje spomenutu ekvivalenciju, moguće je iz permutacijski invarijantnih svojstvenih funkcija sistema razvezanih fermionskih super-oscilatora konstruirati svojstvene funkcije A_{N+1} super-Calogerovog modela. Vidjet ćemo da samo one svojstvene funkcije od super-oscilatora, koje su simetrične na kombiniranu zamjenu bozonskih i fermionskih koordinata, transformacijom sličnosti vode na normalizabilne, tj. kvadratno-integrabilne svojstvene funkcije A_{N+1} super-Calogerovog modela. Ta pojavnost nije specifično svojstvo supersimetrične nadgradnje, već je ona također prisutna i u običnom Calogerovom modelu [13] i odraz je visoko korelirane prirode sistema sa mnogočestičnim interakcijama, koje opadaju sa kvadratom međusobne udaljenosti čestica.

S ciljem da demonstriramo opisanu ekvivalenciju, promatramo transformaciju

$$
\begin{aligned}
H_1 &= e^W H e^{-W} \\
&= \sum_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \psi_i^\dagger \psi_i \right) - S, \qquad (8.11) \\
S &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \lambda \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} - \lambda \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \left(\psi_i^\dagger \psi_i - \psi_i^\dagger \psi_j \right).
\end{aligned}
$$

Može se pokazati da operator ukupnog fermionskog broja čestica $N_f = \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i$ komutira sa Hamiltonijanom H pa onda i sa operatorom S. Također se može pokazati da vrijedi slijedeća komutacijska relacija od ključnog značenja,

$$
\left[\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, S \right] = -2S, \qquad (8.12)
$$

a, s obzirom da N_f komutira sa S, vrijedi i

$$
\left[\sum_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \psi_i^\dagger \psi_i \right), S \right] = -2S. \qquad (8.13)
$$

Relacija (8.13) ima za posljedicu

$$
\begin{aligned}
&\left[H_1, e^{-\frac{S}{2}} \right] = S e^{-\frac{S}{2}}, \qquad (8.14) \\
&H_2 = e^{\frac{S}{2}} H_1 e^{-\frac{S}{2}}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \psi_i^\dagger \psi_i \right). \tag{8.15}$$

Transformirani Hamiltonijan H_2 nije ništa drugo nego supersimetrična inačica Eulerovog operatora. Iz zadnjeg izraza očigledna je ekvivalencija Hamiltonijana H sa skupom razvezanih super-oscilatora. Ona je ostvarena putem transformacije

$$H_2 = e^{\frac{S}{2}} e^W H e^{-W} e^{-\frac{S}{2}}. \tag{8.16}$$

Veza sa super-oscilatorima može se učiniti još eksplicitnijom pomoću transformacije

$$\begin{aligned} H_{sho} &= e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} e^{-\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}} H_2 e^{\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}} e^{\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_i \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right) + \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i - \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

8.2.1 Struktura Hilbertovog prostora i konstrukcija svojstvenih funkcija super-Hamiltonijana

Skup bozonskih i fermionskih operatora za sistem super-oscilatora lagano je konstruirati jednostavnom nadgradnjom i dopunom skupa operatora stvaranja i poništavanja za obične harmoničke oscilatore. Algebra koja opisuje simetriju sistema super-oscilatora nađe se izračunavanjem komutacijskih, odnosno antikomutacijskih relacija između pripadnih bozonskih i fermionskih operatora. Ako dana transformacija sličnosti preslikava A_{N+1} super-Calogerov model na skup super-oscilatora, onda pomoću njoj inverzne transformacije (izvršene na skupu bozonskih i fermionskih operatora za skup super-oscilatora) definiramo skup bozonskih i fermionskih operatora za A_{N+1} super-Calogerov model. Opisani postupak omogućava nam dobivanje algebre koja opisuje simetriju A_{N+1} super-Calogerovog modela i koja je identična algebri super-oscilatora. Poznavanje te algebre omogućava nam direktnu konstrukciju svojstvenih stanja i spektra na algebarski način.

Da bismo opisanu proceduru proveli u djelo, najprije uvedimo bozonske, b_i^+, b_i^-, i fermionske, $\psi_i^\dagger$, ψ_i, operatore stvaranja i poništavanja za skup super-oscilatora opisan Hamiltonijanom H_2,

$$b_i^+ = 2x_i, \qquad b_i^- = ip_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{8.18}$$

Bozonski operatori zadovoljavaju relaciju $[b_i^-, b_j^+] = 2\delta_{ij}$, a fermionski operatori zadovoljavaju (8.2). Veza bozonskih operatora b_i^+, b_i^-, sa uobičajenim oblikom, $a_h^{\pm} = p_i \pm ix_i$, operatora stvaranja i poništavanja za harmoničke oscilatore osigurana je inverznom transformacijom od one koja radi prijelaz u (8.17),

$$-ib_i^- = e^{\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} e^{\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}} a_h^- e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} e^{-\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}}, \quad ib_i^+ = e^{\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} e^{\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}} a_h^+ e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} e^{-\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}}. \tag{8.19}$$

Operatori H_2, S i $T_+ = \frac{1}{2}\sum_i x_i^2$ zadovoljavaju relacije

$$[H_2, S] = -2S, \qquad [H_2, T_+] = 2T_+, \qquad [S, T_+] \neq H_2, \tag{8.20}$$

iz čega se vidi da su operatori H_2 i S supersimetrični analogoni operatora T_0 i T_- iz (3.7). Iako u (8.20) konformna algebra nije zatvorena, prve dvije relacije nam omogućavaju da T_+ i S interpretiramo kao operatore stvaranja i poništavanja, a za bazu Hilbertovog prostora od H_2 i H možemo uzeti da ima istu strukturu kao u slučaju poopćenih Calogero modela sa podležećom konformnom simetrijom, koje smo razmatrali u prvih nekoliko poglavlja. To znači da je odgovarajuća baza Hilbertovog prostora organizirana u tornjeve stanja $\phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$[1], pri čemu je na dnu svakog tornja stanje koje je anihilirano operatorom S. Korištenjem algebri (8.18) i (8.20), konstruirat ćemo svojstvena stanja $\phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$ operatora H_2, ali nećemo od njih zahtijevati da budu anihilirana operatorom S, što bi bio prilično težak uvjet za riješiti, ali, s druge strane, dovoljan da osigura regularnost i kvadratnu integrabilnost svojstvenih stanja

$$\Phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} = e^{-W} e^{-\frac{S}{2}} \phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} \equiv T^{-1} \phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} \tag{8.21}$$

super-Hamiltonijana H. Umjesto rješavanja uvjeta $S\phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} = 0$, odabrat ćemo lakši put, a on se sastoji u tome da nakon konstrukcije, onosno odabira određenog svojstvenog stanja $\phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$ poopćenog Eulerovog operatora H_2, djelujemo na njega transformacijom $T^{-1} = e^{-W} e^{-\frac{S}{2}}$ i nadamo se da ćemo dobiti regularnu valnu funkciju. Međutim, poznato je [89],[90] da će funkcije $\Phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$ u (8.21) biti regularne i normalizabilne ukoliko su svojstvene funkcije $\phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$ od H_2 permutacijski invarijantne na kombiniranu zamjenu bozonskih i fermionskih koordinata. U tom slučaju postojat će prirodni broj m, takav da $S^m \phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} = 0$ za $m > 0$. Najopćenitije takvo svojstveno stanje, za proizvoljni broj fermiona N_f,[2] može se prikazati

[1]Kao u slučaju modela sa podležećom konformnom simetrijom, kvantni broj k opisuje radijalna pobuđenja uzduž tornjeva stanja, dok skup kvantnih brojeva $n_1, \ldots, n_{N-1}$ definira stanja na dnu tornjeva. Podrazumijeva se da su svi ti kvantni brojevi nenegativni cijeli brojevi.

[2]S obzirom da valna funkcija opisuje i fermione, možemo ju okarakterizirati sa dodatnim kvantnim brojem N_f, brojem fermiona, na način, $\phi_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} \equiv \phi^{(N_f)}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$.

u obliku

$$\phi^{(N_f)}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} = \frac{1}{N_f!}(\sum_i x_i^2)^k \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{N_f}} f_{i_1 i_2 \ldots i_{N_f}}(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,\psi^\dagger_{i_1}\psi^\dagger_{i_2}\ldots\psi^\dagger_{i_{N_f}}|0\rangle, \tag{8.22}$$

gdje je $f_{i_1 i_2 \ldots i_{N_f}}$ homogena funkcija stupnja $k - N_f$ i uz to je antisimetrična funkcija na zamjenu bilo koja dva indeksa. Antisimetrična priroda funkcije $f_{i_1 i_2 \ldots i_{N_f}}$ osigurava da (8.22) bude permutacijski invarijantna funkcija na kombiniranu zamjenu bozonskih i fermionskih koordinata. Za $N_f = 1$ možemo npr. uzeti funkciju

$$\phi^{(N_f=1)}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} = (\sum_j x_j^2)^k \sum_i x_i^{n-1}\psi^\dagger_i|0\rangle, \tag{8.23}$$

kao svojstveno rješenje od H_2, sa jednim fermionom i sa energijom $E_{k,n} = n + 2k$. U gornjem izrazu podrazumijeva se da kvantni brojevi $n_1, ..., n_{N-1}$ ovise o n. Kao primjer, za taj slučaj možemo razmotriti svojstvenu funkciju

$$\phi^{(N_f=1)}_{k=1,n_1,\ldots,n_{N-1}} \equiv \phi^{(N_f=1)}_{1,0} = (\sum_j x_j^2)\sum_i x_i\psi^\dagger_i|0\rangle, \tag{8.24}$$

te izračunati pripadnu svojstvenu funkciju super-Hamiltonijana H putem transformacije (8.21). Rezultat je

$$\begin{aligned}\Phi^{(N_f=1)}_{1,0} &= e^{-W}e^{-\frac{S}{2}}\phi^{(N_f=1)}_{1,0} \qquad (8.25)\\ &= \prod_{i<j}(x_i-x_j)^\lambda e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2}\left[\sum_j x_j^2 - \frac{1}{2}(N+2+\lambda N(N-1))\right]\sum_i x_i\psi^\dagger_i|0\rangle.\end{aligned}$$

8.2.2 Algebarska struktura

Algebarska struktura super-oscilatora može se iskoristiti kako bi se na algebarski način konstruirala svojstvena stanja od H. U tu svrhu definiramo slijedeći skup bozonskih i fermionskih operatora,

$$\begin{aligned}
&B_n^- = \sum_{i=1}^N T^{-1}b_i^{-^n}T, \quad B_n^+ = \sum_{i=1}^N T^{-1}b_i^{+^n}T, \quad T = e^{\frac{S}{2}}\ e^W\\
&F_n^- = T^{-1}\left(\sum_i \psi_i b_i^{-^{n-1}}\right)T, \quad F_n^+ = T^{-1}\left(\sum_i \psi_i^\dagger b_i^{+^{n-1}}\right)T,\\
&q_n^- = T^{-1}\left(\sum_i \psi_i^\dagger b_i^{-^n}\right)T, \quad q_n^+ = T^{-1}\left(\sum_i \psi_i b_i^{+^n}\right)T.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Operatori u (8.26) zadovoljavaju slijedeću algebru,

$$
\begin{aligned}
&\{F_m^+, F_n^+\} = 0, \quad [B_m^+, F_n^+] = 0, \quad [B_m^+, B_n^+] = 0, \\
&\{q_1^-, F_n^+\} = 0, \quad \{q_1^+, F_n^+\} = B_n^+, \quad [H, F_n^+] = nF_n^+, \\
&[q_1^-, B_n^+] = 2nF_n^+, \quad [q_1^+, B_n^+] = 0, \quad [H, B_n^+] = nB_n^+.
\end{aligned} \tag{8.27}
$$

Istu algebru zadovoljavaju odgovarajući bozonski i fermionski operatori koji pripadaju skupu super-oscilatora. Stoga, svojstvene funkcije super-Hamiltoniana (8.9) mogu se konstruirati višestrukim djelovanjem operatora B_n^+ i F_n^+ na osnovno stanje (8.10). Drugim riječima,

$$
\Phi_{n_1 \ldots n_N; \nu_1 \ldots \nu_N} = \prod_{k=1}^{N} B_k^{+^{n_k}} F_k^{+^{\nu_k}} \; \Phi, \tag{8.28}
$$

je svojstvena funkcija kojoj pripada energija $E = \sum_{k=1}^{N} k(n_k + \nu_k)$. Bozonski kvantni brojevi n_k su nenegativni cijeli brojevi, dok su fermionski kvantni brojevi ν_k jednaki ili 0 ili 1. Dakle, spektar supersimetričnog Calogerovog modela tipa A_{N+1} identičan je spektru N nezavisnih super-oscilatora sa frekvencijama $1, 2, \ldots, N$.

U prethodnom razmatranju predočen je sistematičan način za konstrukciju operatora B_n^+ i F_n^+ za proizvoljni n, a time i za konstrukciju baze Hilbertovog prostora koju ti operatori generiraju. U [88] konstruirane su određene realizacije operatora B_2^+, B_3^+, F_2^+ i F_3^+. Može se provjeriti da su eksplicitni izrazi za te operatore identični, do na normalizacijski faktor, odgovarajućim operatorima iz (8.26).

8.3 Faza u kojoj je supersimetrija slomljena

U fazi u kojoj supersimetrija nije očuvana, nije moguće direktno povezati polazni A_{N+1} super-Calogerov model sa sistemom super-oscilatora, ali je moguće konstruirati super-Hamiltonijan koji je dualan polaznom i za kojeg se može pokazati da postoji transformacija sličnosti koja ga preslikava na sistem super-oscilatora te je stoga ekvivalentan skupu super-oscilatora. Dualni super-Hamiltonijan razlikuje se od polaznog Hamiltonijana za fermionski operator broja čestica i konstantu te je stoga svaka svojstvena funkcija dualnog super-Hamiltonijana istovremeno i svojstvena funkcija polaznog Hamiltonijana. Naravno, spektar im se razlikuje, ali je spektar jednog određen kada je poznat spektar drugog.

Vidjeli smo da je za Hamiltonijan (8.9) supersimetrija sačuvana za $\lambda > 0$, a slomljena je za $\lambda < 0$. To znači da kada parametar λ zakorači u zabranjeno područje, tj. postane negativan, funkcija (8.10), koja opisuje osnovno stanje, postaje nenormalizabilna i supersimetrija se lomi. Prelazak konstante vezanja iz faze $\lambda > 0$ u fazu $\lambda < 0$ odgovara promjeni valne funkcije osnovnog stanja, tj. zamjeni izraza (8.10) sa novim oblikom valne funkcije osnovnog stanja,

$$\tilde{\Phi} = e^{-\tilde{W}} \ |\bar{0}>= \prod_{i<j} (x_i - x_j)^{-\lambda} e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} \ |\bar{0}> . \tag{8.29}$$

Funkcija (8.29) je normalizabilna za $\lambda < \frac{1}{2}$, a još jači uvjet da operator impulsa p_i bude hermitski za valne funkcije oblika $\tilde{\Phi}$ zahtijeva da vrijedi $\lambda < 0$. Kako bismo povratili supersimetriju, prisiljeni smo potražiti novi par supernaboja $\tilde{Q}, \tilde{Q}^\dagger$ koji će poništiti novo osnovno stanje (8.29). U tu svrhu razmotrimo slijedeće supernaboje,

$$\tilde{Q} = \sum_i \psi_i \left(p_i - i\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} \right), \ \tilde{Q}^\dagger = \sum_i \psi_i^\dagger \left(p_i + i\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_i} \right), \ \tilde{W} = \lambda \ln \prod_{i<j} (x_i - x_j) + \frac{1}{2} \sum_i x_i^2. \tag{8.30}$$

Ti supernaboji mogu se dobiti iz supernaboja (8.1), sa superpotencijalom (8.8), tako da se naprave zamjene $\lambda \to -\lambda$ i $\psi_i \leftrightarrow \psi_i^\dagger$. Oni sada poništavaju osnovno stanje (8.29), zbog čega je supersimetrija ponovno povraćena. Naime, supernaboji (8.30) mogu se iskoristiti za konstrukciju dualnog Hamiltonijana $H_d = \frac{1}{2}\{\tilde{Q}, \tilde{Q}^\dagger\}$,

$$\begin{aligned} H_d &= -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)\sum_{i\neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \frac{1}{2}\sum_i x_i^2 + \frac{1}{2}N\left(1 + \lambda(N-1)\right) \\ &- \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i + \lambda \sum_{i\neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \left(\psi_i^\dagger \psi_i - \psi_i^\dagger \psi_j \right), \\ H &= H_d + 2N_f - N\left(1 + \lambda(N-1)\right). \end{aligned} \tag{8.31}$$

Zbog činjenice da vrijedi $\tilde{Q}\tilde{\Phi} = \tilde{Q}^\dagger\tilde{\Phi} = 0$, dualni Hamiltonijan ima iščezavajuću energiju osnovnog stanja, $H_d\tilde{\Phi} = 0$, i stoga se za $\lambda < 0$ on nalazi u supersimetričnoj fazi. Dakle, za $\lambda < 0$ supersimetrija je razbijena za H, ali ne i za H_d. To je stoga što svojstvena vrijednost od H, koja pripada valnoj funkciji $\tilde{\Phi}$, nije 0, već vrijedi $H\tilde{\Phi} = N(1 - \lambda(N-1))\tilde{\Phi}$. Valna funkcija (8.29) je osnovno stanje za Hamiltonijan H u fazi u kojoj je supersimetrija slomljena. S druge strane, H_d poništava valnu funkciju osnovnog stanja $\tilde{\Phi}$ pa je stoga supersimetrija sačuvana za H_d. Prema (8.31), dualni Hamiltonijan H_d razlikuje se od H za operator broja fermiona,N_f, i za konstantu, a njegovo osnovno stanje $\tilde{\Phi}$ nalazi se u sektoru sa $N_f = N$ fermiona, $N_f\tilde{\Phi} = N\tilde{\Phi}$.

Spektar Hamiltonijana H, u fazi u kojoj je supersimetrija slomljena ($\lambda < 0$), može se dobiti iz H_d primjenom druge relacije u (8.31).

Dualni Hamiltonijan H_d može se sada povezati sa skupom razvezanih super-oscilatora putem transformacije,

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_2 &= e^{\frac{S}{2}} e^{\tilde{W}} H_d e^{-\tilde{W}} e^{-\frac{S}{2}} \\
&= \sum_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \psi_i^\dagger \psi_i \right) + N \\
\tilde{H}_{sho} &= e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} e^{-\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}} \tilde{H}_2 e^{\frac{1}{4}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}} e^{\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right) - \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i + \frac{N}{2}, \qquad (8.32)
\end{aligned}$$

gdje su $\tilde{H}_2$ i $\tilde{H}_{sho}$ Hamiltonijani za skup razvezanih oscilatora u fazi $\lambda < 0$, u kojoj je supersimetrija slomljena. Operator S je isti onaj operator definiran u relaciji (8.11). Za razliku od Hamiltonijana H_{sho}, relacija (8.17), koji ima osnovno stanje u sektoru sa $N_f = 0$ fermiona, Hamiltonijan $\tilde{H}_{sho}$ ima osnovno stanje u sektoru sa $N_f = N$ fermiona. To je u skladu sa činjenicom da i odgovarajući polazni mnogočestični Hamiltonijani H i H_d imaju osnovno stanje u sektoru sa $N_f = 0$, odnosno $N_f = N$ fermiona.

Kao i prije kada smo razmatrali svojstvene funkcije od H u supersimetričnoj fazi, tako i sada najprije konstruiramo svojstvene funkcije od $\tilde{H}_2$, relacija (8.32), a onda iz njih konstruiramo i svojstvene funkcije od H_d, tj. od H, putem transformacije

$$\tilde{\Phi}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} = e^{-\tilde{W}} e^{-\frac{S}{2}} \tilde{\phi}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}} \equiv \hat{T}^{-1} \tilde{\phi}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}, \qquad (8.33)$$

gdje su svojstvena stanja $\tilde{\phi}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$ Hamiltonijana $\tilde{H}_2$ permutacijski invarijantni polinomi na kombiniranu zamjenu bozonskih i fermionskih koordinata x_i i ψ_i. Za stanja $\tilde{\phi}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$ možemo uzeti isti oblik kao (8.22) ili (8.23), s napomenom da moramo načiniti zamjene $\psi_i^\dagger \to \psi_i$ te $|0\rangle \to |\bar{0}>$. Slično kao i u slučaju kada je supersimetrija očuvana, i ovdje je permutaciona invarijantnost polinoma $\tilde{\phi}_{k,n_1,\ldots,n_{N-1}}$ na kombiniranu zamjenu bozonskih i fermionskih koordinata dovoljan uvjet da transformacija (8.33) rezultira regularnim, normalizabilnim svojstvenim funkcijama od H.

Potpuni skup svojstvenih stanja u Fockovom prostoru može se konstruirati uz pomoć bozonskih, $\hat{B}_n^+$, i fermionskih, $\hat{F}_n^+$, operatora stvaranja, definiranih na način analogan kao u (8.26),

$$\hat{B}_n^+ = \sum_i \hat{T}^{-1} b_i^{+^n} \hat{T}, \;\; \hat{F}_n^+ = \hat{T}^{-1} \left(\sum_i \psi_i b_i^{+^{n-1}} \right) \hat{T}, \;\; \hat{q}_n^+ = \hat{T}^{-1} \left(\sum_i \psi_i^\dagger b_i^{+^n} \right) \hat{T}, \qquad (8.34)$$

gdje je $\hat{T} = e^{\frac{S}{2}} e^{\tilde{W}}$. Budući da ti operatori zadovoljavaju iste relacije onima u algebri (8.27), svojstvena stanja su sada,

$$\tilde{\Phi}_{n_1,\ldots,n_N,\nu_1,\ldots,n_N} = \prod_{k=1}^{N} \hat{B}_k^{+^{n_k}} \hat{F}_k^{+^{\nu_k}} \tilde{\Phi}. \tag{8.35}$$

Spektar Hamiltonijana H u fazi sa slomljenom supersimetrijom nalazimo pomoću druge relacije u (8.31) te primjenom identiteta

$$N_f \left[\prod_{k=1}^{N} \hat{B}_k^{+^{n_k}} \hat{F}_k^{+^{\nu_k}} \tilde{\Phi} \right] = \left(N - \sum_{i=1}^{N} \nu_i \right) \prod_{k=1}^{N} \hat{B}_k^{+^{n_k}} \hat{F}_k^{+^{\nu_k}} \tilde{\Phi}. \tag{8.36}$$

Djelovanjem operatora H na stanja (8.35) dobiju se svojstvene energije

$$E = N(1 - \lambda(N-1)) + \sum_{k=1}^{N} (k n_k + (k-2)\nu_k). \tag{8.37}$$

Kao i prije, bozonski kvantni brojevi n_k su nenegativni cijeli brojevi, dok su fermionski kvantni brojevi ν_k ili 0 ili 1.

Poglavlje 9

Drugi supersimetrični modeli

9.1 $OSp(2|2)$ superalgebra

U prethodnom poglavlju pokazali smo ekvivalentnost supersimetričnog Calogerovog modela A_{N+1} tipa i skupa razvezanih super-oscilatora. Isti se rezultat može pokazati da vrijedi i za supersimetrična poopćenja Calogerovog modela pridruženog i drugim korjenskim sistemima Lieve algebre pa i za još općenitije klase sistema. No, prethodno ćemo pobliže upoznati $OSp(2|2)$ superalgebru koja ima važnu ulogu u konstrukciji koju ćemo malo kasnije razmatrati.

Superalebra $OSp(2|2)$ opisana je pomoću skupa fermionskih generatora $\{Q_1, Q_2, S_1, S_2\}$ i skupa bozonskih generatora $\{H, D, K, Y\}$. Pripadne strukturne jednadžbe su [91, 92],

$$\begin{aligned}
&\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}H, \quad \{S_\alpha, S_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}K, \quad \{Q_\alpha, S_\beta\} = -2\delta_{\alpha\beta}D + 2\epsilon_{\alpha\beta}Y, \\
&[H, Q_\alpha] = 0, \ [H, S_\alpha] = -iQ_\alpha, \ [K, Q_\alpha] = iS_\alpha, \ [K, S_\alpha] = 0, \\
&[D, Q_\alpha] = -\frac{i}{2}Q_\alpha, \ [D, S_\alpha] = \frac{i}{2}S_\alpha, \ [Y, Q_\alpha] = \frac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta}Q_\beta, \quad [Y, S_\alpha] = \frac{i}{2}\epsilon_{\alpha\beta}S_\beta, \\
&[Y, H] = [Y, D] = [Y, K] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

zajedno sa algebrom pripadne $SO(1,2)$ podgrupe,

$$[H, D] = iH, \quad [H, K] = 2iD, \quad [D, K] = iK. \qquad (9.2)$$

U gornjim relacijama $\delta_{\alpha\beta}$ je Kroneckerov simbol, a $\epsilon_{\alpha\beta}$ je totalno antisimetrični tenzor u dvije dimenzije. Casimirov operator grupe $SO(1,2)$ je $C = \frac{1}{2}(HK + KH) - D^2$. Kvadratični i kubični Casimirov operator za $OSp(2|2)$ dani su sa [91, 92],

$$C_2 = C + \frac{i}{4}[Q_1, S_1] + \frac{i}{4}[Q_2, S_2] - Y^2,$$

$$C_3 = C_2 Y - \frac{Y}{2} + \frac{i}{8}\Big([Q_1,S_1]Y + [Q_2,S_2]Y + [S_1,Q_2]D$$
$$-[S_2,Q_1]D + [Q_1,Q_2]K + [S_1,S_2]H\Big). \tag{9.3}$$

Podgrupa $OSp(1|1)$ od grupe $OSp(2|2)$ opisana je ili pomoću skupa generatora $A_1 \equiv \{H, D, K, Q_1, S_1\}$ ili pomoću skupa $A_2 \equiv \{H, D, K, Q_2, S_2\}$. Razmotrimo najprije skup A_1. Casimirov operator od $OSp(1|1)$ je dan sa,

$$C_1 = C + \frac{i}{4}[Q_1,S_1] + \frac{1}{16}. \tag{9.4}$$

Moguće je definirati parni operator C_s,

$$C_s = i[Q_1,S_1] - \frac{1}{2}, \tag{9.5}$$

koji ima svojstvo da komutira sa svim bozonskim generatorima i antikomutira sa svim fermionskim generatorima iz skupa A_1. U dodatku, operator C_s zadovoljava relaciju, $C_1 = \frac{1}{4}C_s^2$, i posljedično relaciju, $C = \frac{1}{4}C_s(C_s - 1) - \frac{3}{16}$. Operator C_s poznat je pod nazivom Scasimirov operator, a nalazi primjene u opisu nerelativističke dinamike čestica spina $\frac{1}{2}$, u pozadini koju čine monopoli. Casimirov i Scasimirov operator za skup A_2 dani su sa,

$$\bar{C}_1 = C + \frac{i}{4}[Q_2,S_2] + \frac{1}{16}, \quad \bar{C}_s = i[Q_2,S_2] - \frac{1}{2}, \tag{9.6}$$

sa svojstvima, $\bar{C}_1 = \frac{1}{4}\bar{C}_s^2$ i $C = \frac{1}{4}\bar{C}_s(\bar{C}_s - 1) - \frac{3}{16}$. To znači da se, općenito, Casimirov operator C može faktorizirati na dva različita načina, ili pomoću C_s ili pomoću $\bar{C}_s$.

9.2 Modeli koji realiziraju dinamičku $OSp(2|2)$ supersimetriju za čestice na pravcu

U ovoj točki poopćit ćemo rezultat o ekvivalenciji supersimetričnog Calogerovog modela A_{N+1} tipa i sistema super-oscilatora na širu klasu modela koja uključuje i ostale korjenske strukture Lieve algebre pa i još šire. Točnije, pokazat ćemo da je široka klasa super-Hamiltonijana (modela) koja realizira dinamičku $OSp(2|2)$ supersimetriju i, u dodatku, čiji bozonski potencijal je homogena funkcija stupnja -2, a čestice su podvrgnute gibanju po pravcu pod utjecajem harmoničke sile, također ekvivalentna sistemu superoscilatora, preko odgovarajuće transformacije sličnosti. Racionalni supersimetrični Calogero modeli, pridruženi različitim korjenskim sistemima Lieve algebre, tvore samo mali podskup opisane klase modela. U opisanu klasu modela spadaju i modeli razmatrani u [93], a koji uključuju međudjelovanja samo između najbližih susjeda.

Klasa modela sa bozonskim mnogočestičnim potencijalom, koji je homogena funkcija stupnja -2, a čestice se gibaju po pravcu pod utjecajem zajedničkog harmoničkog vezanja, generirana je superpotencijalom W oblika

$$W = -w + \frac{1}{2}\sum_i x_i^2, \quad w = \ln G(x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{9.7}$$

gdje je G homogena funkcija stupnja d,

$$\sum_i x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} = dG. \tag{9.8}$$

To svojstvo funkcije G osigurava da $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ bude homogena funkcija stupnja -1 i stoga da bozonski potencijal uvijek bude homogena funkcija stupnja -2, ne uzimajući u obzir harmonički član. Prolazeći kroz isti postupak koji je doveo do super-Hamiltonijana (8.9), a to znači konstrukciju supernaboja prema (8.1) te super-Hamiltonijana prema (8.5), dolazimo do super-Hamiltonijana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_i \left[-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + x_i^2 \right] - (d + \frac{N}{2}) + \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \psi_i^\dagger \psi_j. \tag{9.9}$$

Super-Hamiltonijan $\mathcal{H}$ može se transformirati na novi Hamiltonijan $\mathcal{H}_1$ putem slijedeće transformacije sličnosti,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= e^W \mathcal{H} e^{-W} \\ &= \sum_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \psi_i^\dagger \psi_i \right) - \hat{S} \qquad (9.10) \\ \hat{S} &= \sum_i \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_i \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} \psi_i^\dagger \psi_i + \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \psi_i^\dagger \psi_j. \qquad (9.11) \end{aligned}$$

Operator ukupnog broja fermiona, $N_f = \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i$, komutira sa $\hat{S}$, $[N_f, \hat{S}] = 0$. Pored toga, komutacijska relacija između Eulerovog operatora $\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ i $\hat{S}$ je dana sa,

$$[\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \hat{S}] = -2\hat{S}, \quad [H_2, \hat{S}] = [\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + N_f, \hat{S}] = -2\hat{S}. \tag{9.12}$$

U izvodu ovih relacija iskorišteno je svojstvo (9.8) funkcije G. Zahvaljujući tim relacijama, koje su identične komutacijskim relacijama (8.13), daljnji koraci, kao i njihov ishod, isti su kao i prije. Dakle, $\mathcal{H}_1$ prelazi u H_2 pod utjecajem transformacije,

$$H_2 = e^{\frac{1}{2}\hat{S}}\mathcal{H}_1 e^{-\frac{1}{2}\hat{S}}. \tag{9.13}$$

Ekvivalentnost klase Hamiltonijana (9.9) i skupa super-oscilatora, što je demonstrirano relacijom (9.13), je samo nužan, ali ne i dovoljan uvjet da bi modeli opisani sa (9.9) bili egzaktno rješivi. Da bi se pokazala egzaktna rješivost, potrebno je pokazati da transformacija sličnosti (9.13) ograničava polazni Hamiltonijan na njegov vlastiti Hilbertov prostor, tj. da se putem inverzne transformacije onoj u (9.13), iz baze za super-oscilatore, mogu konstruirati regularne i normalizabilne svojstvene funkcije polaznog Hamiltonijana (9.9).

Super-Hamiltonijan (9.9) posjeduje dinamičku $OSp(2|2)$ supersimetriju. Bozonska podalgebra $SO(1,2)\times U(1)$ od $OSp(2|2)$ prisutna je za široku klasu Hamiltonijana $\mathcal{H}$, zbog zahtjeva (9.8) na superpotencijal. Korisno je primijetiti da je prisustvo algebre $SO(1,2)\times U(1)$ bilo dovoljno da bi se pokazala ekvivalentnost između $\mathcal{H}$ i razvezanih super-oscilatora. Supersimetrija Hamiltonijana u tome nije igrala nikakvu ulogu, što znači da dobiveni rezultati vrijede čak i u situaciji kada je $OSp(2|2)$ supersimetrija od $\mathcal{H}$ slomljena, ali je ostala $SO(1,2)\times U(1)$ simetrija.

Sada ćemo pokazati kako se dinamička $OSp(2|2)$ supersimetrija može realizirati sa Hamiltonijanom $\mathcal{H}$ koji smo netom proučavali. Budući da Hamiltonijan $\mathcal{H}$, relacija (9.9), u sebi uključuje Hamiltonijan (8.9) za supersimetrični Calogerov model tipa A_{N+1}, kao i Hamiltonijan za super-Calogero model tipa BC_{N+1}[1] koji ćemo razmotriti u narednoj točki, to onda konstrukcija koja slijedi vrijedi i za te modele.

Definiramo dva para supernaboja,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\psi_i^\dagger\Big(p_i + i\frac{\partial w}{\partial x_i} - ix_i\Big), \quad q^\dagger = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\psi_i\Big(p_i - i\frac{\partial w}{\partial x_i} + ix_i\Big), \\ \tilde{q} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\psi_i\Big(p_i - i\frac{\partial w}{\partial x_i} - ix_i\Big), \quad \tilde{q}^\dagger = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\psi_i^\dagger\Big(p_i + i\frac{\partial w}{\partial x_i} + ix_i\Big). \end{aligned} \tag{9.14}$$

Ove definicije u potpunosti se podudaraju sa relacijama (8.1) i (8.30). Hamiltonijan $\mathcal{H}$, relacija (9.9), može se prikazati pomoću q i $q^\dagger$ na način, $\mathcal{H} = 2\{q, q^\dagger\}$. Analogno, dualni Hamiltonijan $\mathcal{H}^d$ može se prikazati pomoću drugog para supernaboja, $\tilde{q}$ i $\tilde{q}^\dagger$, na način, $\mathcal{H}^d = 2\{\tilde{q}, \tilde{q}^\dagger\}$. Nadalje, uvodimo

[1]Kao što, uostalom, uključuje i Hamiltonijane za supersimetrični Calogerov model pridružen i ostalim korjenskim sistemima Lieve algebre.

slijedeće operatore

$$
\begin{aligned}
& h=\frac{1}{2}\left(\mathcal{H}+\mathcal{H}^d\right), \quad U=\frac{1}{2}\left(\mathcal{H}-\mathcal{H}^d\right), \\
& \mathcal{B}_2^-=\mathcal{B}_0-\frac{1}{4}\sum_i x_i^2-\frac{1}{4}(N+2E), \quad \mathcal{B}_2^+=\mathcal{B}_0-\frac{1}{4}\sum_i x_i^2+\frac{1}{4}(N+2E), \\
& \mathcal{B}_0=\frac{1}{4}\sum_i\left(p_i^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}-2\sum_j\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}\psi_i^\dagger\psi_j\right),
\end{aligned} \tag{9.15}
$$

pri čemu je $E=\sum_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, Eulerov operator. Bozonski operatori $\mathcal{B}_2^\pm$ i h zadovoljavaju slijedeće komutacijske relacije,

$$
[h,\mathcal{B}_2^\pm]=\pm 2\mathcal{B}_2^\pm, \quad [\mathcal{B}_2^-,\mathcal{B}_2^+]=h. \tag{9.16}
$$

Gornje relacije izvedene su korištenjem komutatora

$$
[\sum_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i},\mathcal{B}_0]=-2\mathcal{B}_0.
$$

S druge strane, $U(1)$ generator U komutira sa operatorima $\mathcal{B}_2^\pm$ i h.

Neiščezavajući antikomutatori između q, $q^\dagger$, $\tilde{q}$ i $\tilde{q}^\dagger$ imaju oblik,

$$
\{q,q^\dagger\}=\frac{1}{2}(h+U), \quad \{\tilde{q},\tilde{q}^\dagger\}=\frac{1}{2}(h-U), \quad \{q^\dagger,\tilde{q}^\dagger\}=\mathcal{B}_2^+, \quad \{q,\tilde{q}\}=\mathcal{B}_2^-. \tag{9.17}
$$

Očigledna relacija,

$$
\mathcal{H}=\mathcal{H}_d+2U, \tag{9.18}
$$

može se iskoristiti kako bi se odredio spektar od (9.9) u fazi u kojoj je supersimetrija slomljena.

Preostali neiščezavajući komutatori $OSp(2|2)$ superalgebre su:

$$
\begin{aligned}
& [\mathcal{B}_2^+,q]=-\tilde{q}^\dagger, \quad [\mathcal{B}_2^+,\tilde{q}]=-q^\dagger, \quad [\mathcal{B}_2^-,\tilde{q}^\dagger]=q, \quad [\mathcal{B}_2^-,q^\dagger]=\tilde{q}, \\
& [h,q^\dagger]=q^\dagger, \quad [h,q]=-q, \quad [h,\tilde{q}]=-\tilde{q}, \quad [h,\tilde{q}^\dagger]=\tilde{q}^\dagger, \\
& [U,\tilde{q}]=-\tilde{q}, \quad [U,\tilde{q}^\dagger]=\tilde{q}^\dagger, \quad [U,q^\dagger]=-q^\dagger, \quad [U,q]=q.
\end{aligned} \tag{9.19}
$$

Bozonski operatori $\mathcal{B}_2^\pm$, h i U čine $SO(1,2)\times U(1)$ podalgebru.

U literaturi su razmatrane i neke druge reprezentacije generatora $OSp(2|2)$ superalgebre u terminima bozonskih i fermionskih koordinata, koje služe za opis modela, npr. super-Calogerovog modela. Tako su u [94] razmatrane dvije moguće koordinatne reprezentacije generatora $OSp(2|2)$ superalgebre, tzv. standardna i atipična. Atipična reprezentacija, razmatrana u [94], karakteristična je po tome što se operatori C_s i $\bar{C}_s$, relacije (9.5) i (9.6), međusobno podudaraju te se stoga Casimirov operator C može faktorizirati na samo jedan način. U tom slučaju Scasimir $C_s \equiv \bar{C}_s$ za $OSp(1|1)$ može se promovirati u Scasimir za $OSp(2|2)$, s obzirom da komutira sa svim bozonskim generatorima i antikomutira sa svim fermionskim generatorima od $OSp(2|2)$. S druge strane, standardna reprezentacija razmatrana u [94], a koja se podudara sa onom opisanom u relacijama (9.14)-(9.19), karakteristična je po tome što se za nju operatori C_s i $\bar{C}_s$ ne podudaraju te se niti jedan od operatora C_s ili $\bar{C}_s$ ne može promovirati u Scasimir za $OSp(2|2)$.

9.3 Super-Calogero model BC_{N+1} tipa

Superpotencijal za supersimetrični Calogerov model BC_{N+1} tipa dan je sa,

$$G(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \prod_{i<j} \left(x_i^2 - x_j^2\right)^{\lambda} \prod_k x_k^{\lambda_1} \prod_l (2x_l)^{\lambda_2}, \tag{9.20}$$

gdje su λ, λ_1 i λ_2 proizvoljni parametri. Model tipa D_{N+1} određen je sa $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, dok uvjet $\lambda_1 = 0$, odnosno$\lambda_2 = 0$ opisuje Hamiltonijan tipa C_{N+1}, odnosno tipa B_{N+1}. U daljnjem se ograničavamo na Hamiltonijan tipa B_{N+1}, koji je dan sa

$$\begin{aligned} H_{B_{N+1}} \;\; = \;\; & -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)\sum_{i\neq j}\left[x_{ij}^{-2} + (x_i+x_j)^{-2}\right] + \frac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1-1)\sum_i x_i^{-2} \\ & + \frac{1}{2}\sum_i x_i^2 - \frac{1}{2}N\left[1 + 2\lambda(N-1) + \lambda_1\right] + \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i + \lambda_1 \sum_i \psi_i^\dagger \psi_i x_i^{-2} \\ & + \lambda \sum_{i\neq j}\left[x_{ij}^{-2}\left(\psi_i^\dagger\psi_i - \psi_i^\dagger\psi_j\right) + (x_i+x_j)^{-2}\left(\psi_i^\dagger\psi_i + \psi_i^\dagger\psi_j\right)\right], \end{aligned} \tag{9.21}$$

gdje je $x_{ij} = x_i - x_j$. Za razliku od super-Hamiltonijana A_{N+1} tipa, relacija (8.9), ovaj super-Hamiltonijan ima mnogočestični potencijal koji nije translaciono invarijantan. Iz oblika interakcije vidi se da svaka čestica međudjeluje sa slikama svih ostalih čestica i sa samom sobom. Ovakva vrsta Hamiltonijana prikladna je za opis sistema sa rubovima. Hamiltonijan (9.21) je permutacijski invarijantan na kombiniranu zamjenu bozonskih i fermionskih koordinata x_i i ψ_i, a također posjeduje i diskretnu simetriju, točnije, invarijantan je na refleksiju $(x_i, \psi_i) \rightarrow (-x_i, -\psi_i)$.

U supersimetričnoj fazi osnovno stanje Hamiltonijana (9.21) je dano sa

$$\Phi = \prod_{i<j}\left(x_i^2 - x_j^2\right)^{\lambda} \prod_k x_k^{\lambda_1} e^{-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2} |0>, \tag{9.22}$$

pri čemu je $\lambda, \lambda_1 > 0$, a $|0>$ je fermionski vakuum. Valna funkcija Φ je normalizabilna za $\lambda, \lambda_1 > -\frac{1}{2}$. Dodatni i još jači zahtjev da operator impulsa p_i bude hermitski operator za valne funkcije oblika Φ vodi na to da λ i λ_1 moraju biti strogo pozitivni. Faza Hamiltonijana (9.21) u kojoj je supersimetrija slomljena ima bogatiju strukturu nego što je to bio slučaj za model A_{N+1} tipa. U parametarskom prostoru $(\lambda,\ \lambda_1)$, postoje tri područja u kojima je supersimetrija Hamiltonijana (9.21) slomljena. Ta područja su: (i) $\lambda < 0$, $\lambda_1 < 0$, (ii) $\lambda < 0$, $\lambda_1 > 0$ i zadnje, (iii) $\lambda > 0$, $\lambda_1 < 0$.

9.4 Superkonformno poopćenje Calogero-Marchioro modela

U ovoj cjelini nastavljamo duž linije započete u prethodnom poglavlju te ćemo razmotriti supersimetrično poopćenje Calogero-Marchioro modela koje također posjeduje $OSp(2|2)$ supersimetriju. Zbog toga ćemo se moći poslužiti konstrukcijom $OSp(2|2)$ superalgebre, načinjenom pred kraj cjeline 9.2, s time što ćemo samu konstrukciju morati prilagoditi kontekstu vezanom uz, ne više jednodimenzionalni, već D-dimenzionalni mnogočestični sustav u kojem međudjelovanje opada sa kvadratom udaljenosti. Dakle, razmotrit ćemo D-dimenzionalni, N-čestični supersimetrični Calogero-Marchioro model [42] sa ND bozonskih i ND fermionskih stupnjeva slobode. Činjenica da taj model posjeduje dinamičku $OSp(2|2)$ supersimetriju može se iskoristiti kako bi se konstruirao beskonačan skup egzaktnih svojstvenih stanja kako u fazi u kojoj je supersimetrija očuvana, tako i u onoj u kojoj supersimetrija nije očuvana. Ta svojstvena stanja opisuju bozonska i fermionska pobuđenja sistema, međutim, ne sva pobuđenja, već samo jedan mali dio. Sam model je možebitno interesantan stoga što ga je moguće povezati sa efektivnom niskoenergetskom akcijom za $(D+1)$-dimenzionalnu Yang-Mills teoriju, reduciranu na $(0+1)$-dimenzionalnu teoriju. Ovo opažanje se zasniva na postojećim rezultatima u literaturi [42],[95],[96].

U trećem poglavlju proučavali smo višefamilijarni D-dimenzionalni model opisan Hamiltonijanom (3.34). Model čiju supersimetričnu verziju ćemo ovdje proučavati specijalan je podslučaj modela (3.34) i opisuje identične čestice, tj. situaciju kada su mase svih čestica jednake (stavimo $m_i = 1,\ i = 1, ..., N$) i iznosi svih konstanti vezanja su jednaki (stavimo $\nu_{ij} = g,\ i, j = 1, ..., N$). Relevantni Hamiltonijan je

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,\mu} p_{i,\mu}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,\mu} x_{i,\mu}^2 + \frac{g}{2}(g+D-2)\sum_{i\neq j} \vec{r}_{ij}^{\,-2} + \frac{g^2}{2}\sum_{i\neq j\neq k} (\vec{r}_{ij}.\vec{r}_{ik})\, \vec{r}_{ij}^{\,-2}\vec{r}_{ik}^{\,-2},$$

$$p_{i,\mu} = -i\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j, \tag{9.23}$$

pri čemu $\vec{r}_i$ je D-dimenzionalni vektor položaja i-te čestice, a $x_{i,\mu}$ su njegove komponente. Koristimo konvenciju da latinski indeksi idu od 1 do N, dok grčki indeksi idu od 1 do D. Kao što je već opisano u četvrtom poglavlju, Hamiltonijan (9.23) posjeduje $SU(1,1)$ simetriju (3.39). Također, od tamo znamo da je valna funkcija osnovnog stanja [40, 44] dana sa

$$\psi_0 = \prod_{i<j} \mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid^g e^{-\frac{1}{2}\sum_i \vec{r}_i^2}, \tag{9.24}$$

te da za $D \geq 2$, nije poznat kompletni skup svojstvenih stanja, kao ni spektar, iako je moguće, korištenjem $SU(1,1)$ simetrije, konstruirati beskonačan broj egzaktnih svojstvenih stanja koja odgovaraju radijalnim pobuđenjima. Ta konstrukcija je opisana relacijama (3.42) i (3.45),

$$\psi_n = (A_2^+)^n \psi_0, \qquad n = 0, 1, 2, ..., \tag{9.25}$$

gdje su ψ_n svojstvena stanja od H sa energijama $E_n = E_0 + 2n$, pri čemu je energija osnovnog stanja dana sa $E_0 = \frac{ND}{2} + gN(N-1)/2$.

Sada konstruiramo supersimetričnu verziju Hamiltonijana H. Kao i prije, definiramo supernaboj q i njemu konjugirani supernaboj $q^\dagger$ na način,

$$q = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu}^\dagger \, (p_{i,\mu} - i\frac{\partial W}{\partial x_{i,\mu}}), \qquad q^\dagger = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu} \, (p_{i,\mu} + i\frac{\partial W}{\partial x_{i,\mu}}), \tag{9.26}$$

gdje ND fermionskih varijabli $\psi_{i,\mu}$ zadovoljava algebru,

$$\{\psi_{i,\mu}, \psi_{j,\nu}\} = 0 = \{\psi_{i,\mu}^\dagger, \psi_{j,\nu}^\dagger\}, \quad \{\psi_{i,\mu}, \psi_{j,\nu}^\dagger\} = \delta_{ij}\delta_{\mu,\nu}. \tag{9.27}$$

Pored supernaboja (9.26), uvodimo još jedan dodatni par supernaboja $\tilde{q}$ i $\tilde{q}^\dagger$,

$$\tilde{q} = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu} \, (p_{i,\mu} - i\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_{i,\mu}}), \qquad \tilde{q}^\dagger = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu}^\dagger \, (p_{i,\mu} + i\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_{i,\mu}}). \tag{9.28}$$

Supernaboji u (9.26) i (9.28) izraženi su pomoću operatora impulsa $p_{i,\mu} = -i\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}}$ i superpotencijala W i $\tilde{W}$,

$$W = -w + \frac{1}{2}\sum_i \vec{r}_i^{\ 2}, \qquad \tilde{W} = w + \frac{1}{2}\sum_i \vec{r}_i^{\ 2}, \tag{9.29}$$

$$w = \ln G, \quad \sum_{i,\mu} x_{i,\mu}\frac{\partial G}{\partial x_{i,\mu}} = d\, G, \tag{9.30}$$

gdje je d stupanj homogenosti funkcije G, koji može biti proizvoljna konstanta. Radimo slijedeći izbor za funkciju G, tj. superpotencijale W i $\tilde{W}$,

$$G = \prod_{i<j} \mid \vec{r}_{ij} \mid^g . \tag{9.31}$$

Gornji izbor daje

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi^\dagger_{i,\mu}(p_{i,\mu} + i\frac{\partial w}{\partial x_{i,\mu}} - ix_{i,\mu}) = \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi^\dagger_{i,\mu}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}} - i\sum_{j\neq i} g\frac{x_{j,\mu}-x_{i,\mu}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} - ix_{i,\mu}\right),\\
q^\dagger &= \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi_{i,\mu}(p_{i,\mu} - i\frac{\partial w}{\partial x_{i,\mu}} + ix_{i,\mu}) = \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi_{i,\mu}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}} + i\sum_{j\neq i} g\frac{x_{j,\mu}-x_{i,\mu}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} + ix_{i,\mu}\right),\\
\tilde{q} &= \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi_{i,\mu}(p_{i,\mu} - i\frac{\partial w}{\partial x_{i,\mu}} - ix_{i,\mu}) = \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi_{i,\mu}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}} + i\sum_{j\neq i} g\frac{x_{j,\mu}-x_{i,\mu}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} - ix_{i,\mu}\right),\\
\tilde{q}^\dagger &= \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi^\dagger_{i,\mu}(p_{i,\mu} + i\frac{\partial w}{\partial x_{i,\mu}} + ix_{i,\mu}) = \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\psi^\dagger_{i,\mu}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_{i,\mu}} - i\sum_{j\neq i} g\frac{x_{j,\mu}-x_{i,\mu}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} + ix_{i,\mu}\right)
\end{aligned}\tag{9.32}$$

što rezultira super-Hamiltonijanom,

$$\begin{aligned}
H_s &= \frac{1}{2}\{q, q^\dagger\}\\
&= H + \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\left[\psi^\dagger_{i,\mu}, \psi_{i,\mu}\right] - \frac{g}{2}N(N-1)\\
&\quad + g\sum_{i\neq j;\mu}\left(2\left(x_{i,\mu} - x_{j,\mu}\right)^2 \vec{r}_{ij}^{\,-2} - 1\right)\vec{r}_{ij}^{\,-2}\left(\psi^\dagger_{i,\mu}\psi_{i,\mu} - \psi^\dagger_{i,\mu}\psi_{j,\mu}\right) \qquad (9.33)\\
&\quad + 2g\sum_{i\neq j;\mu\neq\nu}\left(x_{i,\mu} - x_{j,\mu}\right)\left(x_{i,\nu} - x_{j,\nu}\right)\vec{r}_{ij}^{\,-4}\left(\psi^\dagger_{i,\mu}\psi_{i,\nu} - \psi^\dagger_{i,\mu}\psi_{j,\nu}\right).
\end{aligned}$$

Super-Hamiltonijan H_s je supersimetrično poopćenje od H, tj. poopćenje od D-dimenzionalnog Calogero-Marchioro modela. To se može ustanoviti tako da se H_s projicira na sektor sa 0 fermiona u 2^{DN}-dimenzionalnom fermionskom Fockovom prostoru, u kojem je vakuumsko stanje definirano sa $\psi_{i,\mu}|0 >= 0$. Osnovno stanje za H_s u supersimetričnoj fazi ($g > 0$) određeno je sa $\psi_0^s = \psi_0|0 >$. Valna funkcija osnovnog stanja je normalizabilna za $g > -\frac{1}{2}$. Ipak, još jači uvjet da je svaki operator impulsa $p_{i,\mu}$ hermitski za valne funkcije oblika ψ_0^s nalaže da vrijedi $g > 0$. To znači da je supersimetrija očuvana za $g > 0$, dok je slomljena za $g < 0$ [88, 89, 97, 98].

Supersimetrični Hamiltonijan (9.33) generiran je superpotencijalom (9.29), gdje je funkcija G homogena funkcija stupnja d. Stoga je bozonski potencijal u Hamiltonijanu H_s homogena funkcija stupnja -2 i Hamiltonijan H_s posjeduje $OSp(2|2)$ supersimetriju. Ta činjenica omogućava nam da i u ovom konkretnom slučaju slijedimo korake poduzete između (9.14) i (9.19) te na taj način konstruiramo operatore koji će zatvoriti $OSp(2|2)$ superalgebru (9.19). Ovdje treba primijetiti da konstrukcija (9.32) u potpunosti odgovara supernabojima (9.14), uz dodatak da je prilagođena za D-dimenzionalni slučaj.

Sada je moguće definirati operatore stvaranja i poništavanja,

$$\mathcal{B}_2^\dagger = -\frac{1}{4}\{q^\dagger, \tilde{q}^\dagger\}, \quad \mathcal{F}_2^\dagger = \tilde{q}^\dagger, \tag{9.34}$$

koji opisuju kolektivna pobuđenja i zadovoljavaju komutacijske relacije,

$$[H_s, \mathcal{B}_2^\dagger] = 2\mathcal{B}_2^\dagger, \quad [H_s, \mathcal{F}_2^\dagger] = 2\mathcal{F}_2^\dagger. \tag{9.35}$$

Relacije (9.34), uz pomoć operatora (9.34), omogućavaju konstrukciju klase egzaktnih svojstvenih stanja. Specijalno,

$$\psi_{n,\nu} = \mathcal{B}_2^{\dagger^n} \mathcal{F}_2^{\dagger^\nu} \psi_0^s, \tag{9.36}$$

su svojstvena stanja od H_s sa energijama $E_{n,\nu} = 2(n+\nu)$. Bozonski kvantni broj n može poprimiti bilo koju nenegativnu cjelobrojnu vrijednost, dok fermionski kvantni broj smije poprimiti samo dvije vrijednosti, $\nu = 0, 1$. U granici $g \to 0$, super-Hamiltonijan H_s svodi se na N razvezanih superoscilatora u D dimenzija.

Hamiltonijan (8.9) je specijalni slučaj Hamiltonijana (9.33) za $D = 1$ i, kao što smo vidjeli u osmom poglavlju, poznat je potpuni skup svojstvenih stanja kao i spektar za taj model, kako u fazi u kojoj je supersimetrija očuvana ($g > 0$), tako i u fazi u kojoj je slomljena ($g < 0$). Nasuprot tome, u situaciji kada je $D \geq 2$, funkcije $\psi_{n,\nu}$ i pripadne energije $E_{n,\nu}$ opisuju samo mali dio potpunog spektra, slično kao i u pripadnom ishodišnom modelu (9.23), u kojem supersimetrija nije prisutna i gdje skup svojstvenih stanja (9.25) također nije potpun.

Faza od H_s u kojoj je supersimetrija slomljena karakterizirana je sa $g < 0$. U toj fazi također je moguće konstruirati klasu egzaktnih svojstvenih stanja i to koristeći svojstvo dualnosti Hamiltonijana H_s. U tu svrhu razmatramo dualni Hamiltonijan $\tilde{H}_s$ koji se može izraziti u terminima supernaboja $\tilde{q}$ i $\tilde{q}^\dagger$ na način, $\tilde{H}_s = \frac{1}{2}\{\tilde{q}, \tilde{q}^\dagger\}$. Taj se Hamiltonijan isto može direktno dobiti iz H_s, radeći zamjene $g \to -g$ i $\psi_{i,\mu} \leftrightarrow \psi_{i,\mu}^\dagger$. Osnovno stanje od $\tilde{H}_s$, u njegovoj vlastitoj supersimetričnoj fazi ($g < 0$), je rješenje uvjeta

$$\tilde{q}\tilde{\psi}_0^s = \tilde{q}^\dagger \tilde{\psi}_0^s = 0, \tag{9.37}$$

i pokazuje se da je oblika

$$\tilde{\psi}_0^s = \prod_{i<j} \mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid^{-g} e^{-\frac{1}{2}\sum_i \vec{r}_i^2} |ND>, \quad \psi_{i,\mu}^\dagger |ND>= 0. \tag{9.38}$$

Može se vidjeti da je $\tilde{H}_s$ povezan sa H_s putem slijedeće relacije,

$$H_s = \tilde{H}_s + \frac{1}{2}\sum_{i,\mu}\left[\psi_{i,\mu}^\dagger, \psi_{i,\mu}\right] - gN(N-1). \tag{9.39}$$

Zbog zadnje relacije, $\tilde{\psi}_0^s$ je također i svojstveno stanje od H_s, sa pripadnom energijom osnovnog stanja jednakom

$$E_0 = \frac{ND}{2} - gN(N-1),$$

što je pozitivno definitna veličina za $g < 0$. Valna funkcija (9.38) je valna funkcija osnovnog stanja Hamiltonijana H_s, u fazi u kojoj je supersimetrija slomljena, $g < 0$. To je posljedica relacije (9.39) i činjenice da $\tilde{\psi}_0^s$ opisuje osnovno stanje dualnog Hamiltonijana $\tilde{H}_s$, u njegovoj vlastitoj supersimetričnoj fazi ($g < 0$).

Svojstvo dualnosti od H_s omogućava nam da načinimo algebarsku konstrukciju pobuđenih stanja od H_s za $g < 0$. Specifično, klasa pobuđenih stanja od H_s može se dobiti djelovanjem bozonskog operatora stvaranja $\tilde{\mathcal{B}}_2^\dagger$ i fermionskog operatora stvaranja $\tilde{\mathcal{F}}_2^\dagger$ na osnovno stanje $\tilde{\psi}_0^s$, pri čemu se spomenuti operatori mogu dobiti iz (9.34), uz pomoć zamjena $g \to -g$ i $\psi_{i,\mu} \leftrightarrow \psi_{i,\mu}^\dagger$,

$$\tilde{\mathcal{B}}_2^\dagger = -\frac{1}{4}\{\tilde{q}^\dagger, q^\dagger\}, \qquad \tilde{\mathcal{F}}_2^\dagger = q^\dagger. \tag{9.40}$$

Dakle, svojstvena stanja i pripadne energije od H_s, u fazi sa slomljenom supersimetrijom, dani su sa,

$$\tilde{\psi}_{n,\nu} = \tilde{\mathcal{B}}_2^{\dagger^n} \tilde{\mathcal{F}}_2^{\dagger^\nu} \tilde{\psi}_0^s, \quad \tilde{E}_{n,\nu} = E_0 + 2(n+\nu). \tag{9.41}$$

Ovaj skup svojstvenih stanja također nije potpun. Iako, generalno, za dani model ne postoji opća metoda za tretman i nalaženje svojstvenih stanja u fazi u kojoj je supersimetrija slomljena, u ovom konkretnom slučaju, svojstvo dualnosti od H_s omogućilo nam je da ipak uspijemo pronaći klasu egzaktnih rješenja za promatrani model, u fazi sa slomljenom supersimetrijom.

$OSp(2|2)$ supersimetrija nije jedina simetrija razmatrana u literaturi, na koju je moguće proširiti Calogero-Marchioro model. U [42] pokazano je da se dvodimenzionalni Calogero-Marchioro model može prirodno uroniti u $SU(1,1|2)$ superkonformni Hamiltonijan, tj. može se proširiti na Hamiltonijan koji posjeduje $SU(1,1|2)$ superkonformnu simetriju.

Poglavlje 10

Zaključak

Calogerov model je jednodimenzionalan, potpuno rješiv, model sistema sa dugodosežnim međudjelovanjem. U svojoj originalnoj verziji on opisuje identične, nerelativističke čestice bez spina smještene na pravcu, vezane u zajedničkom harmoničkom potencijalu i koje međudjeluju preko interakcije koja opada sa kvadratom njihove međusobne udaljenosti. U ovoj disertaciji razmatrana su poopćenja Calogerovog modela. Ta su poopćenja provedena u dva pravca. Prvi pravac je uključio razmatranje višefamilijarnih, višedimenzionalnih, kao i supersimetričnih poopćenja Calogerovog modela. Drugi pravac je obuhvatio razmatranje poopćenja racionalnog Calogerovog modela na način da se osnovnoj interakciji koja opada sa kvadratom udaljenosti pridodaju dodatna međudjelovanja, npr. Marchioro-Wolfes ili Coulombovog tipa.

Algebarskim pristupom konstruirani su operatori stvaranja i poništavanja za Hamiltonijane koji opisuju jednodimenzionalan i višedimenzionalan višefamilijarni Calogerov model da dvočestičnim i published tročestičnim međudjelovanjima. Pomoću konstruiranih operatora stvaranja i poništavanja nađena su sva polinomijalna svojstvena stanja promatranih modela. Spektar koji odgovara nađenim svojstvenim stanjima linearan je u kvantnim brojevima i također degeneriran za viša pobuđenja. Nađeno je da je za spomenutu degeneraciju odgovorna dinamička $SU(2)$ simetrija. Višefamilijarni modeli su do sada ispitivani generaliziranom Thomas-Fermijevom metodom i to samo u najnižoj aproksimaciji. Pri tome su nađene energije osnovnog stanja, kao i nekih specifičnih pobuđenja, ali samo za specifične veze između masa čestica, njihove statistike i konstanti međudjelovanja. U ovom radu iste te veze su interpretirane kao prirodan uvjet iščezavanja tročestičnih međudjelovanja u modelu.

Pokazano je da je višefamilijarni Calogerov model ekvivalentan matričnom oscilatoru opisanom sa kvadratičnim Hamiltonijanom i deformiranim komutacijskim relacijama. U nastavku je uspostavljena veza između matričnog oscilatora i konačnog, regulariziranog matričnog Chern-Simons-ovog modela na osnovu koje se zaključuje da ta dva modela imaju isti spektar u singletnom sektoru.

Ključan rezultat teze je da se svi sistemi koji realiziraju konformnu $SU(1,1)$ simetriju mogu preslikati na sustav razvezanih oscilatora. Taj rezultat nam je omogućio da razvijemo opći postupak za konstrukciju potpunog skupa stanja u Bargmann-ovoj reprezentaciji, za sve sisteme u kojima je realizirana konformna simetrija. Za takve sisteme moguće je konstruirati operator vremena konjugiran Hamiltonijanu, pri čemu konstrukcija ne vrijedi samo za hermitski, već i za PT-invarijantan Hamiltonijan.

Korištenjem von Neumann-ove metode pokazano je da racionalni Calogerovi modeli tipa A_{N+1} i BC_{N+1}, sa i bez harmoničkog vezanja, dopuštaju novu klasu vezanih stanja, kao i nova stanja u sektoru raspršenja. Taj rezultat iskorišten je kako bi se pružio opis anomalnog raspršenja elektrona na polarnim molekulama.Istom metodom istražene su neekvivalentne kvantizacije N-čestičnog, jednodimenzionalnog racionalnog Calogerovog modela kojem je pridodana interakcija Coulombovog tipa. Kao konačan rezultat analize, dobivena su egzaktna stanja i spektar kako u sektoru vezanih stanja, tako i u sektoru raspršenja.

Na kraju je dan revijalni prikaz supersimetričnih poopćenja Calogerovog modela sa nekim originalnim rezultatima. Ovdje je predstavljena činjenica da je široka klasa super-Hamiltonijana kod kojih je realizirana $OSp(2|2)$ supersimetrija, koji također uključuju supersimetrična poopćenja svih tipova Calogero-Sutherland-Moser modela kao podskup, ekvivalentna skupu razvezanih super-oscilatora. Ta činjenica iskorištena je za konstrukciju potpunog skupa svojstvenih funkcija i pridruženog spektra, kako u fazi u kojoj je supersimetrija očuvana, tako i u fazi u kojoj je supersimetrija slomljena. Kao primjer, konstruirana su dva različita supersimetrična poopćenja Calogerovog modela sa $N = 2$ superkonformnom simetrijom.

Literatura

[1] F. Calogero, Jour. Math. Phys. **10**, (1969) 2191.

[2] F. Calogero, Jour. Math. Phys. **10**, (1969).

[3] F. Calogero, J. Math. Phys. **12** (1971) 419.

[4] B. Sutherland, J. Math. Phys. **12** (1971)246, 251.

[5] P. J. Gambardella, J. Math. Phys. **16** (1975)1172.

[6] M. A.Olshanetsky and A. M. Perelomov, Phys. Rep. **71** (1981)313.

[7] M. A.Olshanetsky and A. M. Perelomov, Phys. Rep. **94** (1983)313.

[8] B. Basu-Mallick and K. S. Gupta, Phys. Lett. **A292** (2001) 36.

[9] B. Basu-Mallick, P. K. Ghosh and K. S. Gupta, Nucl. Phys. B **659** (2003) 437.

[10] B. Basu-Mallick, P. K. Ghosh and K. S. Gupta, Phys. Lett. A **311** (2003) 87.

[11] A. P. Polychronakos, Phys. Rev. Lett. **69**, (1992) 703.

[12] L. Brink, T. H. Hansson and M. A. Vasiliev, Phys. Lett. **B286**, (1992) 109.

[13] N. Gurappa, P.K. Panigrahi, Phys. Rev. B **59** (1999) R2490.

[14] A. Polychronakos, Nucl. Phys. B **324** (1989) 597.

[15] A. Polychronakos, Phys. Lett. B **266** (1991) 29.

[16] J.M. Leinaas and J. Myrheim, Phys. Rev. **B37** (1988)9286.

[17] S. Meljanac, M. Milekovic, A. Samsarov, Phys. Lett. B **573** 202 (2003).

[18] S. Meljanac, M. Mileković, A. Samsarov, M. Stojić, Modern Phys. Lett. B **V.18** (2004) 603.

[19] S. Meljanac, M. Milekovic, A. Samsarov, Phys. Lett. B **594** 241 (2004).

[20] C. Furtlehner, S. Ouvry, Modern Phys. Lett. A **V.9** (1995) 503.

[21] D. Sen, Nucl. Phys. B **V.479** (1996) 554.

[22] S. Mashkevic, Phys. Lett. A **V.233** (1997) 30.

[23] T. Guhr, H. Kohler, Phys. Rev. E **V.71** (2005) 045102.

[24] A. Dasniers de Veigy, Nucl. Phys. B **483** (1997) 580.

[25] P. Forrester, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992) L607.

[26] L. Jonke and S. Meljanac, Phys.Lett. B **511** (2001) 276.

[27] L. Jonke and S. Meljanac, Phys.Rev.B **66** (2002) 205313.

[28] L. Jonke and S. Meljanac, Phys.Lett. B**526** (2002) 149.

[29] R.Floreanini,L.Lapointe,L.Vinet, Phys.Lett. B **389** (1996) 327.

[30] R.Floreanini,L.Lapointe,L.Vinet, Phys.Lett. B **421** (1998) 229.

[31] S. Meljanac, M. Milekovic , S.Pallua, Phys.Lett. B **328** (1994) 55.

[32] V. Bardek, L. Jonke, S. Meljanac and M. Milekovic, Phys.Lett. B **531** (2002) 311.

[33] S. Meljanac, A. Samsarov, Phys. Lett. B **V.600** (2004) 179.

[34] A. Gorsky, N. Nekrasov, Nucl. Phys. B **V.414** (1994) 213.

[35] A. P. Polychronakos, JHEP **0104** (2001) 011.

[36] S. Meljanac and A. Samsarov, Phys. Lett. A **351** (2006) 246.

[37] R. B. Laughlin, Phys.Rev.Lett. **50** (1983) 1395.

[38] G.Date, P.K.Ghosh, M.V.N.Murthy, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 3051.

[39] M.V.N.Murthy, R.K.Bhaduri, D.Sen, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 4103.

[40] A.Khare, K.Ray, Phys.Lett.A **230** (1997) 139.

[41] P.K.Ghosh, Phys.Lett.A **229** (1997) 203.

[42] P. K. Ghosh, J. Phys. A **34** (2001) 5583.

[43] N. Gurappa, P.K. Panigrahi, Phys.Rev. B **67** (2003) 155323.

[44] F. Calogero and C. Marchioro, J. Math. Phys. (N.Y.) **14** (1973) 182.

[45] S. Meljanac, A. Samsarov, Phys. Lett. B **613** 221 (2005) [Erratum-ibid. B **620** 221 (2005)].

[46] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, Nuovo Cimento A **34** (1976) 569.

[47] C. M. Bender, S. Boettcher, Phys.Rev.Lett. **80** (1998) 5243.

[48] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, Am.J.Phys. **71** (2003)1095.

[49] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer-Verlag, Berlin 1986.

[50] H. R. Lewis, W. E. Lawrence, J. D. Harris, Phys.Rev.Lett. **77**(1996) 5157.

[51] Y. Aharonov , D. Bohm, Phys.Rev. **122** (1961) 1649.

[52] S. Meljanac, A. Samsarov, B. Basu-Mallick, K. S. Gupta, Eur. Phys. J. C **49** (2007) 875.

[53] A. Diaf, A. T. Kerris, M. Lassaut and R. J. Lombard, J.Phys.A:Math.Gen. **39**, 7305(2006).

[54] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products" (Acedemic Press); M. Abramowitz and I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Table" (Dover).

[55] A. P. Polychronakos, Mod. Phys. Lett. A **5**, 2325(1990).

[56] V. V. Borzov and E. V. Damaskinsky, "Realization of the annihilation operator for generalized oscillator-like system by a differential operator", math.QA/0101215.

[57] I. Dadic, L. Jonke and S. Meljanac, Phys. Rev. D **67**, 087701(2003).

[58] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Phys. Rept. **251** (1995) 267.

[59] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry in Quantum Mechanics, World Scientific, 2001.

[60] P. K. Ghosh, A. Khare and M. Sivakumar, Phys. Rev. A **58** (1998) 821.

[61] C. J. Efthimiou and D. Spector, quant-ph/9702017.

[62] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A **36** (2003) 10373.

[63] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A **37** (2004) 10095.

[64] A. B. Balantekin, Phys. Rev. A **57** (1998) 4188.

[65] C. Manuel and R. Tarrach, Phys. Lett. **B 268** (1991) 222.

[66] J. G. Esteve, Phys. Rev. **D 34** (1986) 674.

[67] J. G. Esteve, Phys. Rev. **D 66** (2002) 125013.

[68] H. Falomir, P. A. G. Pisani and A. Wipf, Jour. Phys. **A 35** (2002) 5427.

[69] C. Aneziris, A. P. Balachandran and Diptiman Sen, Int. Jour. Mod. Phys. **6** (1991) 4721.

[70] T. R. Govindarajan, V. Suneeta and S. Vaidya, Nucl. Phys. **B583** (2000) 291.

[71] D. Birmingham, Kumar S. Gupta and Siddhartha Sen, Phys. Lett. **B505** (2001) 191.

[72] Kumar S. Gupta and Siddhartha Sen, Phys. Lett. **B 526** (2002) 121.

[73] B. Basu-Mallick and K. S. Gupta, Phys. Lett. **A292** (2001) 36.

[74] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 2, (Academic Press, New York, 1972).

[75] A. Khare, J. Phys. A **29** (1996) L45.

[76] B. Basu-Mallick, K. S. Gupta, S. Meljanac and A. Samsarov, Eur. Phys. J. C **58** (2008) 159.

[77] J. M. Lévy-Leblond, Phys. Rev. **153** (1967) 1.

[78] J. E. Turner, Am. J. Phys. **45** (1977) 758.

[79] W. R. Garrett, J. Chem. Phys. **69** (1978) 2622.

[80] H. E. Camblong, L. N. Epele, H. Fanchiotti, C. A. G. Canal, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 220402.

[81] H. E. Camblong, C. R. Ordonez, Phys. Rev. **D68** (2003) 125013.

[82] P. R. Giri, K. S. Gupta, S. Meljanac and A. Samsarov, Phys. Lett. A **372** (2008) 2967.

[83] W. Wen, AdS/NRCFT for the (super) Calogero model, arXiv:0807.0633 [hep-th].

[84] A. Galajinsky, O. Lechtenfeld and K. Polovnikov, JHEP **0711** (2007) 008.

[85] G.W. Gibbons, P.K. Townsend, Phys. Lett. B **454** (1999) 187.

[86] T. Brzeziński, C. Gonera, P. Maślanka, Phys. Lett. A **254** (1999) 185.

[87] A. Galajinsky, O. Lechtenfeld and K. Polovnikov, Phys. Lett. B **643** (2006) 221.

[88] D. Freedman, P. Mende, Nucl. Phys. B **344** (1990) 317.

[89] L. Brink, A. Turbiner and N. Wyllard, J. Math. Phys. **39** (1998) 1285.

[90] P. Ghosh, Nucl. Phys. B **595** (2001) 519.

[91] W. Nahm and M. Scheunert, J. Math. Phys. **17** (1976) 868; M. Scheunert, W. Nahm and V. Rittenberg, J. Math. Phys. **18** (1977) 146; **18** (1977) 155.

[92] L. Frappat, P. Sorba and A. Sciarrino, Dictionary on Lie Alebras and Superalgebras, Academic Press (2000).

[93] S. R. Jain and A. Khare, Phys. Lett. **A 262** (1999) 35.

[94] P. Ghosh, Nucl. Phys. B **681** (2004) 359.

[95] A. Polychronakos, Phys. Lett. **B408** (1997) 117.

[96] M. V. Feigel'man and M. A. Skvortsov, Nucl. Phys. **B506[FS]** (1997) 665.

[97] L. Brink, T. H. Hansson, S. Konstein and M. A. Vasiliev, Nucl. Phys. **B401** (1993) 591.

[98] S. Fubini and E. Rabinovici, Nucl. Phys. **B245** (1984) 17.