Računanje entropije crnih rupa pomoću simetrija u blizini horizonta

Šimunić, Grgur

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Grgur Šimunić

RAČUNANJE ENTROPIJE CRNIH RUPA POMOĆU SIMETRIJA U BLIZINI HORIZONTA

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

Grgur Šimunić

Diplomski rad

Računanje entropije crnih rupa pomoću simetrija u blizini horizonta

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Maro Cvitan

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2017.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Mari Cvitanu na pomoći prilikom izrade ovog rada.

Sažetak

U ovom radu pokazali smo jedan način za računanje entropije (2+1) stacionarne crne rupe. Pri tome smo koristili dimenzionalnu redukciju na dvije dimenzije što je rezultiralo dilatonskim modelom te simetrije na horizontu crne rupe. Za generatore tih simetrija je pokazano da zadovoljavaju Virasoro algebru što nam je omogućilo korištenje Cardyjeve formule za entropiju. Rezultat koji smo dobili slaže se s Bekenstein-Hawkingovom formulom za entropiju.

Diploma thesis title

Abstract

In this paper we showed one way to compute the entropy of (2+1) stationary black hole. We did so by using dimensional reduction on two dimensions, which resulted in dilaton model, and symmetries on the black hole horizon. It has been shown that generators of those symmetries satisfy Virasoro algebra which allowed us to use Cardy formula for entropy. The result is consistent with Bekenstein-Hawking formula.

Sadržaj

1 Uvod

Gravitacija, kao jedna od četiri osnovne sile u prirodi, opisana je (unutar klasične fizike) Einsteinovom općom teorijom relativnosti (skraćeno: OTR). Glavna razlika gravitacijske sile, u odnosu na ostale je što sve čestice (pod istim početnim uvjetima) osjećaju potpuno identične efekte gravitacijske sile. Drugim riječima, efekti gravitacijske sile nisu ovisni o svojstvima same čestice (kao što npr. elektromagnetska sila ovisi o električnom naboju čestice). Zbog toga je gravitacija opisana kao zakrivljenost prostor-vremena. OTR nam kaže da je prostor-vrijeme četverodimenzionalna mnogostrukost M s metrikom g_{ab} signature 1 [1]. Tada čestica koja ne osjeća nikakvu drugu interakciju osim gravitacijske (koju ćemo u nastavku nazivati slobodnom česticom) se u takvom okruženju giba po nekom geodeziku od M. Jednadžba geodezika glasi:

$$u^a \nabla_a u^b = 0\,, \tag{1.1}$$

gdje je u^a tangentni vektor geodezika, a ∇ kovarijantna derivacija pridružena metrici. Samu zakrivljenost od M opisujemo nekomutiranjem kovarijantnih derivacija preko tzv. Riemannovog tenzora R_{abcd} na sljedeći način:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^{d}\omega_d\,, \tag{1.2}$$

gdje je ω_a proizvoljno dualno polje na M. Osim Riemannovog tenzora koristimo i Riccijev tenzor:

$$R_{ab} = R_{acb}{}^{d} \tag{1.3}$$

te Riccijev skalar (koji se ponekad naziva i sklarnom zakrivljenosti):

$$R = R^a{}_a\,. \tag{1.4}$$

Također, koristan je i Einsteinov tenzor:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}\,. \tag{1.5}$$

Naime, zakrivljenost prostor-vremena nastaje pod utjecajem materije koja se nalazi u prostor-vremenu. Raspodjelu materije opisujemo tenzorom stresa, energije i impulsa

T_{ab} (skraćeno: tenzor impulsa). Jednadžba koja nam daje metriku od M iz poznatog tenzora impulsa je Einsteinova jednadžba:

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}\,, \tag{1.6}$$

pri čemu ovdje, kao i u nastavku, koristimo sustav mjernih jedinica u kojem je $c = \hbar = G = 1$.

Jedan od rezultata OTR-a je pojava crnih rupa. Riječ je o dijelovima prostor-vremena iz kojeg niti čestice, niti svjetlost ne mogu izaći. Rub tog dijela prostor-vremena nazivamo horizontom događaja crne rupe. One mogu nastati prilikom gravitacijskog kolapsa dovoljno masivnog tijela, ako mu se sva masa nađe unutar tzv. Schwarzschildovog radijusa koji je jednak dvostrukoj masi tijela. Najpoznatije rješenje Einsteinove jednadžbe koje sadrži crnu rupu je Schwarzschildovo rješenje (statično i sfernosimetrično rješenje):

$$\begin{aligned} g_{ab} = &-\left(1-\frac{2M}{r}\right)(\mathrm{d}t)_a(\mathrm{d}t)_b + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}(\mathrm{d}r)_a(\mathrm{d}r)_b + \\ &+ r^2(\mathrm{d}\theta)_a(\mathrm{d}\theta)_b + r^2\sin^2\theta(\mathrm{d}\phi)_a(\mathrm{d}\phi)_b\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

pri čemu koristimo koordinate (t, r, θ, ϕ) koje nam u limesu $r \to \infty$ daju metriku ravnog prostor-vremena. Parametar M interpretiramo kao masu crne rupe. Ova metrika sadrži u sebi dvije singularnosti: $r = 2M$ i $r = 0$. Singularitet $r = 2M$ je koordinatni singularitet (mogli bismo ga izbaciti drugačijim izborom koordinata) te pretstavlja horizont događaja crne rupe. S druge strane, $r = 0$ je pravi fizikalni singularitet prostor-vremena te se on nalazi u budućnosti svake čestice koja upadne u crnu rupu.

Sve stacionarne crne rupe mogu se opisati samo s tri veličine: masom M, nabojem Q i angularnim momentom J što je posljedica teorema o kosi crnih rupa [2]. Dakle, za potpun opis stacionarne crne rupe nije potrebno znati kako je ona nastala. Sve potrebne informacije su sadržane u navedene tri veličine.

Zamislimo situaciju u kojoj neko tijelo upadne u crnu rupu. Nakon upada, entropija okolnog prostor-vremena se smanjila. Stoga, da ne bi narušili drugi zakon termodinamike, i crnoj rupi pridružujemo određenu entropiju, koja prilikom upada tijela naraste. Entropija crne rupe dana je Bekenstein-Hawkingovom formulom:

$$S = \frac{1}{4} A \,, \tag{1.8}$$

gdje je A površina horizonta crne rupe. U ovom radu dati ćemo jedan način za računanje entropije stacionarne crne rupe.

2 Simetrije prostor-vremena

2.1 Izometrije

Difeomorfizme na prostornovremenskoj mnogostrukosti na koje je metrika invarijantna nazivamo izometrijama. Ako je ξ^a vektorsko polje koje generira te transformacije, onda uvjet da je ta transformacija izometrija ima oblik:

$$\pounds_\xi g_{ab} = 0\,. \tag{2.1}$$

Polje ξ^a nazivamo Killingovim vektorskim poljem. Napišemo li ovu jednadžbu preko kovarijantnih derivacija, dobivamo tzv. Killingovu jednadžbu:

$$\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0\,. \tag{2.2}$$

Pogledajmo slučaj dvodimenzionalnog euklidskog prostora u polarnim koordinatama zadanog metrikom:

$$g_{ab} = (\,\mathrm{d}r)_a(\,\mathrm{d}r)_b + r^2(\,\mathrm{d}\phi)_a(\,\mathrm{d}\phi)_b\,. \tag{2.3}$$

Uvrstimo li ovu metriku u Killingovu jednadžbu, dobijemo sljedeći sistem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\partial_r\xi^r = 0 \tag{2.4a}$$

$$r\partial_\phi\xi^\phi + \xi^r = 0 \tag{2.4b}$$

$$r^2\partial_r\xi^\phi + \partial_\phi\xi^r = 0\,. \tag{2.4c}$$

Rješenje ovih jednadžbi glasi:

$$\xi^r(\phi) = A\sin\phi + B\cos\phi \tag{2.5a}$$

$$\xi^\phi(r,\phi) = \frac{1}{r}(A\cos\phi - B\sin\phi) + C\,, \tag{2.5b}$$

gdje su A, B i C proizvoljne (integracijske) konstante.

2.2 *Približne simetrije*

Ponekad se u fizikalnim sustavima događa situacija da u sustavu postoji parametar koji malo odstupa od vrijednosti za koju bi sustav posjedovao određenu simetriju. U tom slučaju kažemo da sustav posjeduje približnu simetriju. Ako su simetrije koje promatramo izometrije prostor-vremena, onda nam približne simetrije obično označavaju situaciju u kojoj je metrika očuvana samo u jednom dijelu prostor-vremena. Takve približne izometrije matematički možemo opisati modificiranom Killingovom jednadžbom koja se od jednadžbe (2.2) razlikuje samo u tome da na desnoj strani te jednadžbi više nemamo nulu.

Ovdje ćemo pogledati primjer približne simetrije koja čuva svojstvo asimptotske ravnoće, tzv. Bondi-Metzner-Sachs (BMS) simetrija u dvodimenzionalnom euklidskom prostoru [9]. Zahtijevamo da ta približna simetrija mijenja samo $g^{\phi\phi}$ član u metrici (2.3) i to do na red $r^{-\lambda}$ pri čemu je $\lambda > 2$ (za $\lambda < 2$ bila bi narušena asimptotska ravnoća prostora). Tada umjesto originalnih Killingovih jednadžbi imamo sljedeće:

$$\mathcal{L}_\xi g^{rr} = \mathcal{L}_\xi g^{r\phi} = 0 \tag{2.6a}$$

$$\mathcal{L}_\xi g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^\lambda}\,. \tag{2.6b}$$

U slučaju $2 < \lambda \leq 3$ kao rješenja ovih jednadžbi dobijemo:

$$\xi^r(r,\phi) = f(\phi) \tag{2.7a}$$

$$\xi^\phi(r,\phi) = \frac{1}{r}f'(\phi) + g(\phi)\,, \tag{2.7b}$$

gdje su f i g proizvoljne funkcije, a za $\lambda > 3$ dobijemo ista rješenja kao i u slučaju egzaktnih simetrija.

3 Formalizam kovarijantnog faznog prostora

3.1 Difeomorfna invarijantnost lagranžijana

Uzmimo m-mnogostrukost M. Promatramo akciju:

$$S = \int_M L\left(g_{ab}, \nabla'_{a_1} g_{ab}, \ldots, \nabla'_{(a_1} \ldots \nabla'_{a_k)} g_{ab}, \psi, \nabla'_{a_1}\psi, \ldots, \nabla'_{(a_1} \ldots \nabla'_{a_l)}\psi, \gamma\right) , \tag{3.1}$$

gdje je L lagranžijan (definiran kao m-forma na M), g_{ab} metrika definirana na M, ψ skup svih ostalih dinamičkih polja, ∇' globalno definiran operator kovarijantne derivacije te γ skup svih nedinamičkih polja. U nastavku ćemo polja g_{ab} i ψ kolektivno označavati s ϕ. Nadalje, pretpostavit ćemo da je lagranžijan difeomorfno-invarijantan, tj. pretpostavljamo da za sve difeomorfizme $f : M \to M$ vrijedi:

$$L(f^*(\phi)) = f^* L(\phi) . \tag{3.2}$$

Kovarijantna derivacija ∇' koja se pojavljuje u lagranžijanu (3.1) je definirana globalno, tj. na cijeloj mnogostrukosti M, ali općenito to nije derivacija pridružena metrici g_{ab}. Međutim, koristeći difeomorfnu invarijantnost, taj lagranžijan možemo drugačije napisati. Za početak, neka je $T^{a_1 a_2 \ldots a_k}{}_{b_1 b_2 \ldots b_l}$ proizvoljno tenzorsko polje i ∇ operator kovarijantne derivacije pridružen metrici g_{ab}. Tada je [1]:

$$\nabla'_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} = \nabla_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} + \sum_{i=1}^{k} C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1 \ldots d \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} - \sum_{i=1}^{l} C^{d}{}_{ac_i} T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots d \ldots c_l} , \tag{3.3}$$

gdje je $C^c{}_{ab}$ tenzorsko polje za koje vrijedi:

$$C^c{}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\nabla'_a g_{bd} + \nabla'_b g_{ad} - \nabla'_d g_{ab}\right) . \tag{3.4}$$

Definiramo li:

$$C'^c{}_{ab}{}^{efg} = \frac{1}{2} g^{cd} \left(\delta^e{}_a \delta^f{}_b \delta^g{}_d + \delta^e{}_b \delta^f{}_a \delta^g{}_d - \delta^e{}_d \delta^f{}_a \delta^g{}_b\right) , \tag{3.5}$$

dobijemo:

$$C^c{}_{ab} = C'^c{}_{ab}{}^{def} \nabla'_d g_{ef} . \tag{3.6}$$

Također definiramo i:

$$\begin{aligned}K_a{}^{efgb_1\dots b_k}{}_{b'_1\dots b'_k c_1\dots c_l}{}^{c'_1\dots c'_l} = &\sum_{i=1}^{k} C'^{b_i}{}_{ad}{}^{efg}\delta^{b_1}{}_{b'_1}\dots\delta^{d}{}_{b'_i}\dots\delta^{b_k}{}_{b'_k}\delta^{c'_1}{}_{c_1}\dots\delta^{c'_l}{}_{c_l} - \\ &-\sum_{i=1}^{l} C'^{d}{}_{ac_i}{}^{efg}\delta^{b_1}{}_{b'_1}\dots\delta^{b_k}{}_{b'_k}\delta^{c'_1}{}_{c_1}\dots\delta^{c'_i}{}_{d}\dots\delta^{c'_l}{}_{c_l}\,,\end{aligned} \tag{3.7}$$

tako da je:

$$\nabla'_a T^{b_1\dots b_k}{}_{c_1\dots c_l} = \nabla_a T^{b_1\dots b_k}{}_{c_1\dots c_l} + K_a{}^{defb_1\dots b_k}{}_{b'_1\dots b'_k c_1\dots c_l}{}^{c'_1\dots c'_l} T^{b'_1\dots b'_k}{}_{c'_1\dots c'_l}\nabla'_d g_{ef}\,. \tag{3.8}$$

Stoga lagranžijan (3.1) možemo transformirati na sljedeći način:

1. Sve ∇'-derivacije od ψ izrazimo preko ∇-derivacija od ψ i ∇'-derivacija od g.

2. ∇-derivacije od ψ izrazimo preko simetriziranih ∇-derivacija od ψ te Riemannovog tenzora R (i njegovih derivacija) od ∇.

3. Riemannov tenzor R i njegove ∇-derivacije izrazimo preko ∇'-derivacija od g, Riemannovog tenzora R' od ∇' i njegovih derivacija.

4. ∇'-derivacije od g izrazimo preko simetriziranih ∇'-derivacija od g te Riemannovog tenzora R' i njegovih ∇'-derivacija.

5. ∇'-derivacije od g izrazimo preko C i njegovih ∇'-derivacija.

6. ∇'-derivacije od C izrazimo preko simetriziranih ∇'-derivacija od C te Riemannovog tenzora R' i njegovih ∇'-derivacija.

7. Simetrizirane ∇'-derivacije od C izrazimo preko ∇'-derivacija od C simetriziranih zajedno s C te Riemannovog tenzora R i njegovih ∇-derivacija.

Sada dobivamo sljedeći oblik lagranžijana:

$$\begin{aligned}L = L\big(&g_{ab}, C^c{}_{ab}, \nabla'_{(a_1}C^c{}_{ab)}, \dots, \nabla'_{(a_1}\dots\nabla'_{a_{s-1}}C^c{}_{ab)}, R_{abcd}, \nabla_{a_1}R_{abcd}, \dots, \\ &\nabla_{(a_1}\dots\nabla_{a_{s-2})}R_{abcd}, \psi, \nabla_{a_1}\psi, \dots, \nabla_{(a_1}\dots\nabla_{a_l)}\psi, \gamma'\big)\,,\end{aligned} \tag{3.9}$$

gdje je $s = \max\{k, l\}$. Pri tome smo uzeli u obzir da je R' nedinamičko polje. Iskoristimo li sad difeomorfnu invarijantnost lagranžijana u njenom diferencijlnom obliku:

$$\pounds_\xi L(\phi) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \pounds_\xi \phi \,, \tag{3.10}$$

dobijemo da lagranžijan ne smije ovisiti o polju C i njegovim derivacijama niti o nedinamičkim poljima. Stoga je konačan oblik lagranžijana:

$$L = L\left(g_{ab}, R_{abcd}, \nabla_{a_1} R_{abcd}, \ldots, \nabla_{(a_1} \ldots \nabla_{a_m)} R_{abcd}, \psi, \nabla_{a_1}\psi, \ldots, \nabla_{(a_1} \ldots \nabla_{a_l)}\psi\right) \,, \tag{3.11}$$

gdje je $m = \max\{k-2, l-2\}$.

Varijaciju ovog lagranžijana moguće je napisati u sljedećem obliku [3–5]:

$$\delta L = \epsilon\left(A_g^{ab}\delta g_{ab} + E_R^{abcd}\delta R_{abcd} + E_\psi \delta\psi\right) + \mathrm{d}\Theta = \epsilon\left(E_g^{ab}\delta g_{ab} + E_\psi\delta\psi\right) + \mathrm{d}\Theta \,, \tag{3.12}$$

gdje su A_g^{ab}, E_R^{abcd}, E_ψ i E_g^{ab} tenzorska polja, a Θ $(m-1)$-forma. Ovdje je bitno napomenuti da ukoliko ψ označava više od jednog polja, oznaka $E_\psi\delta\psi$ zapravo znači:

$$E_\psi \delta\psi = \sum_i E_{\psi_i}\delta\psi_i \,. \tag{3.13}$$

Drugim riječima, moramo sumirati po svim poljima ψ_i, a E_ψ označava skup tenzorskih polja. Sve zajedno ovo ćemo pisati kao:

$$\delta L = E\delta\phi + \mathrm{d}\Theta \,. \tag{3.14}$$

Diferencijalnu formu Θ nazivamo simplektičkom potencijalnom formom i iz izraza (3.12) moguće je odmah da ona nije jednoznačno određena. Naime, dodamo li formi Θ proizvoljnu zatvorenu $(m-1)$-formu, varijacija lagranžijana δL se ne mijenja. Općenito, na formi Θ je moguće napraviti sljedeću transformaciju:

$$\Theta \to \Theta + \delta\mu + \mathrm{d}Y(\phi, \delta\phi) \,. \tag{3.15}$$

Ovdje je Y $(m-2)$-forma linearna u $\delta\phi$, a μ proizvoljna $(m-1)$-forma. Pri tome, dodavanje forme Y neće utjecati na varijaciju lagranžijana, a dodavanje forme μ će dati sljedeću transformarciju u lagranžijanu:

$$L \to L + \mathrm{d}\mu \,. \tag{3.16}$$

U oba slučaja, "jednadžbe gibanja" se ne mijenjaju. Zbog ove neodređenosti u formi Θ, može se pokazati da ju je uvijek moguće izabrati tako da ona bude kovarijantna, u sljedećem obliku:

$$\Theta = 2E_R^{bcd}\nabla_d \delta g_{bc} + \Theta' \,, \tag{3.17}$$

gdje je:

$$(E_R^{bcd})_{b_2\dots b_m} = E_R^{abcd}\epsilon_{ab_2\dots b_m} \tag{3.18}$$

$$\Theta' = S^{ab}(\phi)\delta g_{ab} + \sum_{i=0}^{n-1} T_i(\phi)^{abcda_1\dots a_i}\delta\nabla_{(a_1}\dots\nabla_{a_i)}R_{abcd} + \sum_{i=0}^{l-1} U_i(\phi)^{a_1\dots a_i}\delta\nabla_{(a_1}\dots\nabla_{a_i)}\psi \,. \tag{3.19}$$

Pri tome su S, T_i i U_i tenzorska polja koja nakon svih gornjih kontrakcija daju $(m-1)$-forme.

Neka su nam sada zadane dvije nezavisne varijacije $\delta\phi_1$ i $\delta\phi_2$ polja ϕ. Definiramo $(m-1)$-formu koju nazivamo simplektičkom strujom:

$$\omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \delta_2\Theta(\phi, \delta_1\phi) - \delta_1\Theta(\phi, \delta_2\phi) \,. \tag{3.20}$$

Ako je C proizvoljna Cauchyjeva ploha (ploha koju svaka neprostornolika krivulja siječe točno jednom), tada definiramo simplektičku formu:

$$\Omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \int_C \omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) \,. \tag{3.21}$$

Pri tome, ukoliko gornji integral nije konačan (što se događa ako C nije kompaktan), potrebno je uvesti dodatna ograničenja na dinamička polja ϕ tako da bude konačan (npr. metrika u određenom limesu mora težiti ravnoj metrici). Nadalje, ti dodatni uvjeti se biraju tako da Ω ne ovisi o izboru C.

Još treba pogledati kako se Ω mijenja pod utjecajem transformacija (3.15). Očito forma μ neće utjecati na Ω, ali forma Y će inducirati transformaciju:

$$\Omega \to \Omega + \int_C \left(\delta_1 Y(\phi, \delta_2 Y) - \delta_2 Y(\phi, \delta_1 Y)\right) \,. \tag{3.22}$$

Pri tome je svejedno što izaberemo kao Cauchyjevu plohu C. Zbog toga te uvjeta koje smo postavili na polja ϕ da bi osigurali postojanje Ω, slijedi da gornji integral iščezava. Stoga je Ω jedinstveno definiran unatoč neodređenosti u formi Θ.

3.2 Noetherin teorem

Neka je ξ proizvoljno vektorsko polje definirano na mnogostrukosti M. Promatramo varijaciju polja $\delta\phi = \pounds_\xi \phi$. Iz difeomorfne invarijantnosti lagranžijana slijedi da je varijacija lagranžijana jednaka:

$$\delta L = \pounds_\xi L = \mathrm{d}(\xi \cdot L)\,, \tag{3.23}$$

gdje u posljednjem izrazu podrazumijevamo kontrakciju vektorskog polja ξ s prvim indeksom lagranžijana. Definiramo li struju J na sljedeći način (kao $(m-1)$-formu):

$$J = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) - \xi \cdot L\,, \tag{3.24}$$

dobivamo:

$$\mathrm{d}J = -E(\phi)\pounds_\xi \phi\,. \tag{3.25}$$

Ovdje vidimo da je struja J očuvana kada god su zadovoljene jednadžbe gibanja $(E = 0)$. Dakle, J je zatvorena forma za sva polja ξ. Stoga postoji $(m-2)$-forma Q takva da je $J = dQ$ pod uvjetom da su zadovoljene jednadžbe gibanja. Formu Q nazivamo Noetherinim naobojem, a formu J Noetherinom strujom. Odmah vidimo da imamo slobodu izbora forme Q do na aditivnu zatvorenu $(m-2)$-formu. Nadalje, naboj Q je uvijek moguće izraziti na sljedeći način:

$$Q = W_a(\phi)\xi^a + X^{ab}(\phi)\nabla_{[a}\xi_{b]} + Y(\phi, \pounds_\xi \phi) + dZ(\phi, \xi)\,. \tag{3.26}$$

Ovdje je Y $(m-2)$-forma linearna u $\pounds_\xi \phi$, Z $(m-3)$-forma linearna u ξ, a W_a i X^{ab} tenzorska polja takva da nakon gornjih kontrakcija dobijemo $(m-2)$-forme. Da bi ovo pokazali, prvo biramo Θ u obliku (3.17). To možemo iskoristiti da bi dobili:

$$J = 2E_R^{bcd}\nabla_d(\nabla_b \xi_c + \nabla_c \xi_b) + \Theta'(\phi, \pounds_\xi \phi) - \xi \cdot L\,. \tag{3.27}$$

Budući da Θ' ovisi linearno o veličinama $\delta g_{ab}, \delta R_{abcd}, \delta\nabla R_{abcd}, ...$, slijedi da $\Theta'(\phi, \pounds_\xi \phi)$ ovisi linearno o ξ^a i $\nabla_b \xi^a$. Stoga J ovisi o ξ^a te prve dvije derivacije od ξ^a. Iz toga slijedi da Q ovisi o ξ^a te o prvoj derivaciji od ξ^a. To objašnjava prva dva člana u izrazu za Q (druga dva ne postoje). To smo dobili za specijalan izbor Θ. U općenitom slučaju, Θ može imati i drugačiji oblik koji dobivamo već navedenim transformacijama iz specijalnog oblika koji smo bili odabrali u prvom slučaju. Te transformacije tada generiraju druga dva člana u izrazu za Q.

Neka je ϕ rješenje "jednadžbi gibanja", $\delta\phi$ varijacija tog polja te ξ^a proizvoljno vremenoliko vektorsko polje. Tada za varijaciju Noetherine struje dobivamo:

$$\delta J = \delta\Theta(\phi, \pounds_\xi \phi) - \pounds_\xi \Theta(\phi, \delta\phi) + \mathrm{d}(\xi \cdot \Theta(\phi, \delta\phi)) = \omega(\phi, \delta\phi, \pounds_\xi \phi) + \mathrm{d}(\xi \cdot \Theta)\,. \tag{3.28}$$

Neka je H hamiltonijan sistema za dinamiku generiranu poljem ξ^a. Tada imamo:

$$\delta H = \Omega(\phi, \delta\phi, \pounds_\xi \phi) = \delta \int_C J - \int_C \mathrm{d}(\xi \cdot \Theta) = \delta \int_C J - \int_\infty \xi \cdot \Theta\,, \tag{3.29}$$

gdje je područje integracije u posljednjem integralu prostorna beskonačnost. Stoga, da bi hamiltonijan H postojao, mora postojati $(m-1)$-forma B takva da je:

$$\delta \int_\infty \xi \cdot B = \int_\infty \xi \cdot \Theta\,. \tag{3.30}$$

Tada je traženi hamiltonijan jednak:

$$H = \int_C J - \int_\infty \xi \cdot B\,. \tag{3.31}$$

Pretpostavimo sada da varijacija $\delta\phi$ zadovoljava linearizirane jednadžbe gibanja te da je ξ simetrija svih dinamičkih polja, tj. $\pounds_\xi \phi = 0$. Tada je J prava Noetherina struja te postoji Noetherin naboj Q takav da je $J = dQ$. Hamiltonijan sada poprima oblik:

$$H = \int_\infty (Q - \xi \cdot B)\,. \tag{3.32}$$

Dakle, hamiltonijan je zadan čistim "površinskim članom". Iz toga slijedi:

$$\int_{\partial C} (\delta Q - \xi \cdot \Theta) = 0\,. \tag{3.33}$$

4 Cardyjeva formula

Konformalna teorija polja (skraćeno: CFT) je teorija polja koja je invarijantna na konformalne transformacije metrike $g_{ab} \mapsto \alpha g_{ab}$ gdje je α općenito skalarna funkcija na prostornovremenskoj mnogostrukosti. Može se pokazati da su ovakve transformacije generirane s beskonačno mnogo generatora L_n i $\bar{L}_n$ gdje je n cijeli broj te da zadovoljavaju tzv. Virasoro algebru (u kvantnoj teoriji) [8, 10]:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \tag{4.1a}$$

$$[\bar{L}_m, \bar{L}_n] = (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \tag{4.1b}$$

$$[L_m, \bar{L}_n] = 0\,. \tag{4.1c}$$

Konstantu c nazivamo centralnim nabojem ili konformalnom anomalijom.

U CFT-u, kao i u bilo kojoj drugoj teoriji polja promatramo dinamiku određenih polja $\{A_i\}$. Sva ta polja moguće je generirati iz nekog podskupa $\{\phi_i\}$ navedenog skupa. Ta polja nazivamo kvaziprimarnim poljima i to su sva polja koja se na konformalnu transformaciju $z \mapsto w(z)$, $z^* \mapsto w^*(z^*)$ transformiraju kao:

$$\phi'(w, w^*) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^{-h} \left(\frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}z^*}\right)^{-\tilde{h}} \phi(z, z^*)\,, \tag{4.2}$$

gdje realne konstante h i $\tilde{h}$ nazivamo konformalnim težinama. Konformalne težine reprezentiraju kako se polja transformiraju na rotacije i skaliranja ($h - \tilde{h}$ je zapravo spin, a $h + \tilde{h}$ dimenzija skaliranja).

Pretpostavimo da radimo na 2-mnogostrukosti s koordinatama τ i $\bar{\tau}$ te da imamo polje s centralnim nabojem c i konformalnom težinom osnovnog stanja Δ. Particijska funkcija našeg sistema glasi:

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{2\pi\tau L_0} \mathrm{e}^{-2\pi i \bar{\tau} \bar{L}_0}\right) = \sum \rho(\Delta, \bar{\Delta}) \mathrm{e}^{-2\pi i \bar{\Delta} \bar{\tau}}\,, \tag{4.3}$$

gdje je ρ funkcija gustoće stanja. Nadalje, neka je

$$Z_0(\tau, \bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{2\pi\tau\left(L_0 - \frac{c}{24}\right)} \mathrm{e}^{-2\pi i \bar{\tau}\left(\bar{L}_0 - \frac{c}{24}\right)}\right)\,. \tag{4.4}$$

Pri tome je Z_0 invarijantan na transformacije $\tau \mapsto -1/\tau$ i $\bar{\tau} \mapsto -1/\bar{\tau}$.

Neka je $q = \mathrm{e}^{2\pi i\tau}$ i $\bar{q} = \mathrm{e}^{2\pi i\bar{\tau}}$. Funkciju ρ možemo izraziti preko Z koristeći krivuljne integrale u kompleksnoj ravnini tako da uz navedenu zamjenu koordinata imamo:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{\mathrm{d}q}{q^{\Delta+1}} \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\bar{q}^{\bar{\Delta}+1}} Z(q, \bar{q})\,, \tag{4.5}$$

pri čemu integracijske krivulje obuhvaćaju točke $q = 0$ i $\bar{q} = 0$. Izrazimo li sada Z_0 preko Z:

$$Z_0(q, \bar{q}) = Z(q, \bar{q}) q^{c/24} \bar{q}^{-c/24}\,, \tag{4.6}$$

za gustoću stanja dobivamo:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{\mathrm{d}q}{q^{\Delta+1}} \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\bar{q}^{\bar{\Delta}+1}} q^{c/24} \bar{q}^{-c/24}\,. \tag{4.7}$$

Sada provodimo transformacije $\tau \mapsto -1/\tau$ i $\bar{\tau} \mapsto -1/\bar{\tau}$. Pri tome se q i $\bar{q}$ transformiraju u $\tilde{q}$ i $\tilde{\bar{q}}$, respektivno, a gustoća stanja postaje:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \frac{\mathrm{d}q}{q^{\Delta+1}} \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\bar{q}^{\bar{\Delta}+1}} \tilde{\bar{q}}^{c/24} \tilde{q}^{-c/24} Z(\tilde{q}, \tilde{\bar{q}}) q^{c/24} \bar{q}^{-c/24}\,. \tag{4.8}$$

Vratimo li natrag varijable τ i $\bar{\tau}$, ovo postaje:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}\bar{\tau} \mathrm{e}^{-2\pi i\tau\Delta} \mathrm{e}^{-2\pi i\bar{\tau}\bar{\Delta}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i c}{24\tau}} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i c}{24\bar{\tau}}} Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}}\right)\,. \tag{4.9}$$

Izvrijednimo ovaj integral pomoću aproksimacije sedlene točke da bi dobili:

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) = \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}}\right) \exp\left(2\pi\sqrt{\frac{c\bar{\Delta}}{6}}\right)\,, \tag{4.10}$$

pa je entropija sistema:

$$S = 2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{c\bar{\Delta}}{6}}\,. \tag{4.11}$$

5 Račun entropije crne rupe uz pomoć simetrija

5.1 Prostorno-vremenska akcija s dilatonskim poljem

Promatramo stacionarnu crnu rupu s horizontom Δ. U okolini horizonta takve crne rupe postoji preferirani nul-smjer određen geodezicima koji generiraju horizont crne rupe. Također u nekoj okolini horizonta postoji definirana vlastita udaljenost od horizonta koja nam određuje preferirani prostornoliki smjer u toj okolini. Ta dva smjera definiraju plohu M unutar promatranog prostor-vremena koja je analogon $r-t$ ravnine ravnog prostor-vremena.

Nakon dimenzionalne redukcije Hilbert-Einsteinove akcije iz cijelog prostor-vremena u M, dobijemo efektivnu akciju [6]:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int_M (\phi R + V(\phi))\epsilon\,, \tag{5.1}$$

gdje je ϵ volumna forma, R Riccijev skalar, a ϕ skalarno polje (tzv. dilatonsko polje) koje pretstavlja ostatak geometrije cjelokupnog prostor-vremena [14,15]. Iskoristimo li da Einsteinov tenzor u dvije dimenzije identički iščezava [11], dobijemo konačne jednadžbe gibanja:

$$E_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}V(\phi) + \nabla_a\nabla_b\phi - g_{ab}\nabla_c\nabla^c\phi = 0 \tag{5.2a}$$

$$R + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi} = 0\,. \tag{5.2b}$$

Definiramo dva nul-vektorska polja l^a i n^a takva da je $l^a n_a = -1$. Uvjet da je riječ o nul-poljima izražavamo u obliku $l^a l_a = n^a n_a = 0$. Tada svaki vektor u tangentom prostoru proizvoljne točke na M možemo izraziti kao lineranu kombinaciju ova dva polja u toj točki. Stoga svako vektorsko polje možemo izraziti kao linearnu kombinaciju ova dva vektorska polja pri čemu su koeficijenti u tom razvoju funkcije na M. Uređeni par ovakvih dvaju polja nazivamo nul-diadom.

Svako tenzorsko polje T_{ab} na M možemo izraziti kao linearnu kombinaciju tenzorskih polja koja dobivamo iz l_a i n_a, a to su $l_a l_b$, $l_a n_b$, $n_a l_b$ i $n_a n_b$. Izrazimo za početak metriku g_{ab} preko tih polja. Budući je $l^a l_a = 0$, g_{ab} ne smije u sebi sadržavati član $l_a l_b$. Analogno u metrici nemamo niti član $n_a n_b$. Budući je metrika simetrična, ona tada mora biti proporcionalna s $l_a n_b + n_a l_b$. Koeficijent proporcionalnosti nalazimo iz uvjeta $l^a n_a = -1$ tako da dobijemo:

$$g_{ab} = -(l_a n_n + n_a l_b)\,. \tag{5.3}$$

Istu stvar možemo napraviti s Levi-Civita tenzorom ϵ_{ab}. On je antisimetričan pa stoga ne može sadržavati članove $l_a l_b$ i $n_a n_b$ te mora biti proporcionalan sa $l_a n_b - n_a l_b$. Apsolutnu vrijednost koeficijenta proporcionalnosti nalazimo iz uvjeta $\epsilon_{ab}\epsilon^{ab} = -2$, dok predznak proizvoljno biramo. Konačno dobijemo:

$$\epsilon_{ab} = l_a n_b - n_a l_b\,. \tag{5.4}$$

Uvjeti koje smo postavili na polja l i n ne definiraju ta polja na jedinstveni način, nego imamo neodređenost na lokalne Lorentzove transformacije:

$$\begin{aligned} l^a &\mapsto \mathrm{e}^{\lambda} l^a \\ n^a &\mapsto \mathrm{e}^{-\lambda} n^a\,, \end{aligned} \tag{5.5}$$

Zbog te neodređenosti možemo postaviti dodatni uvjet $n^b \nabla_b n^a = 0$ (pa je n^a tangentni vektor nul-geodezika). Ovaj dodatni uvjet još uvijek jedinstveno ne određuje polja l i n, nego i dalje možemo provoditi lokalne Lorentzove transformacije za koje je $n^a \nabla_a \lambda = 0$. Uz ovaj dodatni uvjet sada slijedi:

$$\nabla_a l_b = -\kappa n_a l_b \tag{5.6a}$$

$$\nabla_a n_n = \kappa n_a n_b\,, \tag{5.6b}$$

gdje je κ neka skalarna funkcija na M. Ove jednakosti moraju vrijediti za sve moguće izbore polja l i n te su stoga očuvane prilikom varijacije tih polja. Iz toga slijedi da je varijacija funkcije κ jednaka:

$$\delta\kappa = \bar{D}(l^a \delta l_a) - D(n^a \delta l_a) + \kappa l^a \delta n_a\,, \tag{5.7}$$

gdje smo uveli oznake $D = l^a \nabla_a$ i $\bar{D} = n^a \nabla_a$. Također iz istog razloga mora vrijediti:

$$D(l^a \delta n_a) = (D + \kappa)(n^a \delta n_a)\,. \tag{5.8}$$

Iskoristimo sada da Einsteinov tenzor u dvije dimenzije iščezava te da Riemannov tenzor ima samo jednu nezavisnu komponentu kako bi dobili:

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}R(l_a n_b n_c l_d + n_a l_b l_c n_d - l_a n_b l_c n_d - n_a l_b n_c l_d) \tag{5.9a}$$

$$R_{ab} = \frac{1}{2}R g_{ab} \tag{5.9b}$$

$$R = 2\bar{D}\kappa\,. \tag{5.9c}$$

5.2 *Simplektička struktura*

Dilatonski model koji koristimo opisuje stacionarne crne rupe s neekspandirajućim horizontom. Budući da nam ϕ pretstavlja geometriju potpunog prostor-vremena u odnosu na podmnogostrukost koju promatramo, specifično transverzalnu površinu, slijedi da na horizontu mora biti $D\phi = 0$. Ovu jednadžbu u principu možemo iskoristiti za određivanje horizonta Δ. Sada na horizontu možemo postaviti rubne uvjete:

1. Promatramo stacionarnu crnu rupu što znači da je Riccijev skalar konstantan duž horizonta, tj. $DR \triangleq 0$ gdje $\triangleq$ označava jednakost na horizontu (primijetimo da je l tangencijalan na horizont što je određeno izborom predznaka u Levi-Civita tenzoru).

2. Zahtjevamo da konformalna klasa metrike bude točno određena na horizontu iz čega dobivamo uvjete $l^a \delta l_a \triangleq n^a \delta n_a \triangleq 0$.

3. Zahtjevamo da n bude fiksiran na horizontu, što uvijek možemo postići pravilnom Lorentzovom transformacijom. To nam daje dodatni uvjet $l^a \delta n_a \triangleq 0$. U nastavku će se pokazati da nam n služi kao integracijska mjera na horizontu pa nam ovaj zahtjev samo olakšava račun.

Uvrstimo li akciju (5.1) u izraz (3.21) za simplektičku formu Ω, dobijemo:

$$\Omega\left[(\phi, g), \delta_1(\phi, g), \delta_2(\phi, g)\right] = \frac{1}{8\pi}\int_C \left(\delta_1\phi\delta_2(\kappa n) + \delta_1(\bar{D}\phi)\delta_2 l - \delta_2\phi\delta_1(\kappa n) + \delta_2(\bar{D}\phi)\delta_1 l\right)\,, \tag{5.10}$$

gdje n i l promatramo kao 1-forme. Ovaj izraz možemo malo pojednostaviti iskoristimo li uvjete koje smo si postavili:

$$\Omega\left[(\phi, g), \delta_1(\phi, g), \delta_2(\phi, g)\right] = \frac{1}{8\pi}\int_\Delta \left(\delta_1\phi\delta_2\kappa - \delta_1\phi\delta_2\kappa\right) n_a\,. \tag{5.11}$$

Zbog ovakvog izbora, moramo biti oprezni u slučajevima kada variramo polje ϕ. Naime, varijacija polja ϕ pomiče horizont. To ne utječe na samu simplektičku formu jer ona ne ovisi o plohi po kojoj integriramo. Ali, ta varijacija općenito utječe na ostale veličine. Ako je $\zeta^a = \zeta n^a$ generator difeomorfizma, tada za difeomorfizam koji vraća horizont na početno stanje mora vrijediti:

$$\delta(D\phi) + \zeta^a \nabla_a (D\phi) \triangleq 0 \Rightarrow \zeta^a = -\frac{D\delta\phi}{\bar{D}D\phi} n^a \,. \tag{5.12}$$

Također imamo definiran i hamiltonijan prema (3.29):

$$\delta H[\tau] = \Omega[\delta\phi, \delta_\tau \phi] \,, \tag{5.13}$$

pri čemu je $\delta\phi$ proizvoljna varijacija polje, a $\delta_\tau \phi$ jednoparameterska familija transformacija. Poissonove zagrade dva hamiltonijana tada glase:

$$\{H[\tau_1], H[\tau_2]\} = \Omega[\delta_{\tau_1}\phi, \delta_{\tau_2}\phi] \,. \tag{5.14}$$

5.3 *Simetrije*

Akcija (5.1) je difeomorfno invarijantna, ali dodatni uvjeti koje smo postavili općenito nisu. Pogledajmo tzv. supertranslacije na horizontu generirane poljem $\xi^a = \xi l^a$ [12]. Budući da zahtjevamo da je $l^a \delta_\xi n_a = 0$, moramo ovoj transformaciji dodati jednu lokalnu Lorentzovu transformaciju (5.5) za koju je $\delta_\xi \lambda = D\xi$. Iz toga i (5.8) tada slijedi da je $\bar{D}\xi \triangleq 0$, a da su varijacije polje l i n:

$$\begin{aligned} \delta_\xi l^a &= 0 \\ \delta_\xi n_a &= (D + \kappa)\xi n^a \,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

iz čega sada dobivamo varijacije metrike i dilatonskog polja:

$$\begin{aligned} \delta_\xi g_{ab} &= -(D + \kappa)\xi g_{ab} \\ \delta_\xi \phi &= \xi D\phi \,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Promatrana akcija također ima i približne simetrije u blizini horizonta na određene transformacije dilatonskog polja [13]. Promotrimo varijaciju:

$$\hat{\delta}_\eta \phi = \nabla_a(\eta l^a) = (D+\kappa)\eta\,, \tag{5.17}$$

pri čemu je $\bar{D}\eta \triangleq 0$. Akcija se pri tome transformira na sljedeći način:

$$\hat{\delta}_\eta S = -\frac{1}{16\pi}\int_M \eta\left(DR + \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2} D\phi\right)\epsilon\,. \tag{5.18}$$

Budući da DR i $D\phi$ iščezavaju na horizontu, ova varijacija u akciji može biti proizvoljno mala ako ju promatramo dovoljno blizu horizonta ili ako η naglo opada s udaljavanjem od horizonta. Ali, ova transformacija pomiče horizont što znači da DR više ne mora iščezavati na novom horizontu. Iz tog razloga ovu transformaciju kompenziramo s dodatnom Weylovom transformacijom (lokalno reskaliranje metrike) $g_{ab} \mapsto \mathrm{e}^{\hat{\delta}\omega_\eta} g_{ab}$ koja vraća uvjet $DR \triangleq 0$. Stoga je $\hat{\delta}_\eta g_{ab} = \hat{\delta}\omega_\eta g_{ab}$ pri čemu je:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\omega_\eta &= X\frac{D\phi}{\bar{D}D\phi} \\ \eta\bar{D}DR &+ 2D(D+\kappa)X \triangleq 0\,, \end{aligned} \tag{5.19}$$

gdje smo uveli novo polje X. Iz toga slijedi:

$$X \triangleq -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2}\eta\,. \tag{5.20}$$

Budući da sada radimo samo s približnom simetrijom, niti jednadžbe gibanja nisu nužno očuvane pa moramo odrediti kako se one transformiraju. Budući da η naglo pada s udaljenošću od horizonta, dovoljno je promatrati varijacije na horizontu:

$$g^{ab}\hat{\delta}_\eta E_{ab} \triangleq 2(D+\kappa)\bar{D}\hat{\delta}_\eta\phi + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\hat{\delta}_\eta\phi \tag{5.21a}$$

$$n^a n^b \hat{\delta}_\eta E_{ab} \triangleq \bar{D}^2\hat{\delta}_\eta\phi - \bar{D}\phi\bar{D}\hat{\delta}_\eta\omega_\eta \tag{5.21b}$$

$$l^a l^b \hat{\delta}_\eta E_{ab} \triangleq (D-\kappa)D(D+\kappa)\eta \tag{5.21c}$$

$$\hat{\delta}_\eta\left(R + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\right) \triangleq \hat{\delta}_\eta R + \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\phi^2}\hat{\delta}_\eta\phi\,. \tag{5.21d}$$

U principu, svi gornji izrazi bi trebali iščezavati na horizontu.

Za ove dvije transformacije (od kojih je jedna transformacija simetrija, a druga transformacija približne simetrije) koje smo uveli sada tražimo algebru koju zadovoljavaju. Direktnim računom se provjeri da je:

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]f \triangleq \delta_{\xi_{12}} f \,, \delta_{\xi_{12}} = -(\xi_1 D\xi_2 - \xi_2 D\xi_1) \tag{5.22a}$$

$$[\delta_{\eta_1}, \delta_{\eta_2}]f \triangleq 0 \tag{5.22b}$$

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\eta_2}]f \triangleq \delta_{\eta_{12}} f \,, \delta_{\eta_{12}} = -(\xi_1 D\eta_2 - \eta_2 D\xi_1)\,. \tag{5.22c}$$

Ovu algebru prepoznajemo kao BMS$_3$ algebru. Sada tražimo generatore $L[\xi]$ i $M[\eta]$ ove algebre tako da vrijedi:

$$\delta L[\xi] = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega (\delta\phi\delta_\xi\kappa - \delta_\xi\phi\delta\kappa)\, n_a = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega (\delta\phi D(D+\kappa)\xi - \xi D\phi\delta\kappa)\, n_a \tag{5.23a}$$

$$\delta M[\eta] = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega \left(\delta\phi\hat{\delta}_\eta\kappa - \hat{\delta}_\eta\phi\delta\kappa\right) n_a = \frac{1}{8\pi}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\frac{D\delta\phi}{\bar{D}D\phi}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\phi^2}\eta D\phi - (D+\kappa)\eta\delta\kappa\right) n_a\,, \tag{5.23b}$$

iz čega slijedi:

$$L[\xi] = \frac{1}{8\pi}\int_\Delta \left(\xi D^2\phi - \kappa\xi D\phi\right) n_a \tag{5.24a}$$

$$M[\eta] = \frac{1}{8\pi}\int_\Delta \eta\left(D\kappa - \frac{1}{2}\kappa^2\right) n_a \tag{5.24b}$$

Koristeći izraz (5.14) nalazimo Poissonove zagrade za ove generatore:

$$\{L[\xi_1], L[\xi_2]\} = L[\xi_{12}] \tag{5.25a}$$

$$\{M[\eta_1], M[\eta_2]\} \triangleq 0 \tag{5.25b}$$

$$\{L[\xi_1], M[\eta_2]\} \triangleq M[\eta_{12}] + \frac{1}{16\pi}\int_\Delta \left(D\xi_1 D^2\eta_2 - D\eta_2 D^2\xi_1\right) n_a\,. \tag{5.25c}$$

5.4 Dekompozicija na modove

Entropiju crne rupe naći ćemo pomoću Cardyjeve formule (4.11) za koju nam je potrebna dekompozicija generatora L i M na modove koji zadovoljavaju Virasoro algebru:

$$i\{L_m, L_n\} = (m-n)L_{m+n} \tag{5.26a}$$

$$i\{M_m, M_n\} = 0 \tag{5.26b}$$

$$i\{L_m, M_n\} = M_{m+n} + c_{LM} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\,. \tag{5.26c}$$

Ovo nije standardni oblik Virasoro algebre (4.1). Ali, ako def. $\mathcal{L}_m$ i $\bar{\mathcal{L}}_m$ tako da je:

$$L_m = \mathcal{L}_m - \bar{\mathcal{L}}_{-m} \tag{5.27a}$$

$$M_m = \epsilon\left(\mathcal{L}_m + \bar{\mathcal{L}}_{-m}\right)\,, \tag{5.27b}$$

uz uvjet $\epsilon \to 0$, onda $\mathcal{L}_m$ i $\bar{\mathcal{L}}_m$ zadovoljavaju jednadžbe (4.1).

Definiramo skalarnu funkciju ψ tako da je $D\psi \triangleq \kappa$ i $\bar{D}\psi \triangleq 0$, tj.

$$(d\psi)_a = -\kappa n_a\,. \tag{5.28}$$

Ta funkcija će nam predstavljati fazu prilikom rastava na modove. Neka ζ_n označava modove od ξ ili η. Tada je ζ_n proporcionalno s $\exp(in\psi)$. Faktor proporcionalnosti biramo tako da u konačnici dobijemo Virasoro algebru te je stoga:

$$\zeta_n \triangleq \frac{1}{\kappa}\mathrm{e}^{in\psi}\,, \tag{5.29}$$

pa je:

$$\{\zeta_m, \zeta_n\} = \zeta_m D\zeta_n - \zeta_n D\zeta_m = -i(m-n)\zeta_{m+n}\,. \tag{5.30}$$

Nadalje, za preostali član u (5.25c) imamo:

$$\frac{1}{16\pi}\int_\Delta \left(D\xi_m D^2\eta_n - D\eta_n D^2\xi_m\right) n_a = \frac{imn^2}{8\pi}\int_\Delta \mathrm{e}^{i(m+n)\psi}\,\mathrm{d}\psi\,. \tag{5.31}$$

Ako integral uzimamo preko jednog perioda, dobijemo:

$$c_{LM} = \frac{1}{4}\,. \tag{5.32}$$

Trebat će nam i 0-modovi od L i M. Za M ga jednostavno dobijemo:

$$h_M = M[\eta_0] = -\frac{1}{16\pi}\int_\Delta \kappa n_a = \frac{1}{8}\,. \tag{5.33}$$

Kod traženja nultog moda za L, odmah vidimo da nam se tu javlja samo površinski član:

$$h_L = L[\xi_0] = -\frac{1}{8\pi}\phi(D+\kappa)\xi_0\Big|_{\partial\Delta}\,. \tag{5.34}$$

Da bismo odredili rubne uvjete pogledajmo izraz (5.23a) za δL. Površinski član koji su u njemu javlja je:

$$\frac{1}{8\pi}\left(\xi D\delta\phi - (D+\kappa)\xi\delta\phi\right)\Big|_{\partial\Delta}\,, \tag{5.35}$$

te od njega zahtijevamo da bude fiksiran. Očito moramo zahtijevati da je $D\delta\phi = 0$ na $\partial\Delta$. Ali, ako uzmemo da je i $\delta\phi$ tamo jednak nuli, tada bi fiksirali ϕ na cijelom horizontu što bi nam izbacilo η simetrije. Umjesto toga možemo fiksirati κ na $\partial\Omega$. Stoga konačno dobivamo:

$$h_L = \frac{\phi_+}{8\pi}\,, \tag{5.36}$$

gdje je ϕ_+ vrijednost od ϕ u bifurkacijskoj točki između budućeg i prošlog horizonta.

Sada moramo provesti proces kvantizacije. On se sastoji u tome da sva klasična polja zamijenimo operatorima te da Poissonove zagrade zamjenimo komutatorima (do na multiplikativni faktor i). Mi ovdje nećemo eksplicitno pisati sve komutatore, nego samo komutatore modova L_m i M_m jer će nam samo oni trebati. Stoga imamo:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} \tag{5.37a}$$

$$[M_m, M_n] = 0 \tag{5.37b}$$

$$[L_m, M_n] = M_{m+n} + c_{LM}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\,. \tag{5.37c}$$

Uvrstimo ovo u Cardyjevu formulu prilagođenu za naše potrebe:

$$S = 2\pi h_L\sqrt{\frac{c}{2h_M}} = \frac{1}{4}\phi_+\,. \tag{5.38}$$

Budući da dilatonsko polje predstavlja površinu horizonta, ovaj rezultat se slaže s Bekenstein-Hawkingovom formulom.

6 Zaključak

U ovom radu pokazali smo jednu metodu računanja entropije stacionarne crne rupe. Račun se temeljio na simetrijama prostor-vremena na horizontu crne rupe. Dobiveno je da te transformacije simetrije zadovoljavaju BMS_3 algebru, a generatori tih simetrija Virasoro algebru koja nam je bila potrebna da bi mogli izračunati entropiju pomoću Cardyjeve formule.

Postoji još načina na koje se može izvesti entropija crne rupe pomoću simetrija i konformalne teorije polja [7]. Prednost ove metode je što koristi manji broj pretpostavki od ostalih sličnih metoda. Jedine pretpostavke koje su nam potrebne je oblik akcije i rubni uvjeti na horizontu.

Kakvu ulogu ovdje ima BMS_3 simetrija. To nije niti baždarna simetrija niti standardna asimptotska simetrija. Ona je nastala kao rezultat samih svojstava crne rupe. Drugim riječima, svaka stacionarna crna rupa koja se može opisati ovim modelom nužno posjeduje simetriju na horizontu koja je jednaka asimptotskoj simetriji ravnog prostora.

Literatura

[1] R. M. Wald, General relativity, The University of Chicago (1984).

[2] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, The Large scale structure of spacetime, (1973).

[3] V. Iyer, R.M. Wald: Some properties of the Noether charge, Phys. Rev. D 50 (1994) 846–864

[4] A. Corichi, I. Rubalcava-García, T. Vukašinac, Hamiltonian and Noether Charges in First Order Gravity, Gen.Rel.Grav. 46 (2014) 1813

[5] J. Lee, R. M. Wald, Local symmetries and constraints, J. Math. Phys. 31, 725 (1990)

[6] S. Carlip, Black Hole Entropy from BMS Symmetry at the Horizon, arXiv:1702.04439 [gr-qc]

[7] S. Carlip, Black Hole Entropy from Conformal Field Theory in any Dimension, Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 2828, arXiv:hep-th/9812013.

[8] J. L. Cardy, Nuc. Phys. B 270 (1986) 186-204

[9] Patrick J. McCarthy, J. Math. Phys. 13, 1837 (1972).

[10] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, Conformal Field Theory, Springer (1997).

[11] J. D. Brown, Lower Dimensional Gravity, World Scientific (1988).

[12] L. Donnay, G. Giribet, H. A. González, and M. Pino, Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 091101, arXiv:1511.08687.

[13] S. Carlip, Phys. Rev. Lett. 88 (2002) 241301, arXiv:gr-qc/0203001.

[14] D. Grumiller, W. Kummer, D. V. Vassilevich, Dilaton Gravity in Two Dimensions, Phys.Rept. 369 (2002) 327-430

[15] S. B. Giddings, A. Strominger, Quantum theories of dialton gravity, Phys.Rev. D47 (1993) 2454-2460